Kakeya 猜想及其相关问题

黄克元

摘要

本文中, 我们简要概述了现有文献中用于解决 Kakeya 问题的几类技术及其进展, 包括组合几何方法、加性组合方法、尺度归纳方法以及代数几何方法. 然后我们讨论了 Kakeya 问题的几种不同的表述方式以及它们之间的关系, 以及 Kakeya 问题的一些基本元素以及相关的基本论证技巧. 随后我们更深入探讨地了组合几何方法在 Kakeya 问题上的应用, 并介绍了 Córdoba、Bourgain 和 Wolff 的经典结果及其证明; 我们还介绍了 Dvir 完全解决有限域上 Kakeya 问题的多项式方法. 最后我们简要介绍了 Fourier 分析和 Kakeya 问题的联系.

1 Kakeya 问题简介

1917 年, 日本数学家 Soichi Kakeya 提出了 **Kakeya 转针问题**: 把平面上的单位长度的线段旋转一周, 至少需要扫过多少面积? 恰恰在同一年, 俄罗斯数学家 Besicovitch 在研究一个和 Riemann 积分相关的问题时也考虑了相同的问题. 他引入了如下的概念:

定义. 称 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为 **Kakeya 集** (又称 **Besicovitch 集**), 若

$$\forall e \in S^{n-1}\ \exists x \in \mathbb{R}^n:\ x + te \in E\ \forall t \in [-1/2, 1/2].$$

也就是说, E 中包含了平行于任意方向的单位线段.

在 1927 年, Besicovitch 给出了 Kakeya 转针问题的回答, 他证明了:

定理 1.1 (Besicovitch[3])**.** $\mathbb{R}^n$ 中存在 Lebesgue 测度为零的 Kakeya 集.

关于 "Kakeya 集可以有多小" 这个问题, 人们进一步提出了 **Kakeya 集猜想**:

猜想 1.2 (Kakeya 集猜想)**.** $\mathbb{R}^n$ 中 Kakeya 集的 Hausdorff 维数和 Minkowski 维数均为 n.

目前 Kakeya 集猜想仅在 $n = 2$ 时得到解决 [10], 其余维数的情形仍然公开.

在 Kakeya 问题的实际研究中, 人们大多尝试证明的是一个比原猜想略微强一些的定量版本的 Kakeya 猜想, 它是用 **Kakeya 极大算子**来描述的. 这个概念自然地出现在调和分析的许多问题中, 下面给出详细的定义.

定义. 设 $a \in \mathbb{R}^n$, $\omega \in S^{n-1}$, $\delta > 0$, 定义 $1 \times \delta$ **圆柱体** (tube) $T^\delta_\omega(a)$ 为

$$T^\delta_\omega(a) := \left\{x \in \mathbb{R}^n:\ |(x-a)\cdot\omega| \leqslant 1/2,\ \left|(x-a)^\perp\right| \leqslant \delta\right\},$$

其中 $x^\perp := x - (x\cdot\omega)\omega$. 我们称 a 为圆柱体的**中心**, ω 为圆柱体的**轴向**.

定义 (Kakeya 极大算子)**.** 对 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 和 $\delta > 0$, 定义 $f^*_\delta : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ 为

$$f^*_\delta(\omega) := \sup_{a\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{|T^\delta_\omega(a)|} \int_{T^\delta_\omega(a)} |f| \,.$$

猜想 1.3 (Kakeya 极大算子猜想)**.** 若 $1 \leqslant p \leqslant n$, $0 < \delta \ll 1$, 则

$$\|f^*_\delta\|_{L^p(S^{n-1})} \lesssim_\varepsilon \delta^{-n/p+1-\varepsilon} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{1.1}$$

记号. 在本文中, 我们默认允许所有不等式中隐含的常数依赖于欧式空间的维数 n 以及 L^p 空间的指数; 也就是说, 我们不显式地写出常数对 n 和 p 的依赖. 例如, 式 (1.1) 中的常数有可能还依赖于 p 和 n.

事实上 Kakeya 极大算子猜想比 Kakeya 集猜想要更强; 式 (1.1) 蕴含着 $\mathbb{R}^n$ 中任一 Kakeya 集的 Hausdorff 维数至少是 p. (证明见命题 3.1)

当 $p = 1$ 时, (1.1) 是显然的. 故由 Marcinkeiwicz 插值定理可知, 如果某个 p_0 使得 (1.1) 成立, 则当 $1 \leqslant p \leqslant p_0$ 时 (1.1) 都成立. 因而我们的目标是对尽可能大的 p 证明 (1.1).

Kakeya 极大算子猜想至今仅有 $n = 2$ 时的情形已经解决 [10]. 当 $n \geqslant 3$ 时迄今为止的最佳结果如下表所示:

$n = 3$	$p = 2.5 + \varepsilon_0$ $(\varepsilon_0 > 0)$	Katz-Zahl, 2019[18]
$n = 4$	$p = 3 + (\sqrt{17665} - 97)/600 \approx 3.059$	Katz-Zahl, 2020[19]
$n = 5$	$p = 3.6$	Zahl, 2021[26]
$n = 6$	$p = 4$	Wolff, 1995[25]
$n \geqslant 7$	$p = (2 - \sqrt{2})n + \varepsilon_n$ $(\varepsilon_n > 0)$	Zahl, 2021[26]

Kakeya 极大算子猜想还有一个对偶的等价版本 (猜想 1.4), 它的表述中隐去了 Kakeya 极大算子, 更能够反映 Kakeya 极大算子猜想的几何本质. 我们将在 3.2 小节中证明对偶版本和原版本的等价性.

猜想 1.4 (Kakeya 极大算子猜想, 对偶版本)**.** 设 $1 \leqslant p \leqslant n$, $0 < \delta \ll 1$. 若 $\mathbb{T} = \{T\}$ 是一族轴向 δ-分离的 $1 \times \delta$ 圆柱体, 则

$$\left\| \sum_{T\in\mathbb{T}} \chi_T \right\|_{p'} \lesssim_\varepsilon \delta^{-n/p+1-\varepsilon} \left(\sum_{T\in\mathbb{T}} |T| \right)^{1/p'} \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{1.2}$$

其中 $1/p + 1/p' = 1$.

在式 (1.2) 中, 若 $\mathbb{T}$ 中的圆柱体的重合程度越高, 则左边就越大; 而右边是只和 $\mathbb{T}$ 中圆柱体的个数有关, 和圆柱体具体摆放的方式无关. 这说明 Kakeya 极大算子猜想本质上是一个组合几何的问题: 它研究的是轴向 δ-分离的 $1 \times \delta$ 圆柱体的 “重合程度” 最多有多大. 而 $1 \times \delta$ 圆柱体可以看成是单位线段的 “加粗”, 由此当 δ 很小时可以自然地把 Kakeya 极大算子猜想和 Kakeya 集联系起来; 我们将在 3.1 小节中说明 Kakeya 极大算子猜想蕴含 Kakeya 集猜想.

尽管 Kakeya 猜想尚未被完全解决, 研究者已经发现它和数学中很多其他重要问题有紧密的联系. Kakeya 猜想本身是调和分析中极为重要的问题, 它的解决将对限制性猜想、Bochner-Riesz 猜想、波动方程局部光滑性猜想等调和分析中的核心问题有重大推动作用 [22, 4]. Kakeya 问题还可以和很多其他领域和问题产生联系, 例如一些加性组合的问题 [20]、解析数论中的 Montgomery 猜想 [5]、计算机科学中随机数生成的问题 [12] 等.

2 现有研究方法概述

Kakeya 猜想 (以及 Kakeya 极大算子猜想) 从形式上来看虽然是几何测度论和调和分析中的问题, 但在其发展历程中却用到来自很多其他数学分支的工具, 这些工具也起到了很好的效果. 接下来我们简要介绍人们目前尝试解决 Kakeya 问题的主要方向.

2.1 组合几何的方法

从直观上来说, Kakeya 问题研究的是不同方向的单位线段可以有多大程度的重合. 重合几何 (incidence geometry) 是组合几何的一个分支, 其研究对象正是各种几何元素 (点、线、面) 的重合现象. 因此, 人们开始尝试在 Kakeya 问题中使用组合几何的技巧.[24] 为此需要引入 Kakeya 问题的一个离散版本的简化模型.

定义. 设 $\mathbb{F}$ 是 q 元有限域. 称 $E \subset \mathbb{F}^n$ 是 $\mathbb{F}^n$ 中的 **Kakeya 集**, 若 E 在每个 "方向" 上都包含一条 "直线", 即

$$\forall e \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\} \;\; \exists a \in \mathbb{F}^n : \;\; a + te \in E \;\; \forall t \in \mathbb{F}.$$

猜想 2.1 (有限域上的 Kakeya 猜想)**.** $\mathbb{F}^n$ 中任一 Kakeya 集都满足 $\#E \gtrsim_n q^n$.

下面简单阐述以下在 Kakeya 问题上应用组合几何技巧的想法. 利用 "两直线至多交于一点" 这一最基本的观察, 可以证明 $\#E \gtrsim_n q^{(n+1)/2}$. 而欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的圆柱体可以看成 $\mathbb{F}^n$ 中 "直线" 的 "加厚"; 两个圆柱体之间重合部分的测度可以被它们轴向的差距来控制, 即

$$\left|T_\omega^\delta(a) \cap T_{\omega'}^\delta(b)\right| \lesssim \frac{\delta^n}{|\omega - \omega'| + \delta}. \tag{2.1}$$

式 (2.1) 可以在连续情形代替 "两直线至多交于一点", 如此就可以把组合几何的论证推广到欧氏空间中. 按这个想法, Bourgain 在 1991 年证明了 Kakeya 极大算子猜想在 $p = (n+1)/2$ 时的情形 [4].

利用更复杂的组合几何的技巧可以把有限域上 Kakeya 问题的结果改进到 $\#E \gtrsim_n q^{(n+2)/2}$; Wolff 在 1995 年把这个想法推广到连续情形, 提出了 "毛刷" 论证 (hairbrush argument), 进而证明了 Kakeya 极大算子猜想在 $p = (n+2)/2$ 时的情形.[25] 在 2021 年, Katz 和 Zahl 把 Wolff 的想法推广为 "平面刷" 论证 (planebrush argument), 进而证明了 Kakeya 极大算子猜想在 $n = 4$, $p \approx 3.059$ 时的情形 [19], 这也是迄今为止四维情形的最优结果.

2.2 加性组合的方法

最早在 Kakeya 问题上应用的加性组合方法是 Bourgain 提出的 "三切片" 论证 (three-slices argument)[6]. 下面我们简述其想法.

设 $\mathbb{F}$ 为 q 元有限域, 记 $A = \{0\} \times \mathbb{F}^{n-1}$, $B = \{1\} \times \mathbb{F}^{n-1}$, $C = \{1/2\} \times \mathbb{F}^{n-1}$ (为简单起见不妨设 q 是奇数使得 $1/2$ 有定义). 从直观上来说, 点对 $(a, b) \in A \times B$ 确定的 "直线" 的方向和 $a - b$ 的值是一一对应的. 而 $(a + b) \in 2C$, 并且 C 是一个比较小的集合 ($\#C \sim q^{n-1}$), 这就导致 $a - b$ 可取的值不会太多, 因为

$$a + b = a' + b' \implies a - b' = a' - b.$$

由此就可以对 $\mathbb{F}^n$ 中 Kakeya 集的元素个数进行估计. 更详细的讨论可以查阅 Katz 和 Tao 的综述 [15].

利用“三切片”论证配合加性组合中的一些结论, Bourgain 证明了 $\mathbb{R}^n$ 中 Kakeya 集的 Minkowski 维数 $d \geqslant \frac{n-1}{2-1/13}+1$[6], 略微改进了他此前的 $d \geqslant \frac{n+1}{2} = \frac{n-1}{2}+1$. 此后加性组合的方法仍然有所进展, Katz 和 Tao 证明了 Minkowski 维数 $d \geqslant \frac{n-1}{\alpha}+1$, 其中 $\alpha \approx 1.675$ 为多项式 $\alpha^3-4\alpha+2$ 的最大根 [17]; Bourgain、Katz 和 Tao 证明了 $\mathbb{R}^3$ 中 Minkowki 维数 $d \geqslant 5/2+\varepsilon_0$ $(\varepsilon_0>0)$,[7] 这略微改进了 Wolff 的 $d \geqslant (n+2)/2$.

2.3 尺度归纳和热流

尺度归纳 (induction on scale) 的基本想法是: 把尺度较小的的圆柱体 (比如说 $1\times\delta$ 圆柱体) 填充进尺度较大的圆柱体 (比如说 $1\times\sqrt{\delta}$ 圆柱体) 中, 用这种方式尝试从 Kakeya 极大算子 f_δ^* 的估计推出 $f_{\sqrt{\delta}}^*$ 的估计; 然后将这个步骤迭代任意多次, 可以把尺度为 δ 的情形逐步化归到尺度为 1. 利用尺度归纳的方法以及组合的技巧, Katz、Laba 和 Tao 证明了 $\mathbb{R}^3$ 中 Kakeya 集的 Minkowski 维数 $d \geqslant 2.5+10^{-10}$,[16] 略微改进了 Wolff 在 $\mathbb{R}^n$ 中 $d \geqslant (n+2)/2$ 的估计. 这个方法在维数不太大的情形也带来了微小的进展.[21]

尺度归纳方法是让圆柱体的尺度按离散的方式变化, 一个改进这个方法的方向就是引入一个连续变换的尺度参数. Bennett、Carbery 和 Tao 提出了一个连续版本的尺度归纳法, 他们考虑了一些集中分布在 $1\times\sqrt{t}$ 圆柱上的 Gaussian 函数, 然后计算这些 Gaussian 函数的某些组合的 L^p 表达式, 最终发现当 t 变化的时候这些 Gaussian 函数的变化方式类似于某种形式的热流. 而热流具有某种单调性, 他们利用这种单调性证明了一个多线性版本的 Kakeya 猜想 [2]; 随后 Guth 证明了 Bennett–Carbery–Tao 多线性估计的端点情形 [14].

定理 2.2 (Bennett–Carbery–Tao)**.** 若 $\mathbb{T}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$ 是轴向 δ-分离的 $1\times\delta$ 圆柱体的族, $k/(k-1) \leqslant q \leqslant \infty$, 则存在与 δ 和 $\mathbb{T}_j$ 无关的常数 $C>0$, 使得

$$\left\| \prod_{j=1}^{k} \left(\sum_{T_j \in \mathbb{T}_j} \chi_{T_j} \right) \right\|_{L^{q/k}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \prod_{j=1}^{k} \left(\delta^{n/q} \# \mathbb{T}_j \right). \tag{2.2}$$

利用多线性估计进行尺度归纳可以得出 Kakeya 极大算子的估计, 但这种方法得出的估计并不会比 Wolff 的 $d \geqslant (n+2)/2$ 更好. 此外, 多线性估计 (2.2) 无法再被改进, 这基本就宣告了利用多线性估计进行尺度归纳的方法无法解决 Kakeya 猜想.

2.4 代数几何和代数拓扑的方法

代数几何和代数拓扑的方法在 Kakeya 问题上体现出了巨大的威力. 在 2008 年 Dvir 利用代数几何的方法完美解决了有限域上的 Kakeya 猜想 [11], 但他的方法依赖于有限域上多项式的性质, 难以应用到欧氏空间中. Guth 尝试发展 Dvir 的多项式方法, 配合代数拓扑中的“三明治定理”证明了 Bennett–Carbery–Tao 多线性估计的端点情形.[14] 在 2013 年, Carbery 和 Valdimarsson 利用代数拓扑中的 Borsuk–Ulam 定理给出了另一个证明.[8]

不同于 Dvir 用到的有限域上的代数几何, Zahl 在 2021 年用实代数几何中的工具证明了另外一个版本的多线性 Kakeya 极大算子猜想, 由此配合尺度归纳 (induction on scale) 的技巧证明了 Kakeya 极大算子猜想在 $p=(2-\sqrt{2})n+c_n$ $(c_n>0)$ 时成立. 这也是迄今为止 Kakeya 极大算子猜想在大多数维数下的最佳结果.[26] 由此我们可以看出代数几何的方法所具有的巨大潜力.

3 Kakeya 问题的若干表述方式

3.1 Kakeya 极大算子和 Kakeya 集维数的关系

下面我们证明, Kakeya 极大算子的估计可以导出 Kakeya 集维数的估计.

命题 3.1. 若存在 $p,q\in(1,\infty)$ 和 $\alpha\geqslant 0$ 使得

$$\|f_\delta^*\|_q \lesssim_\varepsilon \delta^{-\alpha-\varepsilon}\|f\|_p, \quad \forall\varepsilon>0, \tag{3.1}$$

那么 $\mathbb{R}^n$ 中 Kakeya 集的 Hausdorff 维数至少是 $n-p\alpha$.

证明. 设 $K\subset\mathbb{R}^n$ 是 Kakeya 集, 那么我们只需证明对任意 $d<n-p\alpha$ 都有

$$K\subset\bigcup_{j=1}^\infty B(x_j,r_j),\ r_j\leqslant 1 \implies \sum_j r_j^d\gtrsim_d 1.$$

取定 Kakeya 集 K 的开球覆盖 $\{B(x_j,r_j)\}_{j=1}^\infty$ s.t. $r_j\leqslant 1$. 下面我们估计 $\sum_j r_j^d$ 的下界. 为此, 我们把 $\{r_j\}$ 进行二进制分割, 然后分别求和. 令

$$J_l:=\left\{j:2^{-l}<r_j\leqslant 2^{-(l-1)}\right\},$$

于是

$$\sum_j r_j^d=\sum_l\sum_{j\in J_l}r_j^d\sim\sum_l(\#J_l)2^{-ld}.$$

对任意 $\omega\subset S^{n-1}$, 存在平行于 ω 的单位线段 $\gamma_\omega\subset K$. 对 $l\in\mathbb{N}$, 令

$$E_l:=\bigcup_{j\in J_l}B(x_j,3r_j),\quad K_l:=K\cap E_l,$$
$$S_l:=\left\{\omega\in S^{n-1}:|\gamma_\omega\cap K_l|_{\mathbb{R}}\geqslant\frac{1}{10l^2}\right\},$$

其中 $|\cdot|_{\mathbb{R}}$ 表示一维的 Lebesgue 测度. 注意到

$$1=|\gamma_\omega|_{\mathbb{R}}\leqslant\sum_l|\gamma_\omega\cap K_l|_{\mathbb{R}},\quad\sum_l\frac{1}{10l^2}<1,$$

故由抽屉原理必然有 $S^{n-1}=\bigcup_l S_l$.

记 $T^\delta(\gamma_\omega)$ 为以 γ_ω 为轴、以 δ 为半径的圆柱体. 那么对任意 $\omega\in S_l$ 有

$$\left|T^{2^{-l}}(\gamma_\omega)\cap E_l\right|\gtrsim\frac{1}{l^2}\left|T^{2^{-l}}(\gamma_\omega)\right|.$$

由此可知

$$\|(\chi_{E_l})_{2^{-l}}^*\|_q^q\geqslant\int_{S_l}|(\chi_{E_l})_{2^{-l}}^*|^q\,d\omega\gtrsim\frac{1}{l^{2q}}|S_l|_{S^{n-1}}.$$

另一方面, 由 (3.1) 可知

$$\|(\chi_{E_l})_{2^{-l}}^*\|_q\lesssim_\varepsilon 2^{l\alpha+l\varepsilon}\|\chi_{E_l}\|_p\lesssim 2^{l\alpha+l\varepsilon}\left(\sum_{j\in J_l}r_j^n\right)^{1/p}\sim 2^{l\alpha+l\varepsilon}\left(\#J_l\cdot 2^{-nl}\right)^{1/p}.$$

由 $S^{n-1}=\bigcup_l S_l$ 可知, 存在 l 使得 $|S_l|\gtrsim 1$. 对此 l 有

$$\frac{1}{l^2}\lesssim \|(\chi_{E_l})^*_{2^{-l}}\|_q \lesssim 2^{l\alpha+l\varepsilon}\left(\#J_l\cdot 2^{-nl}\right)^{1/p}.$$

由此,

$$\sum_j r_j^{n-p\alpha-2p\varepsilon}\gtrsim (\#J_l)2^{-l(n-p\alpha-2p\varepsilon)}\gtrsim 2^{lp\varepsilon}l^{-2p}\gtrsim_\varepsilon 1.$$

这就完成了证明. □

注. 从命题 3.1 可以看出, 如果希望从 Kakeya 极大算子的 (p,q) 型估计导出 Kakeya 集维数的下界估计, 事实上 q 是无关紧要的, 关键是使得 p 尽量大, 并且使得常数尽量更优.

3.2 Kakeya 极大算子猜想的对偶版本

首先介绍一个重要的引理, 它使得我们可以把 Kakeya 极大函数的 L^p 范数 "离散化".

引理 3.2. 设 $\Omega\subset S^{n-1}$ 是极大的 δ-分离集[①], $1\leqslant p<\infty$, 则

$$\|f^*_\delta\|_p\sim_p\left(\sum_{\omega\in\Omega}\delta^{n-1}f^*_\delta(\omega)^p\right)^{1/p}$$

证明. 首先注意到: 若 $\omega,\omega'\in S^{n-1}$ 满足 $|\omega-\omega'|\lesssim\delta$, 则 $f^*_\delta(\omega)\sim f^*_\delta(\omega')$; 这是因为任一平行于 ω 的 $1\times\delta$ 柱体可以被 $\lesssim 1$ 个平行于 ω' 的 $1\times\delta$ 柱体覆盖.

由 Ω 的极大性可知 $S^{n-1}\subset\bigcup_{\omega\in\Omega}B(\omega,\delta)$, 故

$$\|f^*_\delta\|_p^p\leqslant\sum_{\omega\in\Omega}\int_{B(\omega,\delta)}f^*_\delta(\omega')^p\,d\sigma(\omega')\sim\sum_{\omega\in\Omega}\delta^{n-1}f^*_\delta(\omega)^p.$$

再由 $\{B(\omega,\delta/2)\}_{\omega\in\Omega}$ 两两无交, 可知

$$\|f^*_\delta\|_p^p\geqslant\sum_{\omega\in\Omega}\int_{B(\omega,\delta/2)}f^*_\delta(\omega')^p\,d\sigma(\omega')\sim\sum_{\omega\in\Omega}\delta^{n-1}f^*_\delta(\omega)^p.$$

这就完成了证明. □

若 $\Omega\subset S^{n-1}$ 是极大的 δ-分离集, 则 $\#\Omega\sim\delta^{1-n}$. 由引理 3.2 以及幂平均不等式可知,

$$\|f^*_\delta\|_p\gtrsim\sum_{\omega\in\Omega}\delta^{n-1}f^*_\delta(\omega)\gtrsim\sum_{\omega\in\Omega}\int_{T_\omega}|f|,$$

其中 T_ω 是任意平行于 ω 的 $1\times\delta$ 圆柱体. 令 f 取遍 L^p, 就得到

$$\left\|\sum_{\omega\in\Omega}\chi_{T_\omega}\right\|_{p'}\lesssim\|K_\delta\|_{p\to p}, \tag{3.2}$$

其中 $K_\delta: f\mapsto f^*_\delta$ 为 Kakeya 极大算子, $1/p'+1/p=1$. 由此自然导出如下的猜想.

[①] 度量空间中的某个集合称为是 δ-分离的, 若其中任意两点的距离都 $\geqslant\delta$.

猜想 3.3 (Kakeya 极大算子猜想, 对偶版本)**.** 设 $1 \leqslant p \leqslant n$, $0 < \delta \ll 1$. 若 $\mathbb{T} = \{T\}$ 是极大的轴向 δ-分离 $1 \times \delta$ 圆柱体的族, 则

$$\left\| \sum_{T \in \mathbb{T}} \chi_T \right\|_{p'} \lesssim_\varepsilon \delta^{-n/p+1-\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$$

其中 $1/p + 1/p' = 1$.

由式 (3.2) 可知, Kakeya 极大算子猜想原本的版本 (猜想 1.3) 蕴含其对偶版本. 下面我们证明, 对偶版本事实上和原来的版本是等价的.

记号. 对固定的 $0 < \delta \ll 1$ (即 Kakeya 问题中圆柱体的半径), 我们用 $A \lessapprox B$ 或 $B \gtrapprox A$ 表示 $A \lesssim_\varepsilon \delta^{-\varepsilon} B \ \forall \varepsilon > 0$; 用 $A \approx B$ 表示 $A \lessapprox B$ 且 $A \gtrapprox B$.

引进这个记号的原因在于, 证明 Kakeya 极大函数猜想的时我们总可以接受 $\delta^{-\varepsilon}$ 的损失, 也就是说 $A \lessapprox B$ 和 $A \lesssim B$ 基本上是一样的.

命题 3.4 (Kakeya 极大算子的对偶估计)**.** 设 $1 < p \leqslant n$, $0 < \delta \ll 1$. 那么对 $A \gtrapprox 1$, 下列说法等价:

(a) $\|f_\delta^*\|_p \lessapprox A \|f\|_p$.

(b) 若 $\Omega \subset S^{n-1}$ 为 δ-分离集, 则对任意以 $\omega \in \Omega$ 为轴向的 $1 \times \delta$ 圆柱体 T_ω, 有

$$\left\| \sum_{\omega \in \Omega} \chi_{T_\omega} \right\|_{p'} \lessapprox A.$$

(c) 若 $\Omega \subset S^{n-1}$ 为 δ-分离集, 则对任意以 $\omega \in \Omega$ 为轴向的 $1 \times \delta$ 圆柱体 T_ω, 有

$$\left\| \sum_{\omega \in \Omega} \chi_{T_\omega} \right\|_{p'} \lessapprox A \left(\sum_{\omega \in \Omega} |T_\omega| \right)^{1/p'}.$$

证明. 由前面的讨论可知 (a) 蕴含 (b). 下面我们分别证明 (c) 蕴含 (a) 以及 (b) 蕴含 (c).

(I) 首先假设 (c) 成立, 下面证明 (a) 也成立.

由引理 3.2 以及 ℓ^p 和 $\ell^{p'}$ 的对偶性可知:

$$\|f_\delta^*\|_p \sim \left(\sum_{\omega \in \Omega} \delta^{n-1} f_\delta^*(\omega)^p \right)^{1/p} = \sum_{\omega \in \Omega} \delta^{n-1} y_\omega f_\delta^*(\omega),$$

其中 $\{y_\omega\}$ 是某些实数, 满足 $\sum_{\omega \in \Omega} |y_\omega|^{p'} = \delta^{1-n}$. 于是存在以 ω 为轴向的 $1 \times \delta$ 柱体 T_ω 使得

$$\|f_\delta^*\|_p \sim \sum_{\omega \in \Omega} \delta^{n-1} y_\omega f_\delta^*(\omega) \lesssim \sum_{\omega \in \Omega} \int_{T_\omega} y_\omega |f| \leqslant \|f\|_p \left\| \sum_{\omega \in \Omega} y_\omega \chi_{T_\omega} \right\|_{p'}.$$

下面只需再证明 $\left\| \sum_{\omega \in \Omega} y_\omega \chi_{T_\omega} \right\|_{p'} \lessapprox A$.

为了把 $\left\| \sum_{\omega \in \Omega} y_\omega \chi_{T_\omega} \right\|_{p'}$ 中的 $\{y_\omega\}$ “分离” 出来, 我们采用标准的二进制分割的技巧, 即把 $\{y_\omega\}$ 按二的幂次划分为不同的阶, 然后对各阶分别求和. 首先注意到

$$\left\| \sum_{\omega \in \Omega:\, |y_\omega| \leqslant \delta^{n-1}} y_\omega \chi_{T_\omega} \right\|_{p'} \leqslant \sum_{\omega \in \Omega} \delta^{n-1} |T_\omega|^{1/p'} \lesssim \delta^{(n-1)(1-1/p)} \lesssim 1 \lessapprox A,$$

也就是说我们只需再证明

$$\left\|\sum_{\omega\in\Omega:\,|y_\omega|>\delta^{n-1}} y_\omega \chi_{T_\omega}\right\|_{p'} \lessapprox A.$$

为此, 我们把 $\{\omega : |y_\omega| > \delta^{n-1}\}$ 划分为 $O(\log 1/\delta)$ 个集合

$$\Omega_k := \left\{\omega\in\Omega : 2^{k-1} \leqslant |y_\omega| < 2^k\right\},$$

那么,

$$\delta^{1-n} = \sum_{\omega\in\Omega} y_\omega^{p'} \gtrsim \sum_{k\geqslant 1} 2^{kp'} \#\Omega_k.$$

利用 (c) 以及 Hölder 不等式可知

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{\omega\in\Omega:\,|y_\omega|>\delta^{n-1}} y_\omega \chi_{T_\omega}\right\|_{p'} &\lesssim \sum_k 2^k \left\|\sum_{\omega\in\Omega_k} \chi_{T_\omega}\right\|_{p'} \\
&\lessapprox A\sum_k 2^k \left(\#\Omega_k \delta^{n-1}\right)^{1/p'} \\
&\leqslant A\delta^{(n-1)/p'} \left(\sum_k 2^{kp'}\#\Omega_k\right)^{1/p'} \left(\sum_k 1\right)^{1/p} \\
&\lesssim A\delta^{(n-1)/p'}\delta^{(1-n)/p'}(\log 1/\delta)^{1/p} \\
&\lessapprox A.
\end{aligned}$$

这样就证得 (a) 成立.

(II) 下面假设 (b) 成立, 下面证明 (c) 也成立.

注意到 Ω 为极大 δ-分离集时, (b) 和 (c) 是等价的. 这个观察引出了接下来证明的思路. 令

$$B(N) := \sup_{\Omega, T_\omega:\, N/2<\#\Omega\leqslant N} \left\|\sum_{\omega\in\Omega} \chi_{T_\omega}\right\|_{p'},$$

我们只需证明 $B(N) \lessapprox A(N\delta^{n-1})^{1/p'}$. 为此, 我们希望选取正交变换 U 使得 $\Omega\cup U(\Omega)$ 仍然是 δ-分离的, 由此就可以建立 $B(N)$ 和 $B(2N)$ 之间的递推关系. 然后再取 k 充分大使得 $2^kN \sim \delta^{1-n}$, 利用 (b) 得出 $B(2^kN)$ 的估计 (这个估计非常精确), 然后再用递推关系就可以反推出 $B(N)$ 的估计.

但是一般而言, 选取上述的 U 并不容易, 特别是当 $\#\Omega$ 比较大的时候. 令 U 从正交群 $O(n)$ 中随机选取 (给正交群配上 Haar 测度使其成为概率空间), 则几乎必然 $U(\Omega)\cap\Omega = \varnothing$. 尽管 $U(\Omega)\cup\Omega$ 并不一定仍然是 δ-分离的, 我们希望从中去掉一小部分元素之后使其 δ-分离. 考察非 δ-分离的点的对数

$$A(\Omega, U(\Omega)) := \#\left\{(\omega,\omega')\in\Omega\times U(\Omega) : |\omega-\omega'|\leqslant\delta\right\},$$

我们希望选取 U 使得 $A(\Omega, U(\Omega))$ 比较小. 注意到

$$A(\Omega, U(\Omega)) = \sum_{\omega,\omega'\in\Omega} \chi_{B(0,\delta)}(\omega - U(\omega')),$$

于是 $A(\Omega, U(\Omega))$ 的期望

$$\int_{O(n)} A(\Omega, U(\Omega))\,dU = \sum_{\omega,\omega'\in\Omega} f(\omega,\omega'), \quad f(\omega,\omega') := \int_{O(n)} \chi_{B(0,\delta)}(\omega, U(\omega'))\,dU.$$

由 Haar 测度的对称性可知 $f(\omega,\omega')$ 和 ω' 无关, 从而

$$f(\omega,\omega')=\frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{O(n)}\int_{S^{n-1}}\chi_{B(0,\delta)}(\omega,U(\omega'))\,d\omega'\,dU\sim\int_{O(n)}\delta^{n-1}dU=\delta^{n-1},$$

于是

$$\int_{O(n)}A(\Omega,U(\Omega))\,dU\sim\delta^{n-1}\#(\Omega\times\Omega)\leqslant\delta^{n-1}N^2.$$

由抽屉原理就可以选取 $U\in O(n)$ 使得 $A(\Omega,U(\Omega))\lesssim\delta^{n-1}N^2$.

对任意 $\varepsilon>0$, 可以选取 δ-分离集 $\Omega\subset S^{n-1}$ 以及 $1\times\delta$ 圆柱体 $\{T_\omega\}$ 使得

$$\Big\|\sum_{\omega\in\Omega}\chi_{T_\omega}\Big\|_{p'}\geqslant B(N)-\varepsilon.$$

按上述方式, 选取 $U\in O(n)$ 使得 $A(\Omega,U(\Omega))\lesssim\delta^{n-1}N^2$. 首先注意到

$$\Big\|\sum_{\omega\in\Omega\cup U(\Omega)}\chi_{T_\omega}\Big\|_{p'}\geqslant\left(\Big\|\sum_{\omega\in\Omega}\chi_{T_\omega}\Big\|_{p'}^{p'}+\Big\|\sum_{\omega\in U(\Omega)}\chi_{T_\omega}\Big\|_{p'}^{p'}\right)^{1/p'}\geqslant2^{1/p'}(B(N)-\varepsilon).$$

另一方面, 由 $A(\Omega,U(\Omega))\lesssim\delta^{n-1}N^2$ 可知, 可以在 $\Omega\cup U(\Omega)$ 挖去一个元素个数 $\lesssim\delta^{n-1}N^2$ 的集合 S 之后就是 δ-分离集; 并且我们可以把 S 划分为 $\leqslant c$ 个元素个数为 $\leqslant\delta^{n-1}N^2$ 的 δ 分离集 (c 只和 n 有关). 于是

$$\Big\|\sum_{\omega\in\Omega\cup U(\Omega)}\chi_{T_\omega}\Big\|_{p'}\leqslant\Big\|\sum_{\omega\in(\Omega\cup U(\Omega))\setminus S}\chi_{T_\omega}\Big\|_{p'}+\Big\|\sum_{\omega\in S}\chi_{T_\omega}\Big\|_{p'}\leqslant B(2N)+cB(\delta^{n-1}N^2),$$

令 $\varepsilon\to0$, 就得到递推关系

$$B(N)\leqslant2^{-1/p'}B(2N)+cB(\delta^{n-1}N^2),\tag{3.3}$$

其中 c 只和 p 与 n 有关.

取 k 使得 $2^kN\sim\delta^{1-n}$. 要证 $B(N)\lessapprox A(N\delta^{n-1})^{1/p'}$, 只需证 $b_k:=2^{k/p'}B(2^{-k}\delta^{1-n})$ 满足 $b_k\lessapprox A$. 由 (3.3) 可得到 $\{b_k\}$ 满足的递推式

$$b_k\leqslant b_{k-1}+c2^{-k/p'}b_{2k}.$$

注意到当 N 充分大 (大到 S^{n-1} 中不存在个数 $\sim N$ 的 δ-分离集) 时 $B(N)=0$; 故存在 $C>0$ 使得当 $k>C\log(1/\delta)$ 时 $b_k=0$. 然后考虑

$$a_k=b_k(1+M2^{-k/p'}),$$

则当 $M>0$ 充分大时可以验证:

$$a_k<a_{k-1}+C2^{-k/p'}\left((a_{2k}-a_k)+(a_{k-1}-a_k)\right).\tag{3.4}$$

设 a_{k_0} 为有限个非零的 $\{a_k\}$ 中的最大值, 若 $k_0\geqslant1$ 则在 (3.4) 中取 $k=k_0$ 即可导出矛盾; 故只能 $k_0=0$. 这就说明了 $a_k\leqslant a_0=b_0\lessapprox A$. 再由 $a_k\geqslant b_k$ 即可完成证明. □

注. 从上述证明过程中可以看出, 命题 3.4 中 (a) 推出 (b) 和 (b) 推出 (c) 都不必在不等式的常数中丢失 $\delta^{-\varepsilon}$. 也就是说, 我们有

$$\|f_\delta^*\|_p \lesssim A\,\|f\|_p \implies \left\|\sum_{\omega\in\Omega}\chi_{T_\omega}\right\|_{p'} \lesssim A$$

以及

$$\left\|\sum_{\omega\in\Omega}\chi_{T_\omega}\right\|_p \lesssim A \implies \left\|\sum_{\omega\in\Omega}\chi_{T_\omega}\right\|_p \lesssim A\left(\sum_{\omega\in\Omega}|T_\omega|\right)^{1/p},$$

其中 $\Omega\subset S^{n-1}$ 为任意 δ-分离集, T_ω 是任意平行于 $\omega\in\Omega$ 的 $1\times\delta$ 圆柱体.

由命题 3.4, 即可说明 Kakeya 极大算子的对偶版本 (猜想 1.4 和猜想 3.3) 和原本的版本 (猜想 1.3) 是等价的. 但是对偶版本中隐藏了 Kakeya 极大算子, 只需要用圆柱体进行表述, 具有更明确的几何意义.

3.3 Kakeya 极大算子猜想的染色版本

下面我们介绍 Kakeya 极大算子猜想的染色版本. 这个版本完全用集合以及测度来描述, 不涉及函数的积分, 更有利于组合几何技巧的应用. 首先介绍染色的概念.

定义. 设 $\mathbb{T}$ 是一族 $1\times\delta$ 圆柱体, $0<\lambda\leqslant 1$. 称 Y 为 $\mathbb{T}$ 的 **λ-染色** (λ-shading), 若 Y 是一个映射 $Y: T\in\mathbb{T}\mapsto Y(T)$ 使得 $Y(T)\subset T$, 并且 $|Y(T)|=\lambda\,|T|$.

Kakeya 极大算子猜想也可以用染色来刻画:

命题 3.5 (染色估计). 设 $0<\delta\ll 1$, $1\leqslant p\leqslant n$. 那么下列说法等价:

(a) Kakeya 极大算子猜想在 p 时成立, i.e. $\|f_\delta^*\|_p \lessapprox \delta^{-n/p+1}\,\|f\|_p$.

(b) 对任意轴向 δ-分离的 $1\times\delta$ 圆柱体族 $\mathbb{T}$ 及其 λ-染色 Y, 都有

$$\left|\bigcup_{T\in\mathbb{T}}Y(T)\right| \gtrapprox \lambda^p\delta^{n-p}\left(\delta^{n-1}\#\mathbb{T}\right). \tag{3.5}$$

在证明命题 3.5 之前, 我们需要一个引理, 它说明 Kakeya 极大算子的弱型估计和强型估计只差 $\delta^{-\varepsilon}$ 的常数.

引理 3.6 (弱型估计). 设 $p,q\in[1,\infty]$. 若 Kakeya 极大算子满足弱 (p,q) 型估计

$$\lambda\left|\left\{\omega\in S^{n-1}:(\chi_E)_\delta^*(\omega)>\lambda\right\}\right|^{1/q} \lesssim A\,|E|^{1/p}\quad \forall\lambda>0\ \forall E\subset\mathbb{R}^n;$$

则 $\|f_\delta^*\|_q \lessapprox A\,\|f\|_p$.

证明. 主要想法是对 Kakeya 极大算子进行插值, 以下大致描述插值的步骤, 而略去具体的计算.

将弱 (p,q) 型估计和平凡的 $(1,\infty)$ 型估计进行插值, 可得 Kakeya 极大算子的强 (p_θ,q_θ) 型估计, 其中

$$\frac{1}{p_\theta}=\frac{1-\theta}{p}+\frac{\theta}{1},\quad \frac{1}{q_\theta}=\frac{1-\theta}{q}+\frac{\theta}{\infty}\quad (0<\theta\leqslant 1).$$

然后再将 (p_θ,q_θ) 型估计和平凡的 (∞,∞) 型估计进行插值, 可以得到 (p,q_θ') 型估计. 经计算可知 $q_\theta'>q$, 而 S^{n-1} 测度有限, 从而可以导出一个依赖于 θ 的 (p,q) 型估计. 然后令 $\theta\to 0$, 即可得出 Kakeya 极大算子的 (p,q) 型范数 $\lessapprox A$. □

然后我们就可以证明我们原本的命题.

命题 3.5 的证明. 假设 (a) 成立. 要证明 (b) 成立, 只需将 (a) 中的 f 取为集合 $\bigcup_{T\in\mathbb{T}} Y(T)$ 的特征函数, 然后利用引理 3.2. 这里不再赘述细节.

假设 (b) 成立, 下证 (a) 成立. 由引理 3.6, 我们只需证明弱 (p,p) 型估计; 即对 $E\subset\mathbb{R}^n$, 记 $\Omega_\lambda=\{\omega\in S^{n-1}:(\chi_E)^*_\delta(\omega)>\lambda\}$, 我们需要证明

$$|E|\gtrapprox\delta^p\lambda^{n-p}\left|\Omega_\lambda\right|. \tag{3.6}$$

取 Ω_λ 的极大 δ-分离子集 $\{\omega_k\}_{k=1}^M$, 则 $|\Omega_\lambda|\sim M\delta^{n-1}$. 由 Ω_λ 的定义可知, 存在平行于 ω_k 的 $1\times\delta$ 圆柱体 T_k 使得 $|T_k\cap E|>\lambda\,|T_k|$. 由此我们可以定义 $\{T_k\}$ 的 λ-染色 Y 使得 $Y(T_k)\subset T_k\cap E$. 于是由 (b) 可知

$$|E|\geqslant\left|\bigcup_{T\in\mathbb{T}}Y(T)\right|\gtrapprox\delta^p\lambda^{n-p}(\delta^{n-1}M),$$

这就证得 (3.6). □

注. (1) 这里不加证明地指出染色估计和 Kakeya 集维数之间的关系:

- 若式 (3.5) 在 $\lambda=1$ 时成立, 即[①]

$$\left|\bigcup_{T\in\mathbb{T}}T\right|\gtrapprox\delta^{n-p}(\delta^{n-1}\#\mathbb{T}),$$

  则 $\mathbb{R}^n$ 中 Kakeya 集的 Minkowski 维数不小于 p.
- 若式 (3.5) 在 $\lambda\approx1$ 时成立, 则 $\mathbb{R}^n$ 中 Kakeya 集的 Hausdorff 维数不小于 p.

(2) 事实上在证明式 (3.5) 时, 只需证明 $\mathbb{T}$ 为极大的 δ-分离 $1\times\delta$ 圆柱体族时的情形; 这一点可以用类似命题 3.4 的证明中的 “随机旋转” 的方法来说明. 我们接下来并不会用到这一点, 限于篇幅这里略去证明.

4 Kakeya 问题的组合几何方法

在 Kakeya 问题的研究进程中, 组合几何的方法在上世纪 70–90 年代占据了主流地位, 这些方法也取得了一些重要的成果. 本节中我们将选取一些由组合几何方法导出的经典结果, 详细介绍和分析其中用到的技术.

4.1 Kakeya 极大算子的 L^2 估计

本小节中我们将证明二维情形的 Kakeya 极大算子猜想. 下面介绍的方法来自 Córdoba[9], 他的方法依赖于 “两直线交于一点” 这一最基本的组合几何事实.

定理 4.1 (L^2 估计)**.** 设 $0<\delta\ll1$. 若 $\mathbb{T}=\{T\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中一族轴向极大 δ-分离的 $1\times\delta$ 矩形, 则

$$\left\|\sum_T\chi_T\right\|_2\lesssim(\log 1/\delta)^{1/2}.$$

特别地, Kakeya 极大算子猜想在 $p=2$ 的情形成立.

[①] 1-染色在几乎处处的意义下只有 $Y(T)=T$.

证明. 对 $T, T' \in \mathbb{T}$, 记 $\angle(T,T')$ 为 T 和 T' 之间轴向的夹角. 注意到

$$\left\|\sum_T \chi_T\right\|_2^2 = \int \sum_{T,T'} \chi_T \chi_{T'} = \sum_{T,T'} |T \cap T'| \lesssim \sum_{T,T' : T \neq T'} \frac{\delta^n}{\angle(T,T')} + O(1),$$

其中 $O(1)$ 来自 $T = T'$ 的项的求和.

注意到对固定的 T, 满足 $\angle(T,T') \sim j\delta$ 的 T' 有 $O(1)$ 个, 这里 $0 < j \lesssim 1/\delta$ 为整数, 于是

$$\sum_{T,T' : T \neq T'} \frac{\delta^n}{\angle(T,T')} \lesssim \sum_T \sum_{0 < j \lesssim 1/\delta} \frac{\delta^n}{j\delta} \lesssim \# \mathbb{T} \log(1/\delta) \delta^{n-1},$$

再由 $\# \mathbb{T} \sim \delta^{1-n}$ 即可完成证明. $\square$

证明的关键是注意到如下几何上的事实: 发挥同等效力的是

$$|T \cap T'| \lesssim \frac{\delta^n}{\angle(T,T')}. \tag{4.1}$$

式 (4.1) 可以看成是 "两直线交于一点" 的类比. 为更清楚地看出这一点, 以下给出定理 4.1 在有限域中的类比.

命题 4.2 (有限域情形的 L^2 估计)**.** 设 $\mathbb{F}$ 是 q 元有限域. 若 $E \subset \mathbb{F}^2$ 中包含了 m 条不同方向的直线, 则 $\#E \gtrsim mq$.

证明. 记这 m 条直线为 $\{l_i\}$, 则由 Cauchy-Schwarz 不等式可知

$$\begin{aligned}
mq &= \sum_i \#(E \cap l_i) \\
&\leqslant (\#E)^{1/2} \left(\sum_{i,j} \#(l_i \cap l_j) \right)^{1/2} \\
&\leqslant (\#E)^{1/2} (mq + m(m-1))^{1/2} \quad (\text{当 } i \neq j \text{ 时 } \#(l_i \cap l_j) \leqslant 1) \\
&\lesssim (\#E)^{1/2} (mq)^{1/2} \quad (\text{由 } m \lesssim q).
\end{aligned}$$

因此 $\#E \gtrsim mq$. $\square$

4.2 Bourgain 的 bush 论证

Bourgain 在 1991 年证明了 Kakeya 猜想在 $p = (n+1)/2$ 的情形 [4], 本小节将介绍其证明的主要想法. 为清晰的反映证明所用到的组合本质, 我们首先介绍如何用 Bourgain 的方法证明有限域上对应的问题.

命题 4.3. 设 $\mathbb{F}$ 是 q 元有限域 ($q \gg 1$). 若 $K \subset \mathbb{F}^n$ 为 Kakeya 集, 则 $\#K \gtrsim q^{(n+1)/2}$.

证明. 设 $\mathcal{L} = \{l\}$ 是包含于 K 的所有不同方向的直线, 则 $\#L \sim q^{n-1}$. 对 $x \in \mathbb{F}^n$, 记 $m(x) = \#\{i : x \in l_i\}$ 为 x 的重数. 注意到

$$\sum_{x \in K} m(x) = \sum_{l \in \mathcal{L}} \#(K \cap l) \sim q \cdot q^{n-1},$$

于是由抽屉原理可找到 $x_0 \in K$ 使得

$$m(x_0) \gtrsim \frac{q^n}{\#K}.$$

另一方面, 设 $\{l_i : 1 \leqslant i \leqslant m(x_0)\}$ 是 $\mathcal{L}$ 中所有通过 x_0 的直线, 则 $\{l_i \setminus \{x_0\}\}$ 两两无交, 从而对 i 求和可以得到:

$$\#K \geqslant \sum_{i=1}^{m(x_0)} \#(l_i \setminus \{x_0\}) = m(x_0)(q-1) \gtrsim \frac{q^n}{\#K} \cdot q,$$

由此就得到 $\#K \gtrsim q^{(n+1)/2}$. □

上述证明的依赖于 “两点确定一条直线” 这一事实. 由此, 如果 $\mathcal{L}$ 是通过 x_0 的一束直线, 那么它必然在 x_0 以外的点重数很低. 把圆柱体类比为直线, 就可以在欧氏空间中用上类似的想法. 这个想法最先由 Bourgain 提出 [4]. 下面我们叙述如何把这个组合的想法用在欧氏空间中的 Kakeya 问题.

定理 4.4 (Bourgain)**.** 若 $p = (n+1)/2$, 则 $\|f_\delta^*\|_p \lessapprox \delta^{-n/p+1} \|f\|_p$.

证明. 设 $\mathbb{T}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一族轴向 δ-分离的 $1 \times \delta$ 圆柱体, Y 是其 λ-染色. 我们只需证明

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \gtrapprox \lambda^{(n+1)/2} \delta^{(n-1)/2} (\delta^{n-1} \# \mathbb{T}). \tag{4.2}$$

我们把圆柱体类比为 “直线”, 然后尝试套用有限域中的方法.

首先注意到, 当 $\lambda \lesssim \delta$ 时 (4.2) 是平凡的, 因为

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \geqslant |Y(T)| \sim \lambda \delta^{n-1} \gtrsim \lambda^{(n+1)/2} \delta^{(n-1)/2} (\delta^{n-1} \# \mathbb{T}),$$

最后一步中注意 $\delta^{n-1} \# \mathbb{T} \lesssim 1$.

下面我们证明, 存在常数 C 使得 (4.2) 在 $C\delta \leqslant \lambda \leqslant 1$ 时成立. 与有限域的情形类似, 首先我们尝试找一个点, 使得 $\mathbb{T}$ 中的圆柱体在该点处重数较大. 同样用抽屉原理: 记 $Y = \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T)$, 则

$$\int_Y \sum_{T \in \mathbb{T}} \chi_T(x)\, dx = \sum_{T \in \mathbb{T}} |Y \cap T| \sim \lambda \delta^{n-1} \# \mathbb{T},$$

从而可找到 $x \in Y$ 使得

$$\sum_{T \in \mathbb{T}} \chi_T(x) \gtrsim \frac{\lambda \delta^{n-1} \# \mathbb{T}}{|Y|}.$$

记 $\mathbb{T}_x = \{T \in \mathbb{T} : x \in T\}$ 为所有包含 x 的圆柱体, 这样我们就构造出了一束重数较高的圆柱体.

与有限域的想法相同, $\mathbb{T}_x$ 在远离 x 的地方重数较低, 但这还需要圆柱体之间的夹角不能太小. 取 $\mathbb{T}_x$ 中极大的轴向 (δ/λ)-分离的子集 $\mathbb{T}'_x$. 由 $\lambda \geqslant C\delta$, 当 C 足够大时可使得集族 $\{T \setminus B(x, \lambda/2) : T \in \mathbb{T}'_x\}$ 中的元素两两无交. 注意到

$$|T \cap B(x, \lambda/2)| \leqslant \frac{\lambda}{2} |T|,$$

于是由 $|Y \cap T| = \lambda |T|$ 可知

$$|Y| \geqslant \sum_{T \in \mathbb{T}'_x} |Y \cap (T \setminus B(x, \lambda/2))| \geqslant \sum_{T \in \mathbb{T}'_x} \frac{\lambda}{2} |T| \sim \lambda \delta^{n-1} \# \mathbb{T}'_x;$$

而

$$\#\mathbb{T}_x' \sim \#\mathbb{T}_x \lambda^{n-1} = \lambda^{n-1} \sum_{x\in\mathbb{T}} \chi_T(x) \gtrsim \lambda^{n-1} \frac{\lambda\delta^{n-1}\#\mathbb{T}}{|Y|},$$

结合以上两式即可完成证明. □

4.3 Wolff 的 hairbrush 论证

Wolff 在 1995 年证明了 Kakeya 极大函数猜想在 $p=(n+2)/2$ 时的情形 [25].

定理 4.5 (Wolff)**.** 若 $p=(n+2)/2$, 则 $\|f_\delta^*\|_p \lessapprox \delta^{-n/p+1}\|f\|_p$.

下面我们介绍他的证明思路. 这里我们叙述的证明基于 Tao 在 1997 年提出的“双线性约简”的技巧 [23], 它使得 Wolff 的证明可以被更简洁地叙述.

4.3.1 有限域的类比

我们仍然首先在有限域的情形来说明 Wolff 证明中所用到的组合技巧.

命题 4.6. 设 $\mathbb{F}$ 是 q 元有限域 ($q\gg 1$). 若 $K\subset\mathbb{F}^n$ 为 Kakeya 集, 则 $\#K\gtrsim q^{(n+2)/2}$.

证明. 设 $\mathcal{L}=\{l\}$ 是包含于 Kakeya 集 K 的所有不同方向的直线. 对 $x\in K$, 记 $\mathcal{L}_x=\{l\in\mathcal{L}: x\in l\}$ 为 $\mathcal{L}$ 中所有经过 x 的直线的集合.

取 $\mu\gg 1$ 待定. 我们称直线 $l\in\mathcal{L}$ 是高重数的, 若 l 上至少有 $q/2$ 个点 x 满足 $\#\mathcal{L}_x>\mu$. 我们分别考虑如下两类情况.

情况 1: 假如 $\mathcal{L}$ 中不存在高重数的直线. 考虑集合 $K'=\{x\in K: \#\mathcal{L}_x\leqslant\mu\}$, 对任意 $l\in\mathcal{L}$ 都有 $\#(l\cap K)>q/2$. 于是

$$\mu\#K' \geqslant \sum_{x\in K'} \#\mathcal{L}_x = \sum_{l\in\mathcal{L}} \#(l\cap K') \geqslant (q/2)\#\mathcal{L} \sim q^n,$$

从而 $\#K\geqslant\#K'\gtrsim\mu^{-1}q^n$.

情况 2: $\mathcal{L}$ 中存在高重数的直线 l_0. 假设 $x_1,\cdots,x_k\in l_0$ ($k\geqslant q/2$) 满足 $\#\mathcal{L}_{x_i}>\mu$. 接下来我们希望选取一些平面来应用命题 4.2. 记 $\mathcal{H}=\bigcup_{i=1}^k(\mathcal{L}_{x_i}\setminus\{l_0\})$ 为所有和 l_0 相交的直线的集合; 再记 Π 为所有由 l_0 和 $\mathcal{H}$ 中某条直线所确定的平面的集合. 注意到集族 $\{\pi\setminus l_0:\pi\in\Pi\}$ 中的元素两两无交, 于是

$$\#K \geqslant \sum_{\pi\in\Pi} \#(K\cap(\pi\setminus l_0)).$$

记 $m(\pi)$ 为平面 π 中包含 $\mathcal{H}$ 中直线的条数, 则由二维的结论 (命题 4.2) 可知

$$\#(K\cap(\pi\setminus l_0)) \gtrsim m(\pi)q.$$

于是

$$\#K \gtrsim \sum_{\pi\in\Pi} m(\pi)q = q\#\mathcal{H} \geqslant qk\mu \gtrsim q^2\mu \tag{4.3}$$

取 $\mu\sim q^{(n-2)/2}$ 即可使情况 1 和 2 都满足 $\#K\gtrsim q^{(n+2)/2}$. □

上面证明中的情况 2 中, 我们本质上是考察了与直线 l_0 相交的一族直线 $\mathcal{H}$, 这个结构看起来像一柄刷子 (hairbrush). 我们本质上是利用二维的估计, 来说明刷子上的 “刷毛” $\mathcal{H}$ 在远离 “刷柄” l_0 的地方重合度不会太高. 式 (4.3) 说明, 当刷毛越多 (即 $\#\mathcal{H}$ 越大), 我们得出的估计就越好. 所以, 证明的关键在于构造一把有很多毛的刷子, 即找到一条重数很高的直线 l_0 作为刷柄.

4.3.2 双线性约简

下面我们考虑如何把上述的组合技巧应用到 $\mathbb{R}^n$ 中. 按照前面的讨论, 我们希望利用某些方法构造出一个重数很高的圆柱体 T_0 以及一个对应的 “刷子” , 把刷柄的一个邻域挖去之后刷子剩余的部分重叠部分比较小, 由此导出染色面积的估计. Bourgain 定理 (定理 4.4) 的证明告诉我们, 要想使得两个圆柱体的两端重叠程度比较低, 那么它们的夹角应该尽量大. 以上这些就启发了**双线性约简** (bilinear reduction) 的技巧, 它使得我们可以把问题简化到圆柱体的夹角不太小的情况.

我们从 Kakeya 极大算子的对偶版本出发. 设 $\mathbb{T}$ 是一族轴向 δ-分离的 $1\times\delta$ 圆柱体, $p\geqslant 2$. 我们希望证明

$$\left\|\sum_{T\in\mathbb{T}}\chi_T\right\|_{p'}\lessapprox\delta^{-n/p+1}. \tag{4.4}$$

由命题 1.4, 我们可以不妨假设 T 的轴向都落在 $B(e_n,1/10)$ 中, 其中 e_n 是 $\mathbb{R}^n$ 的第 n 个标准基向量; 因为我们只需要把球冠 $B(e_n,1/10)$ 旋转若干次, 进而覆盖整个球面.

记 $q=p'$. 把式 (4.4) 改写为

$$\left\|\sum_{T,T'\in\mathbb{T}}\chi_T\chi_{T'}\right\|_{q/2}^{q/2}\lessapprox\delta^{n-q(n-1)}. \tag{4.5}$$

由于 $q/2\leqslant 1$, 从而有伪三角不等式

$$\|f+g\|_{q/2}^{q/2}\leqslant\|f\|_{q/2}^{q/2}+\|g\|_{q/2}^{q/2}.$$

对 (4.5) 的左边按圆柱体的夹角 $\angle(T,T')=|\omega_T-\omega_{T'}|$ 进行二进制分割, 可得

$$\left\|\sum_{T,T'\in\mathbb{T}}\chi_T\chi_{T'}\right\|_{q/2}^{q/2}\leqslant\sum_{k=0}^{O(\log 1/\delta)}\left\|\sum_{T,T':\angle(T,T')\sim 2^{-k}}\chi_T\chi_{T'}\right\|_{q/2}^{q/2}+\left\|\sum_{T,T':T=T'}\chi_T\chi_{T'}\right\|_{q/2}^{q/2}.$$

容易证明 $T=T'$ 的一项可以被式 (4.5) 的右边吸收掉; 再由 $O(\log 1/\delta)\lessapprox 1$, 要证 (4.17) 就只需证对任意 k 都有

$$\left\|\sum_{T,T':\angle(T,T')\sim 2^{-k}}\chi_T\chi_{T'}\right\|_{q/2}^{q/2}\lessapprox\delta^{n-q(n-1)}. \tag{4.6}$$

接着我们尝试对 (4.6) 做尺度变换, 希望使得参与求和的圆柱体的夹角和 k 无关. 首先把 S^{n-1} 分割为若干个半径为 $2^{-k}/10$ 的球冠 C_i, 记 $\mathbb{T}_i\subset\mathbb{T}$ 为轴向落在 C_i 中的圆柱体的子集. 于是要证 (4.6), 只需证对每个 i 都有

$$\left\|\sum_{T,T'\in\mathbb{T}_i:\angle(T,T')\sim 2^{-k}}\chi_T\chi_{T'}\right\|_{q/2}^{q/2}\lessapprox\delta^{n-q(n-1)}. \tag{4.7}$$

不妨设 C_i 的中心是 e_n, 然后考虑前 $n-1$ 个坐标的伸缩变换

$$L(\underline{x}, x_n) = (2^k \underline{x}, x_n),$$

则式 (4.6) 等价于

$$\left\| \sum_{T,T' \in \mathbb{T}_i : \angle(T,T') \sim 2^{-k}} \chi_{L(T)} \chi_{L(T')} \right\|_{q/2}^{q/2} \lessapprox 2^{-k(n-1)} \delta^{n-q(n-1)}. \tag{4.8}$$

大致可以认为 $L(T)$ 是 $1 \times 2^k\delta$ 圆柱体, 其轴向认为是落在 $2^k C_i$ 上, 于是当 $T, T' \in \mathbb{T}_i$ 时

$$\angle(L(T), L(T')) = \left|\omega_{L(T)} - \omega_{L(T')}\right| \sim 2^k \left|\omega_T - \omega_{T'}\right| \sim 1.$$

基于此观察, 如果用 $2^k\delta$ 代替 δ, $2^k C_i$ 代替 C_i, 注意到 (4.8) 右边 $\lessapprox (2^k\delta)^{n-q(n-1)}$, 就会发现 (4.8) 被 (4.7) 在 $k=0$ 的情形所蕴含. 由此问题又可以化归为证明

$$\left\| \sum_{T,T' : \angle(T,T') \sim 1} \chi_T \chi_{T'} \right\|_{q/2}^{q/2} \lessapprox \delta^{n-q(n-1)}, \tag{4.9}$$

其中 T, T' 的轴向都落在某个半径为 $1/10$ 的球冠内. 由此, 我们就只需要考虑夹角近似是一个定值的圆柱体, 从而忽略那些夹角很小的情形.

另外注意到, 要证明 (4.9), 只需证

$$\left\| \left(\sum_{T \in \mathbb{T}} \chi_T\right) \left(\sum_{T' \in \mathbb{T}'} \chi_{T'}\right) \right\|_{q/2}^{q/2} \lessapprox \delta^{n-q(n-1)}, \tag{4.10}$$

其中 $\mathbb{T}$ 和 $\mathbb{T}'$ 是两族轴向 δ-分离的 $1 \times \delta$ 圆柱体, 它们的轴向都落在 $B(e_n, 1/10)$ 内, 并且任意 $T \in \mathbb{T}$ 和 $T' \in \mathbb{T}'$ 都满足 $\angle(T, T') \sim 1$. 式 (4.10) 的好处在于, 其中包含了体现 “重数” 的 $\sum \chi_T$, 这有利于组合技巧的应用.

4.3.3 “刷子” 的构造

下面尝试对 (4.10) 施展二进制分割的技巧. 对 $\mu, \mu' \in 2^{\mathbb{Z}}$ $(= \{2^s : s \in \mathbb{Z}\})$, 定义

$$E_{\mu,\mu'} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{T \in \mathbb{T}} \chi_T(x) \sim \mu, \sum_{T \in \mathbb{T}'} \chi_{T'}(x) \sim \mu' \right\}.$$

于是

$$\left\| \left(\sum_{T \in \mathbb{T}} \chi_T\right) \left(\sum_{T' \in \mathbb{T}'} \chi_{T'}\right) \right\|_{q/2}^{q/2} \sim \sum_{\mu,\mu'} (\mu\mu')^{q/2} \left|E_{\mu,\mu'}\right|.$$

由于 μ 和 μ' 的取值范围是从 1 到 $O(\delta^{1-n})$, 从而 μ 和 μ' 都只有 $O(\log 1/\delta)$ 种取值, 而 $O(\log 1/\delta) \lessapprox 1$, 故要证 (4.10) 就只需证每对 μ, μ' 都满足

$$(\mu\mu')^{q/2} \left|E_{\mu,\mu'}\right| \lessapprox \delta^{n-q(n-1)}. \tag{4.11}$$

不失一般性, 我们还可以假设 $|E_{\mu,\mu'}| \geqslant \delta^{10n}$ (否则 (4.11) 是平凡的).

取定 μ, μ'. 为估计 $|E_{\mu,\mu'}|$, 注意到

$$\mu\mu' |E_{\mu,\mu'}| \sim \sum_{T\in\mathbb{T}} \sum_{T'\in\mathbb{T}'} \int_{E_{\mu,\mu'}} \chi_T \chi_{T'}. \tag{4.12}$$

对上面式子的右边再次二进制分割. 对 $\lambda, \lambda' \in 2^{\mathbb{Z}}$, 令

$$\mathbb{T}_\lambda = \{T \in \mathbb{T} : |T \cap E| \sim \lambda |T|\},$$
$$\mathbb{T}'_\lambda = \{T' \in \mathbb{T}' : |T' \cap E| \sim \lambda |T'|\}.$$

不难证明 (4.12) 右边的求和中, $\lambda < \delta^{20n}$ 或 $\lambda' < \delta^{20n}$ 的部分很小, 可以被 (4.12) 的左端吸收掉 (利用 $|E_{\mu,\mu'}| \geqslant \delta^{10n}$), 于是

$$\mu\mu' |E_{\mu,\mu'}| \sim \sum_{\lambda \geqslant \delta^{20n}} \sum_{\lambda' \geqslant \delta^{20n}} \sum_{T\in\mathbb{T}_\lambda} \sum_{T'\in\mathbb{T}'_{\lambda'}} \int_{E_{\mu,\mu'}} \chi_T \chi_{T'}.$$

其中 $\delta^{20n} \leqslant \lambda, \lambda' \leqslant 1$, 故最多只有 $O(\log 1/\delta)$ 项, 故由抽屉原理, 必然存在某一对 λ, λ' 使得

$$\mu\mu' |E_{\mu,\mu'}| \approx \sum_{T\in\mathbb{T}_\lambda} \sum_{T'\in\mathbb{T}'_{\lambda'}} \int_{E_{\mu,\mu'}} \chi_T \chi_{T'} \tag{4.13}$$

我们首先导出一个 λ 的下界估计. 由 (4.13),

$$\begin{aligned}\mu\mu' |E_{\mu,\mu'}| &\approx \int_{E_{\mu,\mu'}} \sum_{T\in\mathbb{T}_\lambda} \chi_T \sum_{T'\in\mathbb{T}'_{\lambda'}} \chi'_T \lessapprox \int_{E_\mu} \mu' \sum_{T\in\mathbb{T}_\lambda} \chi_T \\ &\sim \mu' \sum_{T\in\mathbb{T}_\lambda} |T \cap E_{\mu,\mu'}| \sim \mu' \lambda \delta^{n-1} \#\mathbb{T}_\lambda \lesssim \mu' \lambda.\end{aligned}$$

从而

$$\lambda \gtrapprox \mu |E_{\mu,\mu'}|. \tag{4.14}$$

然后我们尝试利用 (4.13) 构造一个 “高重数” 的圆柱体.

$$\sum_{T\in\mathbb{T}_\lambda} \sum_{T'\in\mathbb{T}'_{\lambda'}} \int_{E_{\mu,\mu'}} \chi_T \chi_{T'} = \sum_{T\in\mathbb{T}_\lambda} \sum_{T'\in\mathbb{T}'_{\lambda'}} |E \cap T \cap T'| \leqslant \sum_{T\in\mathbb{T}_\lambda} \sum_{T'\in\mathbb{T}'_{\lambda'}} |T \cap T'|,$$

并且 $\#\mathbb{T}'_{\lambda'} \lesssim \delta^{1-n}$, 故由 (4.13) 可知存在 $T' \in \mathbb{T}'_{\lambda'}$ 使得

$$\sum_{T\in\mathbb{T}_\lambda} |T \cap T'| \gtrapprox \mu\mu' |E_{\mu,\mu'}| \delta^{n-1}.$$

而 $\angle(T, T') \sim 1$, 从而 $|T \cap T'| \lesssim \delta^n$, 由此可知存在 $T' \in \mathbb{T}'_{\lambda'}$ 使得

$$\delta^n \# \{T \in \mathbb{T}_\lambda : T \cap T' \neq \varnothing\} \gtrapprox \delta^{n-1} \mu\mu' |E_{\mu,\mu'}|.. \tag{4.15}$$

至此, 我们就找到了一个 $T' \in \mathbb{T}'_{\lambda'}$, 其 “重数” 满足下界估计 (4.15). 接下来我们将尝试用此 T' 为 “刷柄”, 尝试施展证明命题 4.6 的论证方法.

4.3.4 利用 “刷子” 导出估计

取上一小节中构造的 $\mu, \mu', \lambda, \lambda' \in 2^{\mathbb{Z}}$, 以及 “刷柄” $T' \in \mathbb{T}'_{\lambda'}$. 记 $\mathbb{H} = \{T \in \mathbb{T}_\lambda : T \cap T' \neq \varnothing\}$ 为 “刷毛” 的集合. 由 (4.15) 可知

$$\#\mathbb{H} \gtrapprox \delta^{-1}\mu\mu' \left|E_{\mu,\mu'}\right|. \tag{4.16}$$

我们希望证明 (4.11) 在 $q' = (n+2)/2$ 时的情形, 即证明

$$(\mu\mu')^{(n+2)/2n} \left|E_{\mu,\mu'}\right| \lessapprox \delta^{-(n-2)/n} \tag{4.17}$$

我们希望取适当的 C, 去掉使得 T' 的邻域 $N = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{dist}(x, T') < C^{-1}\lambda\}$ 之后 $\mathbb{H}$ 中的圆柱体重叠程度比较低. 注意到 N 可以被 $O(\lambda\delta C^{-1})$ 个平行于 T' 的 $1 \times \delta$ 圆柱体 $\{\tau\}$ 所覆盖, 于是对任意 $T \in \mathbb{H}$ 都有

$$\int_{E_{\mu,\mu'}} \chi_{T\cap N} \leqslant \sum_\tau |\tau \cap T| \lesssim \lambda\delta C^{-1}\delta^n;$$

另一方面

$$\int_{E_{\mu,\mu'}} \chi_T = |T \cap E_{\mu,\mu'}| \sim \lambda\delta^{n-1},$$

令 C 充分大即可使得对任意 $T \in \mathbb{H}$ 都有

$$\int_{E_{\mu,\mu'}} \chi_{T\setminus N} \gtrsim \lambda\delta^{n-1}.$$

对 T 求和, 就得到 $\{T \setminus N\}$ 平均重数的下界估计

$$\int_{E_{\mu,\mu'}} \sum_{T\in\mathbb{H}} \chi_{T\setminus N} \gtrsim \lambda\delta^{n-1}\#\mathbb{H}. \tag{4.18}$$

类比命题 4.6 的证明中的证明, 我们希望引入一些平面的估计来限制 $\mathbb{H}$ 的重叠. 于是我们尝试引入 L^2 范数并应用 Córdoba 的估计. 由 (4.18) 以及 Cauchy-Schwarz 不等式可知,

$$\left\|\sum_{T\in\mathbb{H}} \chi_{T\setminus N}\right\|_2 \gtrsim \lambda\delta^{n-1}\#\mathbb{H} \left|E_{\mu,\mu'}\right|^{-1/2}. \tag{4.19}$$

然后我们再尝试估计 $\left\|\sum_{T\in\mathbb{H}} \chi_{T\setminus N}\right\|_2$ 的上界, 将其平方并做二进制分割:

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{T\in\mathbb{H}} \chi_{T\setminus N}\right\|_2^2 &= \sum_{T_1,T_2\in H} |T_1 \cap T_2 \cap N^c| \\ &= \sum_{T_1\in\mathbb{H}} |T_1 \cap N^c| + \sum_{T_1\in\mathbb{H}} \sum_{k=0}^{O(\log 1/\delta)} \sum_{T_2\in\mathbb{H}:\angle(T_2,T_1)\sim 2^{-k}} |T_1 \cap T_2 \cap N^c|. \end{aligned} \tag{4.20}$$

上面式子中的第一项 $\lesssim \#\mathbb{H}\delta^{n-1}$; 用 Córdoba 的估计 (4.1) 来控制第二项:

$$\begin{aligned} &\sum_{T_2\in\mathbb{H}:\angle(T_2,T_1)\sim 2^k} |T_1 \cap T_2 \cap N^c| \\ &\qquad \lesssim 2^{-k}\delta^n\#\left\{T_2 \in \mathbb{H} : \angle(T_1, T_2) \sim 2^{-k}, T_1 \cap T_2 \cap N^c \neq \varnothing\right\}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

然后需要用到一个几何上的事实: 圆柱体组成的 “三角形” 一定会落在平面的某个邻域内.

引理 4.7 (Wolff)**.** 若 T_1, T_2 与 T' 相交, 并且 $\angle(T_1, T') \sim \angle(T_2, T') \sim 1$. 若 $T_1 \cap T_2 \cap N^c \neq \varnothing$, 并且 $\angle(T_1, T_2) \sim 2^{-k}$, 则 T_2 落在 T' 和 T_1 的主轴确定的平面的 $O(\delta/\lambda)$ 邻域内.

限于篇幅, 我们略去上述引理的证明. 由此引理可以得到

$$2^k \delta^n \# \left\{T_2 \in \mathbb{H} : \angle(T_1, T_2) \sim 2^{-k}, T_1 \cap T_2 \cap N^c \neq \varnothing\right\} \lesssim \delta^{n-1} \lambda^{2-n},$$

代入 (4.21) 和 (4.20) 即可得到

$$\left\| \sum_{T \in \mathbb{H}} \chi_{T \setminus N} \right\|_2^2 \lesssim \# \mathbb{H} \delta^{n-1} \lambda^{2-n}.$$

再结合 (4.19) 和 (4.16), 就得到

$$\mu \mu' \lambda^n \delta^{n-2} \lessapprox 1.$$

然后代入 (4.14), 就得到

$$\mu^{n+1} \mu' \left|E_{\mu,\mu'}\right|^n \lessapprox \delta^{2-n}.$$

由 μ 和 μ' 的对称性, 故也有

$$\mu'^{n+1} \mu \left|E_{\mu,\mu'}\right|^n \lessapprox \delta^{2-n}.$$

以上两个式子相乘, 再开 $2n$ 次方, 即可得到 (4.17). 至此就完成了定理 4.5 的证明.

4.4 Dvir 的多项式方法

作为本节的结束, 我们介绍 Dvir 完全解决有限域 Kakeya 问题的多项式方法 [11]. 但他的方法过于依赖有限域的性质, 无法如前文中 Bourgain 和 Wolff 的论证一样很好的推广到欧氏空间上.

定理 4.8 (Dvir)**.** 设 $\mathbb{F}$ 是 q 元有限域. 若 $K \subset \mathbb{F}^n$ 为 Kakeya 集, 则

$$\# K \gtrsim_n q^n.$$

多项式方法依赖于如下基本的观察: 若任意 d 次多项式 f 都可被其在集合 $E \subset \mathbb{F}$ 上的取值完全确定, 即 $f|_E \equiv 0 \implies f \equiv 0$, 则 $\# E \geqslant d+1$. 也就是说, 通过那些在 E 上恒为零的多项式, 我们可以得出 E 元素个数的估计. 事实上, 这种方法也可以推广到高维情形.

引理 4.9. 假如 $E \subset \mathbb{F}^n$ 满足: 对任意 $f \in \mathbb{F}[x_1, \cdots, x_n]$ s.t. $\deg f \leqslant d$, 若 $f|_E = 0$ 则 $f = 0$; 那么 $\# E \geqslant \binom{n+d}{n}$.

证明. 记 $\mathbb{F}[x_1, \cdots, x_n]_{\leqslant d}$ 为域 $\mathbb{F}$ 上不超过 d 次的 n 元多项式的集合. 考虑 $\mathbb{F}$-线性映射

$$\Phi : \mathbb{F}[x_1, \cdots, x_n]_{\leqslant d} \to \mathbb{F}^E, \quad f \mapsto (f(x))_{x \in E}.$$

由题设条件可知 $\ker \Phi = 0$, 即 Φ 为单射. 而由组合数学的知识可知

$$\dim \mathbb{F}[x_1, \cdots, x_n]_{\leqslant d} = \binom{n+d}{n},$$

故 $\# E \geqslant \binom{n+d}{n}$. $\square$

引理 4.9 的证明虽然很简单, 但它给了我们一种估计 $\mathbb{F}^n$ 中集合元素个数的方法 — 考察次数多高的多项式能够被其在这个集合上的取值所完全确定.

定理 4.8 的证明. 设 $K \subset \mathbb{F}^n$ 为 Kakeya 集. 由引理 4.9 可知, 我们只需证明:

$$\text{对任意 } f \in \mathbb{F}[x_1, \cdots, x_n] \text{ s.t. } \deg f \leqslant q-1, \text{ 若 } f|_K = 0, \text{ 则 } f = 0. \tag{4.22}$$

因为由引理 4.9 可知 (4.22) 蕴含着

$$\# K \geqslant \binom{n+q-1}{n} \sim_n q^n.$$

下面我们证明 (4.22). 由 Kakeya 集的性质, 任取 $v \in \mathbb{F}^n \backslash \{0\}$, 都存在 $x \in \mathbb{F}^n$ 使得 $\{x+tv : t \in \mathbb{F}\} \subset K$, 从而 $g(t) := f(x+tv)$ 恒为零. 记 f_i 为 f 中所有 i 次项的和 $(1 \leqslant i \leqslant d)$, 由于 $g(t)$ 是 d 次多项式, 故 $g(t)$ 的 d 次项系数为 $f_d(v)$, 于是 $f_d(v) = 0\ \forall v \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}$. 而 f_d 齐 d 次多项式, 从而 f_d 在 $\mathbb{F}^n$ 上恒为零. 重复上述步骤, 就可以依次说明 $f_{d-1} = 0$, $f_{d-2} = 0$, 等等. 于是 $f_i = 0\ \forall i$, 从而 $f = 0$. 如此就完成了证明. □

5 Kakeya 问题和 Fourier 分析的联系

Kakeya 问题和组合、数论、调和分析等多个领域中的多个重要问题有广泛的联系. 本节我们着重于 Fourier 分析, 简要介绍 Kakeya 问题和 Fourier 求和问题以及限制性估计问题之间的联系.

5.1 球乘子的 L^p 无界性

对 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 定义 Fourier 部分和算子

$$S_R f(x) := \int_{|\xi| \leqslant R} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x}\, d\xi.$$

由 Fourier 逆转公式可知在每一点 $x \in \mathbb{R}^n$ 处都有 $S_R f(x) \to f(x)$ $(R \to \infty)$. 接下来我们希望考察 $\{S_R f\}$ 的 L^p 收敛性, 即 $\|S_R f - f\|_p \to 0$ 是否成立.

由一致有界原理可知, $\|S_R f - f\|_p \to 0$ $(\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ 的充要条件是存在与 R 无关的常数 C 使得

$$\|S_R f\|_p \leqslant C \|f\|_p \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

伸缩变换之后就等价于

$$\|S_1 f\|_p \leqslant C \|f\|_p, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

在 $n = 1$ 时, S_1 就是 Hilbert 变换, 从而它在 L^p $(1 < p < \infty)$ 上是有界的. 在 $n \geqslant 2$ 的情形, 由 Plancherel 定理可知 S_1 在 L^2 上有界; 但对 $p \neq 2$ 的 L^p 空间, Fefferman 在 1970 年证明了如下出人意料的结果:

定理 5.1 (Fefferman[13]). 若 $n \geqslant 2$, $1 < p < \infty$, 则 S_1 在 L^p 上有界当且仅当 $p = 2$.

Fefferman 证明定理 5.1 的方法依赖于 Besicovitch 给出的零测度 Kakeya 集的构造, 这也是 Kakeya 问题在 Fourier 分析中最早的应用之一. 下面我们介绍 Fefferman 的证明方法.

首先, 由下面的引理 (为行文简洁我们略去证明), 我们只需证明 $n = 2$ 时 S_1 的无界性.

引理 5.2 (De Leeuw)**.** 设 $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. 定义 $\mathbb{R}^n$ 上的 Fourier 乘子

$$\widehat{Tf} := m\hat{f} \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

以及 $\mathbb{R}^{n-1}$ 上的 Fourier 乘子

$$\widehat{T_0 f}(\xi') := m(\xi', 0)\hat{f}(\xi') \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1}),\ \forall \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

那么, T 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界蕴含 T_0 在 $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$ 上有界.

为了否定 S_1 的有界性, 我们需要估计 $S_1 f = f * \chi_{B_1}^\vee$ 的下界. 我们尝试用半平面 $H = \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 : \xi_1 > 0\}$ 来逼近 B_1, 因为 $\chi_H^\vee$ 比 $\chi_{B_1}^\vee$ 有更简单的表达式.

引理 5.3. 若 S_1 在 $L^p(\mathbb{R}^2)$ 上有界, 则 $S_H f := (\chi_H \hat{f})^\vee$ 也在 $L^p(\mathbb{R}^2)$ 上有界.

证明. 注意到当 $R \to \infty$ 时, 半平面 H 可以用圆盘 $B(R, R)$ 来逼近, 因此我们考虑平移之后的球乘子 $S'_R f := (\chi_{B(R,R)}\hat{f})^\vee$. 因为 S_1 在 L^p 上有界, 由前面的讨论可知 $\{S_R\}$ 在 L^p 上一致有界, 从而 $\{S'_R\}$ 也在 L^p 上一致有界. 不难验证 $\|S'_R f - S_H f\|_p \to 0\ \forall f \in C_c^\infty$, 从而 S_H 也在 $L^p(\mathbb{R}^2)$ 上有界. □

我们接下来只需要说明 S_H 在 $L^p(\mathbb{R}^2)$ $(p > 2)$ 上是无界的. 在分布的意义下

$$\chi_H^\vee(x_1, x_2) = \delta_0(x_2)\,\mathrm{sgn}^\vee(x_1) = \frac{i}{\pi}\delta_0(x_2)\,\mathrm{p.v.}\left(\frac{1}{x_1}\right),$$

于是

$$S_H f(x_1, x_2) = (f * \chi_H^\vee)(x_1, x_2) = \frac{i}{\pi}\lim_{\varepsilon \to 0}\int_{|x_1 - y| > \varepsilon} f(y, x_2)\,\frac{dy}{x_1 - y}. \tag{5.1}$$

由 (5.1) 即可得出:

引理 5.4. 设 $\delta > 0$, $T = [0,1] \times [0,\delta]$. 若 $f \in C_c^\infty(T)$ 是一个截断函数, 满足 $0 \leqslant f \leqslant 1$ 并且 f 在 $[1/3, 2/3] \times [\delta/3, 2\delta/3]$ 上恒为 1, 则在将 T 沿 x_1 轴平移 10 个单位后得到的矩形 T' 上, 有 $|S_H f| \gtrsim 1$.

由此我们得出一个构造反例的思路: 选取一族 $1 \times \delta$ 矩形 $\{T\}$, 在每个 T 上取截断函数 f_T. 考虑函数 $f = \sum_T f_T$. 如果我们能够使得 $\{T'\}$ 的重合程度很高, 而 $S_H f_T$ 在 T' 上比较大, 那么 $\|S_H f\|_p = \|\sum_T S_H f_T\|_p$ 就会比较大; 然后我们可以使得 $\{T\}$ 的重合程度很低 (因为 T' 和 T 之间的距离很大), 从而 $\|f\|_p$ 就很小. 这时 Besicovitch 的构造就派上用场了, 它告诉我们的结论是:

引理 5.5. 对任意 $M > 0$, 存在 $\delta > 0$ 以及有限个两两不交的 $1 \times \delta$ 矩形 $\{T\}$, 使得

$$\left|\bigcup_T T'\right| \leqslant M^{-1}\left|\bigcup_T T\right|.$$

然后我们还需要解决一个问题: 在计算 $S_H f = \sum_T S_H f_T$ 的 L^p 范数的时候, $S_H f_T$ 之间有可能存在很多的正负抵消, 导致 $\|S_H f_T\|_p$ 不够大. 我们可以通过" 随机化" 的技巧来估计正负抵消的影响. 通过概率论中的 Khintchine 不等式, 我们可以刻画正负抵消的平均程度.

引理 5.6 (Khintchine 不等式)**.** 设 $\{\varepsilon_T\}$ 是独立的以 $1/2$ 概率分别取 $+1$ 和 -1 的随机变量序列. 那么对任意 $f_T \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(0 < p < \infty)$, 有

$$\mathbb{E}\left\|\sum_T \varepsilon_T f_T\right\|_p^p \sim_p \left\|\left(\sum_T |f_T|^2\right)^{1/2}\right\|_p^p.$$

有了上述的所有准备之后, 我们就可以得出定理 5.1 的证明.

定理 5.1 的证明. 由 S_H 的自伴性以及引理 5.3 和引理 5.2, 我们只需证明 $2 < p < \infty$ 时 S_H 在 $L^p(\mathbb{R}^2)$ 上无界.

沿用前面的记号. 考虑 $f = \sum_T \varepsilon_T f_T$, 那么由 Khintchine 不等式可知

$$\mathbb{E}\left\|S_H f\right\|_p^p \sim_p \left\|\left(\sum_T |S_H f_T|^2\right)^{1/2}\right\|_p^p.$$

由于在 T' 上 $|S_H f_T| \gtrsim 1$, 于是

$$\left\|\left(\sum_T |S_H f_T|^2\right)^{1/2}\right\|_p^p \gtrsim \left\|\left(\sum_T \chi_{T'}\right)^{1/2}\right\|_p^p = \left\|\sum_T \chi_{T'}\right\|_{p/2}^{p/2}.$$

由 Hölder 不等式以及引理 5.5,

$$\left\|\sum_T \chi_{T'}\right\|_1 \leqslant \left\|\sum_T \chi_{T'}\right\|_{p/2} \left|\bigcup_T T'\right|^{1-2/p} \leqslant M^{2/p-1}\left|\bigcup_T T\right|.$$

由 $\{T\}$ 两两无交, 我们有

$$\left\|\sum_T \chi_{T'}\right\|_1 = \sum_T |T'| = \sum_T |T| = \left|\bigcup_T T\right|,$$
$$\|f\|_p^p = \sum_T \|f_T\|_p^p.$$

综合以上各式, 化简之后可得

$$\mathbb{E}\left\|S_H f\right\|_p^p \gtrsim M^{p/2-1}\left\|f\right\|_p^p.$$

由期望的性质, 必然存在 $\{\varepsilon_T\}$ 的某种取值, 使得 $\|S_H f\|_p^p$ 的值不小于其期望. 由此我们就构造出了一个函数 f 使得

$$\left\|S_H f\right\|_p \gtrsim M^{1/2-1/p}\left\|f\right\|_p.$$

由 M 的任意性即可得到当 $p > 2$ 时 S_H 在 L^p 上无界. □

Fefferman 给出的构造事实上是非常弱的, 只需对球乘子 S_1 稍微做一些磨光就可以使得他的反例失效. 定义 **Bochner-Riesz 算子**为

$$\widehat{S_1^\varepsilon f}(\xi) = (1 - |\xi|)^\varepsilon \chi_{B(0,1)} \hat{f}(\xi).$$

算子 S_1^ε 的 L^p 有界性至今仍然是公开问题.

猜想 5.7 (Bochner-Riesz)**.** 对任意 $\varepsilon > 0$ 和 $2n/(n+1) < p < 2n/(n-1)$, 算子 S_1^ε 在 L^p 上是有界的.

Fefferman 的反例无法使得算子 S_1^ε 无界, 而关于 Kakeya 集的进一步形式也许可以帮助构造出更强的反例. 从 Fefferman 的构造可以得出 Bochner-Riesz 猜想蕴含 Kakeya 猜想. 而在 1991 年 Bourgain 的一篇论文中给出了一种从 Kakeya 猜想的结果推导出 Bochner-Riesz 猜想的部分结果的论证方法.[4]

5.2 限制性猜想和 Kakeya 猜想的关系

Fourier 限制性问题指的是: 对 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$, 其 Fourier 变换 $\hat{f} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ 在集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ 上的限制是否有意义? 例如当 $p = 1$ 时, $\hat{f}$ 是连续函数, 因而定义其在任意集合 S 上的限制; 但当 $p = 2$ 时, $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 是在几乎处处的意义下定义的, 这时 $\hat{f}$ 在 Lebesgue 零测集 S 上的限制就不一定有明确的意义.

设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中的超曲面, $d\sigma$ 是其表面测度. 对 $p, q \in [1, \infty]$, 若

$$\|\hat{f}\|_{L^q(S,\, d\sigma)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \tag{5.2}$$

那么算子 $R : f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \hat{f}|_S$ 可以唯一地延拓为 $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(S, d\sigma)$ 的有界线性算子, 从而可以把 R 看成是将 L^p 函数的 Fourier 变换 "限制" 为 S 上的 L^p 函数. 也就是说, 解决 Fourier 限制性问题本质上是寻找形如 (5.2) 的估计; 我们称形如 (5.2) 的估计为 **限制性估计**.

利用对偶性可知, 式 (5.2) 等价于

$$\|\widehat{gd\sigma}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|g\|_{L^{q'}(S^{n-1})} \quad \forall g \in L^\infty(S^{n-1}), \tag{5.3}$$

其中

$$\widehat{gd\sigma}(\xi) = \int_{S^{n-1}} g(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, d\sigma(x).$$

式 (5.3) 也称为**限制性估计**.

在 $S = S^{n-1}$ 为球面的情形, Stein 提出了如下猜想:

猜想 5.8 (球面限制性猜想)**.** 若 $q > 2n/(n-1)$, $q \geqslant (n+1)p'/(n-1)$, $p \geqslant 1$,[①] 则

$$\|\widehat{gd\sigma}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|g\|_{L^p(S^{n-1})} \quad \forall g \in L^\infty(S^{n-1}).$$

事实上, 限制性估计 (5.2) 可以导出 Kakeya 极大算子的估计, 这个发现最早来自 Beckner 等人 [1].

命题 5.9. 设 $q \geqslant 2n/(n-1)$. 那么, 限制性估计

$$\|\widehat{gd\sigma}\|_{q+\varepsilon} \lesssim_\varepsilon \|g\|_p \quad \forall g \in L^\infty(S^{n-1}) \tag{5.4}$$

蕴含 Kakeya 极大算子的估计

$$\left\| \sum_{T \in \mathbb{T}} \chi_T \right\|_{q/2} \lesssim_\varepsilon \delta^{2(2n/q-(n-1)-\varepsilon)}. \tag{5.5}$$

其中 $\mathbb{T}$ 是轴向 δ-分离的一族 $1 \times \delta$ 圆柱体.

[①] 这些指标的条件是限制性估计成立的必要条件.

下面开始证明 5.9. 首先注意到, 由 Hölder 不等式可知, 式 (5.4) 蕴含

$$\|\widehat{gd\sigma}\|_{L^q(B(0,R))} \lesssim_\varepsilon R^\varepsilon \|g\|_{L^p(S^{n-1})} \quad \forall g \in L^\infty(S^{n-1}). \tag{5.6}$$

通常称 (5.6) 为**指数为 ε 的局部限制性估计**. 然后注意到如下的引理, 它可以看成是不确定性原理的某种形式:

引理 5.10. 对 $\omega \in S^{n-1}$, 定义 $R \times \sqrt{R}$ 圆柱体

$$T_\omega := \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi \cdot \omega| \leqslant R, |x-(x\cdot\omega)\omega| \leqslant \sqrt{R}\right\}$$

若 f_ω 是球冠 $B(\omega, 1/\sqrt{100R}) \cap S^{n-1}$ 的特征函数, 则

$$\left|\widehat{fd\sigma}(\xi)\right| \sim R^{-(n-1)/2} \quad \forall \xi \in T_\omega.$$

证明. 注意到当 $\xi \in T_\omega$ 以及 $x \in B(\omega, 1/\sqrt{100R})$ 时, $|\xi\cdot x - \xi\cdot\omega| \leqslant 1/10$, 故

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{f_\omega d\sigma}(\xi)\right| &= \left|\int_{|x-\omega|<1/\sqrt{100R}} e^{-2\pi i\xi\cdot x}\, d\sigma(x)\right| \\
&\sim \left|\int_{|x-\omega|<1/\sqrt{100R}} e^{-2\pi i\xi\cdot \omega}\, d\sigma(x)\right| \\
&\sim R^{-(n-1)/2}.
\end{aligned}$$

这就完成了证明. □

在上述引理中, 函数 $e^{2\pi i x\cdot h} f_\omega(x)$ 在平移后的圆柱体 $T_\omega - h$ 上的绝对值 $\sim R^{-(n-1)/2}$. 由此, 对任意极大的轴向 $(1/\sqrt{100R})$-分离的 $R\times\sqrt{R}$ 圆柱体族 $\mathbb{T} = \{T\}$, 可以找到函数 $f_T : S^{n-1} \to \mathbb{C}$ 使得

$$\begin{aligned}
&\operatorname{spt} f_T \subset B(\omega_T, 1/\sqrt{100R}), \quad |f_T| = 1; \\
&\left|\widehat{f_T d\sigma}(\xi)\right| \sim R^{-(n-1)/2} \quad \forall \xi \in T.
\end{aligned}$$

当 $\{T\}$ 的重叠程度很高时, 和式 $\sum_T \widehat{f_T d\sigma}$ 中就会有很多正负抵消的项. 然后我们就可以采用标准的随机化技巧来估计抵消的程度.

命题 5.9 的证明. 取 $\{\varepsilon_T\}$ 为独立地以 1/2 概率分别取 ± 1 的随机变量序列, 考虑函数 $f = \sum_T \varepsilon_T f_T$. 不妨设任意 T 都包含于 $B(0, 100R)$, 则由 Khintchine 不等式可知

$$\mathbb{E}\|\widehat{fd\sigma}\|^q_{L^q(B(0,100R))} \sim \left\|\left(\sum_T \left|\widehat{f_T d\sigma}\right|^2\right)^{1/2}\right\|^q_{L^q(B(0,100R))}.$$

由于 $\widehat{f_T d\sigma}$ 在 T 上的绝对值 $\sim R^{-(n-1)/2}$, 故

$$\mathbb{E}\|\widehat{fd\sigma}\|^q_q \gtrsim \left\|\left(\sum_T R^{-(n-1)} |\chi_T|^2\right)^{1/2}\right\|^q_q = R^{-(n-1)q/2} \left\|\sum_T \chi_T\right\|^{q/2}_{q/2}.$$

另一方面, $\{f_T\}$ 的支集几乎不重叠, 可以验证

$$\|f\|_p \sim \left(\sum_T \|f_T\|_p^p\right)^{1/p} \sim \left(R^{-(n-1)/2}\#\mathbb{T}\right)^{1/p} \sim 1.$$

结合以上两式, 利用局部限制性估计 (5.6), 即可得到

$$\left\|\sum_T \chi_T\right\|_{q/2} \lesssim_\varepsilon R^{n-1+\varepsilon}.$$

我们上面得出的估计离 (5.5) 一些差距. 经观察之后考虑尺度变换. 记 $\tilde{T} = RT$ 用 $\tilde{T}$ 代替 T 重复上述讨论, 可得

$$\left\|\sum_T \chi_{\tilde{T}}\right\|_{q/2} \lesssim_\varepsilon R^{-2n/q+n-1+\varepsilon}.$$

然后再把 $R^2 \times R$ 伸缩为 $1 \times \delta$ 即可得到 (5.5). ($\delta = R^{-1/2}$) □

由命题 5.9 不难看出, 球面限制性猜想蕴含 Kakeya 极大算子猜想, 但至今仍然不知道反过来的结论是否正确. 在 1991 年 Bourgain 证明了反方向的部分结果.

定理 5.11 (Bourgain[4])**.** 如果有 Kakeya 极大算子的估计

$$\left\|\sum_{T\in\mathbb{T}} \chi_T\right\|_{p'} \lesssim_\varepsilon \delta^{-n/p+1-\varepsilon},$$

其中 $\mathbb{T}$ 是轴向 δ-分离的一族 $1 \times \delta$ 圆柱体; 那么当

$$q > 2\left(\frac{p'}{n+1} + \frac{n}{n-1}\right)$$

时, 有限制性估计

$$\|\widehat{fd\sigma}\|_p \lesssim \|f\|_\infty \quad \forall f \in L^\infty(S^{n-1}).$$

在 Bourgain 1991 年的论文 [4] 中, 他正是首先利用 bush 论证得出了当时最优的 Kakeya 极大算子的估计, 然后由此推动了限制性猜想的进展.

参考文献

[1] William Beckner, Anthony Carbery, Stephen Semmes, and Fernando Soria. A note on restriction of the fourier transform to spheres. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 21(4):394–398, 1989.

[2] Jonathan Bennett, Anthony Carbery, and Terence Tao. On the multilinear restriction and kakeya conjectures. *Acta mathematica*, 196(2):261–302, 2006.

[3] AS Besicovitch. On kakeya's problem and a similar one. *Mathematische Zeitschrift*, 27(1):312–320, 1928.

[4] Jean Bourgain. Besicovitch type maximal operators and applications to fourier analysis. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, 1(2):147–187, 1991.

[5] Jean Bourgain. On the distribution of dirichlet sums. *Journal d Analyse Mathematique*, 60(1):21–32, 1993.

[6] Jean Bourgain. On the dimension of kakeya sets and related maximal inequalities. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, 9(2):256–282, 1999.

[7] Jean Bourgain, Nets Katz, and Terence Tao. A sum-product estimate in finite fields, and applications. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, 14(1):27–57, 2004.

[8] Anthony Carbery and Stefán Ingi Valdimarsson. The endpoint multilinear kakeya theorem via the borsuk–ulam theorem. *Journal of Functional Analysis*, 264(7):1643–1663, 2013.

[9] Antonio Córdoba. The kakeya maximal function and the spherical summation multipliers. *American Journal of Mathematics*, 99(1):1–22, 1977.

[10] Roy O Davies. Some remarks on the kakeya problem. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 69, pages 417–421. Cambridge University Press, 1971.

[11] Zeev Dvir. On the size of kakeya sets in finite fields. *Journal of the American Mathematical Society*, 22(4):1093–1097, 2009.

[12] Zeev Dvir and Avi Wigderson. Kakeya sets, new mergers, and old extractors. *SIAM Journal on Computing*, 40(3):778–792, 2011.

[13] Charles Fefferman. The multiplier problem for the ball. *Annals of Mathematics*, 94(2):330–336, 1971.

[14] Larry Guth. The endpoint case of the bennett–carbery–tao multilinear kakeya conjecture. *Acta mathematica*, 205(2):263–286, 2010.

[15] N Katz and T Tao. Recent progress on the kakeya conjecture. *Publicacions Matemàtiques*, pages 161–179, 2002.

[16] Nets Katz, Izabella Laba, and Terence Tao. An improved bound on the minkowski dimension of besicovitch sets in r3. *Annals of Mathematics*, pages 383–446, 2000.

[17] Nets Katz and Terence Tao. New bounds on kakeya problems. *arXiv preprint math/0102135*, 2001.

[18] Nets Katz and Joshua Zahl. An improved bound on the hausdorff dimension of besicovitch sets in $\mathbb{R}^3$. *Journal of the American Mathematical Society*, 32(1):195–259, 2019.

[19] Nets Hawk Katz and Joshua Zahl. A kakeya maximal function estimate in four dimensions using planebrushes. *Revista Matemática Iberoamericana*, 37(1):317–359, 2020.

[20] Izabella Łaba. From harmonic analysis to arithmetic combinatorics. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 45(1):77–115, 2008.

[21] Izabella Laba and Terence Tao. An improved bound for the minkowski dimension of besicovitch sets in medium dimension. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, 11(4):773–806, 2001.

[22] Terence Tao. From rotating needles to stability of waves: Emerging connections between. *Notices of the AMS*, 48(3), 2001.

[23] Terence Tao, Ana Vargas, and Luis Vega. A bilinear approach to the restriction and Kakeya conjectures. *Journal of the American Mathematical Society*, 11(4):967–1000, 1998.

[24] Thomas Wolff. Recent work connected with the kakeya problem. *Prospects in mathematics (Princeton, NJ, 1996)*, 2:129–162, 1999.

[25] Thomas H Wolff. An improved bound for kakeya type maximal functions. *Revista Matemática Iberoamericana*, 11(3):651–674, 1995.

[26] Joshua Zahl. New kakeya estimates using gromov's algebraic lemma. *Advances in Mathematics*, 380:107596, 2021.