פתרון תרגילים החציוניות

הדרכה

i. במערך B יש $n/5$ איברים

ii. במערך B, יש ה-$n/10$ = ה-$\frac{n/5}{2}$ איברים קטנים מהחציון, ו ה-$n/10$ איברים אשר גדולים מהחציון.

iii. נראה שכל איבר ב במערך B מקיים שקיימות 2 איברים במערך A קטנים ממנו, ו קיימות 2 גדולים ממנו:
נניח בשלילה כי קיימות אחד מן התנאים שהצגנו לא מתקיימים.
אם אחד התנאים אינם מתקיימים, b אינו החציון במערך A,
ומכאן יש סתירה להנחה, והטענה נכונה כנדרש

iv.

ה-k איברים קטנים ל median

אז n-k איברים גדולים ל median

איברים בחמישייה +2 ・ איברים בחמישייה -2

$$3n/10 - c \le (3n/10) - 3 \le k \le 7n/10 + 3 \le 7n/10 + c$$

$$\Downarrow$$

$$c \ge 3$$

א) יהי n גודל המערך A. מכאן נסיק שבמערך החציוניים B יש $\frac{n}{5}$ איברים. יהי x החציון של B. לכן, קיימים $\frac{n/5}{2}-1$ איברים שקטנים ממנו, ו $\frac{n/5}{2}-1$ איברים שגדולים ממנו.

*כעת נוכיח שכל איבר במערך B מקיים שלפחות 2 איברים במערך A קטנים ממנו ולפחות 2 איברים במערך גדולים ממנו.

הוכחה (*):

נתון: b איבר במערך B. נניח בשלילה שלפחות אחד מן המקרים אינו מתקיים. אולם, אם אחד התנאים לא מתקיים, b איננו החציון, ובסתירה לכך ש b נמצא במערך החציונים B. לכן הטענה נכונה כנדרש.

מטענת (*) ניתן לומר ש- $x \geq 3\cdot\left(\frac{n}{10}-1\right)$

3: שלושת האיברים החיצוניים בחמישייה בה החציון קטן מ-x.

$\frac{n}{10}-1$: מס' החמישיות בהן לפחות 3 איברים קטנים מ x

מטענת (*) בנוסף, ניתן לומר ש $x \leq n-\left(3\cdot\left(\frac{n}{10}-1\right)\right)$

n: מס' האיברים

3: שלושת האיברים האמצעיים בחמישייה בה החציון גדול מ-x.

$\frac{n}{10}-1$: מס' החמישיות בהן לפחות 3 איברים גדולים מ x

$$n-\left(3\cdot\left(\frac{n}{10}-1\right)\right)$$

קיי

$$n-\left(\frac{3n}{10}-3\right)$$

$$\Downarrow$$

$$n - \frac{3n}{10} + 3$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{7n}{10} + 3}$$

כעת, קיבלנו את אי השוויון הבא:

$$3n/10 - 3 \leq k \leq 7n/10 + 3 \quad (**)$$

עלינו להראות, שאלגוריתם החמישיות מקיים את התכונות הבאות עבור $c>0$ קבוע:

$$(3n/10) - c \leq k \leq (7n/10) + c$$

באי השוויון (**) אנו מתייחסים אל האיברים במערך, מלבד ארבעת האיברים הנותרים בחמישייה של x. לפי (*), כעת ששני איברים מתוך הארבעה בהכרח גדולים ממנו, ושני איברים בהכרח קטנים ממנו. לכן,

$$(3n/10) - 1 \leq k \leq (7n/10) + 1$$

הראינו שהטענה מתקיימת עבור $c>0$ קבוע.

כנדרש ∎

ב) נוסחת הנסיגה בהתחשב בנתונים היא:

$$T(n) = T\left(\frac{7n}{10}\right) + n$$

קריאה רקורסיבית עבור מערך שגודלו $\frac{7n}{10}$ משום שזה הגודל בדיוק של האיבר ה $\frac{7n}{10}$ בסדר.

עלות partition

ג) נפתור את נוסחת הנסיגה באמצעות משפט האב:

$f(n)=n$ $\qquad$ $\log_{\frac{10}{7}} 1 = 0 \Leftarrow a=1,\ b=\frac{10}{7}$

נראה כי מתקיים משפט האב השלישי, כלומר שמתקיים:

$f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ עבור $\varepsilon>0$ כלשהו

מתקיים:

$$f(n) \ge (n^{\log_b a+\varepsilon})$$

$$f(n) \overset{\text{הצבה}}{\ge} (n^{0+\varepsilon})$$

נבחר $\varepsilon=\frac{1}{2}$, ויתקיים $n \ge \sqrt{n}$

כעת נראה שמתקיים $af(n/b) \le C\cdot f(n)$ עבור קבוע $C<1$

$$f\left(\frac{7n}{10}\right) \le C\cdot f(n)$$

נבחר $C=0.8$ ואכן יתקיים

$$0.7n \le 0.8n$$

ולכן $T(n)=\Theta(n)$ כנדרש ■

ניתוח יעילות insertion-sort

המקרה הגרוע ביותר: מערך בסדר יורד.

1	2							n
n	n-1							1

באלגוריתם לולאה מקוננת. נוסחת הנסיגה היא:

$$\begin{cases} T_{worst}(n) = T_{worst}(n-1) + \Theta(n) \\ T_{worst}(1) = 1 \end{cases}$$

חישוב יעילות:

$$n+(n-1)+(n-2)+(n-3)+\dots = \sum_{i=1}^{n} i$$

קיבלנו סכום סדרה חשבונית, לכן לפי הנוסחה נקבל

$$\boxed{T_{worst} = \Theta(n^2)}$$

חישוב יעילות selection

עלינו להסתכל על המקרה הגרוע על פי הרקורסיה של הנוסחה.

$$\begin{cases} T_{worst}(n) = \Theta(n) + T_{worst}(i) \\ T(1) = \Theta(1) \end{cases}$$

עבור $1 \le i \le n-1$.

נפתור את הנוסחה הרקורסיבית באופן הבא:

חישוב יעילות:

$$n+(n-1)+(n-2)+(n-3)+\dots = \sum_{i=1}^{n} i$$

קיבלנו סכום סדרה חשבונית, לכן לפי הנוסחה נקבל

$$\boxed{T_{worst} = \Theta(n^2)}$$