Analiza matematyczna - PS

Informatyka, sem.I, studia niestacjonarne I stopnia, 2024/25

Lista nr 1: Funkcje jednej zmiennej. Własności funkcji

Zad. 1. Sprawdzić, czy podane funkcje są rosnące na wskazanych zbiorach:

a) $f(x)=x^2,\ x\in \langle 0;\infty)$

b) $g(x)=\displaystyle\frac{1}{x^4+1},\ x\in(-\infty;0\rangle$

c) $h(x)=\sqrt[3]{x},\ x\in(-\infty;0\rangle;$

d) $p(x)=\sqrt{x+1},\ x\in\langle -1;\infty)$

In [1]:

```
#a
x1,x2 = var('x1,x2')
assume(x1<x2, x1>=0)
f(x) = x^2
bool(f(x1)<f(x2))
```

Out[1]:

```
True
```

In [4]:

```
#b
forget()
x1,x2 = var('x1,x2')
assume(x1<x2, x2<=0)
g(x) = 1/((x^4)+1)
bool(g(x1)<g(x2))
```

Out[4]:

```
True
```

In [21]:

```
#c
forget()
x1,x2 = var('x1,x2')
assume(x1<x2, x2<=0)
h(x) = x^(1/3)
bool(h(x1)<h(x2))
#Bool pokazuje false ze względu na ograniczone możliwości SageMath

#Alternatywne rozwiązanie:
#x1 = -1, x2 = 0, x1<x2, x2<=0
bool(h(-1)<h(0))
```

Out[21]:

```
True
```

In [22]:

```
#d
forget()
x1,x2 = var('x1,x2')
assume(x1<x2, x1>=-1)
p(x) = (x+1)^(1/2)
bool(p(x1)<p(x2))
#Bool pokazuje false ze względu na ograniczone możliwości SageMath

#Alternatywne rozwiązanie:
#x1 = -1, x2 = 0, x1<x2, x1>=0
bool(p(-1)<p(0))
```

Out[22]: True

Zad. 2. Sprawdzić, czy podane funkcje są malejące na wskazanych zbiorach:

a) \$f(x)=3-4x,\ x\in\mathbb{R}\$

b) \$g(x)=x^2-2x,\ x\in(-\infty;1\rangle\$

c) \$h(x)=\displaystyle\frac{1}{1+x^2},\ x\in\langle 0;\infty)\$

d) \$p(x)=\displaystyle\frac{1}{1+x},\ x\in(-\infty;-1)\$

In [18]:

```
#a
forget()
x1,x2 = var('x1,x2')
assume(x1<x2)
f(x) = 3-4*x
bool(f(x1)>f(x2))
```

Out[18]: True

In [32]:

```
#b
forget()
x1,x2 = var('x1,x2')
assume(x1<x2, x2<=0)
g(x) = x^2-2*x
bool(g(x1)>g(x2))
```

Out[32]: True

In [27]:

```
#c
forget()
x1,x2 = var('x1,x2')
assume(x1<x2, x1>=0)
h(x) = 1/(1+x^2)
bool(h(x1)>h(x2)>0)
```

Out[27]: True

In [47]:

```
#d
forget()
```

```
x1,x2 = var('x1,x2')
assume(x1<x2, x2<-1)
p(x) = 1/(1+x)
bool(p(x1)>p(x2))
```

Out[47]:
```
True
```

Zad. 3. Sprawdzić, czy podane funkcje są różnowartościowe na wskazanych zbiorach:

a) $f(x)=x^3+1,\ x\in\mathbb{R}$

b) $g(x)=\displaystyle\frac{1}{x^2},\ x\in(-\infty;0)$

c) $h(x)=\sqrt{x}+1,\ x\in\langle 0;\infty)$

In [29]:
```
#a
forget()
x1,x2 = var('x1,x2')
assume(x1!=x2)
f(x) = x^3+1
bool(f(x1)!=f(x2))
#Bool pokazuje false ze względu na ograniczone możliwości SageMath

#Alternatywne rozwiązanie:
#x1 = 1, x2 = -1, x1!=x2
bool(f(1)!=f(-1))
```

Out[29]:
```
True
```

In [30]:
```
#b
forget()
x1,x2 = var('x1,x2')
assume(x1!=x2, x1<0, x2<0)
g(x) = 1/(x^2)
bool(g(x1)!=g(x2))
```

Out[30]:
```
True
```

In [36]:
```
#c
forget()
x1,x2 = var('x1,x2')
assume(x1!=x2, x1>=0, x2>=0)
h(x) = x^(1/2)+1
bool(h(x1)!=h(x2))
#Bool pokazuje false ze względu na ograniczone możliwości SageMath

#Alternatywne rozwiązanie:
#x1 = 0, x2 = 1, x1!=x2, x1>=0, x2>=0
bool(h(0)!=h(1))
```

Out[36]:
```
True
```

Zad. 4. Sprawdzić, które z podanych funkcji są parzyste, a które nieparzyste:

a) $\displaystyle f(x)=x^4-3x^2+1$

b) $\displaystyle g(x)=2^x+2^{-x}$

c) $\displaystyle h(x)=|\sin x|$

d) $\displaystyle p(x)=\frac{\sin x}{x^3}$

e) $\displaystyle f(x)=\frac{2+x^2}{x^5},$

f) $\displaystyle g(x)=\sin^3 x$

g) $\displaystyle h(x)=3^x-3^{-x}$

h) $\displaystyle p(x)=x|x|$

In [51]:
```
#a
f(x) = x^4-3*x^2+1
bool(f(x)==f(-x))
```
Out[51]:
```
True
```
In [52]:
```
#b
g(x) = 2^x+2^-x
bool(g(x)==g(-x))
```
Out[52]:
```
True
```
In [62]:
```
#c
h(x) = abs(sin(x))
bool(h(x)==h(-x))
```
Out[62]:
```
True
```
In [74]:
```
#d
forget()
assume(x!=0)
p(x) = sin(x)/(x^3)
bool(p(x)==p(-x))
```
Out[74]:
```
True
```
In [183…
```
#e
forget()
assume(x!=0)
f(x) = (2+x^2)/(x^5)
bool(f(x)==f(-x))
```
Out[183]:
```
False
```
In [196…
```
#f
g(x) = sin(x)^3
```

```
bool(g(x)==g(-x))
```

Out[196]: False

In [185…

```
#g
h(x) = 3^x-3^(-x)
bool(h(x)==h(-x))
```

Out[185]: False

In [77]:

```
#h
p(x) = x*abs(x)
bool(p(x)==p(-x))
```

Out[77]: False

Zad. 5. Określić funkcje złożone $f\circ f$, $f\circ g$, $g\circ f$, $g\circ g$ oraz ich dziedziny, jeżeli:

a) $\displaystyle f(x)=|x|, \ g(x)=-3x+2$

b) $\displaystyle f(x)=\sqrt{x},\ g(x)=x^3+1$

c) $\displaystyle f(x)=x^2,\ g(x)=\sqrt{x},$

d) $\displaystyle f(x)=2^x,\ g(x)=\cos x$

e) $\displaystyle f(x)=x^3,\ g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

f) $\displaystyle f(x)=\frac{x}{1+x^2},\ g(x)=\frac{1}{x},$

g) $\displaystyle f(x)=\log x,\ g(x)=x^2+1.$

In [194…

```
#a
f(x) = abs(x)
g(x) = -3*x+2

show('f∘f =', f(f(x)))
#Dziedzina f∘f, x należy do R

show('f∘g =', f(g(x)))
#Dziedzina f∘g, x należy do R

show('g∘f =', g(f(x)))
#Dziedzina g∘f, x należy do R

show('g∘g =', g(g(x)))
#Dziedzina g∘g, x należy do R
```

In [187…

```
#b
f(x) = x^(1/2)
```

```
g(x) = x^3+1

show('f∘f =', f(f(x)))
#Dziedzina f∘f, x należy do R

show('f∘g =', f(g(x)))
#Dziedzina f∘g, x należy do R\{-1}

show('g∘f =', g(f(x)))
#Dziedzina g∘f, x należy do R

show('g∘g =', g(g(x)))
#Dziedzina g∘g, x należy do R
```

In [94]:

```
#c
f(x) = x^2
g(x) = x^(1/2)

show('f∘f =', f(f(x)))
#Dziedzina f∘f, x należy do R

show('f∘g =', f(g(x)))
#Dziedzina f∘g, x należy do R

show('g∘f =', g(f(x)))
#Dziedzina g∘f, x należy do R

show('g∘g =', g(g(x)))
#Dziedzina g∘g, x należy do R
```

In [96]:

```
#d
f(x) = 2^x
g(x) = cos(x)

show('f∘f =', f(f(x)))
#Dziedzina f∘f, x należy do R

show('f∘g =', f(g(x)))
#Dziedzina f∘g, x należy do R

show('g∘f =', g(f(x)))
#Dziedzina g∘f, x należy do R

show('g∘g =', g(g(x)))
#Dziedzina g∘g, x należy do R
```

In [98]:

```
#e
f(x) = x^3
g(x) = 1/(x^(1/3))
```

```
show('f∘f =', f(f(x)))
#Dziedzina f∘f, x należy do R

show('f∘g =', f(g(x)))
#Dziedzina f∘g, x należy do R\{0}

show('g∘f =', g(f(x)))
#Dziedzina g∘f, x należy do R\{0}

show('g∘g =', g(g(x)))
#Dziedzina g∘g, x należy do R
```

In [100…

```
#f
f(x) = x/(1+x^2)
g(x) = 1/x

show('f∘f =', f(f(x)))
#Dziedzina f∘f, x należy do R

show('f∘g =', f(g(x)))
#Dziedzina f∘g, x należy do R\{0}

show('g∘f =', g(f(x)))
#Dziedzina g∘f, x należy do R\{0}

show('g∘g =', g(g(x)))
#Dziedzina g∘g, x należy do R
```

In [106…

```
#g
f(x) = log(x)
g(x) = x^2+1

show('f∘f =', f(f(x)))
#Dziedzina f∘f, x należy do (1, ∞)

show('f∘g =', f(g(x)))
#Dziedzina f∘g, x należy do R

show('g∘f =', g(f(x)))
#Dziedzina g∘f, x należy do (0, ∞)

show('g∘g =', g(g(x)))
#Dziedzina g∘g, x należy do R
```

Zad. 6. Znaleźć funkcję odwrotną do podanej:

a) $\displaystyle f(x)=x^2-2x,\ x\in\langle 1;\infty)$

b) $\displaystyle g(x)=2-\sqrt[5]{x+1},\ x\in\mathbb{R}$

c) $\displaystyle h(x)=x^3|x|,\ x\in\mathbb{R},$

d) $\displaystyle p(x)=\left\{ \begin{array}{rrr} 3^x & \mbox{ dla } &x<0\\ 5^x & \mbox{ dla } &x\geqslant 0 \end{array}\right. ,\ x\in\mathbb{R}$

e) $\displaystyle f(x)=1-3^{-x}$

f) $\displaystyle g(x)=x^5+\sqrt{3},$

g) $\displaystyle h(x)=x^6\mathrm{sgn\,}x$

h) $\displaystyle q(x)=\left\{ \begin{array}{rrr} -x^2 & \mbox{ dla } &x<0\\ 2+x & \mbox{ dla } &x\geqslant 0 \end{array}\right. ,\ x\in\mathbb{R}$

i) $\displaystyle f(x)=\frac{x}{1+|x|}.$

In [197…

```
#a
forget()
assume(x>=1)
f(x) = x^2-2*x
show(solve(y==f(x),x))
#Rozwiązanie drugie jest poprawne ponieważ, pierwsza jest mniejsza od 1
```

In [200…

```
#b
forget()
g(x) = 2-(x+1)^(1/5)
```

In [203…

```
#c
forget()
assume(x, 'real')
h(x) = x^3*abs(x)
show(solve(y==h(x),x))
```

In [204…

```
#d
forget()
assume(x<0)
p1(x) = 3^x
show(solve(y==p1(x),x))

forget()
assume(x>=0)
p2(x) = 5^x
show(solve(y==p2(x),x))
```

In [205…

```
#e
forget()
assume(x, 'real')
```

```
f(x) = 1-3^(-x)
show(solve(y==f(x),x))
```

In [207…

```
#f
forget()
g(x) = x^5+sqrt(3)
show(solve(y==g(x),x))
```