TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH

BÀI TẬP MÔN
PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

HOMEWORK 01:

ĐÁNH GIÁ THUẬT TOÁN
DÙNG KỸ THUẬT TOÁN SƠ CẤP

GV hướng dẫn: Huỳnh Thị Thanh Thương

Nhóm sinh viên thực hiện:

Họ và tên	*MSSV*	*Mã lớp*
1. Trần Đình Khánh Đăng	**22520195**	**CS112.O22**
2. Lê Minh Nhựt	**22521060**	**CS112.O22**
3. Lê Cảnh Nhật	**22521016**	**CS112.O22**
4. Nguyễn Hùng Phát	**22521074**	**CS112.O22**

TP. Hồ Chí Minh, ngày 15 tháng 3 năm 2024

BÀI 1: TÍNH TỔNG HỮU HẠN

1.1

a. $S = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 999$

Số số hạng từ 1 đến 999 cách nhau 2 đơn vị $= \dfrac{999 - 1}{2} + 1 = 500$

$S = \dfrac{(999 + 1)500}{2} = 250000$

b. $2 + 4 + 8 + 16 + ... + 1024 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{10} - 1$
$= \dfrac{2^{10+1} - 1}{2 - 1} - 1 = 2046$

c. $\displaystyle\sum_{i=3}^{n+1} 1 = n + 1 - 3 + 1 = n - 1$

d. $\displaystyle\sum_{i=3}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n+1} i - \sum_{i=1}^{2} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 3 = \frac{n^2 + 3n - 4}{2}$

e. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} i(i+1) = \sum_{i=0}^{n-1}(i^2 + i) = \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \sum_{i=0}^{n-1} i$
$\displaystyle= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^3 - n}{3}$

f. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} 3^{j+1} = 3\sum_{j=1}^{n} 3^j = 3(\sum_{j=0}^{n} 3^j - 3^0) = 3\sum_{j=0}^{n} 3^j - 3 = 3.\frac{3^{n+1} - 1}{2} - 3$
$\displaystyle= \frac{3^{n+2} - 9}{2}$

g. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij = \sum_{i=1}^{n} i\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

h. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}$
$\displaystyle= (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1})$
$\displaystyle= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + ... - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
$\displaystyle= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

i. $\displaystyle\sum_{j\in\{2,3,5\}} (j^2 + j) = 2^2 + 2 + 3^2 + 3 + 5^2 + 5 = 48$

j. $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{100}(i+j) = 101\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n}(i+j) = 101(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n} i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n} j)$

Đặt $A = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n} i = (n+1)\sum_{i=1}^{m} i = (n+1)\frac{m(m+1)}{2}$

Đặt $B = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n} j = \sum_{i=1}^{m}\frac{n(n+1)}{2} = m\frac{n(n+1)}{2}$

Suy ra:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{100}(i+j) = 101(A+B) = \frac{101}{2}(n+1)m(m+1) + \frac{101}{2}mn(n+1)$$
$$= \frac{101}{2}m(n+1)(m+n+1)$$

1.2

a. $\sum_{i=0}^{n-1}(i^2+1)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} i^4 + \sum_{i=0}^{n-1} 2i^2 + \sum_{i=0}^{n-1} 1$

Đặt $A = \sum_{i=0}^{n-1} i^4 = \sum_{i=0}^{n} i^4 - n^4 \approx \frac{1}{4+1}.n^{4+1} - n^4 = \frac{n^5}{5} - n^4$

Đặt $B = \sum_{i=0}^{n-1} 2i^2 + \sum_{i=0}^{n-1} 1 = 2\sum_{i=0}^{n-1} i^2 + n = 2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + n$

Suy ra: $\sum_{i=0}^{n-1}(i^2+1)^2 = A + B \approx \frac{n^5}{5} - n^4 + 2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + n$

b. $\sum_{i=2}^{n-1} \lg i^2 = 2\sum_{i=2}^{n-1} \lg i = 2(\sum_{i=1}^{n-1} \lg i - \lg 1) = 2\sum_{i=1}^{n-1} \lg i = 2\lg[(n-1)!]$

- Ta có kết quả trên vì:
  $\sum_{i=1}^{n} \log_\alpha i = \log_\alpha 1 + \log_\alpha 2 + \log_\alpha 3 + ... + \log_\alpha n$
  $= \log_\alpha(1.2.3...n) = \log_\alpha(n!)$
  (Công thức này sẽ áp dụng luôn cho các bài về sau)

c. $\sum_{i=1}^{n}(i+1)2^{i-1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(i2^i + 2^i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i2^i + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} 2^i - \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}[(n-1)2^{n+1}+2] + \frac{1}{2}(2^{n+1}-1) - \frac{1}{2} = (n-1)2^n + 1 + 2^n - 1 = n2^n$

d. $\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i-1}(i+j) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i-1} i + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i-1} j$

Đặt $A = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i-1} i = \sum_{i=0}^{n-1}[(i-1+1)i] = \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$

Đặt $B = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i-1} j = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(i-1)i}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(i^2 - i) = \frac{1}{2}(\sum_{i=0}^{n-1} i^2 - \sum_{i=0}^{n-1} i)$

$= \frac{1}{2}[\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{(n-1)n}{2}]$

Suy ra: $\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i-1}(i+j) = A + B = \frac{3}{2}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{(n-1)n}{4}$

$= \frac{(n-1)n(2n-2)}{4} = \frac{n^3}{2} - n^2 + \frac{n}{2}$

BÀI 2

Đề bài

```
s = 0;
i = 1;
while (i ≤ n) do
    j = 1;
    while (j ≤ i^2) do
        s = s + 1;
        j = j + 1;
    end do;
    i = i + 1;
end do;
```

Lời giải

- Gọi α_i là số lần lặp while trong (xét độc lập while với ngoài)
  $\alpha_i =$ số con j với j chạy từ 1 đến i^2 , bước tăng là 1
  $\Rightarrow \alpha_i = i^2 - 1 + 1 = i^2$
- Kết luận:
  $G(n) = 2+2n+\sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i = 2+2n+2\sum_{i=1}^{n} i^2 = 2+2n+2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
  $SS(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} 1$
  $= n + 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n = 2n + 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

BÀI 3

Đề bài

```
float Alpha(float x, long n)
    {       long i = 1; float z = 0;
            while (i ≤ n)
            {       long j = 1; float t = 1;
                    while (j ≤ i)
                    {       t = t * x;
                            j = 2 * j;
                    }
                    z = z + 2 * t;
                    i = i + 1;
            }
            return z;
    }
```

Lời giải

- Gọi α_i là số lần lặp của $while$ trong (xét độc lập với $while$ ngoài)
  $\alpha_i =$ số con j với j chạy từ $1 \to i$, bước tăng gấp đôi
  $\Rightarrow j \in \{2^0, 2^1, 2^2, ..., 2^k\}$
- Số con k thỏa $1 \le 2^k \le i \Leftrightarrow 0 \le k \le \log_2 i$
  $\Rightarrow \alpha_i = \log_2 i + 1$
- Kết luận:

$$G(n) = 2 + 4n + 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 2 + 4n + 2\sum_{i=1}^{n}(\log_2 i + 1)$$

$$= 2 + 4n + 2\sum_{i=1}^{n}\log_2 i + 2\sum_{i=1}^{n} 1 = 2 + 6n + 2\log_2(n!)$$

$$SS(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n}(\log_2 i + 2)$$

$$= n + 1 + \sum_{i=1}^{n}\log_2 i + \sum_{i=1}^{n} 2 = 3n + 1 + \log_2(n!)$$

BÀI 4

Đề bài

$s = 0; i = 1;$
while $(i \le n)$
{ $j = n - i$
  while $(j \le 2 * i)$
  { $sum = sum + i * j;$
    $j = j + 2;$
  }
  $k = i;$
  while$(k > 0)$
  { $sum = sum + 1;$
    $k = \frac{k}{2};$
  }
  $i = i + 1;$
}

Lời giải

- Gọi α_i là số lần lặp $while$ trong thứ nhất (xét độc lập $while$ với ngoài)
  - $\alpha_i =$ số con j với j chạy từ $n - i \to 2i$, bước tăng là 2
  - $\alpha_i = \dfrac{2i - (n-i)}{2} + 1 = \dfrac{3i - n + 2}{2}$
- $while$ trong thứ nhất được thực hiện khi: $j \le 2i \Leftrightarrow n - i \le 2i \Leftrightarrow i \ge \dfrac{n}{3}$
- Do đó: $\alpha_i = \begin{cases} \dfrac{3i-n+2}{2}, & \text{khi } i \ge \dfrac{n}{3} \\ 0, & \text{khi } i < n/3 \end{cases}$
- Gọi β_i là số lần lặp $while$ trong thứ hai (xét độc lập $while$ với ngoài)
  - $\beta_i =$ số con k với k chạy từ $i \to 1$, bước giảm là $\dfrac{k}{2}$
  $\Rightarrow k \in \{\frac{i}{2^0}, \frac{i}{2^1}, \frac{i}{2^2}, ..., \frac{i}{2^t}\}$
  - Số con t thỏa: $0 < \dfrac{i}{2^t} \le i \Leftrightarrow 1 \le \dfrac{i}{2^t} \le i \Leftrightarrow 1 \le 2^t \le i$
  $\Leftrightarrow 0 \le t \le \log_2 i$
  $\Rightarrow \beta_i = \log_2 i + 1$

- Kết luận:

$$G(n) = 2 + 3n + \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} 2\beta_i$$
$$= 2 + 3n + \sum_{i=\frac{n}{3}}^{n}(3i - n + 2) + 2\sum_{i=1}^{n}(\log_2 i + 1)$$
$$= 2 + 3n + 3\sum_{i=\frac{n}{3}}^{n} i + (2 - n)\sum_{i=\frac{n}{3}}^{n} 1 + 2\sum_{i=1}^{n}\log_2 i + 2\sum_{i=1}^{n} 1$$
$$= 2 + 5n + 3(\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{\frac{n}{3}-1} i) + (2 - n)(n - \frac{n}{3} + 1) + 2\log_2(n!)$$
$$= 2 + 5n + (2 - n)(n - \frac{n}{3} + 1) + 3(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{\frac{n}{3}(\frac{n}{3} - 1)}{2}) + 2\log_2(n!)$$
$$SS(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1) + \sum_{i=1}^{n}(\beta_i + 1)$$
$$= n + 1 + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i + \sum_{i=1}^{n}\beta_i + 2\sum_{i=1}^{n} 1$$
$$= 3n + 1 + \sum_{i=\frac{n}{3}}^{n}\frac{3i - n + 2}{2} + \sum_{i=1}^{n}(\log_2 i + 1)$$
$$= 3n + 1 + \frac{3}{2}\sum_{i=\frac{n}{3}}^{n} i + \frac{2 - n}{2}\sum_{i=\frac{n}{3}}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n}\log_2 i + \sum_{i=1}^{n} 1$$
$$= 4n + 1 + \frac{3}{2}(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{\frac{n}{3}(\frac{n}{3} - 1)}{2}) + \frac{(2 - n)}{2}(n - \frac{n}{3} + 1) + \log_2(n!)$$

BÀI 5

Đề bài

$i = 1;$
$res = 0;$
while $(i \leq n)$ do
  $j = 1;$
  $k = 1;$
  while $(j \leq i)$ do
    $res = res + i * j;$
    $k = k + 2;$
    $j = j + k;$
  endw
  $i = i + 1;$
endw

Lời giải

- Gọi α_i là số lần lặp của vòng $while$ trong
  $\alpha_i =$ số con j với j chạy từ $1 \to i$

- $j \in \{1; 1+3; 1+3+5; 1+3+5+7; ...\}$
  $\Leftrightarrow j \in \{1; 4; 9; 16; ...\}$
  $\Leftrightarrow j \in \{1^2; 2^2; 3^2; 4^2; ...; k^2\}$
  Đếm số con k thỏa: $1 \leq k^2 \leq i \Leftrightarrow 1 \leq k \leq \sqrt{i}$
  Vậy số lần lặp của $while$ trong là $\alpha_i = \sqrt{i} - 1 + 1 = \sqrt{i}$

- Kết luận:

$$G(n) = 2 + 3n + \sum_{i=1}^{n} 3\alpha_i = 2 + 3n + 3\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} = 2 + 3n + 3\sum_{i=1}^{n} i^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx 2 + 3n + 3\frac{1}{\frac{1}{2}+1} n^{\frac{1}{2}+1} = 2 + 3n + 2n^{\frac{3}{2}}$$

$$SS(n) = (n+1) + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_1 + 1) = (n+1) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= (n+1) + n + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 2n + 1 + \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} = 2n + 1 + \sum_{i=1}^{n} i^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx 2n + 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}+1} n^{\frac{1}{2}+1} = 2n + 1 + \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}$$

BÀI 6

Đề bài

```
i = 1;
count = 0;
while (i ≤ 4n) do
{
    x = (n − i)(1 − 3n);
    y = i − 2n;
    j = 1;
    while (j ≤ x)
    {
        if(i ≥ 2y)
            count = count − 2;
        j = j + 1;
    }
    i = i + 1;
}
```

Lời giải

- Gọi α_i là số lần lặp của $while$ trong (xét độc lập với $while$ ngoài)
  $\alpha_i =$ số con j với j chạy từ $1 \rightarrow x$, bước tăng là 1
  $\alpha_i = x - 1 + 1 = x$

- $while$ trong thực hiện được khi: $1 \leq x$
  $\Leftrightarrow 1 \leq (n-i)(i-3n)$
  $\Leftrightarrow (n-i)(i-3n) > 0$
  $\Leftrightarrow n < i < 3n$

- Do đó
  $\alpha_i = \begin{cases} x = (n-i)(i-3n), & \text{khi } x > 0 \Leftrightarrow n < i < 3n \\ 0, & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$

- Bảng xét dấu:

i	1		n		$2n$		$3n$		$4n$
$x = (n-i)(i-3n)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$y = i - 2n$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

- Câu lệnh $if(i \geq 2y)$ có số lần so sánh bằng với số lần lặp của $while$ trong
  $\Rightarrow$ Số phép so sánh được thực hiện α_i lần
- Câu lệnh $(count = count - 2)$ xảy ra khi $i \geq 2y \Leftrightarrow i \geq 2i - 4n$
  $\Leftrightarrow i \leq 4n$
  $\Rightarrow$ Số phép gán được thực hiện α_i lần
- Kết luận:
  $$G(n) = 2 + 16n + \sum_{i=1}^{4n} 2\alpha_i = 2 + 16n + 2\sum_{i=n+1}^{3n-1}(n-i)(i-3n)$$
  $$SS(n) = 4n + 1 + \sum_{i=1}^{4n}(\alpha_i + \alpha_i + 1) = 8n + 1 + 2\sum_{i=n+1}^{3n-1}(n-i)(i-3n)$$

BÀI 7

Đề bài

$i = 1; count = 0;$
while $(i \leq 4 * n)$
{
  $x = (n - i) * (i - 3n);$
  $y = i - 2 * n;$
  $j = 1;$
  while $(j \leq x)$
  {
    $if(i \geq 2 * n)$
      $count = count - 2;$
    $j + +;$
  }
  $if(x > 0)$
    $if(y > 0)$
      $count = count + 1;$
  $i + +;$
}

Lời giải

- Gọi α_i là số lần lặp của $while$ trong (xét độc lập với $while$ ngoài)
  $=$ số con j với j chạy từ $1 \to x$, bước tăng là 1
  $\Rightarrow \alpha_i = x - 1 + 1 = x$

- $while$ trong thực hiện được khi: $1 \leq x$
  $\Leftrightarrow 1 \leq (n - i)(i - 3n)$
  $\Leftrightarrow (n - i)(i - 3n) > 0$
  $\Leftrightarrow n < i < 3n$

- Do đó:
  $$\alpha_i = \begin{cases} x = (n - i)(i - 3n), & \text{khi } x > 0 \Leftrightarrow n < i < 3n \\ 0, & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$$

- Câu lệnh if $(i \geq 2n)$ có số lần so sánh ở mỗi lần lặp của $while$ ngoài bằng với số lần lặp của $while$ trong = α_i

- Phép gán bên trong ($count = count - 2$) thực hiện khi điều kiện $i \geq 2n$ đúng

$\Rightarrow$ Với mỗi lần lặp của $while$ ngoài, câu lệnh trên có số phép gán = α_i, với mọi $i \geq 2n$

- Bảng xét dấu:

i	1	n		$2n$		$3n$		$4n$
$x = (n-i)(i-3n)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$y = i - 2n$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	

- Ta thấy $y > 0$ chỉ thực hiện khi $x > 0$ đúng:
  Số lần $= 3n - 1 - (n+1) + 1 = 2n - 1$ (ss)

- Câu lệnh $count = count + 1$ chỉ xảy ra khi x > 0 và y > 0:
  Số lần $= 3n - 1 - (2n+1) + 1 = n - 1$ (g)

- Kết luận:

$$G(n) = 2 + 16n + n - 1 + \sum_{i=1}^{4n} \alpha_i + \sum_{i=2n}^{4n} \alpha_i$$

$$= 1 + 17n + \sum_{i=n+1}^{3n-1} (n-i)(i-3n) + \sum_{i=2n}^{3n-1} (n-i)(i-3n)$$

- $SS(n) = 4n + 1 + 4n + 2n - 1 + \sum_{i=1}^{4n} (2\alpha_i + 1)$

$$= 14n + 2 \sum_{i=n+1}^{3n-1} (n-i)(i-3n)$$

BÀI 8

Đề bài

```
i = 1; count = 0;
while (i <= 3 * n)
{
    x = 2 * n - i;
    y = i - n;
    j = 1;
    while (j <= x)
    {
        if(j >= n)
            count = count - 1;
        j = j + 1;
    }
    if(y > 0)
        if(x > 0)
            count = count + 1;
    i = i + 1;
}
```

Lời giải

- Gọi α_i là số lần lặp $while$ trong (xét độc lập $while$ với ngoài)
  - $\alpha_i =$ số con j với j chạy từ $1 \to x$, bước tăng là 1
  - $\alpha_i = x - 1 + 1 = x = 2n - i$
- $while$ trong được thực hiện khi: $j \leq x \Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow x > 0$
- Vậy: $\alpha_i = \begin{cases} 2n - i, & \text{khi } x > 0 \Leftrightarrow i < 2n \\ 0, & \text{khi } x \leq 0 \Leftrightarrow i \geq 2n \end{cases}$
- Bảng xét dấu

i	1		n		$2n$		$3n$
$x = 2n - i$		$+$		$+$	0	$-$	
$y = i - 2n$		$-$	0	$+$		$+$	

- Câu lệnh $if(j \geq n)$ chỉ thực hiên khi $n \leq j \leq 2n - i$
  Suy ra với mỗi lần lặp của while ngoài $count = count - 1$ có số lần lặp là là $2n - i - n + 1 = n - i + 1$, với $1 \leq i < 2n$
- Câu lệnh $if(x > 0)$ chỉ thực hiện khi $(y > 0)$ xảy ra. Tức là $n < i \leq 3n$
  Suy ra có $3n - (n + 1) - 1 = 2n$ phép so sánh
- Câu lệnh gán $count = count + 1$ chỉ thực hiện khi $(x > 0)$ và $(y > 0)$. Tức là $n < i < 2n$
  Suy ra có $n - 1$ phép gán
- Kết luận:

$$G(n) = 2 + 12n + \sum_{i=1}^{3n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{2n-1} (n - i + 1) + n - 1$$

$$= 13n + 1 + \sum_{i=1}^{2n-1} (2n - i) + \sum_{i=1}^{2n-1} (n - i + 1) = 15n + 1 + \sum_{i=1}^{2n-1} (3n - 2i)$$

$$SS(n) = 3n + 1 + \sum_{i=1}^{3n} (2\alpha_i + 1) + 2n + 3n = 8n + 1 + \sum_{i=1}^{2n-1} 2\alpha_i + \sum_{i=1}^{3n} 1$$

$$= 11n + 1 + 2\sum_{i=1}^{2n-1} (2n - i)$$

BÀI 9

Đề bài

$sum = 0; i = 1; idx = -1;$
while $(i \leq n)$ {
    $j = 1;$
    while $(j \leq n)$ {
        if $((i == j) \&\& (i + j == n + 1))$
            $idx = i;$
        $sum = sum + a[i][j];$
        $j + +;$
    }
    $i + +;$
}
if $(idx = -1)$
    $sum = sum - a[idx][idx];$

Lời giải

- Gọi α_i là số lần lặp $while$ trong (xét độc lập $while$ ngoài)
  $\alpha_i =$ số con j chạy từ $1 \to n$, bước tăng là 1
  $\alpha_i = n - 1 + 1 = n$

- Xét số phép gán của câu lệnh if (thuộc $while$ trong)
  Ta thấy, với mỗi i cố định $(i \in [1, n])$, j chạy từ $1 \to n$
  Số lần phép so sánh $(i == j)$ được thực thi là n
  $\Rightarrow$ Số lần $i = j$ là $1 \to$ Số lần phép so sánh $(i + j == n + 1)$ được thực thi là 1
  $\Rightarrow$ Tổng số phép so sánh của câu lệnh if bên trong $while$ là $n + 1$
  - Bên cạnh đó, nếu $i = j$ thì $i + j \equiv 0 \pmod 2$
  - Như vậy câu lệnh if chỉ thực thi với điều kiện
  $n + 1 \equiv 0 \pmod 2 \Leftrightarrow n \equiv 1 \pmod 2$
  - Như vậy câu lệnh if sẽ thực thi tối đa n lần với điều kiện $n \equiv 1 \pmod 2$

- Xét if cuối cùng, ta thấy không nằm trong vòng lặp nên số lần thực hiện sẽ là 1 khi $idx \neq -1$
  Ta thấy $idx \neq -1$ khi câu lệnh if bên trên được thực thi.

- Kết luận:
  $$G(n) = 3 + 2n + \sum_{i=1}^{n} (2n + nf(n)) + f(n) = (2 + f(n))n^2 + 2n + 3 + f(n)$$

$$
\begin{aligned}
SS(n) &= (n+1) + \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1 + (n+1)) + 1 \\
&= (n+1) + \sum_{i=1}^{n}(n + 1 + (n+1)) + 1 \\
&= (n+1) + n(2n+2) + 1 = 2n^2 + 3n + 2
\end{aligned}
$$

- Quy ước: $f(n) = \begin{cases} 0 & \text{khi } n \equiv 0 \pmod 2 \\ 1 & \text{khi } n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$

BÀI 10

Đề bài

$i = 1; ret = 0; s = 0;$
while $(i \leq n)$
{
    $j = 1;$
    $s = s + \frac{1}{i}$
    while $(j \leq s)$
    {
        $ret = ret + i * j;$
        $j = j + 1;$
    }
    $i = i + 1;$
}

Lời giải

- Gọi α_i là số lần lặp của while trong (xét độc lập với while ngoài)
  α_i = số con j với j chạy từ $1 \to s$
  $j \in \{\frac{1}{1}, \frac{1}{1} + \frac{1}{2}, \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, ...\} \Leftrightarrow j = \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{k} \approx \ln(i) + \gamma$
  Suy ra: $\alpha_i \approx ln(i) + \gamma$
- Kết luận
  $G(n) = 3 + 3n + \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i \approx 3 + 3n + \sum_{i=1}^{n} 2[ln(i) + \gamma]$
  $= 3 + 3n + 2(\sum_{i=1}^{n} ln(i) + \sum_{i=1}^{n} \gamma) = 3 + 3n + 2(\gamma n + \sum_{i=1}^{n} ln(i))$
  $= 3 + 3n + 2(\gamma n + ln(n!))$
  $SS(n) = (n+1) + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1) \approx (n+1) + n + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$
  $= 2n + 1 + \sum_{i=1}^{n} (ln(i) + \gamma) = 2n + 1 + \gamma n + \sum_{i=1}^{n} ln(i)$
  $= 2n + 1 + \gamma n + ln(n!)$

BÀI 11

Đề bài

$sum = 0;$
$i = 1;$
while $(i \leq m)$
{
    $j = 1;$
    while $(j \leq n)$
    {
        if $(i! = j)$
            $sum = sum + 1;$
        $j + +;$
    }
    $i + +;$
}

Lời giải

- Gọi α_i là số lần lặp của $while$ ngoài
  = số con i chạy từ $1 \rightarrow m$, bước tăng là 1
  $\Rightarrow \alpha_i = m - 1 + 1 = m$

- Gọi β_j là số lần lặp của $while$ trong (xét độc lập với while ngoài)
  = số con j chạy từ $1 \rightarrow n$, bước tăng là 1
  $\Rightarrow \beta_j = n - 1 + 1 = n$

- Gọi γ là số lần câu lệnh if bên trong $while$ được thực thi
  Với mỗi i cố định $(i \in [1, m]), j$ chạy từ $1 \rightarrow n$

  Nếu $m \leq n \Rightarrow m \subset n$
  $\Rightarrow \forall\, i \in [1, m]$, tồn tại $n - 1$ con j sao cho $i \neq j$
  $\Rightarrow \gamma_i = n - 1$
  Nếu $m > n \Rightarrow n \subset m$
  $\Rightarrow \forall\, i \in [1, n]$, tồn tại $n - 1$ con j sao cho $i \neq j$
  $\forall\, i \in [n + 1, m]$, tồn tại n con j sao cho $i \neq j$
  $\Rightarrow \gamma_i = \begin{cases} n - 1 & \text{khi } i \leq n \\ n & \text{khi } i > n \end{cases}$

- Kết luận:

$$
\begin{aligned}
G(m,n) &= 2 + 2m + \sum_{i=1}^{m}(n+\gamma_i) \\
&= \begin{cases} 2 + 2m + \sum_{i=1}^{m}(n+\gamma_i) & \text{khi } m \le n \\ 2 + 2m + \sum_{i=1}^{n}(n+\gamma_i) + \sum_{i=n+1}^{m}(n+\gamma_i) & \text{khi } m > n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2 + 2m + \sum_{i=1}^{m}(n+n-1) & \text{khi } m \le n \\ 2 + 2m + \sum_{i=1}^{n}(n+n-1) + \sum_{i=n+1}^{m}(n+n) & \text{khi } m > n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2 + 2m + m(2n-1) & \text{khi } m \le n \\ 2 + 2m + n(2n-1) + (m-n-1+1)(2n) & \text{khi } m > n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2mn + m + 2 & \text{khi } m \le n \\ 2mn + 2m - n + 2 & \text{khi } m > n \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
SS(m,n) &= (m+1) + \sum_{i=1}^{m}(2n+1) = (m+1) + m(2n+1) \\
&= 2m + 2mn + 1
\end{aligned}
$$

- Thống kê để so sánh kết quả:

5 bộ dữ liệu thử nghiệm (m,n)	(20,10)	(24,35)	(30,15)	(50,75)	(90,90)
$G(m,n)$ đếm thủ công	432	1706	947	7552	16292
$G(m,n)$ chạy chương trình	432	1706	947	7552	16292
$SS(m,n)$ đếm thủ công	441	1729	961	7601	16381
$SS(m,n)$ chạy chương trình	441	1729	961	7601	16381

- Chương trình chạy bằng C++:

```cpp
#include <iostream>

int main() {
    int m, n;
    std::cout << "m: "; std::cin >> m;
    std::cout << "n: "; std::cin >> n;

    int sum = 0;
    int i = 1;
    int phepgan = 2; // Do có 2 phép gán sẵn
    int phepsosanh = 0;

    while (i <= m) {
        phepsosanh = phepsosanh + 1; // Phép so sánh của while
        int j = 1;

        while (j <= n) {
            // Phép so sánh của while
            phepsosanh = phepsosanh + 1;
            // Phép so sánh của if bên dưới
            phepsosanh = phepsosanh + 1;
            if (i != j) {
                sum = sum + 1;
                phepgan = phepgan + 1; // Phép gán của sum = sum + 1
            }
            j = j + 1;
            phepgan = phepgan + 1;
        }
        // Phép so sánh của while(j <= n) | Không thực hiện được
        phepsosanh = phepsosanh + 1;

        i = i + 1;

        phepgan = phepgan + 2; // Gán 2 lần (i = i + 1, j = 1)
    }
    // Phép so sánh của while(i <= m) | Không thực hiện được
    phepsosanh = phepsosanh + 1;

    std::cout << "G(m,n): " << phepgan  << std::endl;
    std::cout << "SS(m,n): " << phepsosanh << std::endl;

    return 0;
}
```

- Nhận xét kết quả so sánh:
Kết quả tính theo công thức đếm thủ công và kết quả khi chạy chương trình là bằng nhau. Vì nhóm đã tính được chính xác được công thức đếm thủ công và không dùng xấp xỉ.