BÀI TÂP CHƯƠNG 3

I. QUAN HỆ 2 NGÔI

Bài 1: Cho A = {1, 2, 3, 4, 8}, B = {1, 2, 3, 4}. Liệt kê tất cả các phần tử của A x B có quan hệ R, trong đó (a, b) $\in$ R nếu và chỉ nếu :

a) a > b
b) a là ước của b
c) a là bội của b
d) $a = b^3$

Bài 2: Trên tập A={-1,0,2,3,4} ta xét quan hệ hai ngôi như sau:

$$xRy \Leftrightarrow x^2 - 3x = y^2 - 3y$$

a) Liệt kê các phần tử của quan hệ R trên A.
b) Tìm tập hợp X có vô hạn phần tử để R là một quan hệ trên X. Giải thích?

Bài 3: Trên tập hợp A={-2,-1,0,2,3}, ta xét quan hệ hai ngôi R như sau:

$$x\ R\ y \Leftrightarrow x^2 - 2x = y^2 - 2y$$

a) Liệt kê các phần tử của quan hệ R trên A.
b) Tìm tập hợp X có vô hạn phần tử để R là một quan hệ trên X. Giải thích?

Bài 4: Liệt kê tất cả các cặp trong quan hệ R = {(a, b) | (2a = b) $\vee$ (b = 2a)} trên tập {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Biểu diễn quan hệ trên dưới dạng đồ thị và dưới dạng ma trận.

Bài 5: Đối với mỗi quan hệ được cho dưới đây trên tập {1, 2, 3, 4}, hãy xác định xem nó có phản xạ, đối xứng, bắc cầu không ?

a) {(1, 2), (2, 3), (3, 2)}
b) {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}
c) {(1, 3), (1, 4), (2, 3) ,(3, 1), (3, 2) , (4,1),}

Bài 6: Xác định xem quan hệ R trên tập loài người có phản xạ, đối xứng, phản đối xứng, bắc cầu hay không, với (a, b) $\in$ R nếu và chỉ nếu.

a) a và b cùng chiều cao.
b) a là bố b.
c) a không phải là bạn của b.

Bài 7: Xác định xem quan hệ R trên tập tất cả các số thực có tính phản xạ, đối xứng, phản đối xứng, bắc cầu hay không, với (x, y) $\in$ R nếu và chỉ nếu:

a) x = 2y
b) x + y = 2
c) $xy \geq 0$

Bài 8: Cho quan hệ R = {(a, b) | a > b } trên tập các số nguyên, tìm quan hệ ngược từ tập B đến tập A và quan hệ bù của R. (Quan hệ ngược từ tập B đến tập A, được ký hiệu là R^{-1}, là tập các cặp được sắp {(b, a) | (a, b) ∈ R}. Quan hệ bù $\overline{R}$ là tập các cặp được sắp {(a, b) | (a, b) ∉ R})

Bài 9: Cho quan hệ R = {(a, b) | b chia hết cho a} trên tập các số nguyên dương. Tìm R^{-1} và $\overline{R}$.

Bài 10: Trên tập A={1,2,3,4}, cho các quan hệ R1 = {(a,b)| a là ước của b}, R2 = {(a,b)| a = b^2}, R3 = {(a,b)| a = b}. Tìm:

a) R1 ∪ R2
b) R1 \ R3
c) R1 ∩ R2 ∩ R3

Bài 11: Cho các quan hệ trên tập gồm các số thực

R1 = {(a, b) ∈ R^2| a > b}, quan hệ "lớn hơn",
R2 = {(a, b) ∈ R^2| a ≥ b}, quan hệ "lớn hơn hoặc bằng",
R3 = {(a, b) ∈ R^2| a < b}, quan hệ "nhỏ hơn",
R4 = {(a, b) ∈ R^2| a ≤ b}, quan hệ "nhỏ hơn hoặc bằng"

Tìm:

a) R1 ∩ R2
b) R2 ∩ R4
c) R1 ∪ R3

Bài 12: Có bao nhiêu quan hệ trên tập {a, b, c, d} có chứa cặp (a, a)?

Bài 13: Tìm sai lầm trong chứng minh định lý sau:

Định lý : Cho R là quan hệ trên tập A có tính chất đối xứng và bắc cầu. Khi đó, R có tính chất phản xạ.

Chứng minh: Cho a∈ A. Lấy phần tử b ∈ A sao cho (a, b) ∈ R. Vì R là đối xứng nên (b, a) ∈ R. Bây giờ sử dụng tính chất bắc cầu của R, ta suy ra rằng (a, a)∈ R, vì (a, b) ∈ R và (b, a)∈ R.

Bài 14: Biểu diễn các quan hệ trên tập {1, 2, 3} dưới đây bằng ma trận 0 – 1(với các phần tử được liệt kê theo thứ tự tăng dần).

a) {(1, 1), (1, 2), (1, 3)}
b) {(1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)}
c) {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)}
d) {(1, 3), (3, 1)}

Bài 15: Biểu diễn các quan hệ trên tập {1, 2, 3, 4} dưới đây bằng ma trận 0 – 1(với các phần tử được liệt kê theo thứ tự tăng dần).

a) {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2,4), (3, 4)}
b) {(1, 1), (1, 4), (2, 2), (3, 3), (4, 1)}
c) {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4,3)}
d) {(2, 4), (3,1), (3, 2), (3,4)}

Bài 16: Liệt kê các cặp được sắp trong quan hệ trên tập $\{1, 2, 3\}$ tương ứng với các ma trận dưới đây (trong đó các cột và hàng tương ứng với các số nguyên được liệt kê theo thứ tự tăng).

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bài 17: Liệt kê các cặp được sắp trong quan hệ trên tập $\{1, 2, 3, 4\}$ tương ứng với các ma tr6n dưới đây (trong đó các cột và hàng tương ứng với các số nguyên được liệt kê theo thứ tự tăng).

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Bài 18: Làm thế nào để xác định được tính phản xạ, tính phản xứng của một quan hệ, thông qua ma trận biểu diễn của nó?

Áp dụng :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bài 19: Hãy xác định xem các quan hệ được biểu diễn bởi các ma trận dưới đây có phản xạ, không phản xạ, đối xứng, phản đối xứng, bắc cầu hay không?

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bài 20: Cho R là một quan hệ được biểu diễn bởi ma trận :

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tìm ma trận biểu diễn quan hệ $\overline{R}$, R^{-1}

Bài 21: Cho R1 và R2 là hai quan hệ trên tập A được biểu diễn bằng các ma trận:

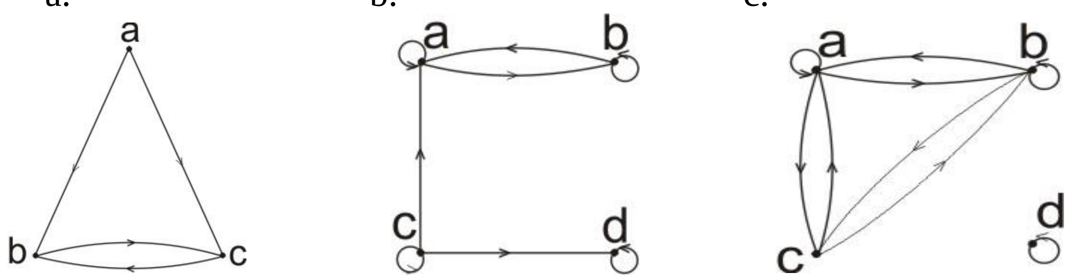
$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a. R1 $\cup$ R2, R1 $\cap$ R2
b. R1\ R2, R2\ R1

Bài 22: Vẽ các đồ thị có hướng, biểu diễn quan hệ R = {(a, a), (a, b), (b, c), (c, b), (c, d), (d, a), (d, b)}.

Bài 23: Hãy liệt kê các cặp được sắp trong các quan hệ được biểu diễn bởi các đồ thị có hướng.

a. b. c.



Bài 24: Hãy xác định xem các quan hệ được biểu diễn bởi các đồ thị có hướng được cho trong « **Bài 13** » có phản xạ, đối xứng, phả xứng, bắc cầu hay không?

Bài 25: Cho đồ thị có hướng biểu diễn hai quan hệ. Làm thế nào để có thể tìm được đồ thị có hướng biểu diễn quan hệ được tạo thành từ hợp, giao, hiệu đối xứng của các quan hệ trên.

II. QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

Bài 1: Các quan hệ nào trong số các quan hệ sau đây trên tập A= {0, 1, 2, 3} là quan hệ tương đương? Xác định các tính chất nào của một quan hệ tương đương mà quan hệ này không có.

R1={(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)}
R2={(0, 0), (0 , 2), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)}
R3={(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)}
R4={(0, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3,2),(3, 3)}
R5={(0, 0), (0, 1), (0, 2),(1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2),(3, 3)}

Bài 2: Các quan hệ nào trong số các quan hệ sau đây (trên tập con người) là quan hệ tương đương. Xác định các tính chất nào của một quan hệ tương đương mà quan hệ này không có.

R1={(a, b) | a và b cùng tuổi }
R2={(a, b) | a và b có cùng bố mẹ}
R3={(a, b) | a và b đã gặp nhau}
R4={(a, b) | a và b nói cùng một thứ tiếng}

Bài 3: Các quan hệ nào trong số các quan hệ sau đây (trên tập tất cả các hàm từ Z đến Z) là quan hệ tương đương. Xác định các tính chất nào của một quan hệ tương đương mà quan hệ này không có.

R1={(f, g) | f(1) = g(1)}
R2={(f, g) | f(0) = g(0) hoặc f(1) = g(1)}
R3={(f, g) | f(x) – g(x) = 1, $\forall$x $\in$ Z }
R4={(f, g) | f(x) – g(x) $\in$ Z, $\forall$x $\in$ Z}
R5={(f, g) | f(0) = g(1) và f(1) = g(0)}

Bài 4: Giả sử A là một tập khác rỗng và f là một hàm số xác định trên A. Giả sử R là một quan hệ trên A gồm tất cả các cặp (x, y) với f(x) = f(y). Chứng minh rằng R là một quan hệ tương đương trên A. Xác định các lớp tương đương của R.

Bài 5: Chứng minh rằng quan hệ R chứa tất cả các cặp (x, y) trong đó x và y là các xâu bit có chiều dài bằng hoặc lớn hơn 3 và có 3 bit đầu tiên như nhau là một quan hệ tương đương trên tập tất cả các xâu bit có chiều dài lớn hơn hoặc bằng 3.

Bài 6: Chứng minh rằng sự tương đương của các mệnh đề là một quan hệ tương đương trên tập tất cả các mệnh đề phức hợp.

Bài 7: Cho R là quan hệ trên tập tất cả các cặp có thứ tự hai số nguyên dương sao cho ((a, b), (c, d)) ∈ R nếu và chỉ nếu a*d = b*c. Chứng minh rằng R là một quan hệ tương đương.

Bài 8: Xác định xem các quan hệ được biểu diễn bởi các ma trận được cho dưới đây có là quan hệ tương đương hay không?

$$a)\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\quad b)\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix},\quad c)\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Bài 9: Xét quan hệ tương đương T = {(x, y)∈ R^2| x – y ∈ Z}.

a) Xác định lớp tương đương của 1 đối với quan hệ T.
b) Xác định lớp tương đương của ½ đối với quan hệ T.

Bài 10: Trên tập số nguyên Z, xét quan hệ hai ngôi T như sau:

$\forall x,y \in$ Z, $xTy \Leftrightarrow x - y$ là số chẵn.

T có phải là một quan hệ tương đương hay không ? Vì sao ?
Nếu T là một quan hệ tương đương, hãy tìm các lớp tương đương và tập hợp thương.

Bài 11: Cho A={-2,-1,0,1,2,3,4,5}, xét quan hệ hai ngôi R trên A như sau:

xRy ⇔ x - 3y chẵn.

a) Chứng minh R là quan hệ tương đương.
b) Tìm các lớp tương đương $[1]_R$, $[2]_R$.

Bài 12: Cho m là số nguyên dương và xét quan hệ hai ngôi R trên Z như sau:

$\forall a,b \in$ Z, aRb ⇔ a-b chia hết cho m

a) CMR: R là quan hệ tương đương.
b) Hãy tìm các lớp tương đương và tập hợp thương.

(***Chú ý:*** Quan hệ R trên gọi là ***quan hệ đồng dư modulo m trên tập các số nguyên Z***, ký hiệu bởi ≡ (mod m), còn được viết lại như sau:

$\forall a,b \in$ Z, a ≡ b (mod m)⇔∃k ∈ Z: (a-b) = k.m)

Bài 13: Tìm lớp tương đương của quan hệ đồng dư modulo 8 trên tập Z chứa phần tử 0? chứa phần tử 1?

Bài 14: Xét quan hệ R trên tập số nguyên Z được định nghĩa như sau:

$\forall m,n \in Z$, mRn $\Leftrightarrow$ "m cùng tính chất chẵn lẻ với n".

Chứng minh R là quan hệ tương đương.

Bài 15: Trên tập hợp số tự nhiên N, ta xét quan hệ hai ngôi R như sau:

$$x \; R \; y \Leftrightarrow x^2 - y^2 \text{ chẵn}$$

a) Chứng minh R là quan hệ tương đương trên N.

b) Tìm phân hoạch của tập N theo quan hệ R.

III. QUAN HỆ THỨ TỰ

Bài 1: Trên tập hợp X, ta xét quan hệ hai ngôi sau:

$$x \; R \; y \Leftrightarrow x^2 + 3x \leq y^2 + 3y$$

a) Nếu X = **R** thì R có những tính chất nào? Giải thích.

b) Nếu x = **N** thì R có phải là quan hệ thứ tự không? Giải thích.

Bài 2: Trong các tập hợp sắp thứ tự dưới đây, cho biết tập hợp nào sắp thứ tự tốt:

a) $(N,\prec)$ b) $(Z,\prec)$ c) $(Q,\prec)$ d) $(Q+,\prec)$

e) $(P, \prec)$ trong đó P là tập hợp các số nguyên tố.

f) $(A, \prec)$ trong đó $A \neq \emptyset$ là một tập con hữu hạn của Z.

Bài 3: Cho R là quan hệ hai ngôi trên tập số phức C được xác định như sau:

$$(a, b) \; R \; (c, d) \Leftrightarrow a \leq c \text{ và } b \leq d$$

a) CMR: R là một quan hệ thứ tự trên C.
b) R có phải là toàn phần không?

Bài 4 : Cho $\vdots$ là quan hệ "chia hết" trên tập số nguyên Z.

$$(\forall a,b \in Z, \; a \vdots b \Leftrightarrow \exists k \in Z: a = k.b)$$

a) Chứng minh $\vdots$ là một quan hệ thứ tự trên Z.

b) Quan hệ thứ tự $\vdots$ trên Z có phải là toàn phần không?

Bài 5: Cho tập A = {1, 2, 3, 4, 5}. Cho R là quan hệ trên A và R = {(1,1); (2,1); (2,2); (2,4); (3,1); (3,2);(3,3); (3,4); (3,5); (4,4); (5, 5)}.

a) R có là quan hệ tương đương? quan hệ thứ tự? Vì sao?

b) Nếu quan hệ R trên A là quan hệ thứ tự, vẽ biểu đồ Hasse cho (A, R).

Bài 6: Cho tập A = {1, 2, 3, 4} và các quan hệ R1 ={(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4)} và R2 = {(1, 1); (2, 2); (3,1); (3, 3); (3, 4); (4,1); (4, 4)} trên A.

a) Xác định xem các quan hệ trên có là quan hệ thứ tự trên A?

b) Nếu quan hệ nào là quan hệ thứ tự, hãy vẽ biểu đồ Hasse cho quan hệ đó trên A.

Bài 7: Cho (A, |) là tập hợp sắp thứ tự, trong đó A= {2, 4, 5, 10, 12, 20, 25}, quan hệ | trên A là quan hệ "ước số của" $(\forall a,b \in A, \; a \mid b \Leftrightarrow \exists k \in Z: b = k.a)$

a) Vẽ biểu đồ Hasse cho (A, |).

b) Dựa vào biểu đồ Hasse tìm phần tử tối đại, tối tiểu của A.

Bài 8: Cho (A, ≤) là tập hợp sắp thứ tự, trong đó A là tập các chuỗi nhị phân có độ dài bằng 3, quan hệ ≤ là quan hệ "nhỏ hơn hoặc bằng" thông thường.

a) Vẽ biểu đồ Hasse cho (A, ≤)

b) Dựa vào biểu đồ Hasse tìm phần tử tối đại, tối tiểu của A.

c) Dựa vào biểu đồ Hasse tìm phần tử lớn nhất, nhỏ nhất của A.

Bài 9: Cho X ={2; 4; 6; 8; 10; 14; 16; 15; 20; 30; 36; 40; 60}. Trên X cho quan hệ | là quan hệ "ước số của".

a) Vẽ biểu đồ Hasse (X, |).

b) Tìm phần tử tối đại, tối tiểu của X.

Bài 10: Trong các trường hợp sau, hãy tìm các phận tử lớn nhất, nhỏ nhất, tối đại, tối tiểu (nếu có) của các tập hợp đã cho với quan hệ thứ tự tương ứng. Vẽ các biểu đồ Hasse.

a) $U_{30} = \{n \in N \mid n \,|30\}$ với quan hệ ước số |.

b) X ={2; 3; 4; 6; 8; 10; 80} với quan hệ ước số |.

c) X = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 11} với quan hệ R được xác định như sau:

xRy ⇔ x = y hay x < y – 1

Bài 11: Cho tập hợp X = {2, 5, 8, 10, 20, 40} và ⋮ là quan hệ "chia hết" trên X.

a) Chứng tỏ R là quan hệ thứ tự. Vẽ biểu đồ Hasse cho (X, ⋮).

b) Tìm các phần tử tối đại và tối tiểu của X.

c) Tìm các phần tử lớn nhất và nhỏ nhất của X.

Bài 12: Cho tập X = { 1, 2, 3, 4, 5}. Cho R và S là 2 quan hệ 2 ngôi trên tập X có ma trận biểu diễn lần lượt là:

$$AR = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad AS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

CMR : R và S là quan hệ thứ tự trên tập X. Hãy vẽ biểu đồ Hasse cho các quan hệ này.

Câu 13: Cho S={1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30} (các ước số lớn hơn 0 của 30). Hãy vẽ biểu đồ Hasse cho (S,|) và (S, ⁝).

Câu 14: Vẽ biểu đồ Hasse cho S với quan hệ thứ tự tương ứng.

a) (S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, ⁝)

b) (S = {1, 2, 3, 6, 12, 24, 36, 48}, |)