Phân tích &
Thiết kế thuật toán
(Algorithms Design & Analysis)

L/O/G/O

GV: HUỲNH THỊ THANH THƯƠNG
Email: thuonghtt@uit.edu.vn

PHÂN TÍCH THUẬT TOÁN

CHƯƠNG 2

L/O/G/O

www.themegallery.com

Đánh giá tính hiệu quả về thời gian

THUẬT TOÁN

KHÔNG ĐỆ QUY

- Kỹ thuật sơ cấp: phép đếm, tổng hữu hạn, xét dấu hàm
- Phụ thuộc tính chất dữ liệu vào: xấu nhất, tốt nhất, trung bình
- Ước lượng nhanh Big-O

ĐỆ QUY

- Tìm phương trình đệ quy
- Khử đệ quy

Phân tích thuật toán đệ quy – Giải phương trình đệ quy

- Truy hồi/Thay thế
- Phương trình đặc trưng
- Phương pháp hàm sinh
- Định lý Master
- Đoán nghiệm và quy nạp
- Khác

- Backward substitution
- Characteristic equation
- Generating function
- Master theorem
- Guessing and Induction

Phương pháp Phương trình đặc trưng (Characteristic equation)

- Xét phương trình dạng:

$$a_0T(n) + a_1T(n-1)+...+a_kT(n-k) = 0 \qquad (1)$$

- Đặt $T(n) = X^n$, đưa (1) về dạng phương trình ẩn X:

$$a_0X^n + a_1X^{n-1}+...+a_kX^{n-k} = 0$$

$$X^{n-k} (a_0X^k + a_1X^{k-1}+...+a_k) = 0$$

$\Leftrightarrow$ $X^{n-k} = 0$ hoặc

$$a_0X^k + a_1X^{k-1}+...+a_k = 0 \qquad (2)$$

Phương pháp Phương trình đặc trưng (Characteristic equation)

- Xét phương trình dạng:

$$a_0T(n) + a_1T(n-1)+...+a_kT(n-k) = 0 \qquad (1)$$

- Đặt $T(n) = X^n$, đưa (1) về dạng phương trình ẩn X:

Tìm nghiệm của pt đặc trưng:

$$a_0X^k + a_1X^{k-1}+...+a_k = 0 \qquad (2)$$

(2) là phương trình đặc trưng bậc k của phương trình truy hồi (1)

Phương pháp Phương trình đặc trưng (Characteristic equation)

- Tìm nghiệm của phương trình đặc trưng

- TH1: (2) có nghiệm đơn
  - Giả sử X_1, X_2 là các nghiệm đơn của (2) thì
  - $T(n) = c_1X_1^n + c_2X_2^n + \ldots$ với c_i là các hằng
- TH2: (2) có nghiệm bội
  - Giả sử u là nghiệm bội m của (2) thì
  - $T(n) = c_1u^n + c_2nu^n + c_3n^2u^n \ldots + c_mn^{m-1}u^n + \ldots$

Phương pháp Phương trình đặc trưng (Characteristic equation)

- Ví dụ:
  - $T(n) = 5T(n-1) - 8T(n-2) + 4T(n-3)$ và
  - $T(0) = 0, T(1) = 1, T(2) = 2$

Phương pháp Phương trình đặc trưng (Characteristic equation)

❖ Ví dụ:

- $T(n) = 5T(n-1) – 8T(n-2) + 4T(n-3)$ và
- $T(0) = 0, T(1) = 1, T(2) = 2$

Giải:

❖ Bước 1: Tìm phương trình đặc trưng

Xét phương trình: $T(n) - 5T(n-1) + 8T(n-2) - 4T(n-3) = 0$

Đặt $X^n = T(n)$

Ta có: $X^n - 5X^{n-1} + 8X^{n-2} – 4X^{n-3} = 0$

Phương trình đặc trưng : $X^3 – 5X^2 + 8X - 4 = 0$ (*)

$(X-1)(X-2)^2 = 0$

Phương pháp Phương trình đặc trưng (Characteristic equation)

- Bước 2: Giải phương trình đặc trưng:

Phương trình đặc trưng : $X^3 - 5X^2 + 8X - 4 = 0 \Leftrightarrow (X-1)(X-2)^2 = 0$

có 1 nghiệm đơn $X_1 = 1$ và nghiệm kép $X_2 = 2$

$T(n) = c_1X^n{}_1 + c_2X_2{}^n + c_3nX_2{}^n$

$T(n) = c_1 1^n + c_2 2^n + c_3 n2^n$

--> dựa vào T(0), T(1), T(2) để tìm các tham số

Phương pháp Phương trình đặc trưng (Characteristic equation)

$T(n) = c_1 1^n + c_2 2^n + c_3 n2^n$

❖ Bước 3: Tìm các tham số

Ta có

- $T(0) = 0 \quad \rightarrow c_1 + c_2 = 0$
- $T(1) = 1 \quad \rightarrow c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 1$
- $T(2) = 2 \quad \rightarrow c_1 + 4c_2 + 8c_3 = 2$

Giải hệ phương trình: $c_1 = -2$, $c_2 = 2$, $c_3 = -1/2$

Kết luận: $T(n) = 2^{n+1} - n2^{n-1} - 2$

Phân tích thuật toán đệ quy –
Giải phương trình đệ quy

- Truy hồi/Thay thế
- Phương trình đặc trưng
- Phương pháp hàm sinh
- Định lý Master
- Đoán nghiệm và quy nạp
- Khác

- Backward substitution
- Characteristic equation
- Generating function
- Master theorem
- Guessing and Induction

Hàm sinh (Generating function)

❖Định nghĩa:

- Hàm sinh của dãy vô hạn $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ là tổng hình thức $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
- Hàm sinh có dạng biểu diễn là 1 chuỗi lũy thừa
- Ký hiệu: $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

trong đó a_0, a_1, ...là các hằng số thực

Hàm sinh (Generating function)

❖Một số hàm sinh cơ bản và dãy số tương ứng

$$\langle 0,0,0,\ldots\rangle \quad \leftrightarrow \quad f(x) = 0 + 0.x + 0.x^2 + \ldots = 0$$

$$\langle 1,0,0,\ldots\rangle \quad \leftrightarrow \quad f(x) = 1 + 0.x + 0.x^2 + \ldots = 1$$

$$a_n = 1 \quad \leftrightarrow \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$a_n = -1 \quad \leftrightarrow \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1) x^n = \frac{1}{(1+x)}$$

Hàm sinh (Generating function)

Một số hàm sinh cơ bản và dãy số tương ứng

$$a_n = n \quad \leftrightarrow \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n) x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$a_n = n+1 \quad \leftrightarrow \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Phương pháp Hàm sinh (Generating function)

❖ Giải phương trình đệ quy

$$T(n) = \begin{cases} T(0) = 0, \quad T(1) = 1 \\ 2T(n-1) + 1 \quad khi\ n > 1 \end{cases}$$

Hàm sinh của dãy vô hạn $\{T(n)\}_0^\infty$ là:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n$$

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} [2T(n-1) + 1]\, x^n \quad + T(1)x^1 + T(0)x^0$$

$$f(x) = 2\sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)\, x^n + \sum_{n=2}^{\infty} x^n + x \qquad (*)$$

Phương pháp Hàm sinh (Generating function)

Thế vào (*) $$f(x) = 2\sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)\, x^n + \sum_{n=2}^{\infty} x^n + x$$

$$f(x) = 2xf(x) + \frac{1}{1-x} - x - 1 + x$$

Rút gọn $$f(x) = 2xf(x) + \frac{1}{1-x} - 1$$

Chuyển vế $$(1-2x)f(x) = \frac{x}{1-x}$$

Chia $$f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}$$

Phương pháp Hàm sinh (Generating function)

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}$$

Tìm cách đưa về dạng $f(x) = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-2x}$ $= \frac{-1}{1-x} + \frac{1}{1-2x}$

Những công thức đáng nhớ: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

$$f(x) = \frac{-1}{1-x} + \frac{1}{1-2x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1)x^n$ mà $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n$ $\boldsymbol{T(n) = 2^n - 1}$

Bài tập trên lớp (lấy điểm quá trình): Inclass#03

Bài 1 (3.5đ): Sử dụng hàm sinh để giải phương trình đệ quy sau

$$T(n) = \begin{cases} T(0) = 0, \quad T(1) = 1 \\ 2T(n-1) + 1 \quad khi\ n > 1 \end{cases}$$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & khi\ n = 0 \\ 2T(n-1) + 7 & khi\ n > 0 \end{cases}$$

Phân tích thuật toán đệ quy – Giải phương trình đệ quy

- Truy hồi/Thay thế
- Phương trình đặc trưng
- Phương pháp hàm sinh
- Định lý Master
- Đoán nghiệm và quy nạp
- Khác

- Backward substitution
- Characteristic equation
- Generating function
- Master theorem
- Guessing and Induction

Phương pháp Đoán nghiệm (The most general method)

1. ***Guess*** the form of the solution.
2. ***Verify*** by induction.
3. ***Solve*** for constants.

Phương pháp Đoán nghiệm (Guessing and Induction)

- Ta đoán 1 nghiệm f(n) và dùng chứng minh quy nạp để chứng tỏ rằng $T(n) \le f(n)$, với mọi n
- f(n) thường là một trong các hàm quen thuộc như logn, n, n^2, n^3, 2^n, n!, n^n
- Đôi khi ta chỉ đoán dạng của f(n) trong đó có vài tham số chưa xác định và trong quá trình quy nạp, ta sẽ tìm ra giá trị thích hợp cho các tham số.

$$T(n) = \begin{cases} C_1 & khi\ n = 0 \\ T(n-1) + C_2 & khi\ n > 0 \end{cases}$$

Ta đoán f(n) = a*n + b

- B1: Với n = 0, T(0) = C_1 và f(0) = b,

  Để có T(0) $\leq$ f(0) thì Chọn $C_1 \leq$ b

- B2: Giả sử T(k) $\leq$ f(k), $\forall$k < n.

- B3: Ta cm T(n) $\leq$ f(n), $\forall$n

$$T(n)=\begin{cases} C_1 & khi\ n=0 \\ T(n-1)+C_2 & khi\ n>0 \end{cases}$$

Ta đoán f(n) = a*n + b

- B3: Cần cm T(n) ≤ f(n), ∀n
  - Áp dụng giả thiết quy nạp với k = n-1 < n (n > 0)
  - Ta có T(n-1) ≤ f(n-1) = a*(n-1)+b

$$T(n)=T(n-1)+C_2 \quad \leq a(n-1)+b+C_2$$

$$T(n)\leq an+b+C_2-a$$

$$T(n) = \begin{cases} C_1 & khi\ n = 0 \\ T(n-1) + C_2 & khi\ n > 0 \end{cases}$$

Ta đoán f(n) = a*n + b

B3: Cần cm T(n) ≤ f(n), ∀n

$$T(n) \le an + b + C_2 - a$$

Nếu: $C_2 - a \le 0$

Thì: $T(n) \le an + b = f(n)$

$$T(n)=\begin{cases} C_1 & khi\ n=0 \\ T(n-1)+C_2 & khi\ n>0 \end{cases}$$

- Để tìm a, b, ta giải hệ: $\begin{cases} b \geq C_1 \\ a \geq C_2 \end{cases}$
- Suy ra: b = C_1, a = C_2
- Ta có: $T(n) \leq C_1 + C_2 n \ \forall n$
- T(n) = O(n)

$$T(n) = \begin{cases} C_1 & khi\ n = 1 \\ 2T(\frac{n}{2}) + nC_2 & khi\ n > 1 \end{cases}$$

Đoán: $f(n) = anlogn + b$

GV đã sửa hoàn chỉnh trên lớp

Đáp án: $T(n) \leq (C_1 + C_2)nlogn + C_1$

Bài tập trên lớp (lấy điểm quá trình): Inclass#03

Bài 2 (3.5đ): Giả sử ta lần lượt đoán 2 nghiệm như sau:

$$\begin{cases} T(1) = C_1 \\ T(n) = 4T(n/2) + n \quad \text{nếu } n \geq 2 \end{cases}$$

Theo bạn, lần đoán nào thành công, thất bại và vì sao?

1) $f(n) = an^3$

2) $f(n) = an^2 + b$