ÔN TẬP 1

Câu 1. Trên $\mathbb{R}^6$ cho tập hợp $W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \middle| \begin{array}{l} x_5 + 4x_6 - 10x_3 + x_2 - 2x_1 = 0 \\ 11x_3 - x_4 + 3x_1 = 0 \\ x_4 - 3x_6 - 2x_2 + 2x_1 = 0 \end{array} \right\}$.

a) Hãy chứng minh rằng W là không gian vector con của $\mathbb{R}^6$.

b) Hãy tìm hệ sinh, cơ sở và số chiều của W.

Giải:

Xét HPT $\begin{cases} x_5 + 4x_6 - 10x_3 + x_2 - 2x_1 = 0 \\ 11x_3 - x_4 + 3x_1 = 0 \\ x_4 - 3x_6 - 2x_2 + 2x_1 = 0 \end{cases}$ $(*)$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -10 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 11 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3 = h_3 + h_1]{h_2 = 2h_2 + 3h_1} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -10 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -8 & -2 & 3 & 12 \\ 0 & -1 & -10 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[h_3 = h_3 + 3h_2]{h_2 \leftrightarrow h_3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -10 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -10 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -38 & 1 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow r(A) = 3 < 6$ (số ẩn) $\Rightarrow (*)$ có VSN phụ thuộc vào 3 tham số.

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 - 10x_3 + x_5 + 4x_6 = 0 \\ -x_2 - 10x_3 + + x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ -38x_3 + x_4 + 6x_5 + 15x_6 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 9a - 11b - 55c \\ x_2 = 28a - 11b + 112c \\ x_3 = a + 3b + 15c \\ x_4 = 38a \\ x_5 = 19b \\ x_6 = 38c \end{cases} \quad ; a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{(hoặc } \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{9a - 22b - 55c}{38} \\ x_2 = \dfrac{14a - 11b + 56c}{19} \\ x_3 = \dfrac{a + 6b + 15c}{38} \\ x_4 = a \\ x_5 = b \\ x_6 = c \end{cases} \quad ; a, b, c \in \mathbb{R} \quad \text{sau đó làm tương tự)}$$

$\Rightarrow \forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in W$, x có dạng:

$x=(9a-11b-55c,28a-11b+112c,a+3b+15c,38a,19b,38c);a,b,c\in\mathbb{R}$

$=a\underbrace{(9,28,1,38,0,0)}_{u_1}+b\underbrace{(-11,-11,3,0,19,0)}_{u_2}+c\underbrace{(-55,112,15,0,0,38)}_{u_3}$

$=au_1+bu_2+cu_3$

$\Rightarrow S:=\{u_1,u_2,u_3\}$ là hệ sinh của W (1)

$\left.\begin{array}{l}\Leftrightarrow W=\text{span}(S)\\ Do\quad S\subset\mathbb{R}^6\end{array}\right\}\Rightarrow W$ là KGVT con của $\mathbb{R}^6$.

Mặt khác :

$$A_S=\begin{pmatrix}9&28&1&38&0&0\\-11&-11&3&0&19&0\\-55&-112&15&0&0&38\end{pmatrix}\xrightarrow[c_2\leftrightarrow c_5]{c_1\leftrightarrow c_4}\begin{pmatrix}38&0&1&9&28&0\\0&19&3&-11&-11&0\\0&0&15&-55&-112&38\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow r(A_s)=3\Rightarrow r(S)=3=n_S\ \Rightarrow S$ - đltt (2)

Từ $(1),(2)\Rightarrow S$ là 1 cở sở của $W\Rightarrow \dim W=3$.

Câu 2. Trên $\mathbb{R}^3$ cho các tập hợp $a=\{\alpha_1=(1,0,0),\alpha_2=(-1,1,0),\alpha_3=(2,2,1)\}$ và

$\beta=\{\beta_1=(-1,1,-2),\beta_2=(0,-1,1),\beta_3=(1,0,2)\}$.

a) Chứng minh rằng a và β là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Cho vector $\alpha=(12,1,2)\in\mathbb{R}^3$. Hãy tìm tọa độ của α theo cơ sở a.

c) Gọi $\beta_0=\{e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

Hãy tìm các ma trận chuyển cơ sở:

$P=P_{\beta_0\to a};Q=P_{\beta_0\to\beta};S=P_{a\to\beta}$.

Giải:

a) $n_a=n_\beta=3=\dim\mathbb{R}^3\Rightarrow$ để chứng minh a, β là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ ta chỉ cần chứng mình a, β đttt trên $\mathbb{R}^3$.

Lập ma trận:

$$A_a=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\2&2&1\end{pmatrix}$$ có $|A_a|=1\neq 0\Rightarrow a$-đltt$\Rightarrow a$ là cở sở của $\mathbb{R}^3$.

Tương tự :

$$A_\beta=\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&-2\\0&-1&1\\1&0&2\end{pmatrix}$$ có $|A_\beta|=1\neq 0\Rightarrow\beta$-đltt$\Rightarrow\beta$ là cở sở của $\mathbb{R}^3$.

b) $\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=12\\x_2+2x_3=1\\x_3=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=5\\x_2=-3\\x_3=2\end{cases}\Rightarrow(\alpha)_{/\alpha}=(5,-3,2)$.

c) Dễ thấy: $\begin{cases} \alpha_1 = 1.e_1 + 0.e_2 + 0.e_3 \\ \alpha_2 = -1.e_1 + 1.e_2 + 0.e_3 \\ \alpha_3 = 2.e_1 + 2.e_2 + 1.e_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\alpha_1)_{/\beta_0} = (1,0,0) \\ (\alpha_2)_{/\beta_0} = (-1,1,0) \\ (\alpha_3)_{/\beta_0} = (2,2,1) \end{cases} \Rightarrow P = P_{\beta_0 \to a} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Tương tự: $Q = P_{\beta_0 \to \beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

Ta có:

$$S = P_{a \to \beta} = P_{a \to \beta_0}.P_{\beta_0 \to \beta} = P^{-1}_{\beta_0 \to a}.P_{\beta_0 \to \beta} = P^{-1}.Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -5 & -7 \\ 5 & -3 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Câu 3: Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho tích vô hướng:

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3, \langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Hãy trực chuẩn hóa hệ $S = \{u_1 = (1,1,1), u_2 = (-1,1,1), u_3 = (1,2,1)\}$.

Giải:

+) $v_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = (\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}})$

+) $\bar{v}_2 = u_2 - < u_2, v_1 > v_1 = (-1,1,1) - \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}) = (-\dfrac{4}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3})$,

$$\|\bar{v}_2\| = \frac{2\sqrt{6}}{3} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{\bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|} = (-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$$

+) $\bar{v}_3 = u_3 - < u_3, v_1 > v_1 - < u_3, v_2 > v_2 =$

$$= (1,2,1) - \frac{4}{\sqrt{3}}(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) - \frac{1}{\sqrt{6}}(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}) = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}),$$

$$\|\bar{v}_3\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow v_3 = \frac{\bar{v}_3}{\|\bar{v}_3\|} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$\Rightarrow S' = \{v_1, v_2, v_3\}$ là hệ trực chuẩn hóa của hệ S.

Câu 4: Cho ma trận thực $A=\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

Hãy chéo hóa A, rồi sau đó tìm $A^m; \forall m \in \square, m \geq 0$.

Giải:

+) $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 9 \\ -2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 5 \end{cases}$.

$A \in M_2$ có 2 GTR phân biệt $\Rightarrow A$ chéo hóa được.

+) $\lambda_1 = -2$

Giải hpt: $(A+2I)x^T = \theta, x = (x_1, x_2) \neq \theta \quad (1)$

$$(A+2I) = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_2 = h_2 + 2h_1]{h_1 = \frac{1}{9}h_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0, x \neq \theta$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Chọn 1 cơ sở của KGR ứng GTR $\lambda_1 : a_1 = (-1,1)$.

+) $\lambda_2 = 5$

Giải hpt: $(A-5I)x^T = \theta, x \neq \theta \quad (2)$

$$(A-5I) = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -2 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_2 = h_2 + h_1} \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (2) \Leftrightarrow 2x_1 + 9x_2 = 0, x \neq \theta$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{9}{2}t \\ x_2 = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Chọn 1 cơ sở của KGR ứng GTR $\lambda_2 : a_2 = (-9, 2)$.

+) Lập ma trận

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D = T^{-1}AT = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

+) $A^m = TD^mT^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^m & 0 \\ 0 & 5^m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -(-2)^m & -9.5^m \\ (-2)^m & 2.5^m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$

$$=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2(-2)^m+9.5^m & -9(-2)^m+9.5^m \\ 2(-2)^m-2.5^m & 9(-2)^m-2.5^m \end{pmatrix}.$$

Câu 5: Cho dạng toàn phương $f:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$,

và $\beta_0=\{e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ sao cho: .

$\forall X\in\mathbb{R}^3$, ta có $[X]_{\beta_0}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ và $f(X,X)=4x_1x_2-2x_1x_3+18x_2x_3$.

a) Hãy chính tắc hóa dạng toàn phương f.

b) Hãy chỉ ra một cơ sở β ứng với dạng chính tắc tìm được ở câu a.

Giải:

a) Đặt $\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$ (1)

$$\Rightarrow f(X,X)=4(y_1^2-y_2^2)-2(y_1+y_2)y_3+18(y_1-y_2)y_3 \quad (*)$$
$$=4y_1^2-4y_2^2+16y_1y_3-20y_2y_3$$
$$=4(y_1^2+4y_1y_3)-4y_2^2+20y_2y_3$$
$$=4(y_1+2y_3)^2-16y_3^2-4y_2^2+20y_2y_3$$
$$=4(y_1+2y_3)^2-(4y_2^2+20y_2y_3)-16y_3^2$$
$$=4(y_1+2y_3)^2-(2y_2+5y_3)^2-16y_3^2+25y_3^2$$
$$=4(y_1+2y_3)^2-(2y_2+5y_3)^2+9y_3^2$$

Đặt $\begin{cases} z_1=y_1+2y_3 \\ z_2=2y_2+5y_3 \\ z_3=y_3 \end{cases}$ (2)

$\Rightarrow$ DTP f được đưa về DCT: $f(X,X)=4z_1^2-z_2^2+9z_3^2$.

b) Gọi α - cơ sở mà trong đó DTP f đã cho có dạng $(*)$ và $(X)_\alpha=(y_1,y_2,y_3)$.
Đặt $\beta=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ - cơ sở mà trong đó DTP f đã cho có DCT vừa tìm được và $(X)_\beta=(z_1,z_2,z_3)$.

$$(1)\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\Rightarrow P_{\beta_0\to\alpha}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow P_{\beta\to\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ta có:

$$P_{\beta_0\to\beta} = P_{\beta_0\to\alpha}.P_{\alpha\to\beta} = P_{\beta_0\to\alpha}.P_{\beta\to\alpha}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{9}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = (1,1,0) \\ \beta_2 = (\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0). \\ \beta_3 = (-\frac{9}{2},\frac{1}{2},1) \end{cases}$$