ÔN TẬP 2

Câu 1. Trên $\mathbb{R}^6$ cho tập hợp $W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \middle| \begin{array}{l} 2x_2 - x_3 + x_1 - 4x_5 = 0 \\ 4x_3 + 5x_4 - 2x_1 + 3x_2 - 6x_6 = 0 \\ x_4 - x_1 + 2x_6 + 3x_5 + 2x_3 = 0 \end{array} \right\}$.

Hãy tìm hệ sinh, cơ sở và số chiều của W.

Giải:

Xét HPT $\begin{cases} 2x_2 - x_3 + x_1 - 4x_5 = 0 \\ 4x_3 + 5x_4 - 2x_1 + 3x_2 - 6x_6 = 0 \quad (*) \\ x_4 - x_1 + 2x_6 + 3x_5 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 5 & 0 & -6 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3 = h_3 + h_1]{h_2 = h_2 + 2h_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 5 & -8 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow[h_3 = 2h_3 - 7h_2]{h_2 \leftrightarrow h_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -9 & -26 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow r(A) = 3 < 6$ (số ẩn) $\Rightarrow (*)$ có VSN phụ thuộc vào 3 tham số.

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_5 = 0 \\ \quad 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 = 0 \\ \quad\quad -3x_3 + 3x_4 - 9x_5 - 26x_6 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_4 - 3x_5 - \frac{46}{3} x_6 \\ x_2 = -x_4 + 2x_5 + \frac{10}{3} x_6 ; \quad x_4, x_5, x_6 \in \mathbb{R} \\ x_3 = x_4 - 3x_5 - \frac{26}{3} x_6 \end{cases}$$

$\Rightarrow \forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in W,\ x$ có dạng:

$$x = (3x_4 - 3x_5 - \tfrac{46}{3} x_6, -x_4 + 2x_5 + \tfrac{10}{3} x_6, x_4 - 3x_5 - \tfrac{26}{3} x_6, x_4, x_5, x_6); x_4, x_5, x_6 \in \mathbb{R}$$

$$= x_4 \underbrace{(3, -1, 1, 1, 0, 0)}_{u_1} + x_5 \underbrace{(-3, 2, -3, 0, 1, 0)}_{u_2} + x_3 \underbrace{(-\tfrac{46}{3}, \tfrac{10}{3}, -\tfrac{26}{3}, 0, 0, 1)}_{u_3}$$

$$= x_4 u_1 + x_5 u_2 + x_6 u_3$$

$\Rightarrow S := \{u_1, u_2, u_3\}$ là hệ sinh của W (1)

Mặt khác :

$$A_S = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{46}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{26}{3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_2 \leftrightarrow c_5 \\ c_3 \leftrightarrow c_6}]{c_1 \leftrightarrow c_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{46}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{26}{3} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow r(A_s) = 3 \Rightarrow r(S) = 3 = n_S \Rightarrow S$ - đltt (2)

Từ $(1), (2) \Rightarrow S$ là 1 cở sở của $W \Rightarrow \dim W = 3$.

Câu 2. Trên $\mathbb{R}^3$ cho các tập hợp $a = \{\alpha_1 = (2, -1, 4), \alpha_2 = (-6, 2, -5), \alpha_3 = (1, -1, 6)\}$ và $\beta = \{\beta_1 = (4, -3, 1), \beta_2 = (-7, 2, -8), \beta_3 = (-1, 4, -5)\}$.

a) Chứng minh rằng a và β là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Hãy tìm ma trận chuyển cơ sở $S = P_{a\to\beta}$.

c) Cho vector $\alpha \in \mathbb{R}^3$ có tọa độ theo cơ sở β là $(\alpha)_\beta = (-4,1,3)$. Hãy tìm tọa độ của α theo cơ sở a.

Giải:

a) $n_a = n_\beta = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ để chứng minh a, β là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ ta chỉ cần chứng minh a, β đttt trên $\mathbb{R}^3$.

Lập ma trận:

$$A_a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -6 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \text{ có } |A_a| = -1 \neq 0 \Rightarrow a\text{-đltt} \Rightarrow a \text{ là cở sở của } \mathbb{R}^3.$$

Tương tự :

$$A_\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -7 & 2 & -8 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix} \text{ có } |A_\beta| = 143 \neq 0 \Rightarrow \beta\text{-đltt} \Rightarrow \beta \text{ là cở sở của } \mathbb{R}^3.$$

b) $$\beta_1 = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \\ 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{14}{17} \\ x_2 = -\frac{9}{17} \\ x_3 = -\frac{14}{17} \end{cases} \Rightarrow [\beta_1]_a = \begin{pmatrix} \frac{14}{17} \\ -\frac{9}{17} \\ -\frac{14}{17} \end{pmatrix}.$$

Tương tự:

$$[\beta_2]_a = \begin{pmatrix} 19 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad [\beta_3]_a = \begin{pmatrix} 97 \\ -25 \\ 43 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S = P_{a\to\beta} = \begin{pmatrix} \frac{14}{17} & 19 & 97 \\ -\frac{9}{17} & 6 & -25 \\ -\frac{14}{17} & -9 & 43 \end{pmatrix}.$$

c) Ta có: $[\alpha]_a = P_{a\to\beta}.[\alpha]_\beta$

$$= S.[\alpha]_\beta = \begin{pmatrix} \frac{14}{17} & 19 & 97 \\ -\frac{9}{17} & 6 & -25 \\ -\frac{14}{17} & -9 & 43 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5214}{17} \\ -\frac{1137}{17} \\ \frac{2096}{17} \end{pmatrix}.$$

.

Câu 3: Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho tích vô hướng:

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3, \langle x \mid y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3.$$

Hãy trực chuẩn hóa hệ $S = \{u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,0,0)\}$.

Giải:

+) $$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,1,1)$$

+) $\overline{v}_2 = u_2 - < u_2 | v_1 > v_1 = (1,1,0) - \frac{2}{\sqrt{5}}.\frac{1}{\sqrt{5}}(1,1,1) = \left(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{2}{5}\right),$

$$\|\overline{v}_2\| = \frac{\sqrt{30}}{5} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{\overline{v}_2}{\|\overline{v}_2\|} = \left(\sqrt{\frac{3}{10}}, \sqrt{\frac{3}{10}}, -\sqrt{\frac{2}{15}}\right)$$

+) $\overline{v}_3 = u_3 - < u_3 | v_1 > v_1 - < u_3 | v_2 > v_2 =$

$$= (1,0,0) - \frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{1}{\sqrt{5}}(1,1,1) - \sqrt{\frac{3}{10}}.\left(\sqrt{\frac{3}{10}}, \sqrt{\frac{3}{10}}, -\sqrt{\frac{2}{15}}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right),$$

$$\|\overline{v}_3\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow v_3 = \frac{\overline{v}_3}{\|\overline{v}_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

$\Rightarrow S' = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ là hệ trực chuẩn hóa của hệ S.

Câu 4: Cho ma trận thực $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$.

Hãy chéo hóa A, rồi sau đó tìm A^{2021}.

Giải:

+) $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 \\ 8 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_1 = 5 \end{cases}.$

$A \in M_2$ có 2 GTR phân biệt $\Rightarrow A$ chéo hóa được.

+) $\lambda_1 = -1$

Giải hpt: $(A+I)x^T = \theta, x = (x_1, x_2) \neq \theta \quad (1)$

$$(A+2I) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0, x \neq \theta$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Chọn 1 cơ sở của KGR ứng GTR $\lambda_1 : a_1 = (1, -1)$.

+) $\lambda_2 = 5$

Giải hpt: $(A - 5I)x^T = \theta, x \neq \theta \quad (2)$

$$(A-5I)=\begin{pmatrix}-8 & -2\\ 8 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow (2)\Leftrightarrow 4x_1+x_2=0, x\neq\theta$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=t\\ x_2=-4t\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Chọn 1 cơ sở của KGR ứng GTR $\lambda_2 : a_2=(1,-4)$.

+) Lập ma trận

$$T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -4\end{pmatrix}\Rightarrow T^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D=T^{-1}AT=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 8 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}.$$

+) $A^{2021}=TD^{2021}T^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 5^{2021}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 5^{2021}\\ 1 & -4.5^{2021}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=$

$$=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4+5^{2021} & 1+5^{2021}\\ -4(1+5^{2021}) & -1-4.5^{2021}\end{pmatrix}.$$

Câu 5: Cho dạng toàn phương $f:\square^3\times\square^3\to\square$,

và $\beta_0=\{e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ sao cho: .

$\forall X\in\square^3$, ta có $[X]_{\beta_0}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$ và $f(X,X)=2x_1^2-3x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2-18x_2x_3$.

a) Hãy chính tắc hóa dạng toàn phương f.

b) Hãy chỉ ra một cơ sở β ứng với dạng chính tắc tìm được ở câu a.

Giải:

a) $f(X,X)=2(x_1^2-x_1x_2)-3x_2^2+4x_3^2-18x_2x_3$

$$=2(x_1-\frac{1}{2}x_2)^2-\frac{7}{2}x_2^2+4x_3^2-18x_2x_3$$

$$=2(x_1-\frac{1}{2}x_2)^2-\frac{7}{2}(x_2^2+\frac{36}{7}x_2x_3)+4x_3^2$$

$$=2(x_1-\frac{1}{2}x_2)^2-\frac{7}{2}(x_2+\frac{18}{7}x_3)^2+\frac{190}{7}x_3^2$$

Đặt $\begin{cases} y_1 = x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 \\ y_2 = \qquad 2x_2 + \dfrac{18}{7}x_3 \\ y_3 = \qquad\qquad x_3 \end{cases}$ (1)

$\Rightarrow$ DTP f được đưa về DCT: $f(X,X) = 2y_1^2 - \dfrac{7}{2}y_2^2 + \dfrac{190}{7}y_3^2$.

b) Đặt $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ - cơ sở mà trong đó DTP f đã cho có DCT vừa tìm được và $(X)_\beta = (y_1, y_2, y_3)$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{18}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow P_{\beta \to \beta_0} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{18}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$P_{\beta_0 \to \beta} = P_{\beta \to \beta_0}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{18}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{9}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{18}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = (1,0,0) \\ \beta_2 = (\frac{1}{2},1,0) \\ \beta_3 = (-\frac{9}{7},-\frac{18}{7},1) \end{cases}.$$

.