离散数学基础

函数基础知识

中山大学 MOOC 课程组

中山大学计算机学院

March 4, 2021

目录

目录

函数、像、原像

函数

集合 A 到 B 的函数 f，记为 $f: A \to B$，是笛卡尔积集 $A \times B$ 的子集，且满足对任意 $a \in A$，都有且只有唯一的 $b \in B$ 使得 $< a, b > \in f$。函数通常也称为**映射**。

像、原像

由于 b 存在且唯一，因此记 $b = f(a)$，称 b 是 a 在函数 f 下的**像**，a 是 b 在函数 f 下的**原像**。

域的相关定义

域

对于函数 $f: A \to B$，称 A 是 f 的定义域，而 B 称为 f 的陪域。特别地，$f(A)$ 称为 f 的值域。

对于某个函数 f 来说，它的值域一定为陪域的子集，而且，我们可以得到: 一个映射的值域等于陪域，当且仅当映射为满射。

取整相关定义

天花板 (ceiling)

天花板函数 $f(x) = \lceil x \rceil$，是大于等于 x 的最小整数。

地板 (floor)

地板函数 $f(x) = \lfloor x \rfloor$，是小于等于 x 的最小整数。

天花板和地板的定义域为实数集，而陪域为整数集。

单函数、满函数、双函数

单函数

陪域 B 的每个元素至多有定义域 A 的一个函数与之对应。单函数有时也称作一对一函数。

满函数

陪域 B 的每个元素至少有定义域 A 的一个元素与之对应。满函数有时也称为映上函数。

双函数

一个既是单函数又是满函数的函数是双函数，也称为一一对应。

特殊约定

- 定义域为空的空函数是单函数，如果陪域也为空，那么认为是双函数。
- 对任意集合 A，A 上的恒等函数 $\mathbf{id}_A$ 是双函数。

复合函数、反函数

复合函数

函数 $f: A \to B$ 和 $g: B \to C$ 的复合，记为 $g \circ f$ (不是 $f \circ g$)，定义为:

$$\forall x \in A, g \circ f = g(f(x))$$

反函数

如果一个函数 $f: A \to B$ 是双函数，那么它的逆关系 f^{-1} 也是函数，称为 f 的反函数，且对任意 $x \in A, y \in B$，$f^{-1}(y) = x$ 当且仅当 $f(x) = y$。

目录

判断关系是否可以构成函数

下列哪些关系可以构成函数？

- $\{<x_1, x_2> | x_1, x_2 \in \mathbf{N}, x_1 + x_2 < 10\}$
- $\{<y_1, y_2> | y_1, y_2 \in \mathbf{R}, y_2 = y_1^2\}$
- $\{<y_1, y_2> | y_1, y_2 \in \mathbf{R}, y_2^2 = y_1\}$

判断关系是否可以构成函数

下列哪些关系可以构成函数？

- $\{<x_1, x_2> | x_1, x_2 \in \mathbf{N}, x_1 + x_2 < 10\}$
- $\{<y_1, y_2> | y_1, y_2 \in \mathbf{R}, y_2 = y_1^2\}$
- $\{<y_1, y_2> | y_1, y_2 \in \mathbf{R}, y_2^2 = y_1\}$

答案

不能、能、不能。

判断关系是否可以构成函数

下列哪些关系可以构成函数？

- $\{<x_1, x_2> | x_1, x_2 \in \mathbf{N}, x_1 + x_2 < 10\}$
- $\{<y_1, y_2> | y_1, y_2 \in \mathbf{R}, y_2 = y_1^2\}$
- $\{<y_1, y_2> | y_1, y_2 \in \mathbf{R}, y_2^2 = y_1\}$

答案

不能、能、不能。

解析

函数和关系的区别在于他们的对应法则。在关系 R 的表达式中，如果 $< x, y > \in R$，就说 x 对应到 y,注意这种对应可以是一对一的、多对一的和一对多的。但函数不允许一对多的对应，因此判别一个关系是否构成函数，就要检查关系中是否存在一对多的情况。

函数与关系

设 $f: A \to B$ 是函数，且 S 是 B 上的关系，在 A 上定义关系 R:

$$R = \{(x,y) \in A \times A | (f(x), f(y)) \in S\}$$

试证明：

- 若 S 是自反关系，则 R 也是自反关系。
- 若 S 是对称关系，则 R 也是对称关系。
- 若 S 是传递关系，则 R 也是传递关系。

函数与关系

设 $f: A \to B$ 是函数，且 S 是 B 上的关系，在 A 上定义关系 R:

$$R = \{(x,y) \in A \times A | (f(x), f(y)) \in S\}$$

自反关系

假定 S 是自反的，则对任意 $x \in A$，有 $< f(x), f(x) > \in S$，从而根据 R 的定义，有 $< x, x > \in R$，从而 R 也是自反的。

函数与关系

设 $f: A \to B$ 是函数，且 S 是 B 上的关系，在 A 上定义关系 R:

$$R = \{(x, y) \in A \times A | (f(x), f(y)) \in S\}$$

自反关系

假定 S 是自反的，则对任意 $x \in A$，有 $< f(x), f(x) > \in S$，从而根据 R 的定义，有 $< x, x > \in R$，从而 R 也是自反的。

对称关系

假定 S 是对称的，则对任意 $x, y \in A$，有 $< f(x), f(y) > \in S$，由于 S 是对称的，那么 $< f(y), f(x) > \in S$, 从而根据 R 的定义有 $< y, x > \in R$，即 R 也是对称的。

函数与关系

设 $f: A \to B$ 是函数，且 S 是 B 上的关系，在 A 上定义关系 R:

$$R = \{(x, y) \in A \times A | (f(x), f(y)) \in S\}$$

传递关系

假定 S 是传递的，则对任意 $x, y, z \in A$，若 $< x, y > \in R$ 且 $< y, z > \in R$，即 $< f(x), f(y) > \in S$ 且 $< f(y), f(z) > \in S$。由于 S 是传递的，因此也有 $< f(x), f(z) > \in S$, 从而根据 R 的定义，有 $< x, z > \in R$，这就表明 R 是传递的。

双射函数的构建

对下面给定的集合 A 和 B，构造从 A 到 B 的双射函数。

- $A = \mathbf{N}, B = \{x | x = 2^y \wedge y \in \mathbf{N}\}$
- $A = [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}], B = [-1, 1]$，都是实数区间

双射函数的构建

对下面给定的集合 A 和 B，构造从 A 到 B 的双射函数。

- $A = \mathbf{N}, B = \{x | x = 2^y \wedge y \in \mathbf{N}\}$
- $A = [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}], B = [-1, 1]$，都是实数区间

答案 (不唯一，合理即可)

- $f : A \to B, f(x) = 2^x$
- $f : A \to B, f(x) = sinx$

双射函数的构建技巧分析

给定集合 A, B，如何构造从 A 到 B 的双射？
一般可采用如下技巧：

双射函数的构建技巧分析

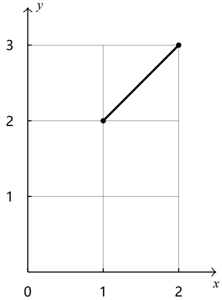
给定集合 A, B，如何构造从 A 到 B 的双射？
一般可采用如下技巧：

- 若 A,B 都是有穷集合，则可用列元素的方法表示 A,B，然后顺序将 A 中的元素与 B 中的元素建立对应。

双射函数的构建技巧分析

给定集合 A, B，如何构造从 A 到 B 的双射？
一般可采用如下技巧：

- 若 A,B 都是有穷集合，则可用列元素的方法表示 A,B，然后顺序将 A 中的元素与 B 中的元素建立对应。
- 若 A,B 都是实数区间，可以采用直线方程作为从 A 到 B 的双射函数。例如 $A=[1,2], B=[2,3]$ 都是实数区间，先将 A, B 分别标记在直角坐标系的 x, y 轴上，过 (1,2) 和 (2,3) 两点的直线方程将 A 中的每个数映射到 B 上，因此该直线方程所代表的一次函数就是从 A 到 B 的双射函数，为 $f(x)=x+1$。**但对半开半闭区间需注意开端点与开端点对应，闭端点与闭端点对应**。



双射函数的构建技巧分析

- 若 A 是一个无穷集合，而 B 是自然数集 $\mathbf{N}$。为构造从 A 到 B 的双射，只需将 A 中的元素排成一个有序序列，且指定这个序列的初始元素，这就叫把 A" 良序化" 。例如 A 良序化后为 $\{x_0.x_1,x_2\cdots\}$，那么令 $f:A\to B, f(x_i)=i, i=0,1,2,\cdots$，$f$ 就是从 A 到 B 的双射。

函数性质

设 $f: A \to B$ 和 $g: B \to C$ 是函数，证明：

- 如果 $g \circ f$ 是单函数，则 f 是单函数，但 g 不一定是单函数。
- 如果 $g \circ f$ 是满函数，则 g 是满函数，但 f 不一定是满函数。
- 如果 $g \circ f$ 是双函数，则 f 是单函数，且 g 是满函数。

函数性质

证明：

- 设 $g \circ f$ 是单函数，对任意 $x_1, x_2 \in A$，若 $f(x_1) = f(x_2)$，则有 $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$。而由 $g \circ f$ 是单函数可得，$x_1 = x_2$，这就证明了 f 是单函数。

函数性质

证明：

- 设 $g\circ f$ 是单函数，对任意 $x_1,x_2\in A$，若 $f(x_1)=f(x_2)$，则有 $g(f(x_1))=g(f(x_2))$。而由 $g\circ f$ 是单函数可得，$x_1=x_2$，这就证明了 f 是单函数。
- 设 $g\circ f$ 是满函数，对任意 $c\in C$，由于 $g\circ f$ 是满函数，因此一定存在 $a\in A$, 使得 $g\circ f(a)=c$, 从而 c 在 g 下有原像 $f(a)$，因此 g 为满函数。

函数性质

证明：

- 设 $g \circ f$ 是单函数，对任意 $x_1, x_2 \in A$，若 $f(x_1) = f(x_2)$，则有 $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$。而由 $g \circ f$ 是单函数可得，$x_1 = x_2$，这就证明了 f 是单函数。
- 设 $g \circ f$ 是满函数，对任意 $c \in C$，由于 $g \circ f$ 是满函数，因此一定存在 $a \in A$, 使得 $g \circ f(a) = c$, 从而 c 在 g 下有原像 $f(a)$，因此 g 为满函数。
- 对于" 不一定" 的证明，我们通常采用举反例的方法。设 $A = \{1, 2\}, B = \{a, b, c\}, C = \{0, 1\}$，$f$ 定义为 $f(1) = a, f(2) = b$，g 定义为 $g(a) = g(b) = 0, g(c) = 1$，即可举出以上两问的反例。

函数性质

证明：

- 设 $g\circ f$ 是单函数，对任意 $x_1,x_2\in A$，若 $f(x_1)=f(x_2)$，则有 $g(f(x_1))=g(f(x_2))$。而由 $g\circ f$ 是单函数可得，$x_1=x_2$，这就证明了 f 是单函数。
- 设 $g\circ f$ 是满函数，对任意 $c\in C$，由于 $g\circ f$ 是满函数，因此一定存在 $a\in A$, 使得 $g\circ f(a)=c$, 从而 c 在 g 下有原像 $f(a)$，因此 g 为满函数。
- 对于"　不一定"　的证明，我们通常采用举反例的方法。设 $A=\{1,2\},B=\{a,b,c\},C=\{0,1\}$，$f$ 定义为 $f(1)=a,f(2)=b$，g 定义为 $g(a)=g(b)=0,g(c)=1$，即可举出以上两问的反例。
- 由前两问可立即得出第三问的结论。

目录

总结

- 函数的定义
  - 像、原像
  - 定义域、陪域、值域
- 函数的性质和运算
  - 单函数、满函数、双函数
  - 复合函数、反函数

Thank you

Thank you for listening!