Dr. O Diop

ENSAE DAKAR/ISE 1

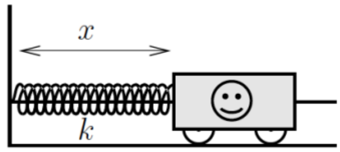
Devoir de Calcul scientifique

TP 1 : Masse-Ressort

Le déplacement $x(t)$ d'un système oscillant composé d'une masse et d'un ressort, soumis à une force de frottement proportionnelle à la vitesse, est décrit par l'équation différentielle du second ordre :

$$mx'' + \lambda x' + kx = 0. \tag{1}$$

où $\lambda > 0$ modélise les frottements. On posera pour simplifier $\alpha = \frac{\lambda}{2m}$ et $\omega_0^2 0 = \frac{k}{m}$



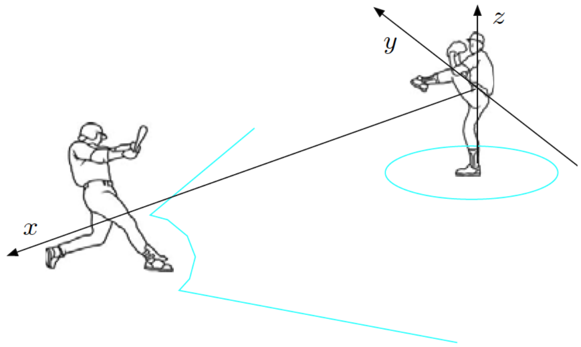
1. Ecrire l'équation différentielle (1) sous la forme de système de deux équations différentielles linéaire du premier ordre $X' = AX$.
2. Déterminer, en fonction de α et ω_0^2, les valeurs propres de la matrice A.
3. Résoudre le problème linéaire par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 et commenter les résultats pour les scénarios suivants :
   (a) Frottements importants, i.e : $\alpha^2 > \omega_0^2$. On montrera que les courbes $X(t)$ solutions de l'équation différentielle présentent alors une asymptote pour $t \longrightarrow \infty$.
   (b) Frottement faibles : $0 < \alpha^2 < \omega_0^2$.
   (c) Mouvement sans frottements, i.e : $\alpha = 0$;on montrera que les solutions $X(t)$ sont des ellipses.
4. Mêmes questions dans le cas intermédiaire $\alpha^2 = \omega_0^2$. Montrer en particulier que les solutions $X(t)$ présentent une asymptote pour $t \longrightarrow \infty$.

Pour la résolution numérique, on pourra prendre: $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$, pour $t \in [0, 5]$.

TP 2 : Balle de baseball

On veut simuler la trajectoire d'une balle de baseball depuis le lanceur jusqu'au catch. En adoptant le référentiel représenté sur figure ci-dessous, les équations décrivant le mouvement de la balle sont :

1. Variation de la position
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = v \tag{2}$$
$\mathbf{x(t)} = (x(t), y(t), z(t))^T$ désigne la position de la balle au temps t,



2. Variation de la vitesse
$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = F \tag{3}$$
$\mathbf{v(t)} = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))^T$ est la vitesse.

La fonction F est le vecteur de composante donnée par:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F(v)vv_x + B\omega\,(v_z \sin\phi - v_y \cos\phi) \\ -F(v)vv_y + B\omega v_x \cos\phi \\ -g - F(v)vv_y + B\omega v_x \sin\phi \end{pmatrix} \tag{4}$$

avec :

- v est le module de v et $B = 4.110^{-4}$ est une constante normalisée,
- ϕ est l'angle de lancement,
- ω est le module de la vitesse angulaire appliquée à la balle par le lanceur.
- $F(v)$ est appelé coefficient de friction, il est donné par :

$$F(v) = 0.0039 + \frac{0.0058}{1 + e^{(v-35)/5}}.$$

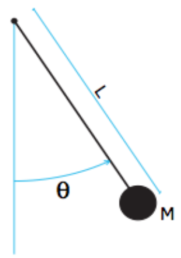
Pour déterminer la trajectoire de la balle de baseball, on doit alors résoudre un système d'équations différentielles.
On considère les données suivantes

- vitesse initiale de la balle $\mathbf{v(0)} = v_0\,(cos(\phi), 0, sin(\phi))^T$;
- $v_0 = 38m/s$;
- $\phi = 1$ degré ;
- $\omega = 188.49564$ radians par seconde

Si $\mathbf{x(0)} = \mathbf{0}$, après combien de secondes (approximativement) la balle touche le sol (i.e., $z = 0$) ? On pourra résoudre le problème par la méthode d'Euler explicite.

TP 3 : Pendule pesant

On considère un pendule constitué d'une petite bille au bout d'une fine tige rigide qui se déplace dans un plan vertical. Notons θ l'angle balayé par le pendule depuis une position d'équilibre (pendule vertical, en position basse). Les positions d'équilibre sont donc obtenues pour $\theta = 2k\pi$ (position basse, équilibre stable) et pour $\theta = (2k+1)\pi$ (position haute, équilibre instable). On distingue deux cas de figure



1. Pendule pesant non amortis. En cas d'absence de frottement, on peut choisir les unités de façon que la loi de Newton $F = ma$ se traduise par l'équation du second ordre suivante.
$$\theta'' = -\frac{g}{L}\sin(\theta(t)). \tag{5}$$
   (a) Ecrire le système (5) sous la forme d'une système d'EDO du premier ordre.
   (b) Discuter de l'existence et l'unicité de solution du système d'EDO du premier ordre obtenu.
   (c) Afficher sur la même figure la variation de la position angulaire pour les méthodes d'Euler, de RK2 et de RK4.
   (d) Les solutions graphiques montrent qu'on a des oscillation périodiques. Vérifier numériquement que la période est $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$.

2. Si le pendule est soumis à un frottement visqueux de coefcient μ, alors l'équation (5) devient
$$\theta'' = -\frac{g}{L}\sin(\theta(t)) - \frac{\mu}{mL}\theta'(t). \tag{6}$$
   Ici m est la masse de la bille. Afficher sur la même figure la variation de la position angulaire pour les méthodes d'Euler, de RK2 et de RK4. Expliquer les résultats obtenus.

Pour la résolution numérique, on pourra prendre: $\theta(0) = 1$ et $\theta'(0) = 1/2$, pour $t \in [0, 10]$.
On choisit les valeurs des paramètres suivants : $g = 9,81$; $m = 5$; $L = 1,2$ et $\mu = 0.02$.

TP 4 : Thermodynamique

Considérons un corps ponctuel de masse m et de température interne T situé dans un environnement de température constante T_e. Le transfert de chaleur entre le corps et l'extérieur peut être décrit par la loi de Stefan-Boltzmann

$$v(t) = \epsilon\gamma S(T^4(t) - T_e^4),$$

où t est la variable temporelle, ϵ la constante de Boltzmann (égale à $5.6.10^{-8} J/m^2K^4s$, J est l'abréviation de Joule, K celle de Kelvin et, naturellement, m et s celles de mètre et seconde), γ est la constante d'émissivité du corps, S sa surface et v est la vitesse de transfert de chaleur. Le taux de variation de l'énergie $E(t) = mCT(t)$ (où C est la capacité calorifique du corps) est égal, en valeur absolue, à la vitesse. v. Par conséquent, en posant $T(0) = T_0$, le calcul de $T(t)$ nécessite la résolution de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{dT(t)}{t} = -\frac{v}{mC}. \tag{7}$$

Résoudre l'équation par les méthodes d'Euler explicite et de Runge-Kutta d'ordre 2 quand le corps est un cube de coté $1m$ et de masse $1kg$. On posera $T_0 = 180K, T_e = 200K, \gamma = 0.5$ et $C = 100J/(kg/K)$. Comparer les résultats obtenus en prenant $h = 20$ et $h = 10$, pour t allant de 0 à 200 secondes.