

Appunti Di Segnali E Sistemi

May 31, 2018

Contents

1	Introduzione	3
2	Segnali	3
3	Trasformazioni nella variabile indipendente	4
4	Simmetrie	5
5	Segnali periodici	5
6	Sistemi	5
7	Sistemi LTI	6
8	Serie di Fourier	8
9	Filtri	10
10	Equazioni differenziali e alle differenze	10
11	Trasformata di Fourier	11
12	Trasformata di Laplace.	13

Appunti di segnali e sistemi presi principalmente dalle dispense di M. Pavon e L. Finesso e dal libro *Signals and Systems* di A. Oppenheim e A. Willsky.

1 Introduzione

Che cos'è un segnale? Un segnale è un qualunque fenomeno fisico che si evolve nel tempo, come per esempio la posizione di un corpo in moto, oppure nello spazio: un'immagine digitale può essere trattata come un segnale bidimensionale e come tutti i segnali può essere elaborata, vedi algoritmo JPEG.

In questi appunti si tratterà ovviamente solo di segnali appartenenti alla prima categoria. Si vedrà come rappresentarli matematicamente e come rappresentare anche i *sistemi*, che trasformano segnali in altri segnali.

Particolari sistemi, detti *LTI*, restituiscono la convoluzione tra il segnale d'ingresso e la *risposta impulsiva*, che caratterizza il sistema stesso. Questi hanno quindi una rappresentazione relativamente semplice.

Molti segnali possono invece essere rappresentati *in forma di Fourier*, con le serie omonime nel caso siano periodici, o con la trasformata nel caso non lo fossero.

Si parla anche di equazioni differenziali e alle differenze (lineari e a coefficienti costanti) e di come queste si possano associare a dei sistemi. Con la trasformata di Laplace e con la trasformata Zeta è anche possibile risolvere in modo rapido queste equazioni.

2 Segnali

Ho detto che un segnale è un fenomeno fisico che si evolve nel tempo, perciò quale migliore rappresentazione potrebbe esserci se non una funzione del tempo $x(t)$? Infatti così si rappresentano buona parte dei segnali ma non tutti. Il segnale $x(t)$ ha infatti come dominio \mathbb{R} e va bene per rappresentare un elettrocardiogramma oppure la tensione in uscita su un'ampificatore per chitarre. Ma un computer può elaborare un tale segnale? Assolutamente no! Un computer elabora solamente segnali digitali, quindi che hanno per dominio e codominio \mathbb{Z} .

Comunque non ci occupa di segnali digitali in questi appunti ma di segnali a tempo discreto, quindi solo con dominio discreto. Con questi segnali si può rappresentare la temperatura media giornaliera (*analogica!*), oppure la popolazione di un paese nel corso degli anni.

Ricapitolando:

- $x(t)$ rappresenta un generico segnale a tempo continuo, quindi $x : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$;
- $x(n)$ rappresenta un generico segnale a tempo discreto, quindi $x : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}$.

I moduli sono necessari per i segnali *complessi*. Spesso si definiscono i parametri per intervalli infiniti, quindi fare il limite per $t_1 \rightarrow -\infty$ e per $t_2 \rightarrow \infty$. Per i parametri dei segnali a tempo discreto, "sostituire" gli integrali con delle sommatorie. Esempio,

Area	$A_x = \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt$	Valore medio	$m_x = \frac{1}{t_2-t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt$
Energia	$E_x = \int_{t_1}^{t_2} x(t)^2 dt$	Potenza media	$P_x = \frac{1}{t_2-t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t)^2 dt$

Table 1: Principali parametri dei segnali a tempo continuo.

potenza media:

$$P_x = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)^2 \quad (1)$$

Energia mutua tra due segnali:

$$E_{x,y} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{y(t)} dt \quad (2)$$

dove $\overline{y(t)}$ è il complesso coniugato. Se $x = y$ allora $E_{x,y} = E_x$.

Valgono le seguenti considerazioni su potenza ed energia (abbastanza banali).

$$\begin{aligned} E_{\infty} < \infty &\Rightarrow P_{\infty} = 0 \\ P_{\infty} > 0 &\Rightarrow E_{\infty} = \infty \end{aligned}$$

Table 2: Considerazioni riassuntive su potenza e energia.

L'insieme di tutti i segnali a energia finita è L^2 ed è definito sia per i segnali continui a supporto limitato che illimitato. Per i segnali discreti si definisce solo per quelli a supporto illimitato. Vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$E_{x,y}^2 \leq E_x E_y \quad (3)$$

Per la dimostrazione, calcolare l'energia del segnale $z(t) = x(t) + \alpha y(t)$. L^2 è uno spazio vettoriale su \mathbb{C} e l'energia mutua tra due segnali può essere interpretata come un *prodotto scalare* in L^2 .

3 Trasformazioni nella variabile indipendente

Ecco le operazioni che si possono effettuare sulla variabile indipendente.

- *Time shifting*: preso il segnale $x(t)$, il segnale trasformato $x(t - t_0)$ corrisponde a $x(t)$ traslato in avanti della quantità t_0 .
- *Time reversing*: preso il segnale $x[n]$, il segnale trasformato $x[-n]$ corrisponde ad una simmetria rispetto all'asse y di $x[n]$.
- *Time scaling*: di cui il time reversing è solo un caso particolare, corrisponde ad un ampliamento o restringimento del dominio del segnale di partenza $x(t)$ e si ottiene con $x(\alpha t)$.

4 Simmetrie

Un segnale a valori complessi con parte reale pari e parte immaginaria dispari gode di simmetria *hermitiana* mentre se ha parte reale dispari e parte immaginaria pari allora si dice che è *anti-hermitiano*.

Parte pari	Parte dispari
$x_p(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2}$	$x_d(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{2}$

Table 3: Parte pari e parte dispari di un segnale.

5 Segnali periodici

Un segnale $x(t)$ si dice periodico di periodo T se vale $x(t) = x(t + T)$ per ogni t . Somme e prodotti di segnali periodici possono essere anch'essi periodici a patto che il rapporto tra i loro periodi sia un numero *razionale*. Inoltre, se si tratta di segnali a tempo discreto, il periodo deve essere necessariamente un multiplo *intero* del rapporto.

Combinazione armonica. Una combinazione lineare (famiglia) di esponenziali complessi si dice in relazione armonica se sono tutti multipli di uno stesso periodo fondamentale T_0 e si scrive

$$\Phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} \quad (4)$$

6 Sistemi

I sistemi trasformano segnali in altri segnali. Una funzione che ha per dominio e codominio insiemi di funzioni è detta *operatore*. Esempi concreti possono essere il codificatore (encoder) e il decodificatore (decoder).

Alcuni sistemi vengono progettati per controllare altri sistemi, processi fisici o tecnologici. Sistemi in catena aperta o chiusa (a feedback).

Matematicamente, un sistema è una terna (X, Y, Σ) dove X e Y sono famiglie di segnali e Σ è una mappa da X a Y quindi $\Sigma[x(t)] = y(t)$.

Se X è discreto e Y è continuo o viceversa il sistema è detto *ibrido*.

Sistemi algebrici. Detti anche statici o senza memoria (*memoryless*), sono delle funzioni, tipo la legge di Ohm, ovvero i loro output in un istante t' dipendono solamente dall'input al tempo t' come ad esempio $\Sigma[x(t)] = f(t, x(t))$.

Esempi di sistemi *con* memoria sono invece il condensatore o il delay.

Sistemi dinamici. O non algebrici, sono trasformazioni nella variabile indipendente. La trasformazione più generale è $x(t) \mapsto x(\alpha t + \beta)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq 0$.

Oppure sono sistemi di tipo integratore o sommatore come $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ e $y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$.

Sistemi causali. Un sistema si dice causale (non anticipativo) se $y(t)$ dipende solo da $x(\tau)$ per $\tau \leq t, \forall t$. I sistemi statici sono anche causali, l'integratore e il sommatore sono causali se si integra o si somma fino a t .

Sistemi tempo-invarianti. Un sistema a tempo continuo (o discreto) si dice TI se una traslazione temporale all'ingresso provoca un'uguale traslazione temporale all'uscita. Non definito per sistemi ibridi.

$$\Sigma : x(t - T) \mapsto y(t - T), \forall T \in \mathbb{R} \quad (5)$$

Il cambio di scala non è TI. Formalmente, un sistema è TI se *commuta* con le traslazioni temporali, ovvero se (anche per il caso discreto) $(\Sigma \circ U_T)[x(t)] = y(t - T) = (U_T \circ \Sigma)$ dove U_T è la traslazione di tempo T .

Sistemi lineari. Un sistema è lineare se possiede le proprietà di additività e omogeneità.

Sistemi BIBO-stabili. Un sistema si dice BIBO-stabile (ovvero Bounded Input Bounded Output) se

$$\exists M_x : x(t) \leq M_x \forall t \Rightarrow \exists M_y : y(t) \leq M_y \forall t \quad (6)$$

Per verificare la BIBO stabilità di un sistema basta considerare un generico segnale $x'(t)$, limitato $-B \leq x'(t) \leq B$. Tenendo conto dei limiti superiore e inferiore di $x'(t)$, valutare l'uscita del sistema $y'(t)$ in funzione di B e verificare che sia limitata.

7 Sistemi LTI

Perché i sistemi LTI sono così importanti? Molti fenomeni in natura possono essere descritti come sistemi LTI e questi sistemi sono descritti dettagliatamente.

La loro proprietà più importante è la sovrapposizione degli effetti, o *superposition*. Molti segnali possono essere descritti come sommatorie (combinazioni lineari) di impulsi. Sarà molto facile quindi trattare questi segnali in ingresso ad un sistema LTI, conoscendone la sua *risposta impulsiva*.

Risposta impulsiva e convoluzione. Dato un sistema LTI a tempo discreto la sua risposta all'impulso unitario si indica con $h[n]$. Quindi si ha che

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n]h[n - k] \quad (7)$$

Questa formula è nota come convoluzione a tempo discreto (in inglese nota come *convolution sum* o *superposition sum* che forse rende un po' più l'idea di ciò che fa). L'esempio 2.1 a pagina 80 del libro fornisce un buon modo per visualizzare la convoluzione.

Per i segnali a tempo continuo la questione non è molto diversa, ma essendo la distanza tra un impulso e l'altro infinitesima si ha

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau \quad (8)$$

Questo è noto come *integrale convoluzionale* e si indica spesso con la notazione $y(y) = x(t) * y(t)$.

Le principali proprietà della convoluzione sono:

- *commutatività*, infatti $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$;
- *distributività*, $x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$;
- *associatività*, $x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) * h_2(t)$;
- *invertibilità*, per alcuni sistemi vale infatti $h_1(t) * h_2(t) = \delta(t)$ come ad esempio per la *differenza prima* definita come $y[n] = x[n] - x[n - 1]$, se $h_1[n] = u[n]$ e $h_2[n] = \delta[n] - \delta[n - 1]$ si ha $h_1[n] * h_2[n] = \delta[n]$.
- per quanto riguarda la *stabilità*, se l'input è limitato per avere output limitato la risposta impulsiva deve essere *assolutamente integrabile*.

Per i sistemi senza memoria la risposta impulsiva è sempre nella forma

$$h[n] = K\delta[n] \quad (9)$$

Risposta al gradino unitario. Un altro segnale fondamentale è il gradino e per trovare la risposta a questo segnale per un sistema LTI basta usare $s(t) = h(t) * u(t)$ che equivale a $s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau)d\tau$ da cui si ricava che

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = s'(t) \quad (10)$$

Bisogna infine aggiungere che i segnali a supporto finito sono densi in $l^1 = \{x \mid \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\} < \infty$ e quindi in $l^2 = \{x \mid \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)^2 < \infty\}$.

Inoltre se $z(t) = x(t) * y(t)$ allora $\|z\|_1 \leq \|x\|_1 \cdot \|y\|_1$, perciò la convoluzione è ben definita in l^1 .

Risposta in frequenza. Si consideri un sistema convoluzionale e BIBO-stabile, ovvero la sua risposta impulsiva $h(t)$ è assolutamente integrabile. Si definisce *risposta in frequenza* del sistema

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \quad (11)$$

Se ne conclude che segnali del tipo $x(t) = ce^{j\omega t}$ sono *autofunzioni* del sistema e quindi il segnale d'uscita sarà $y(t) = H(j\omega)ce^{j\omega t}$. Per le sinusoidi (essendo combinazioni di esponenziali complessi) vale

$$\cos(\omega t + \phi) \mapsto H(j\omega) \cos(\omega t + \phi + \angle H(j\omega)) \quad (12)$$

8 Serie di Fourier

Riprendendo l'ultimo argomento della sezione precedente possiamo dire che se l'input di un sistema LTI è una combinazione lineare di esponenziali complessi $x(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + a_3 e^{s_3 t}$ con $s_i \in \mathbb{C}$, per la sovrapposizione degli effetti e per la proprietà di $e^{s_i t}$ di essere una autofunzione dei sistemi LTI, si ottiene come output $y(t) = \sum_{i=1}^3 a_i H(s_i) e^{s_i t}$, dove $H(s)$ è la risposta in frequenza del sistema considerato. Arrivati a questo punto ci si chiede quale classe di segnali può essere rappresentata con esponenziali complessi.

Coefficienti di Fourier. (App. 111) Dato un segnale $x(t)$ (assolutamente integrabile) e una famiglia di esponenziali in relazione armonica $\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$ per $k \in \mathbb{Z}$, a_k si dice *k-esimo coefficiente di Fourier* di x rispetto a tale famiglia il valore dato da

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \overline{\phi_k(t)} dt = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j\omega_0 k t} dt \quad (13)$$

Come arrivare a questa formula? Partendo dal segnale $x(t)$ che può essere scritto come $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ moltiplicando entrambi i lati per $e^{-jn\omega_0 t}$, integrando in dt nel periodo $[0, T]$, portando fuori la sommatoria e i termini a_k si ha che

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = T\delta_{n,k} \quad (14)$$

dove $\delta_{n,k}$ è la *delta di Kronecker* e risulta 0 se $k \neq n$ e T se $k = n$. Questa ultima equazione è molto utile per comprendere la proprietà di *ortogonalità*.

Teorema di Riesz-Fisher. Sia $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ una successione di numeri complessi per cui vale $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$ (quindi $\{a_k\} \in l^2$). Allora esiste un segnale x definito su $[0, T]$ ad energia finita tale che

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (15)$$

Teorema di Dirichlet. In breve, se $x(t)$ nel periodo $[0, T]$

- *continuo a tratti*, quindi ha un numero finito di discontinuità
- esistono finiti i limiti destro e sinistro di $x(t)$ in $(0, T)$,
- che sia sempre differenziabile (ad eccezione dei punti di discontinuità dove comunque la derivata deve essere finita),

allora

$$s_n(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \mapsto \frac{x(t_-) + x(t_+)}{2} \quad (16)$$

Quindi se $x(t)$ è periodico, soddisfa le condizioni di Dirichlet ed è continuo si dice che è *svilupabile in serie di Fourier*.

Forme alternative della serie di Fourier. Sotto le condizioni sopra descritte, per un segnale *reale* $x(t)$ vale

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_R) \quad (17)$$

Teorema di Parseval. Siano x e y segnali a energia finita in $[0, T)$ con coefficienti di Fourier $a = \{a_k\}$ e $b = \{b_k\}$ allora

$$\frac{1}{T} \int_0^T x(t) \overline{y(t)} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \overline{b_k} \quad (18)$$

Per $x = y$, il primo termine rappresenta la potenza del segnale sul periodo che equivale alla somma di tutti i moduli al quadrato dei suoi coefficienti di Fourier.

Spazi di Hilbert. Sia H uno spazio vettoriale complesso in cui è definita la mappa $H \times H \mapsto \mathbb{C}$ detta *prodotto scalare*. Valgono le seguenti proprietà

- $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$;
- $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;
- $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0$ se e solo se $x = 0$.

Per $x \in H$ si definisce $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ (è una norma). Valgono le disuguaglianze di Cauchy-Schwarz e quella triangolare.

Inoltre si dice che x_n tende a x in H se $\|x_n - x\| \rightarrow 0$. Esempi:

- \mathbb{C}^n è uno spazio di Hilbert;
- l^2 è uno spazio di Hilbert con $\langle a, b \rangle_{l^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \overline{b_k}$;
- $L^2(0, T)$ è uno spazio di Hilbert con $\langle a, b \rangle_{L^2} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \overline{y(t)} dt$.

Quindi sia $x \in L^2$ e $a \in l^2$ la successione dei suoi coefficienti di Fourier, allora la mappa $F_s : x \mapsto a$ è lineare e conserva il prodotto scalare quindi è un'*isometria* (isomorfismo di spazi di Hilbert). Da teorema di Riesz-Fischer si deduce anche che $\{\phi_k(t)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ sono una base ortonormale di $L^2(0, T)$.

Risultato fondamentale. Sia $x(t)$ periodico di periodo T ad energia finita su $[0, T)$, quindi $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$. Allora vale

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau = \dots = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \quad (19)$$

Awesome! Si capisce subito che y è ancora periodica di periodo T , a energia finita e i suoi coefficienti di Fourier di $y(t)$ sono $b_k = H(jk\omega_0) a_k$. Questo apre la strada a manipolazioni selettive delle armoniche.

Segnali notevoli. Il segnale reale chiamato *onda quadra* è definito come

$$x(t) = \begin{cases} 1 & t < T_1 \\ 0 & T_1 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

ha come coefficienti di Fourier i valori $a_0 = \frac{2T_1}{T}$ e $a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$. Questo ultimo segnale è noto come *sinc*(t).

9 Filtri

In molte applicazioni si vuole cambiare le ampiezze delle varie componenti armoniche o eliminarne completamente alcune, magari in un intervallo $[\omega_1, \omega_2]$. Questo si ottiene con dei sistemi detti filtri.

10 Equazioni differenziali e alle differenze

In questa sezione si tratterà brevemente delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti e delle equazioni alle differenze lineari a coefficienti costanti.

Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Dato che è illegale scrivere ogni volta *equazione differenziale lineare a coefficienti costanti*, d'ora in poi le chiamerò semplicemente EDLCC, anche se generalmente vengono dette *EDO a coefficienti costanti* (oppure *ODE*, nei testi anglosassoni). Dunque, le EDLCC si possono generalmente rappresentare con

$$\sum_{k=0}^N a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^M b_k x^{(k)}(t) \quad (20)$$

e chiaramente se y_1 e y_2 sono soluzioni di (20) allora anche $y_1 + y_2$ lo è, questo per la proprietà di linearità. Inoltre, traslando di t_0 la funzione x si ottiene un'eguale traslazione su y . Se poi abbiamo $a_1 = -a_2$ e $y_1 = y_2$ si nota che la soluzione trovata può risolvere

$$\sum_{k=0}^N a_k y^{(k)}(t) = 0 \quad (21)$$

che viene chiamata *omogenea* della (20) e y_0 è la sua soluzione, o meglio *una* delle sue soluzioni, dato che queste sono un insieme o meglio uno *spazio vettoriale*.

Ogni EDLCC ha per soluzione $y = y_p + y_0$ dove y_p è una soluzione particolare mentre y_0 è una soluzione dell'omogenea associata. Ora basta considerare il solito esponenziale e^p con $p \in \mathbb{C}$ e osservare che

$$\sum_{k=0}^N a_k \{e^p\}^{(k)} = e^p \sum_{k=0}^N a_k p^k \quad (22)$$

dove l'ultima sommatoria, ovvero il polinomio $s(p) = a_N p^N + \dots + a_1 p + a_0$ è detto *polinomio associato* e per il teorema fondamentale dell'algebra ha esattamente N radici distinte in

ℂ. Tuttavia, se i coefficienti a_k sono tutti reali le radici complesse compaiono a coppie di complessi coniugati e questa è una bella notizia perché le soluzioni dell'omogenea sono quindi combinazioni lineari di semplici funzioni.

- $c e^{pt}$, per gli zeri p distinti. Esempio:
EDLCC: $y'' - y' - 6y = 0$
Polinomio associato: $s(p) = p^2 - p - 6 = (p + 2)(p - 3)$
Soluzione dell'omogenea: $y_0 = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{3t}$
- $c t^r e^{pt}$, per gli zeri p multipli. Esempio:
EDLCC: $y'' - 4y' + 4 = 0$
Polinomio associato: $s(p) = p^2 - 4p + 4 = (p - 2)(p - 2)$
Soluzione dell'omogenea: $y_0 = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$
- $\cos t$ e $\sin t$ per gli zeri p complessi coniugati. Esempio:
EDLCC: $y'' + 2y' + 5y = 0$
Polinomio associato: $s(p) = p^2 + 2p + 5$
Soluzione dell'omogenea: $y_0 = c_1 e^{-t} \cos 2t + c_2 e^{-t} \sin 2t$

In tutti questi casi compare una costante c , da determinare quando vengono fornite le condizioni iniziali, in questo caso si parla di *Problema di Cauchy*.

EDLCC e sistemi LTI. All'equazione (20) è associato un unico sistema LTI e BIBO stabile solo se il polinomio caratteristico non ha radici immaginarie. La risposta in frequenza corrispondente a tale sistema si ottiene con

$$H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^n a_k (j\omega)^{(k)}}{\sum_{k=0}^m b_k (j\omega)^{(k)}} \quad (23)$$

11 Trasformata di Fourier

Un segnale aperiodico $x(t)$ (con supporto finito) può essere pensato come un segnale periodico $\tilde{x}(t)$ di periodo T con $T \rightarrow \infty$ (quindi al diminuire della frequenza fondamentale).

Trasformata di Fourier a tempo continuo. Sia $x(t)$ un segnale complesso, assolutamente integrabile in \mathbb{R} , ovvero $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt < \infty$ (quindi $x \in L^1(-\infty, \infty)$). Allora la trasformata di Fourier e la rispettiva antitrasformata sono date da:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (24)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (25)$$

Essendo $x(t)$ assolutamente integrabile in $(-\infty, \infty)$ si deduce che $X(j\omega)$ è limitata, continua e tende a 0 per $\omega \rightarrow \pm\infty$.

Le condizioni di Dirichlet forniscono una base sulla quale stabilire che segnali sono trasformabili e quali no, ovvero se $\tilde{x}(t)$ è uguale a $x(t)$:

- $x(t)$ assolutamente integrabile
- in ogni intervallo finito $x(t)$ deve avere un numero finito di massimi e minimi
- in ogni intervallo finito $x(t)$ deve avere un numero finito di discontinuità e inoltre queste devono essere finite

Teorema di Plancherel. Siano f e g in $X_{1,2} = L^1(-\infty, \infty) \cap L^2(-\infty, \infty)$, siano $F(j\omega)$ e $G(j\omega)$ le loro trasformate di Fourier allora vale

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \overline{G(j\omega)} d\omega = \langle F, G \rangle_{L^2(\frac{d\omega}{2\pi})} \quad (26)$$

Se $x \in L^1(-\infty, \infty)$ allora la (24) definisce $X(j\omega)$ *puntualmente*. Se invece $x \in L^2$ la trasformata è un elemento di $L^2(\frac{d\omega}{2\pi})$, quindi è un limite in media quadratica. Il teorema torna utile per calcolare l'energia del *sinc*(t) conoscendo l'energia del *rect*(t).

Trasformata di Fourier per segnali periodici. Partendo dalla trasformata $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ si deduce che il segnale originale $x(t)$ doveva essere $e^{j\omega_0 t}$. Se anziché un singolo impulso si considera un treno di impulsi si capisce che il segnale di partenza doveva essere una combinazione lineare di sinusoidi e quindi un segnale periodico.

Proprietà della trasformata.

- la trasformata di Fourier è un operatore lineare
- per il time-shifting vale la relazione $x(t - t_0) \rightarrow e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$
- simmetria del coniugato: $\bar{x}(t) \rightarrow \bar{X}(-j\omega)$
- per la derivazione vale $\frac{dx(t)}{dt} \rightarrow j\omega X(j\omega)$
- per l'integrazione vale l'inverso (si divide per $j\omega$) ma le cose sono più delicate
- time-scaling $x(at) \rightarrow \frac{1}{a} X(\frac{j\omega}{a})$

Teorema di convoluzione. Si consideri un sistema LTI, BIBO stabile con ingresso $x(t)$ a energia finita. Allora anche l'uscita $y(t)$ è ad energia finita e vale

$$Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega) \quad (27)$$

che rappresenta l'estensione ai segnali aperiodici della $b_k = H(j\omega_0 k) a_k$.

12 Trasformata di Laplace.

La seguente definizione riassume chiaramente ciò di cui si tratterà in questa sezione.

La Trasformata di Laplace è un operatore matematico lineare che trasforma qualcosa di difficile in qualcosa di estremamente complesso. Definita infatti una funzione $f(t)$ nel dominio temporale, detto anche semplice, è possibile, mediante l'operatore di Laplace, passare ad una $F(s)$ definita nel dominio complesso, detto anche della frequenza, che è di nome e di fatto molto più difficile. I matematici la usano infatti per sboroneria e vanagloria in maniera del tutto inutile.

Da *Nonciclopedia*

Ma ad ingegneria non ci si lascia intimorire da simili sciocchezze.