Appunti di Network Modeling

massimo.meneghello93

June 2017

1 Nozioni di Probabilità

Sia X una variabile aleatoria (d'ora in poi *v.a.* o *r.v.*, da *random variable*), si definiscono la *media* (o valore atteso) e la *varianza* di X come

$$E[X] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_i P(X = x_i) \tag{1}$$

$$E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - E[X]^2 \tag{2}$$

dove $\mu = E[X]$. Date due v.a. X, Y si definisce invece *covarianza* tra le due il valore

$$E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = E[XY] - \mu_X \mu_Y \tag{3}$$

Tale valore risulta nullo se X, Y non sono correlate, mentre se X, Y sono indipendenti si ha che $E[XY] = E[X]E[Y]$. L'indipendenza tra variabili implica la non correlazione (tuttavia non è vero il contrario).
Sia $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ una famiglia (numerabile) di insiemi a due a due disgiunti, tali che $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$. Per la *legge di probabilità totale* risulta

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i)P(B_i) \tag{4}$$

Funzione caratteristica

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} dF(\lambda) = E[e^{itX}] \tag{5}$$

2 Catene di Markov

Sia $S = \{1, 2, ..., n\}$ un insieme di stati. La *Markov property* stabilisce

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i_n, ..., X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i_n) = P_{i_n j}^{n,n+1} \tag{6}$$

2.1 First Step Analysis

Sia $\mathbf{P}$ una *matrice di Markov* (o *matrice di transizione*) nella forma

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

dove $\mathbf{Q}$ è la matrice di Markov relativa ai *transient states* (o *TSs*), $\mathbf{R}$ è la matrice che specifica le probabilità di passare da un TS a un *absorbing state* (o *AS*), $\mathbf{0}$ è una matrice di zeri e infine $\mathbf{I}$ è una matrice identità. Se N è il numero totale degli stati nelle catena rappresentata da $\mathbf{P}$ e r è il numero di TS, allora $\mathbf{P}$ è una matrice $N \times N$ e $\mathbf{Q}$ una matrice $r \times r$.
Si vuole calcolare la probabilità che una catena finisca in un AS k sapendo che lo stato iniziale è i, con $0 \leq i \leq r-1$. Questo si può esprimere con

$$u_i = U_{ik} = \Pr\{\text{Absorption in k}|X_0 = i\} \tag{7}$$

che viene calcolato nel seguente modo

$$U_{ik} = P_{ik} + \sum_{j=0}^{r-1} P_{ij} U_{ij} \tag{8}$$

Ci si chiede poi quanto tempo impiega in media una catena per terminare in un AS. A questo scopo è necessario definire

$$T = \min\{n \geq 0 : X_n \geq r\} \tag{9}$$

$$w_i = E[\sum_{n=0}^{T-1} g(X_n)|X_0 = i] = g(i) + \sum_{j=0}^{r-1} P_{ij} w_j \tag{10}$$

dove $g(i)$ è una metrica associata alla visita dei TS, $i = 0, 1, ..., r-1$.

2.2 Comunicazione tra Stati

Si osserva che

$$\begin{aligned} P_{ij}^{n+m} &= P\{X_{n+m} = j|X_0 = i\} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P\{X_{n+m} = j, X_n = k|X_0 = i\} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P\{X_{n+m} = j|X_n = k, X_0 = i\} P\{X_n = k|X_0 = i\} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P_{jk}^m P_{ki}^n. \end{aligned}$$

Lo stato j si dice accessibile dallo stato i se per qualche $n \geq 0, P_{ij}^n > 0$. Due stati i, j accessibili uno dall'altro si dicono *comunicanti*.

Proposizione 1. *La comunicazione è una relazione di equivalenza. Valgono quindi:*

1. *$i \leftrightarrow i$ (riflessività);*
2. *se $i \leftrightarrow j$, allora $j \leftrightarrow i$ (simmetria);*
3. *se $i \leftrightarrow j$ e $j \leftrightarrow k$, allora $i \leftrightarrow k$ (transitività).*

Proof. Mentre le prime due proprietà discendono banalmente dalla definizione di comunicazione per la 3 si procede come segue. Dall'ipotesi sappiamo che esistono n, m tali che $P_{ij}^{(n)} > 0$ e $P_{jk}^{(m)} > 0$, quindi

$$P_{ik}^{(n+m)} = \sum_{r=0}^{+\infty} P_{ir}^{(n)} P_{rk}^{(m)} \geq P_{ij}^{(n)} P_{jk}^{(m)} > 0$$

. Similmente si può mostrare anche che $P_{ki}^{s} > 0$ □

Due stati che comunicano sono detti appartenenti alla stessa *classe*. Una catena di Markov si dice *irriducibile* se è composta da una sola classe, ovvero tutti gli stati appartenenti alla catena comunicano tra di loro.

Sia $d(i)$ il periodo dello stato i, definito come il più grande intero tale che $P_{ii}^{n} = 0$ quando n non è divisibile da $d(i)$. (se $P_{ii}^{n} = 0$ per ogni $n > 0$ allora si definisce il periodo di i come infinito mentre se $d(i) = 1$ lo stato è detto *aperiodico*). Si dimostra che la periodicità è una proprietà di classe ovvero, tutti gli stati che comunicano tra loro hanno lo stesso periodo.

Proposizione 1. *Se $i \leftrightarrow j$, allora $d(i) = d(j)$.*

Proof. Siano m, n tali che P_{ij}^{m}. □

2.3 Concetti Chiave

Per qualunque stato i e j si definisce f_{ij}^{n} la probabilità che partendo in i, il primo passaggio in j avvenga al tempo n. Per una definizione più formale si ha,

$$f_{ij}^{0} = 0$$
$$f_{ij}^{n} = P\{X_n = j, X_k \neq j, k = 1, ..., n-1 | X_0 = i\}$$

Sia poi

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{n}.$$

f_{ij} indica la probabilità che si abbia un passaggio in j partendo da i. Quindi, se $i \neq j$, f_{ij} è positivo se e solo se j è accessibile dallo stato i. j è detto stato *ricorrente* se $f_{jj} = 1$, negli altri casi è detto *di transizione*.

3 Modello per Sincronizzazione

Sia S una sequenza di simboli per la sincronizzazione allora

$$P[\text{random data sequence} = \text{sync sequence}] = 2^{-|S|} = P[\text{false alarm}] = P_{fa}$$

è la probabilità di ricevere la sequenza per errore.

Diversamente la probabilità di ricevere la sequenza corretta considerando un possibile errore di trasmissione sul simbolo ϵ sarà $P[\text{correct detection}|\text{sync}] = P[\text{all bits in } S \text{ are correct}] = (1-\epsilon)^{|S|} = P_C$.

Partendo da queste considerazioni vorremmo che S non sia troppo lunga per non sprecare spazio per la comunicazione, ma nemmeno troppo corta per evitare falsi allarmi.

Un possibile sistema per un modello di sincronizzazione può assumere i seguenti stati:

- H (Hunt), il sistema legge bit per bit fino a quando il lock non viene trovato oppure legge N bit non trovando il lock;
- L_k (Lock), la sincronizzazione è stata trovata e confermata ulteriormente $k-1$ volte;
- $L = L_{k_L}$, sincronizzazione accettata