Appunti Di Telecomunicazioni

May 31, 2018

Contents

1 Variabili aleatorie

Una *funzione di distribuzione* di una v.a. x fornisce una descrizione statistica completa di x. La funzione di distribuzione vale

$$F_x(a) = P[x \leq a] \tag{1}$$

quindi per ogni a F_x indica la probabilità che x valga meno di a. Valgono i seguenti limiti:

$$\lim_{a\to-\infty} F_x(a) = 0 \qquad \lim_{a\to\infty} F_x(a) = 1 \tag{2}$$

Si indica poi la *densità di probabilità* con

$$f_x(a) = \frac{\partial F_x(a)}{\partial a} \tag{3}$$

e valgono gli integrali

$$F_x(a) = \int_{-\infty}^{a} f_x(b)\, db \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f_x(a)\, da = 1 \tag{4}$$

Variabile aleatoria uniforme. Una v.a. uniforme si indica con $\mathcal{U}[a_1, a_2]$ e la sua densità è un *rect* di area unitaria.

Variabile aleatoria esponenziale unilatera.

2 Mezzi trasmissivi

In questa sezione ci si occupa di definire i pricipali parametri dei principali mezzi trasmissivi: i *cavi elettrici*, le *fibre ottiche* e i *ponti radio*.

Cavi elettrici. Solitamente in forma di doppi cavi sospesi ma spesso anche come *cavo coassiale*, sono regolati dalle due *equazioni del telegrafista:*

$$\frac{\partial\, v(t,z)}{\partial\, z} = -l\frac{\partial\, i(t,z)}{\partial\, t} \tag{5}$$

$$\frac{\partial\, i(t,z)}{\partial\, z} = -c\frac{\partial\, v(t,z)}{\partial\, t} \tag{6}$$

Da queste si possono ricavare le rispettive *equazioni d'onda*, di cui se ne riporta solo una:

$$\frac{\partial^2\, v(t,z)}{\partial\, z^2} = lc\frac{\partial^2\, v(t,z)}{\partial\, t^2} \tag{7}$$

dove la quantità $v = 1/\sqrt{lc}$ è la *velocità di propagazione*. La 7 può essere risolta da funzioni del tipo $f(t - z/v)$ e $g(t + z/v)$ oppure dalla più generica

$$v(t,z) = f(t - \frac{z}{v}) + g(t + \frac{z}{v}) \tag{8}$$

che rappresenta onde che si propagano in versi opposti nel mezzo trasmissivo. Si ha poi che

$$lc = \epsilon_0 \mu_0 \tag{9}$$

dove ϵ_0 è la *permittività dielettrica del vuoto* mentre μ_0 è la *permeabilità magnetica.* Da 9 si ottiene

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \, m/s \tag{10}$$

che è chiaramente la velocità della luce e anche la velocità di propagazione di un campo magnetico. Ovviamente di solito non si utilizza ϵ_0 ma $\epsilon = \epsilon_0 n^2$ dove n è l'*indice di rifrazione del dielettrico.*

Sempre da 5 e da 6 si ottiene

$$v(t, z) = \sqrt{\frac{l}{c}} i(t, z) \tag{11}$$

dove la quantità $Z_0 = \sqrt{\frac{l}{c}}$ è l'*impedenza caratteristica della linea.* Dalla fisica si può calcolare che la *capacità per unità di lunghezza* c del cavo coassiale vale

$$c = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln r_o / r_i} \tag{12}$$

dove r_o e r_i rappresentano rispettivamente il raggio esterno del dielettrico e il raggio del conduttore interno. Da 12 e da 9 si ottiene anche l'*induttanza per unità di lunghezza* l e da questa poi l'impedenza della linea

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \ln \frac{r_o}{r_i} \tag{13}$$

Si passa ora a modellare delle linee trasmissive con eventuali perdite. Se si ha un segnale in ingresso alla linea, indicato con la tensione $v_i(t) = v(t, z) = e^{i2\pi f_0 t}$ l'uscita corrispondente, ad una distanza z dall'ingresso, sarà data da $v(t, z) = e^{i2\pi f_0 (t - z/v)}$. La funzione di trasferimento della linea risulta essere quindi

$$H(f) = e^{-i2\pi f L/v} = e^{-i\beta} \tag{14}$$

dove L è la lunghezza della linea e $\beta = 2\pi f L/v$.

Per le linee con *piccole* perdite si hanno l'impedenza e l'ammettenza d'ingresso che valgono rispettivamente $(r + i2\pi f l)$ e $(g + i2\pi f c)$ (solitamente vale $g = 0$). Con le 5 e 6 si ottiene

$$\frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} = \gamma^2 V(z) \tag{15}$$

che è un'equazione differenziale armoniche e quindi le sue soluzioni sono $V(z) = V(0)e^{\pm i\gamma z}$ e

$$\gamma = \sqrt{(r + i2\pi f l)(i2\pi f c)} \tag{16}$$

è la *costante di propagazione* che può essere approssimata in $\gamma = \alpha + i\beta$ dove $\alpha = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{c}{l}}$ e $\beta = 2\pi f\sqrt{lc}$. La funzione di trasferimento dell'intera linea è data da

$$H(f) = e^{-i2\pi fL/v}e^{-\alpha L} \tag{17}$$

che presenta un *elemento di ritardo* (l'esponenziale immaginario) e un *elemento di attenuazione* (la parte reale dell'esponenziale), che risulta

$$A_{dB} = -20\log_{10} e^{-\alpha L} = 8,7\alpha L \tag{18}$$

quindi la linea presenta un'attenuazione di $8,7\alpha dB/m$.

Oltre alla dissipazione di energia c'è un altro interessante fenomeno da considerare chiamato *effetto pelle*. In un cavo elettrico infatti il segnale non si propaga in tutto il conduttore, ma soltanto in un sottile strato superficiale, inversamente proporzionale alla frequenza di trasmissione. Lo spessore vale

$$\delta = \sqrt{\frac{\rho}{\pi f\mu_0}} \tag{19}$$

dove ρ è la resistività del conduttore. La resistenza per unità di lunghezza è data dalla somma delle resistenze dei due conduttori (interno ed esterno, per il cavo coassiale) cioè

$$r = \rho\left(\frac{1}{2\pi r_o\delta} + \frac{1}{2\pi r_i\delta}\right) = \sqrt{\frac{\rho f\mu_0}{4\pi}}\left(\frac{1}{r_o} + \frac{1}{r_i}\right) \tag{20}$$

Riprendendo la 17 si trova che

$$H(f) = e^{-i2\pi fL/v}e^{-K'L\sqrt{f}} \tag{21}$$

dove $K' = K/2Z_0$, con K costante di proporzionalità (data dalla geometria e dalla resistività della linea). Si ha quindi il solito elemento di ritardo ma questa volta c'è anche una distorsione dovuta dalla dipendenza del modulo $H(f)$ da f infatti

$$\mathsf{H(f)} = e^{-K'L\sqrt{f}} = e^{-\sqrt{f/f_0}}(22)$$

Fibre ottiche. Le fibre ottiche non sono altro che cavi di silice SiO_2 che consentono di trasmettere segnali luminosi. Ogni fibra è composta da un nucleo e da un mantello che hanno rispettivamente indici di rifrazione n_1 e n_2 con $n_1 \cong 1,5$ e $n_2 < n_1$. Si possono trasmettere frequenze nell'ordine di $10^{14}\,Hz$ e la velocità di trasmissione è data da (v è la velocità della luce)

$$v' = \frac{v}{n_1 - \lambda\frac{dn_1}{d\lambda}} \cong \frac{v}{n_1} \cong 2\cdot 10^8\,m/s \tag{23}$$

Non tutti i segnali luminosi vengono trasmessi, solamente quelli il cui angolo di incidenza con la superficie del mantello è inferiore di un certo valore, ricavabile con la legge di Snell

$$n_1\sin(\phi_i) = n_2\sin(\phi_t) \tag{24}$$

Nel tempo si sono susseguite tre tipologie di trasmissione che si differenziano per la lunghezza d'onda del segnale che viene trasmesso, queste sono

- *prima finestra*, con $\lambda = 0,8\,\mu m$;
- *seconda finestra*, con $\lambda = 1,35\,\mu m$;
- *terza finestra*, con $\lambda = 1,55\,\mu m$.

Ponti radio.