Université Cheikh Anta DIOP
Ecole Supérieure Polytechnique
Departement Genie Informatique

Anne scolaire :2024-2025
Prof : M. O SARR

Tel : +221 33 824 05 40
E-mail : esp@esp.sn

E-mail :grdcool@gmail.com

CHAPITRE I :

PROBLEMES D'INTERPOLATION

PLAN

I. INTRODUCTION

1. Motivation

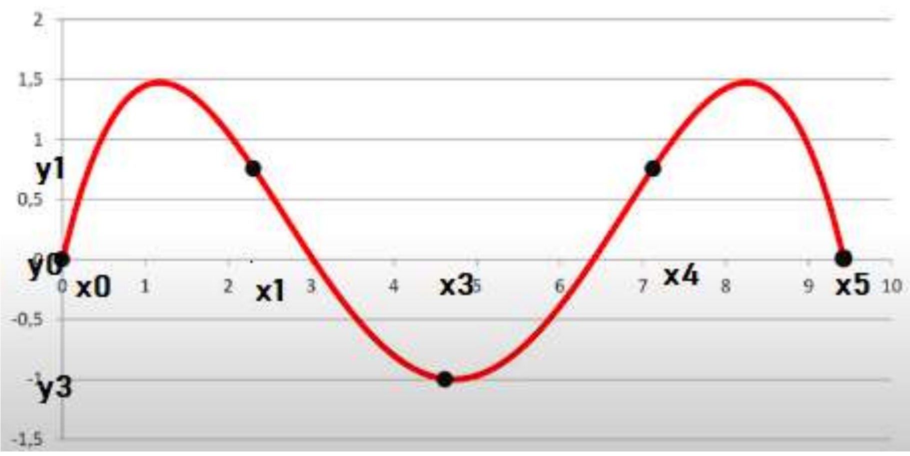
Soient $n \in \mathbb{N}$; $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

On donne $n + 1$ points distincts définis par les couples $(x_i, f(x_i))_{\ 0 \leq i \leq n}$ tels que :

Ou :

$\Rightarrow$ f est une fonction conçue graphiquement.

$\Rightarrow$ Les $f(x_i)$ sont des données expérimentales.



Interpoler c'est construire une fonction p plus simple que la fonction f en vue d'un calcul numérique afin d'avoir :

$\Rightarrow f(x_i) = p(x_i)\ \forall\ 0 \leq i \leq n$

$\Rightarrow$ Une bonne estimation de $f(x), \forall\ x \in [a; b] \setminus \{x_i, 0 \leq i \leq n\}$

2. Existence

Théorème (D'interpolation)

Soient $f(x_i)$ $i \in \{0; \dots; n\}$ $(n + 1)$ valeurs distincts d'une fonction f définie de K à valeurs dans K.

Il existe un unique polynôme $P \epsilon\ P_n$ tel que $P(x_i) = f(x_i)\ \forall\ i \in \{0; \dots; n\}$

Preuve

$$P(x_i) = f(x_i)\ \forall\ i \in \{0\ ;\ \dots\ ;n\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_O + a_2 {x_0}^2 + \cdots + a_n {x_0}^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 {x_1}^2 + \cdots + a_n {x_1}^n = f(x_1) \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 {x_n}^2 + \cdots + a_n {x_n}^n = f(x_n) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 \dots {x_0}^n \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 \dots {x_1}^n \\ & \dots\dots. & \\ & \dots\dots & \\ 1 & x_n & {x_n}^2 \dots {x_n}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_o) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \dots \\ \dots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow XA = F : (S)$$

Ou:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 \dots {x_0}^n \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 \dots {x_1}^n \\ & \dots\dots. & \\ & \dots\dots & \\ 1 & x_n & {x_n}^2 \dots {x_n}^n \end{pmatrix}$$ Est une matrice de VANDERMONDE.

$$A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} f(x_o) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \dots \\ \dots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

Donc le système (S) admet une unique solution $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ car X est inversible si et seulement si $x_i \neq x_j\ \forall\ i \neq j$.

D'où le polynôme $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ est unique.

II. POLYNOME D'INTERPOLATION DE LAGRANGE

Soient $f(x_i)$ $i \in \{0; \dots; n\}$ $(n+1)$ valeurs distincts d'une fonction f définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Polynômes de LAGRANGE

Les polynômes :

$$L_J(x) = \frac{\prod_{i \neq j}(x - x_i)}{\prod_{i \neq j}(x_j - x_i)}$$
$$= \frac{(x - x_0)(x - x_2)\dots(x - x_{J-1})(x - x_{J+1})\dots\dots(x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_2)\dots(x_j - x_{J-1})(x_j - x_{J+1})\dots\dots(x_j - x_n)}$$
$$j \in \{0; 1; 2 \dots; n\}$$

Sont appelés polynômes de LAGRANGE. .

Remarque :

$$\left.\begin{array}{r} L_J(x_J) = 1 \\ L_J(x_i), i \neq j = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow L_J(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \; si \; i = j \\ 0 \; si \; i \neq j \end{cases}$$

δ_{ij} est appelé le symbole de Kronecker.

Exemple

Pour $x_0 = 1, x_1 = 3$ et $x_2 = 5$

$$L_0(x) = \frac{(x-3)(x-5)}{(1-3)(1-5)} = \frac{x^2 - 8x + 15}{8}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-5)}{(3-1)(3-5)} = \frac{x^2 - 6x + 5}{4}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-3)(x-1)}{(5-1)(5-3)} = \frac{x^2 - 4x + 3}{8}$$

Exercice

Montrer que $\{P_J(x)\}, j \in \{0; 1; 2 \dots; n\}$ forme une base de P_n.

2. Base de LAGRANGE

La famille $\{L_J(x)\}, j \in \{0; 1; 2 \dots; n\}$ est appelée la base de LAGRANGE

3. Forme explicite du polynôme d'interpolation de LAGRANGE

Le polynôme est de la forme :

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i L_i(x)$$

Pour $x = x_j$

$$L_j(x_j) = \sum_{i=0}^{n} a_i L_i(x_j)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \delta_{ij} = f(x_j)$$

$$\Leftrightarrow \; a_j = f(x_j), \forall\, j \in \{0; 1; 2 \ldots; n\},$$

Le polynôme le polynôme d'interpolation de LAGRANGE est :

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

Exemple

Donner le polynôme de Lagrange de la fonction f dont la courbe passe par les points $A(1; 4)$, $B(3; -2)$ et $C(-1; 0)$.

Solution

Les polynômes de LAGRANGE

$$L_0(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{(1-3)(1+1)} = \frac{-x^2+2x+3}{4}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(3-1)(1+1)} = \frac{x^2-1}{4}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-3)(x-1)}{(-1-1)(-1-3)} = \frac{x^2-4x+3}{8}$$

Le polynôme d'interpolation de LAGRANGE

$$P(x) = 4 \times P_0(x) - 2P_1(x)$$

$$= \frac{-6x^2 + 8x + 14}{4}$$

$$= -\frac{3}{2}x^2 + 2x + 7$$

$$P(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{7}{2}$$

III. POLYNOME D'INTERPOLATION DE NEWTON

Soient $f(x_i)$ $i \in \{0; \dots ; n\}$ $(n+1)$ valeurs distinctes d'une fonction f définie de R à valeurs dans R.

1. Les fonctions de NEWTON

Les polynômes :

$$w_0(x) = 1$$

$$w_J(x) = \prod_{i=0}^{j-1}(x - x_i) \quad j \in \{1; 2 \dots ; n\}$$

Sont appelés polynômes de NEWTON.

Exercice

Montrer que $\{w_J(x)\}, j \in \{0; 1; 2 \dots ; n\}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Base de NEWTON

La famille $\{w_J(x)\}, j \in \{0; 1; 2 \dots ; n\}$ est appelée la base de NEWTON

Exemple

Pour $x_0 = 1, x_1 = 3$ et $x_2 = 5$

3. Forme explicite du polynôme de NEWTON

a. Différence divisée

⇒ Les premières différences divisées de la fonction f sont définies par :

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

⇒ Les deuxièmes différences divisées de la fonction f sont définies à partir des premières différences divisées par :

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

⇒ Les n[ièmes] différences divisées de la fonction f sont définies à partir des $(n-1)$ premières différences divisées par

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots x_n] - f[x_0, x_1, \dots x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

⇒ Table des différences divisées

Table de différences divisées

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
x_0	$f(x_0)$			
		$f[x_0, x_1]$		
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		
x_3	$f(x_3)$			

Application

La table de différences divisées pour les points : $(0,1), (1,2), (2,9)$ et $(3,28)$

Table de différences divisées				
x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i+2}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i+3}]$
0	1			
		1		
1	2		3	
		7		1
2	9		6	
		19		
3	28			

b. L'expression du polynôme

Le polynôme peut s'écrire sous la forme :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i w_i(x)$$

- Pour $x = x_0$

$$P_n(x_0) = f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow a_0 w_0(x_0) = f(x_0) = f[x_0]$$
$$\Leftrightarrow a_0 = f(x_0)$$

- Pour $x = x_1$

$$P_1(x_1) = f(x_1)$$

$$\Leftrightarrow a_0 + a_1 w_1(x_1) = f(x_1)$$

$$\Leftrightarrow a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1)$$

$$\Leftrightarrow a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$= f[x_1, x_2]$$

- Pour $x = x_2$

$$P_2(x_2) = f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow a_0 + a_1 w_1(x_2) + a_0 + a_2 w_2(x_2) = f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow a_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

$$= f[x_0, x_1, x_2]$$

- Pour $x = x_i$

$$a_i = \frac{\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{x_{i-1} - x_{i-2}} \ldots\ldots - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_i - x_0}$$

$$= f[x_0, \ldots, x_i]$$

$f[x_0, \ldots, x_i]$ est appelée différence divisée d'ordre i.

$$f(x_i) = y_i$$

Le polynôme d'interpolation de NEWTON est :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_i] w_i(x)$$

Application

Donner le polynôme $P_3(x)$ de NEWTON de la fonction f dont la courbe passe par les points de collocations : $(0,1), (1,2), (2,9)$ et $(3,28)$

Exercice

Table de différences divisées

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i+2}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i+3}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i+4}]$
0	1				
		1			
1	2		3		
		7		1	
2	9		6		$-\frac{3}{5}$
		19		-2	
3	28		-2		
		13			
5	54				

Donner le polynôme $P_4(x)$ de NEWTON de la fonction f dont la courbe passe par les points de collocations : $(0,1), (1,2), (2,9)$, $(3,28)$ $(5,54)$

Remarque

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

La méthode d'interpolation de NEWTON est récursive contrairement à la méthode LAGRANGE.

IV. ERREUR D'INTERPOLATION

1. Définition

Soient $P_n(x)$ le polynôme d'interpolation de la fonction f aux points de collocations $(x_i, f(x_i))\ i \in \{0; \dots; n\}$.

On peut exprimer l'erreur d'interpolation comme :

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

Remarque

$\Rightarrow f(x) = P_n(x) + E_n(x)$

$\Rightarrow E_n(x_i) = 0$ pour $i = 0,1,2 \dots., n$

2. Théorème (de l'erreur d'interpolation)

Soit $x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n$ les abscisses des points de collocation. On suppose que la fonction f est définie sur $[x_0; x_n]$ et de classe C^{n+1} sur un intervalle $]x_0; x_n[$ Alors :

$\forall\, x \in [x_0; x_n]$,$\exists\, \varepsilon \in]x_0; x_n[$ telle que :

$$E_n(x) = \frac{P(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\varepsilon)$$

Où :

$$P(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Preuve

$$\Rightarrow E_n(x_i) = 0 \text{ pour } i = 0,1,2 \ldots.,n$$

$$\Rightarrow \forall\, x \neq x_i\, \epsilon]x_0; x_n[\; i = 0,1,2 \ldots.,n$$

On définit la fonction la fonction g par :

$$g(t) = f(t) - p_n(t) - (f(x) - P_n(x)) \frac{(t - x_0)(t - x_1) \ldots.(t - x_n)}{(x - x_0)(x - x_1) \ldots.(x - x_n)}$$

g est de classe c^{n+1} sur $]x_0; x_n[$et $g(t) = 0$

$\forall\, t\, \{x, x_0, x_1, \ldots. x_n\}$ d'après le théorème de ROLLE.

$\exists\, \varepsilon \in]x_0; x_n[$ tel que $g^{(n+1)}(\varepsilon\,) = 0$.

$$f^{(n+1)}(\varepsilon) - P_n{}^{(n+1)}(\varepsilon) - E_n(x) \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left(\frac{(t - x_0)(t - x_1) \ldots.(t - x_n)}{(x - x_0)(x - x_1) \ldots.(x - x_n)} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow f^{(n+1)}(\varepsilon) - E_n(x) \frac{(n+1)!}{(x - x_0)(x - x_1) \ldots.(x - x_n)} = 0$$

$$\Leftrightarrow E_n(x) = f^{(n+1)}(\varepsilon) \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots.(x - x_n)}{(n+1)!}$$

Remarque ;

$$\Rightarrow |E(x)| = \leq \frac{P(x)}{(n+1)!} max_{x\in[a:b]}^{|f^{(n+1)}(x)|}$$

$$\Rightarrow |E(x)| \leq \frac{max_{x\in[a:b]}^{|P(x)|}}{(n+1)!} max_{x\in[a:b]}^{|f^{(n+1)}(x)|}$$

$\Rightarrow E_n(x) \approx P_{n+1}(x) - P_n(x)$

$\Leftrightarrow E_n(x) \approx= f[x_0, x_1, \dots., x_{n+1}](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$

$\Rightarrow$ Un critère d'arrêt est fixé à :

$$\frac{|p_{n+1}(x) - p_n(x)|}{|p_{n+1}(x)|} < \epsilon_a$$

Ou ε_a est une valeur fixée au préalable.

V. EXERCICES

Exercice 1

I. Soit les points suivants.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,0	0,0	3,0	252,0
1,0	2,0	4,0	1040,0
2,0	36,0		

a) Obtenir le polynôme de Lagrange passant par les 3 premiers points.

b) Obtenir le polynôme de Lagrange passant par les 4 premiers points. Est-ce possible d'utiliser les calculs faits en a) ?

c) Donner l'expression analytique de l'erreur pour les polynômes obtenus en a) et en b).

d) Obtenir des approximations de $f(1{,}5)$ à l'aide des 2 polynômes obtenus en a) et en b).

II. Répondre aux mêmes questions qu'à l'exercice précédent, mais en utilisant la méthode de Newton. Donner en plus des approximations des

Exercice 2

Une expérience de thermodynamique a conduit aux résultats suivants :

Pression (kPa)	308,6	362,6	423,3	491,4
V_g (m^3/kg)	0,055 389	0,0474 85	0,040 914	0,035 413

où V_g est le volume spécifique du gaz en fonction de la pression.

a) Obtenir le polynôme de Lagrange passant par les 4 points.

b) Obtenir une approximation de V_g lorsque la pression est de 400kPa.

Exercice 3

Obtenir une approximation de $f(4{,}5)$ en utilisant un polynôme de degré 2 ainsi que les données suivantes.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,0	0,0000	5,0	1,6094
2,0	0,6931	7,0	1,9459
3,5	1,2528		

a) Utiliser la méthode de Newton et un polynôme de degré 2. Donner l'expression analytique du terme d'erreur.

b) Répondre à la question posée en a), mais en utilisant cette fois la méthode de Lagrange.

c) Obtenir une approximation de l'erreur commise en a).

Exercice 4

Un cas particulier intéressant de la formule d'interpolation de Newton se présente lorsque les points d'interpolation x_i sont également distants, c'est-à-dire lorsque :

$$x_{i+1} - x_i = h$$

Obtenir l'expression des premières, deuxièmes et troisièmes différences divisées dans ce cas précis. Donner un aperçu de ce que pourraient être les autres différences divisées.