Matrices

Définition :

Une matrice n × m est un tableau de nombres à n lignes et à m colonnes :

Exemple avec n = 2, m = 3 : A=$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$

On note A_{ij} l'élément situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j (la ligne est toujours nommée en premier).

Exemple : A=$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A11} & \boldsymbol{A12} & \dots & \boldsymbol{A1m} \\ \boldsymbol{A21} & \boldsymbol{A22} & \dots & \boldsymbol{A2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{An1} & \boldsymbol{An2} & \dots & \boldsymbol{Anm} \end{bmatrix}$

On note $[A_{ij}]$ la matrice d'élément général A_{ij}. On a donc : **A** = $[A_{ij}]$

Déterminant d'une matrice :

Pour une matrice 2 × 2, on montre que la matrice inverse est donnée par :

A=$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix} \Rightarrow$ $\mathbf{A}^{-1}$= $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{ad-bc}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{-b} \\ \boldsymbol{-c} & \boldsymbol{a} \end{bmatrix}$

Le nombre *ad* - *bc* est appelé *déterminant* de la matrice **A**, noté :

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix} = |A| = \det(A)$$

La matrice inverse $\mathbf{A}^{-1}$ n'existe donc que si det **A** est différent de zéro.

La matrice **A** est singulière si det **A** = 0, régulière dans le cas contraire. Ce résultat se généralise à une matrice de dimension quelconque.

Propriétés des déterminants :

- $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$
- $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \times \det(\mathbf{B})$
- Si **A** est régulière, $\det(\mathbf{A}^{-1}) = 1 / \det(\mathbf{A})$
  puisque $\det(\mathbf{AA}^{-1}) = \det(\mathbf{A}) \times \det(\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{I}) = 1$
- Si **A** est orthogonale, $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$
  puisque $\det(\mathbf{AA}^T) = [\det(\mathbf{A})]^2 = \det(\mathbf{I}) = 1$

Transposition d'une matrice :

La transposée $\mathbf{A}^T$ (aussi notée **A'**) d'une matrice **A** est la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de **A** :

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{A}^T=\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$$

Inversion d'une matrice :

Une matrice **A** est dite *inversible* ou *régulière* s'il existe une matrice $\mathbf{A}^{-1}$ (appelée *matrice inverse*) telle que :

$\mathbf{A} \times \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{A} = \mathbf{I}$

Si $\mathbf{A}^{-1}$ n'existe pas, la matrice **A** est dite *singulière*

Propriétés :

- $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$
- $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
- La matrice **A** est dite *orthogonale* si $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$

Comatrice :

On appelle **comatrice** (ou **matrice adjointe**) de A, la matrice carrée d'ordre *n*,
notée com(A) (ou adj(A)) définie par :

$$\mathrm{com}(A)=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Delta 11} & \boldsymbol{\Delta 12} & \dots & \boldsymbol{\Delta ln} \\ \boldsymbol{\Delta 21} & \boldsymbol{\Delta 22} & \dots & \boldsymbol{\Delta 2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{\Delta n1} & \boldsymbol{\Delta n2} & \dots & \boldsymbol{\Delta nm} \end{bmatrix}$$

où Δ_{ij} est le cofacteur de l'élément a_{ij} de A défini à partir du mineur $|M_{ij}|$ par la relation :

$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$