$\mathbf{P}$-可積分でない確率変数の例（cf. サンクトペテルブルクのパラドックス）

- 標本空間 $\Omega := \{1, 2, 3, \ldots\}$
- 確率 $\mathbf{P}(\{\omega\}) := 1/2^{\omega}$
  - 全確率の和はちゃんと $1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots = 1$ になっている
- 確率変数 $X(\omega) := 2^{\omega}$
- このとき， $\sum_{\omega\in\Omega} |X(\omega)| \mathbf{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in\Omega} 2^{\omega} \cdot (1/2^{\omega}) = 1 + 1 + \cdots = \infty$
- よって，この X は $\mathbf{P}$-可積分でない確率変数である.

X は $\mathbf{P}$-可積分だが X^2 は $\mathbf{P}$-可積分でない確率変数の例

上記のちょっとした応用.

- 標本空間 $\Omega := \{1, 2, 3, \ldots\}$
- 確率 $\mathbf{P}(\{\omega\}) := 1/2^{\omega}$
- 確率変数 $X(\omega) := 2^{\omega/2}$
- このとき,
  - $\sum_{\omega\in\Omega} |X(\omega)| \mathbf{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in\Omega} 2^{\omega/2} \cdot (1/2^{\omega}) = \sum_{\omega=1}^{\infty} (1/\sqrt{2})^{\omega} = 1 + \sqrt{2}$
    - よって，X は $\mathbf{P}$-可積分である.
  - $\sum_{\omega\in\Omega} |(X(\omega))^2| \mathbf{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in\Omega} 2^{\omega} \cdot (1/2^{\omega}) = 1 + 1 + \cdots = \infty$
    - よって，X^2 は $\mathbf{P}$-可積分でない.