定理1.5の補足

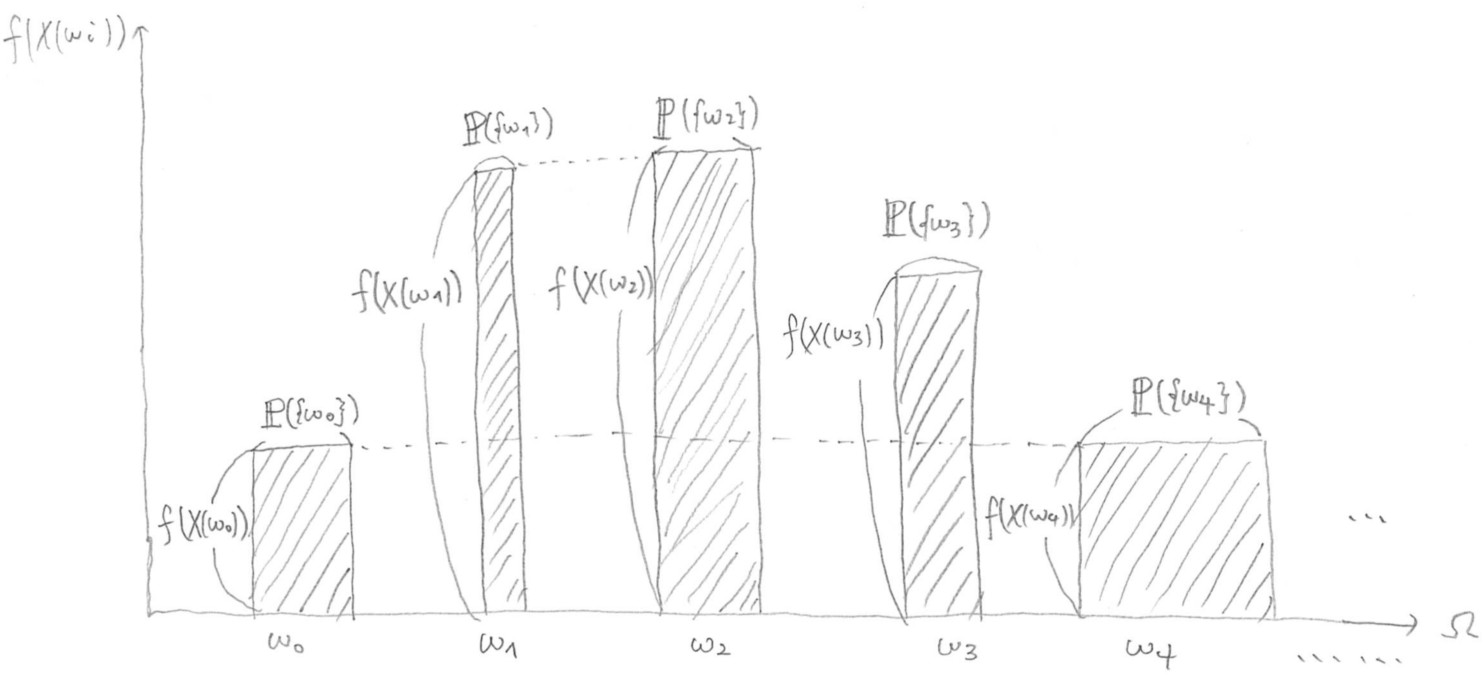
等式 $\displaystyle\sum_{\omega\in\Omega} f(X(\omega))\mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x) \sum_{\omega\in X^{-1}(\{x\})} \mathbb{P}(\{\omega\}) \quad \cdots (1)$

について補足する。説明のため，Ωは可算無限であるとし，Ωを

$\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots\}$と列挙しておく。$X(\Omega)$も$X(\Omega) = \{x_0, x_1, \ldots\}$と列挙する。

(1)の左辺は，高さが$f(X(\omega_i))$，幅が$\mathbb{P}(\{\omega_i\})$であるような長方形の

面積の総和として図示できる：

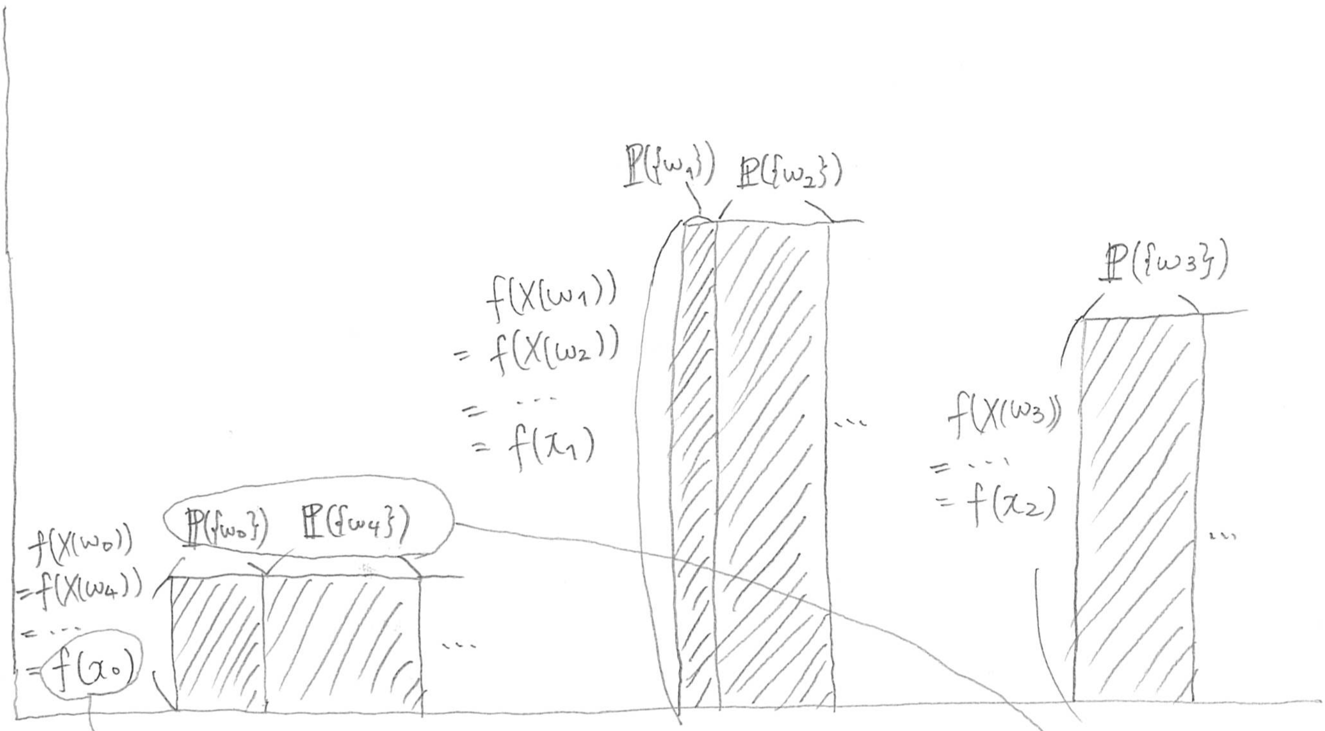


ここで，Ωを"Xによる行き先が同じ"という関係で類別する。

例えば，$\underbrace{X(\omega_0) = X(\omega_4) = \cdots}_{=x_0}$，$\underbrace{X(\omega_1) = X(\omega_2) = \cdots}_{=x_1}$，$\underbrace{X(\omega_3) = \cdots}_{=x_2}$

となっていたとして，$\Omega = \{\omega_0, \omega_4, \cdots\} \sqcup \{\omega_1, \omega_2, \ldots\} \sqcup \{\omega_3, \ldots\} \sqcup \cdots$

と分割する。この分割にしたがって，長方形たちを下記のように並びかえる：



このとき，斜線部の面積の総和は，高さ $f(x_j)$，幅 $\sum_{\omega\in X^{-1}(\{x_j\})} \mathbb{P}(\{\omega\})$

をjで和をとったものなので，$\sum_{x\in X(\Omega)} f(x) \sum_{\omega\in X^{-1}(\{\omega\})} \mathbb{P}(\{\omega\})$ と表せる．

以上が感覚的な説明．4章で連続な標本空間をもつ確率密度関数に対して期待値を考えるが，その時はルベーグ積分を使う．その理解に上のような感覚的な説明が役に立つかもしれない．

次に厳密な説明．XはΩからX(Ω)への全射なので，

Ωは $\Omega = \bigsqcup_{x\in X(\Omega)} \underbrace{X^{-1}(\{x\})}_{\Omega_x}$ と分割できる．したがって、

$$\sum_{\omega \in \Omega} f(X(\omega))\, \mathbb{P}(\{\omega\})$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} \left(\sum_{\omega \in \Omega_x} f(X(\omega))\, \mathbb{P}(\{\omega\}) \right) \quad \cdots (2)$$

となる. $\underset{\substack{\| \\ X^{-1}(\{x\})}}{\omega \in \Omega_x}$ ならば $f(X(\omega)) = f(x)$ となり ωに依らないので

$$(2) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \sum_{\omega \in \underset{\substack{\| \\ X^{-1}(\{x\})}}{\Omega_x}} \mathbb{P}(\{\omega\})$$ となり, (1)が示せた. 終り.