OUTILS MATHEMATIQUES

1 Description mathématique. Notion de repère.

Pour situer quelque chose, on utilise la notion de point, même si la chose que l'on modélise ainsi n'est pas ponctuelle. On dessine le point à l'aide d'une croix (comme pour rappeler qu'un point est l'intersection de deux droites) et on nomme ce point à l'aide d'une lettre majuscule (de preférence la premiere lettre du mot qui caractérise au mieux l'objet considéré, si cette lettre n'est pas déjà utilisée dans le schéma)

- Si l'objet modélisé possède un axe de symétrie ou plusieurs axes de symétrie, on prendra comme point de référence pour l'objet, un point de cet axe ou mieux l'intersection de plusieurs axes de symétrie. Ex : axe d'une roue, centre d'une sphère, axe d'un cylindre...
- Si l'objet modélisé est informe, il est souvent pratique de le repérer par un endroit important, par exemple le centre de masse, ou un point de contact avec un autre objet ...

Pour donner une direction, un sens et une notion de longueur, on utilise un vecteur que l'on represente par une flèche. On peut considérer que la direction de cette flèche est la droite qui contiendrait cette flèche, le sens se définit « queue vers pointe ». La distance entre la queue et la pointe du vecteur permet de définir une distance. Si on dit que le vecteur est unitaire, cela veut dire que sa longueur définit la longueur 1. Un vecteur est toujours noté mathématiquement d'une manière qui le distingue d'un nombre, soit en le surmontant d'une flêche soit en l'écrivant en gras.
On dit que deux vecteurs sont colinéaires si les deux droites qui les portent sont parallèles.

L'usage combiné d'un point et un vecteur est très utile en physique. On l'utilise très souvent pour décrire un phénomène à un endroit donné. Le point définit le lieu, et le vecteur exprime la direction du phénomène, le sens dans lequel il s'exerce, et l'intensité avec laquelle le phénomène apparaît est codé dans la longueur du vecteur. On se sert parfois du vecteur pour coder une information
Exemples :

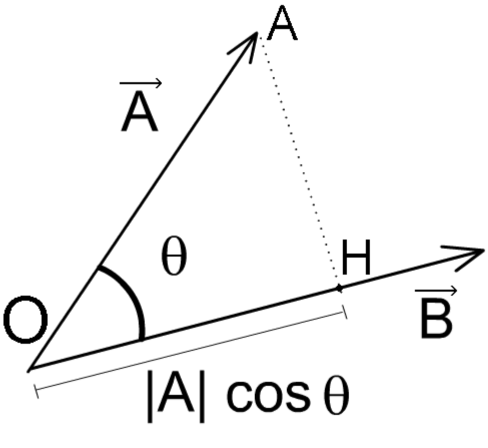
- force exercée en un point : on a toutes les informations, l'endroit d'application, la direction et le sens et l'intensité de la force
- vecteur surface : la surface est définie par un point (au centre de la surface, ou au barycentre de la surface) et orientée par un vecteur. On dispose le vecteur orthogonalement à la surface, et sa taille donne l'information de surface (curiosité: une longueur code une surface). Le sens du vecteur a aussi une utilité, il permet de définir le sens positif pour les angles. En regardant la surface par au dessus (du coté pointe) le sens positif est le sens antihoraire.

A l'aide d'un point et d'un ou plusieurs vecteurs, on peut fabriquer un repère qui va permettre de définir des coordonnées à tout point d'une droite, d'un plan ou de l'espace. La notion de coordonnées utilise le théorème de Chasles. $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$
On dit que x et y sont les coordonnées du point M dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. x et y sont des nombres signés, dont le signe indique s'il faut à partir de O se déplacer suivant le sens du vecteur unitaire ou en sens opposé pour chacun des deux axes. On dit que x et y sont des scalaires.
On parle en fait de nombre scalaire (le mot scalaire contient la notion d'échelle) dès qu'on dispose d'une unitée de mesure et d'une notion de sens.(dans notre cas unité le mètre, et le sens celui du vecteur)
On peut aussi dire que x et y sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le même repère.
le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est orthonormé si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont même longueur et qu'ils sont orthogonaux.
La distance de O à M se calcule par la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ et se calcule par la formule suivante : $\|\overrightarrow{OM}\|=\sqrt{x^2+y^2}$. On reconnaît la formule de Pythagore liant les longueurs des côtés d'un triangle rectangle.

2 Produit scalaire

Le produit scalaire entre deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ se note $\vec{A}\cdot\vec{B}$.
il se calcule de la manière suivante : $\vec{A}\cdot\vec{B}=\|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|\cdot\cos(\theta)$ où θ représente l'angle entre les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

comme $\cos(-\theta)=\cos(\theta)$, on peut en déduire que le produit scalaire est commutatif : $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$.
C'est uniquement pour cette raison que l'angle θ n'est pas dessiné orienté comme il le faudrait normalement.
Comme $\cos(\frac{\Pi}{2})=0$, le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul.
On peut aussi remarquer que la quantité $\|\vec{A}\|\cdot\cos(\theta)$ est la longueur OH, résultat de la projection orthogonal du point A sur la droite $(O,\vec{B})$.



Si le vecteur $\vec{B}$ est de norme 1, alors $\vec{A}\cdot\vec{B}$ représente la composante de $\vec{A}$ suivant la direction $\vec{B}$ dans le repère $(O,\vec{B},{}^{\perp}\vec{B})$. On note ${}^{\perp}\vec{B}$ le vecteur orthogonal à $\vec{B}$. On peut d'ailleurs décrire cette orthogonalité par ${}^{\perp}\vec{B}\cdot\vec{B}=0$

Le produit scalaire est distributif : $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$ et $(\vec{A}+\vec{B})\cdot\vec{C}=\vec{A}\cdot\vec{C}+\vec{B}\cdot\vec{C}$. On démontre cela en faisant un schema et en regardant les différentes projections orthogonales sur $\vec{A}$ pour la première égalité et sur $\vec{C}$ pour la seconde égalité.

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les vecteurs qui composent le repère sont orthogonaux entre eux, cela peut s'exprimer par des produits scalaires nuls: $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$ $\vec{i}\cdot\vec{k}=0$ $\vec{j}\cdot\vec{k}=0$
D'autre part, les vecteurs étant unitaires, cela amène les égalités : $\vec{i}\cdot\vec{i}=1$ $\vec{j}\cdot\vec{j}=1$ $\vec{k}\cdot\vec{k}=1$
En utilisant ces égalités et la propriété de distributivité du produit scalaire, on peut alors établir une relation très simple du produit scalaire de deux vecteurs quelconques :
soit $\vec{A}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ et $\vec{B}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$ alors $\vec{A}\cdot\vec{B}=xx'+yy'+zz'$
Cette dernière formule est très simple à retenir, à implémenter informatiquement.

UTILISATION DU PRODUIT SCALAIRE :

le produit scalaire permet de calculer le cosinus d'un angle : $\cos(\theta)=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|}$

le produit scalaire permet dans le plan de trouver l'équation d'une droite par le calcul $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$ où A est un point connu de la droite, et $\vec{u}$ un vecteur orthogonal à la droite. L'équation revient à dire tout simplement que M appartient à la droite si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.
En faisant un dessin, on se rend compte que le produit scalaire $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}$ apporte d'autres informations car si $\vec{u}$ est un vecteur unitaire, alors $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=\|\overrightarrow{AM}\|\cos(\theta)$ represente la longueur AM projetée suivant $\vec{u}$. On obtient alors la distance entre M et la droite. M appartient à la droite si sa distance à la droite est nulle... Il faut remarquer que le $\cos(\theta)$ peut être positif ou négatif, la distance à la droite est alors signée, indiquant ainsi de quel côté de la droite M se trouve.

Le produit scalaire permet de changer de repère très facilement, ou de trouver les composantes d'un vecteur dans une base orthonormée quelconque
En physique, le produit scalaire est utilisé pour calculer des flux, trouver la composante d'un vecteur suivant un axe...