النهايات

تمهيد

إن مفهوم النهاية من أهم المفاهيم الأساسية في التحليل الرياضي وهو مفهوم يتعلق بسلوك دالة عندما يقترب متغيرها نحو عدد معين أو نحو اللانهاية

سنبدأ بدراسة نهاية المتتالية عندما يقترب متغيرها نحو اللانهاية باختصار شديد كمقدمة لدراسة نهاية الدالة

نهاية المتتالية:

مثال ١: إذا وقعت النقط المتتالية التي تعطي بحدود المتتالية $\left\{2-\frac{1}{n}\right\}$.

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{9}{5},\ \frac{11}{6},\ \frac{13}{7},\ \frac{15}{8},\ \frac{17}{9}...,\ 2-\frac{1}{n},... \qquad (1)$$

على خط الأعداد الحقيقية فإننا نلاحظ أنها تتجمع حول النقطة 2 بطريقة ما بحيث أننا نجد نقطا من المتتالية بعدها عن 2 أقل من أي عدد موجب محسوب مهما كان هذا العدد صغيرا.

فمثلا النقطة $\frac{2001}{1001}$ وجميع النقط التي تليها تكون على بعد أقل من 10^{-3} عن 2

والنقطة $\frac{20000001}{10000001}$ وجميع النقط التي تليها على بعد أقل من 10^{-6} عن 2

وهكذا.فعندما يقترب n من اللانهاية فإن الحد العام لهذه المتتالية يقترب من العدد 2 ويبقى قريبا من 2.

إن هذا يعني أن الحد العام للمتتالية يمكنه أن يكون قريبا من 2 بقدر ما نريد شريطة أن يكون n كبيرا بقدر كافٍ. و نشير إلى هذا الأمر بقولنا إن نهاية المتتالية هي العدد 2.

وإذا كان x متغيرا، مداه المتتالية (1)، فإننا نقول أن x تقرب من 2 كنهاية لها أو أن x تؤول إلى 2 كنهاية لها وتكتب $x \to 2$.

إن المتتالية (1) لا تحتوي على نهايتها وهي العدد 2 كأحد حدودها

مثال ٢: إن المتتالية $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{4}, 1, \frac{4}{5}, 1, \frac{5}{6}, ...$ فإنها تؤول إلى 1 كنهاية لها وأن كل حد فردى يساوي 1

ولذا نرى أنه يمكن للمتتالية أن تبلغ نهايتها وقد لا يمكنها ذالك.

غير أننا سنفهم فيما يلي من أن $x \to a$ تستلزم أن $x \neq a$ أي أنه ينبغي أن ندرك أن أي متتالية مفروضه اختيارية لا تحتوي نهايتها كأحد حدودها.

نهاية الدالة :

مثال ٣ : لنفرض أن $x \to 2$ على المتتالية (1)

عندئذ $f(x) = x^2 \to 4$ على المتتالية $1, \frac{9}{4}, \frac{25}{9}, \frac{49}{16}, \frac{81}{25}, \frac{121}{36}, \frac{169}{49}, \frac{225}{64}, \frac{289}{81}, \dots, \left(2 - \frac{1}{n}\right)^2, \dots$

أي أن $f(x)$ تقترب من العدد 4 لما يقترب x من العدد 2

مثال ٤ : لنجعل $x \to 2$ على المتتالية

$$2.1, 2.01, 2.001, 2.0001, \dots, 2 + (0.1)^n, \dots \qquad (2)$$

فعندئذ $f(x) = x^2 \to 4$ على المتتالية $4.41, 4.0401, 4.004001, \dots, \left(2 + (0.1)^n\right)^2, \dots$ ويبدو من المعقول أن نقبل أن x^2 تقترب من 4 كنهاية لها عندما تقترب x من 2 كنهاية لها.

ونقول أن نهاية x^2 عندما تقترب x من 2 تساوي 4 و تكتب $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$

تعريف

لتكن A مجموعة جزئية (مجال أو اجتماع عدة مجالات) من مجموعة الأعداد الحقيقية $\Re$ و f دالة من A في $\Re$

نقول أن الدالة $f : A \to \Re$ تنتهي إلى $b \in \Re$ عندما تنتهي x إلى النقطة $x_0 \in A$ ونرمز لذلك بـ $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$ أو $f(x) \to b$ عندما $x \to x_0$ إذا تحقق الشرط التالي:

من أجل كل عدد حقيقي موجب ε يمكن إيجاد عدد حقيقي موجب آخر δ=δ(ε) بحيث يكون

$$x \in A \text{ و } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

يعني أن $f(x)$ تقترب من b عندما تقترب x من x_0

والبحث عن نهاية دالة هو البحث عن قيمة تقترب إليها الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من عدد x_0

حساب نهاية الدالة :

لحساب نهاية الدالة $f(x)$ عندما $x \to a$ نعوض في هذه الدالة عند $x = a$ وقد نحصل عليها وقد لا نحصل عليها عندئذ نتبع طرق أخرى سنتطرق إليها في ما بعد

مثال ٥ : لتكن $f(x) = x^3$ ، احسب نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى 2

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} x^3 = 2^3 = 8$$

وهذا يعني أن $f(x)$ تقترب من 8 عندما تقترب x من العدد 2

مثال٦: إذا كانت $f(x)=\begin{cases} x^2 & ,x\neq 2 \\ 0 & ,x=2 \end{cases}$ أوجد $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

الحل: نلاحظ هنا أنه إذا كان $x\to 2$ هذا يعني أن $x\neq 2$ إذن $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$

النهايتان اليسرى واليمنى:

إن قيمة x عندما $x\to 2$ على المتتالية (1)، هي باستمرار أصغر من 2 وعلى هذا فإننا نقول x تقترب من 2 من اليسار وتكتب $x\to 2^-$. وبالمثل قيمة x عندما $x\to 2$ على المتتالية (2) هي باستمرار أكبر من 2. ونقول في مثل هذه الحالة أن x تقترب من 2 من اليمين وتكتب $x\to 2^+$.

- النهاية من اليسار للدالة $f(x)$ هي نهاية الدالة $f(x)$ عندما x تقترب من a من اليسار(أي بقيم أصغر) ونرمز لها ب $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ أو $\lim\limits_{x\xrightarrow{<} a} f(x)$
- النهاية من اليمين للدالة $f(x)$ هي نهاية الدالة $f(x)$ عندما x تقترب من a من اليمين ر(أي بقيم أكبر) ونرمز لها ب $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ أو $\lim\limits_{x\xrightarrow{>} a} f(x)$

ومن الواضح أن وجود العبارة $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ تستلزم وجود تساوى كل من نهاية اليسار $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ونهاية اليمين $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

و أن وجود نهاية من اليمين (اليسار) لا يستلزم وجود نهاية من اليسار (اليمين).

مثال ٧:

إن مجال التعريف للدالة $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ هو الفترة $-3\le x\le 3$ فإذا كان a أي عدد في الفترة المفتوحة $-3<x<3$ فإن $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{9-x^2}$ موجودة وتساوي $\sqrt{9-a^2}$ لنعتبر الآن $a=3$ ولنجعل x تقترب من 3 من اليسار(أي بقيم أصغر) أولا فنجد أن $\lim\limits_{x\to 3^-}\sqrt{9-x^2}=0$ أما إذا جعلنا x تقترب من 3 من اليمين(أي بقيم أكبر) فإننا نجد أن $\lim\limits_{x\to 3^+}\sqrt{9-x^2}$ غير موجودة لأن $\sqrt{9-x^2}$ يكون تخيليا عندما $x>3$ وبالتالي فإن $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{9-x^2}$ غير موجودة.

بالمثل لما نعتبر $a=-3$ نجد أن $\lim\limits_{x\to -3^+}\sqrt{9-x^2}$ موجودة و مساوية للصفر ولكن $\lim\limits_{x\to -3^-}\sqrt{9-x^2}$ غير موجودة وبالتالي $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{9-x^2}$ غير موجودة.

مثال ٨: أوجد $\lim_{x\to 3} f(x)$ إذا كانت $f(x)=\begin{cases} x^2-5 & , x\le 3 \\ \sqrt{x+13} & , x>3 \end{cases}$

الحل: عندما تقترب x إلى العدد 3 من اليسار فإن عبارة الدالة $f(x)$ هي $f(x)=x^2-5$ وبالتالي

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}(x^2-5)=3^2-5=4$$

وعندما تقترب x إلى العدد 3 من اليمين فإن عبارة الدالة $f(x)$ هي $f(x)=\sqrt{x+13}$ وبالتالي

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}(\sqrt{x+13})=\sqrt{3+13}=4$$

نلاحظ أن النهايتين من اليمين ومن اليسار متساويتين ومنه فإن $\lim_{x\to 3} f(x)=4$

مثال ٩: أوجد $\lim_{t\to 0} g(t)$ إذا كانت $g(t)=\begin{cases} t^2 & , t\ge 0 \\ t-2, & t<0 \end{cases}$

الحل: عندما تقترب t إلى العدد 0 من اليسار فإن عبارة الدالة $g(t)$ هي $g(t)=t-2$ وبالتالي

$$\lim_{t\to 0^-} g(t)=\lim_{t\to 0^-}(t-2)=0-2=-2$$

عندما تقترب t إلى العدد 0 من اليمين فإن عبارة الدالة $g(t)$ هي $g(t)=t^2$ وبالتالي

$$\lim_{t\to 0^+} g(t)=\lim_{t\to 0^+}(t^2)=0^2=0$$

إذن النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار ومنه فليس للدالة نهاية عند هذه النقطة.

نظريات في النهايات

1) **نهاية مجموع دالتين**

لتكن الدالة $F(x)=f(x)+g(x)$ حيث $f(x)$ ، $g(x)$ دالتين في x فإن

$$\lim_{x\to a} F(x)=\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$$

مثال ١٠:

$$\lim_{x\to -2}(6x^3+5x^2)=\lim_{x\to -2} 6x^3+\lim_{x\to -2} 3x^2$$

$$=6(-2)^3+3(-2)^2=-48+12=-36$$

2) **نهاية فارق دالتين**

لتكن الدالة $F(x)=f(x)-g(x)$ حيث $f(x)$ ، $g(x)$ دالتين في x فان

$$\lim_{x\to a} F(x)=\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)$$

مثال ١١: $\lim_{x\to 1}(2x^4 - x^3) = \lim_{x\to 1} 2x^4 - \lim_{x\to 1} x^3 = 2(1)^4 - (1)^3 = 1$

وعموما إذا كانت الدالة

$$F(x) = f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x) \pm .... \pm f_{n-1}(x) \pm f_n(x)$$

حيث $f_1(x), f_2(x), f_3(x),...., f_{n-1}(x), f_n(x)$ عبارة عن دوال في x فإن

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x) \pm \lim_{x\to a} f_3(x) \pm .... \pm \lim_{x\to a} f_{n-1}(x) \pm \lim_{x\to a} f_n(x)$$

مثال ١٢: لتكن الدالة $F(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + x$ فأوجد $\lim_{x\to 1} F(x)$

الحل

$$\lim_{x\to 1} F(x) = \lim_{x\to 1}(x^4 - 2x^3 + 3x^2 + x) = \lim_{x\to 1} x^4 - \lim_{x\to 1} 2x^3 + \lim_{x\to 1} 3x^2 + \lim_{x\to 1} x$$
$$= (1)^4 - 2(1)^3 + 3(1)^2 + 1 = 3$$

3) نهاية حاصل ضرب دالتين

لتكن الدالة $F(x) = f(x)g(x)$ حيث $f(x), g(x)$ دوال في x فإن

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a}(f(x) \times g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x)$$

مثال ١٣: لتكن $F(x) = (-2x^3 - 1)(5x^2 + 1)$ فأوجد $\lim_{x\to -1} F(x)$

الحل

$$\lim_{x\to -1} F(x) = \lim_{x\to -1}(-2x^3 - 1)(5x^2 + 1) = \lim_{x\to -1}(-2x^3 - 1) \times \lim_{x\to -1}(5x^2 + 1)$$
$$= \left(-2(-1)^3 - 1\right)\left(5(-1)^2 + 1\right) = 6$$

وعموما إذا كان $F(x)$ عبارة عن جداء عدة دوال $F(x) = f_1(x) \times f_2(x) .... \times f_n(x)$ فإن:

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} f_1(x) \times \lim_{x\to a} f_2(x) \times .... \times \lim_{x\to a} f_n(x)$$

4) نهاية قسمة دالتين

لتكن الدالة $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ حيث $f(x), g(x)$ دالتين في x و $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ فإن:

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

مثال ١٤: لتكن الدالة $F(x) = \dfrac{2x+6}{5x^2 - 1}$ فأوجد $\lim_{x\to 0} F(x)$

الحل

$$\lim_{x\to0}F(x)=\lim_{x\to0}\frac{2x+6}{5x^2-1}=\frac{\lim_{x\to0}(2x+6)}{\lim_{x\to0}(5x-1)}=\frac{6}{-1}=-6$$

مثال ١٥: أوجد النهايات التالية:

$$1)\ \lim_{x\to0}(2x^3+5x+2)\qquad 2)\ \lim_{x\to1}\left(\frac{4x^2+x}{2x}\right)^4\qquad 3)\ \lim_{x\to1}\frac{3x^2+2x}{x+1}\qquad \lim_{x\to3}7\ 4)$$

الحل:

$$1)\ \lim_{x\to0}(2x^3+5x+2)=2(0)^3+5(0)+2=2$$

$$2)\ \lim_{x\to1}\left(\frac{4x^2+x}{2x}\right)^4=\left(\frac{4(1)^2+1}{2(1)}\right)^4=\left(\frac{5}{2}\right)^4=\frac{3125}{16}$$

$$3)\ \lim_{x\to1}\frac{3x^2+2x}{x+1}=\frac{3(1)^2+2(1)}{1+1}=\frac{5}{2}$$

$$4)\ \lim_{x\to3}7=7$$

حالات عدم التعيين

$$1)\ \lim_{x\to a}f(x)=\infty\times0\ ,\ 2)\ \lim_{x\to a}f(x)=\infty-\infty\ ,\ 3)\ \lim_{x\to a}f(x)=\frac{\infty}{\infty},\ \ 4)\ \lim_{x\to a}f(x)=\frac{0}{0}$$

في هذه الحالات تكون النهاية غير معينة وهناك طرق لإزالة عدم التعيين

وهناك حالات عدم التعيين أخرى سوف لا نتطرق إليها في هذا المستوى

أولا: عدم التعيين $\frac{0}{0}$: ويزال بالتحليل وقسمة البسط على المقام وبالاختصار أو بالقيام بعملية طرح أو جمع أو باستعمال طرق أخرى.

مثال ١٦: أحسب النهاية التالية:

$$1)\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}\qquad 2)\lim_{x\to0}\frac{x^2-x}{x}\qquad 3)\lim_{x\to0}\frac{2x^4+4x^2}{x^4+3x^2}\qquad 4)\ \lim_{x\to-3}\frac{x^2+x-6}{x^2-9}$$

$$5)\ \lim_{x\to\to3}\frac{2x^2-2x-12}{x-3}\qquad 6)\ \lim_{x\to-2}\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x+2}\qquad 7)\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}\qquad 8)\lim_{y\to1}\frac{1-y}{1-\sqrt[3]{y}}$$

1) عدم التعيين $\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{0}{0}$

يجب إزالة عدم التعيين

لدينا $x\neq 3$, $\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to3}(x+3)$

إذن $\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to3}(x+3)=6$

2) عدم التعيين $\lim_{x\to0}\frac{x^2-x}{x}=\frac{0}{0}$

من أجل $x\neq 0$ ، $\lim_{x\to0}\frac{x(x-1)}{x}=\lim_{x\to0}(x-1)=-1$

3) عدم التعيين $\lim_{x\to0}\frac{2x^4+4x^2}{x^4+3x^2}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to0}\frac{2x^4+4x^2}{x^4+3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\left(2x^2+4\right)}{x^2\left(x^2+3\right)}=\lim_{x\to0}\frac{2x^2+4}{x^2+3}=\frac{4}{3}$$

4) عدم التعيين $\lim_{x\to-3}\frac{x^2+x-6}{x^2-9}=\frac{0}{0}$

فمن أجل $x\neq -3$ ، $\lim_{x\to-3}\frac{x^2+x-6}{x^2-9}=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to-3}\frac{x-2}{x-3}=\frac{-5}{-6}=\frac{5}{6}$

5) عدم التعيين $\lim_{x\to\to3}\frac{2x^2-2x-12}{x-3}=\frac{0}{0}$

لدينا $\frac{2x^2-2x-12}{x-3}=\frac{(2x+4)(x-3)}{(x-3)}=2x+4$ من أجل $x\neq 3$

إذن $\lim_{x\to3}\frac{2x^2-2x-12}{x-3}=\lim_{x\to3}2x+4=10$

6) عدم التعيين $\lim_{x\to-2}\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x+2}=\frac{-8+24-24+8}{-2+2}=\frac{0}{0}$

باستخدام القسمة المطولة نحصل على:

$$\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x+2}=\frac{(x^2+4x+4)(x+2)}{(x+2)}$$

ومنه فمن أجل $x\neq -2$ ، $\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x+2}=x^2+4x+4$

وبالتالي فإن $\lim_{x\to-2}\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x+2}=\lim_{x\to-2}x^2+4x+4=4-8+4=0$

7) عدم التعيين $\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x^2+x+1)=3$$

8) عدم التعيين $\lim_{y\to1}\frac{1-y}{1-\sqrt[3]{y}}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{y\to1}\frac{1-y}{1-\sqrt[3]{y}}=\lim_{y\to1}\frac{y-1}{\sqrt[3]{y}-1}=\lim_{y\to1}\frac{\left(\sqrt[3]{y}-1\right)\left[\left(\sqrt[3]{y}\right)^2+\sqrt[3]{y}+1\right]}{\sqrt[3]{y}-1}=\lim_{y\to1}\left[\left(\sqrt[3]{y}\right)^2+\sqrt[3]{y}+1\right]=1+1+1=3$$

ثانيا: عدم التعين $\frac{\infty}{\infty}$: لإزالة عدم التعين $\frac{\infty}{\infty}$ عندما يؤول المتغير x إلى ∞ ، نقسم البسط والمقام على المتغير حاملا أكبر أس في المقام

نظرية ١: $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^\alpha}=0$ حيث α عدد موجب

مثال ١٧: لدينا $\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}=0$ و $\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^5}=0$

نظرية 2: $\lim_{x\to\infty}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0)=\infty$

مثال ١٨: $\lim_{x\to\infty}(4x^2+2x+5)=\infty$

مثال ١٩: أحسب النهاية التالية: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}$

الحل:

عدم التعيين $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}$

نقسم حدود الدالة على x^2 فيكون لدينا

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2/x^2}{x^2/x^2+1/x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+1/x^2}=\frac{1}{1+0}=1$$

مثال ٢٠: أحسب النهاية التالية:

$$1)\lim_{x\to\infty}\frac{x+5}{x^3}\qquad 2)\lim_{x\to\infty}\frac{x^5+3}{x^2}\qquad 3)\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{3x+5}{6x-8}}$$

1) عدم التعيين $\lim_{x\to\infty}\frac{x+5}{x^3}=\frac{\infty}{\infty}$

نقسم حدود الدالة على x^3 فيكون لدينا

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+5}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x/x^3+5/x^3}{x^3/x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x^2+5/x^3}{1}=\frac{0+0}{1}=0$$

2) عدم التعيين $\lim_{x\to\infty}\frac{x^5+3}{x^2}=\frac{\infty}{\infty}$

نقسم حدود الدالة على x^2 فيكون لدينا

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5+3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5/x^2+3/x^2}{x^2/x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3/x^2}{1}=\infty$$

(3
$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{3x+5}{6x-8}}=\sqrt[3]{\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+5}{6x-8}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

ثالثا: عدم التعيين $0\times\infty$ و$(\infty-\infty)$: لإزالة عدم التعيين $0\times\infty$ و$(\infty-\infty)$. نطبق طريقة التحليل الجبري ثم نقوم بالاختصار و القيام بعملية الضرب و القسمة في حالة وجوداهما

مثال ٢١: أحسب النهاية التالية:

$$1)\lim_{x\to0}x\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2-x}\right)\qquad 2)\lim_{x\to1}\left(\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)\qquad 3)\lim_{h\to0}h\left(1+\frac{1}{h}\right)$$

الحل:

1) عدم التعيين $\lim_{x\to0}x\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2-x}\right)=0\times\infty$

$$\lim_{x\to0}x\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2-x}\right)=\lim_{x\to0}x\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x(x-1)}\right)=\lim_{x\to0}x\left[\frac{1}{x}\left(3+\frac{2}{(x-1)}\right)\right]$$
$$=\lim_{x\to0}\left(3+\frac{2}{x-1}\right)=3+\frac{2}{0-1}=1$$

2) عدم التعيين $\lim_{x\to1}\left(\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)=\infty-\infty$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{3}{x-1}-\frac{1}{(x-1)(x+1)}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left(3-\frac{1}{(x+1)}\right)=\infty\times\frac{5}{2}=\infty$$

3) عدم التعيين $\lim_{h\to0}h\left(1+\frac{1}{h}\right)=0\times(1+\infty)=0\times\infty$

$$\lim_{h\to 0} h\left(1+\frac{1}{h}\right)=\lim_{h\to 0} h\left(\frac{h+1}{h}\right)=\lim_{h\to 0}(h+1)=1$$

نظرية ٣: $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$ حيث $a\in\Re$

وبصفة عامة إذا كانت لدينا $f(x)$ و g(x) دالتين مستمرتين على I حيث $g(x)=0$ و $\lim_{x\to a} g^{/}(x)\neq 0$

فإن: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

يمكن تطبيق ذلك على الحالة الخاصة حيث $f(x)=x^n-a^n$ و $g(x)=x-a$

مثال ٢٢: أحسب النهاية التالية: $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2^3}{x-2}$

الحل: $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2^3}{x-2}=3\times 2^2=12$

مثال ٢٣: أحسب النهاية التالية: $\lim_{x\to -4}\frac{x^3+64}{x+4}$

الحل: $\lim_{x\to -4}\frac{x^3+64}{x+4}=3(-4)^{3-1}=48$

تمارين تدريبية: احسب النهايات التالية:

1) $\lim_{x\to 5}(3x^2-2x+1)$

2) $\lim_{x\to 1.6}\frac{2x^2-5x+3}{x-4}$

3) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2}{x-2}$

4) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}$

5) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{x-3}$

6) $\lim_{x\to -2}\frac{(x+1)^2-1}{x+2}$

7) $\lim_{x\to 1} f(x)$, إذا كانت $f(x)=\begin{cases}-1, & x\neq -1\\ -3, & x=-1\end{cases}$

8) $\lim_{x\to 1}(x-1)\sqrt{x-3}$

9) $\lim_{x\to\infty}\frac{3}{1+2/x}$

10) $\lim_{x\to 3} f(x)$ إذا كانت $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\leq 3\\ 3x-7, & x>3\end{cases}$

11) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-7}{x^2-4}$

12) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+7x-10}{3x^3-1}$

13) $\lim_{y\to x}\frac{2-y}{\sqrt{7+6y^2}}$

14) $\lim_{x\to\infty}\frac{2-5/x}{4+5/x^2}$

15) $\lim_{s\to +x}\sqrt[3]{\frac{3s^7-4s^5}{2s^7+1}}$

16) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x4}{x^2+x-6}$

17) $\lim_{x\to 5}\sqrt{x^3-3x-1}$

18) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-7}{4x^2-2x+1}$

التفاضل

تعريف ١

ليكن I مجالا من $\Re$ ، x_0 نقطة من I ، $I \neq \{x_0\}$ و $f : I \to \Re$

نقول عن الدالة f أنها قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا وجد عدد حقيقي b بحيث

$\lim\limits_{x \to x_0, x \neq x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = b$ و تسمى b مشتقة f عند x_0 و نرمز لها بـ $f'(x_0)$

و نقول عن f أنها قابلة للاشتقاق على مجال I إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة x_0 من I
وتسمى الدالة

$$f' : I \to \Re$$
$$x \to f'(x)$$

بالمشتقة الأولى للدالة f

ملاحظة١: f قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي b و تابع ε لمتغير حقيقي بحيث من أجل كل $(x_0 + h)$ يكون لدينا

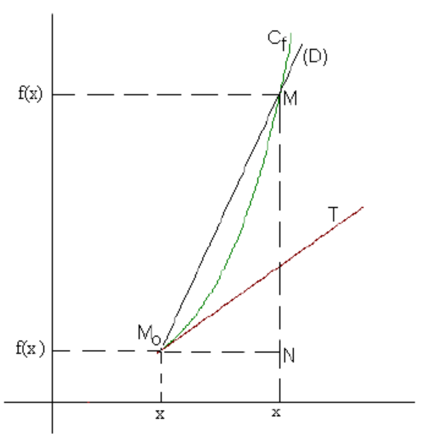
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + bh + h\varepsilon(h), \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

ملاحظة٢: $f'(x_0) \neq (f(x_0))'$

١. التفسير الهندسي لمفهوم المشتقة

مشتقة f عند x_0 هو ميل المماس للمنحني C_f الممثل لـ f عند النقطة M_0 ذات الإحداثية $(x_0, f(x_0))$

$$\text{ميل المستقيم } (D) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\overline{NM}}{\overline{M_0N}}$$



عندما يؤول x إلى x_0 نلاحظ أن المستقيم (D) يؤول إلى M_0T المماس لـ C_f عند M_0

٢. تعريف المشتقة

إذا كانت الدالة $y=f(x)$ قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن المشتقة الأولى للدالة $y=f(x)$ معرفة كما يلي:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

ويرمز لها بإحدى الرموز التالية:

$$\frac{dy}{dx} \text{ أو } \frac{df}{dx} \text{ أو } \frac{d}{dx}\left[f(x)\right] \text{ أو } f'(x) \text{ أو } y'$$

ومنه فلإيجاد المشتقة الأولى باستخدام التعريف نتبع الخطوات التالية:

١) نحسب مقدار تغير الدالة $f(x)$ إلى $f(x+\Delta x)$

٢) نحسب الفارق $f(x+\Delta x)-f(x)$

٣) نحسب متوسط التغير $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ بقسمة $f(x+\Delta x)-f(x)$ على Δx

٤) وأخيرا نوجد المشتقة بحساب النهاية $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

مثال ١: أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للدالة $f(x)=2x+5$

الحل:

١) نحسب مقدار تغير الدالة $f(x)$ إلى $f(x+\Delta x)$

$$f(x+\Delta x)=2(x+\Delta x)+5$$

٢) نحسب الفارق $f(x+\Delta x)-f(x)$

$$f(x+\Delta x)-f(x)=2(x+\Delta x)+5-(2x+5)=2x+2\Delta x+5-2x-5=2\Delta x$$

٣) نحسب متوسط التغير $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ بقسمة $f(x+\Delta x)-f(x)$ على Δx

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2$$

٤) وأخيرا نوجد المشتقة بحساب النهاية $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}2=2$$

ونتطرق إلى حلول الأمثلة التالية باختصار ويمكن للمتدرب تفصيلها كما هو موضحا في المثال الأول

مثال ٢: أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للدالة $f(x)=x^2+2$

الحل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2+2-\left(x^2+2\right)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+2\right)-\left(x^2+2\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}2x+\Delta x=2x$$

مثال ٣: أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للدالة $w=1.2-0.3m^2$

الحل:

$$w'=\frac{dw}{dm}=\lim_{\Delta m\to 0}\frac{f(m+\Delta m)-f(m)}{\Delta m}=\lim_{\Delta m\to 0}\frac{\left(1.2-0.3(m+\Delta m)^2\right)-\left(1.2-0.3m^2\right)}{\Delta m}$$

$$=\lim_{\Delta m\to 0}\frac{1.2-0.3m^2-0.6m\Delta m-0.3(\Delta m)^2-1.2+0.3m^2}{\Delta m}$$

$$=\lim_{\Delta m\to 0}\frac{-0.6m\Delta m-0.3(\Delta m)^2}{\Delta m}=\lim_{\Delta m\to 0}-0.6m-0.3\Delta m=-0.6m$$

مثال ٤: أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للدالة $s=2+3t^2$

الحل:

$$s'=\frac{ds}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2+3(t+\Delta t)^2-2-3t^2}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2+3t^2+6t\Delta t+3(\Delta t)^2-2-3t^2}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{6t\Delta t+3(\Delta t)^2}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}6t+3\Delta t=6t$$

مثال ٥: أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للدالة $f(x)=\sqrt{3x-7}$

الحل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{3(x+\Delta x)-7}-\sqrt{3x-7}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{3(x+\Delta x)-7}-\sqrt{3x-7}}{\Delta x}\cdot\frac{\sqrt{3(x+\Delta x)-7}+\sqrt{3x-7}}{\sqrt{3(x+\Delta x)-7}+\sqrt{3x-7}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x+3\Delta x-7-3x+7}{\Delta x\left(\sqrt{3(x+\Delta x)-7}+\sqrt{3x-7}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{3(x+\Delta x)-7}+\sqrt{3x-7}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3}{\sqrt{3(x+\Delta x)-7}+\sqrt{3x-7}}=\frac{3}{\sqrt{3x-7}+\sqrt{3x-7}}=\frac{3}{2\sqrt{3x-7}}$$

٣. القوانين العامة للمشتقات

القانون ١: اشتقاق الدوال ذات الأس n

لتكن الدالة: $y = f(x) = x^n$

فإن $y' = nx^{n-1}$

مثال ٦: إذا كانت $y = x^3$

فإن $y' = 3x^{3-1} = 3x^2$

مثال ٧: إذا كانت $y = x^{-4}$

فإن $y' = -4x^{-4-1} = -4x^{-5}$

ومنه فان مشتقة $y = x$ تساوي العدد 1

لأن $y = x \Rightarrow y' = 1x^{1-1} = x^0 = 1$

القانون ٢: مشتق الدالة الثابتة $y = c$ حيث c عدد حقيقي معلوم هو $y' = 0$

مثال ٩: إذا كانت $y = 7$ فإن $y' = 0$ و إذا كانت $y = -5$ فإن $y' = 0$

القانون ٣: مشتق الدالة $y = ax^n$ هو $y' = nax^{n-1}$

مثال ٨: إذا كانت $y = 3x^6$

فإن $y' = 3 \times 6x^{6-1} = 18x^5$

مثال ٩: أوجد مشتقة الدالة $y = 5\sqrt[3]{x}$

الحل:

لدينا $y = 5\sqrt[3]{x} = 5(x)^{\frac{1}{3}}$

إذاً $y' = \frac{1}{3} \times 5x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{5}{3}x^{\frac{-2}{3}}$

القانون ٤: مشتقة مجموع أو فوارق دوال

لتكن الدالة $F(x)$ تكتب على الشكل $F(x) = f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_{n-1}(x) \pm f_n(x)$ حيث $f_1, \ldots, f_n(x)$ دوال قابلة للاشتقاق فإن $F'(x) = f_1'(x) \pm f_2'(x) \pm \ldots \pm f_{n-1}(x) \pm f_n(x_n)$

مثال ١٠: لتكن الدالة $y = 4x^{-3} - 5x^2 + 7x - 12$

فإن $y' = -3 \times 4x^{-3-1} - 5 \times 2x^{2-1} + 7x^{1-1} = -12x^{-4} - 10x + 7$

القانون ٥: مشتقة حاصل ضرب دالتين

لتكن الدالة $F(x)$ تكتب على الشكل $F(x)=f_1(x).f_2(x)$ حيث $f_1(x),f_2(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال I من $\Re$. فإن $F'(x)=f_1'(x)f_2(x)+f_2'(x)f_1(x)$

مثال ١١: لتكن الدالة $F(x)=(3x-2)(4x+1)$

فإن
$$F'(x)=3(4x+1)+4(3x-2)$$
$$=12x+3+12x-8=24x-5$$

القانون ٦: مشتقة قسمة دالتين

لتكن الدالة $F(x)$ تكتب على الشكل $F(x)=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ حيث $f_1(x),f_2(x)$ قابلتين للاشتقاق على المجال I من $\Re$ و $f_2(x)\neq 0$ على المجال I من $\Re$. فإن
$$F'(x)=\frac{f_1'(x)f_2(x)-f_2'(x)f_1(x)}{\left(f_2(x)\right)^2}$$

مثال ١٢: أوجد مشتقة الدالة $y=\dfrac{8x^7}{2x-1}$ حيث $x\neq\dfrac{1}{2}$

الحل:

لدينا $f_1(x)=8x^7 \Rightarrow f_1'(x)=7\times 8x^{7-1}=56x^6$ و $f_2(x)=2x-1 \Rightarrow f_2'(x)=2$

إذاً
$$F'(x)=\frac{f_1'(x)f_2(x)-f_2'(x)f_1(x)}{(f_2(x))^2}=\frac{56x^6(2x-1)-2\times 8x^7}{(2x-1)^2}=\frac{56x^6(2x-1)-16x^7}{(2x-1)^2}$$
$$=\frac{112x^7-56x^6-16x^7}{(2x-1)^2}=\frac{96x^7-56x^6}{(2x-1)^2}=\frac{8x^6(12x-7)}{(2x-1)^2}$$

القانون ٧: مشتقة الدالة التي تكتب على الشكل $F(x)=(f(x))^n$

إذا كانت $F(x)=(f(x))^n$ حيث $f(x)$ قابلة للاشتقاق فإن
$$F'(x)=n(f(x))^{n-1}f'(x)$$

مثال ١٣: أوجد مشتقة الدالة $y=F(x)=4(2x^2+3x-2)^2$

الحل:

لدينا $f(x)=(2x^2+3x-2)\Rightarrow f'(x)=4x+3$

إذا $y'=F'(x)=2\times 4(2x^2+3x-2)^{2-1}(4x+3)=8(2x^2+3x-2)(4x+3)$

القانون ٨: مشتق مقلوب دالة

لتكن $g(x)$ دالة قابلة للاشتقاق و $g(x)\neq 0$ عند كل نقاط I من $\Re$ و $y=f(x)=\dfrac{1}{g(x)}$. فإن

$$y'=f'(x)=\frac{-g'(x)}{(g(x))^2}$$

مثال ١٤: لتكن $g(x)=(2x-1)$ حيث $x\neq\dfrac{1}{2}$ و $y=f(x)=\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{(2x-1)}$

فإن $y'(x)=f'(x)=\dfrac{-g'(x)}{(g(x))^2}=\dfrac{-2}{(2x-1)^2}$

القانون ٩ : مشتق الدوال المركبة

لتكن الدالة $Z=f(y)$ حيث $y=g(x)$ أي أن $Z=f(g(x))$ فإن

$$\frac{dZ}{dx}=\frac{dZ}{dy}\frac{dy}{dx}$$

مثال ١٥: لتكن الدالة $Z=y^3+2y+4$ و $y=5x^2$ أي أن

$$Z=(5x^2)^3+2(5x^2)+4$$

فإن $\dfrac{dZ}{dx}=\dfrac{dZ}{dy}\dfrac{dy}{dx}=(3y^2+2)(10x)=10x(3y^2+2)$

نعوض y بـ $5x^2$ فيكون لدينا $\dfrac{dZ}{dx}=10x\left[3(5x^2)^2+2\right]=10x(75x^4+2)$

معادلة المماس والناظم (العمودي على المماس) للمنحنى $y=f(x)$

نذكر بمعادلة الخط المستقيم

معادلة الخط المستقيم ذا الميل m والمار بالنقطة (x_0,y_0) تعطى بما يلي :

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

مثال ١٦: اكتب معادلة المماس للمنحني $y=2+x^2$ عند النقطة $(-1,3)$

الحل: ميل المماس عند النقطة $(-1,3)$ هو مشتق الدالة عند هذه النقطة

$$m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-1,3)}=\left.2x\right|_{(-1,3)}=2(-1)=-2$$

معادلة المماس هي

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

$$y-3=m[x-(-1)]\Rightarrow y-3=-2(x+1)=-2x-2$$

$$\Rightarrow y=-2x-2+3\Rightarrow y=-2x+1$$

مثال ١٧ : اكتب معادلة العمودي على المماس للمنحني $y=2+x^2$ عند النقطة $(-1,3)$

الحل: لتكن m ميل المماس و m_1 ميل العمودي عليه إذن $m\times m_1=-1$ أي أن $m_1=-\dfrac{1}{m}$

من المثال السابق ميل المماس $m=-2$ فان ميل العمودي عليه $m_1=-\dfrac{1}{m}=-\dfrac{1}{-2}=\dfrac{1}{2}$

معادلة العمودي على المماس

$$y-y_0=m_1(x-x_0)$$

$$y-3=\frac{1}{2}[x-(-3)]\Rightarrow y-3=\frac{1}{2}(x+1)$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}+3\Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$$

تمرين ١: اشتق الدوال الآتية:

1) $y=\sqrt[5]{x^{13}+13+x^{-13}}$ 2) $y=\left(\dfrac{x+2}{x^2-3x}\right)^2$ 3) $y=\sqrt{\dfrac{4}{x^3}}-\sqrt{3x}$

4) $y=(4x^2-3)^2(x+5)$ 5) $f(x)=\dfrac{2x^2-3}{(x^2+7)^{\frac{1}{3}}}$ 6) $f(t)=\sqrt{\dfrac{3t^2-4}{2t+5}}$

الحل:

$$1)\ y=\sqrt[5]{x^{13}+13+x^{-13}}=\left(x^{13}+13+x^{-13}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$y'=\frac{1}{5}\left(13x^{12}-13x^{-14}\right)\left(x^{13}+13+x^{-13}\right)^{-\frac{4}{5}}$$

$$2)\ y=\left(\frac{x+2}{x^2-3x}\right)^2$$

$$y'=2\left(\frac{x+2}{x^2-3x}\right)\left[\frac{(x^2-3x)-(2x-3)(x+2)}{(x^2-3x)^2}\right]$$

$$=2\left(\frac{x+2}{x^2-3x}\right)\left[\frac{x^2-3x-2x^2-4x+3x+6}{(x^2-3x)^2}\right]=\frac{-2(x+2)(x^2+4x-6)}{x^3(x-3)^3}$$

$$3)\ y=\sqrt{\frac{4}{x^3}}-\sqrt{3x}\Rightarrow y=\left(\frac{4}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}}-(3x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{-4\times 3x^2}{\left(x^3\right)^2}\times\frac{1}{2}\left(\frac{4}{x^3}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}(3x)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{6}{x^4}\left(\frac{4}{x^3}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}(3x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{3}{x^4}\sqrt{x^3}-\frac{1}{2x}\sqrt{3x}$$

$$4)\ y=\left(4x^2-3\right)^2(x+5)$$

$$y'=2\times 8x\left(4x^2-3\right)(x+5)+\left(4x^2-3\right)^2=16x\left(4x^2-3\right)(x+5)+\left(4x^2-3\right)^2$$

$$=\left(4x^2-3\right)\left(16x(x+5)+4x^2-3\right)=\left(4x^2-3\right)\left(16x^2+80x+4x^2-3\right)$$

$$=\left(4x^2-3\right)\left(20x^2+80x-3\right)$$

$$5)\ f(x)=\frac{2x^2-3}{\left(x^2+7\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$f'(x)=\frac{4x\left(x^2+7\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}\left(2x^2-3\right)\left(x^2+7\right)^{-\frac{2}{3}}(2x)}{\left[\left(x^2+7\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2}=\frac{4x-\frac{2}{3}x\left(2x^2-3\right)\left(x^2+7\right)^{-1}}{\left(x^2+7\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$=\frac{2x\left[2-\frac{1}{3}\left(2x^2-3\right)\left(x^2+7\right)^{-1}\right]}{\left(x^2+7\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$6)\ f(t)=\sqrt{\frac{3t^2-4}{2t+5}}=\left(\frac{3t^2-4}{2t+5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{3t^2-4}{2t+5}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{6t(2t+5)-2\left(3t^2-4\right)}{(2t+5)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2t+5}{3t^2-4}}\,\frac{6t^2+30t+8}{(2t+5)^2}$$

تمرين ٢: إذا كان $y=\frac{4}{3}\pi r^2$ ، $r=1+2t$ أوجد $\frac{dy}{dt}$

الحل: لدينا $y=\frac{4}{3}\pi r^2$ ، $r=1+2t$ وبالتالي فإن $y=\frac{4}{3}\pi(1+2t)^2$ ومنه فإن

$$\frac{dy}{dt} = 2\times\frac{4}{3}\pi(1+2t)(2) = 4\times\frac{4}{3}\pi(1+2t) = \frac{16}{3}\pi(1+2t)$$

تمرين٣: لتكن $s = f(t) = 2t^3 + 5\ (m)$ هي معادلة المسافة بدلالة الزمن. أوجد السرعة الآنية عند اللحظة $t = 5\ Seconds$.

الحل: السرعة الآنية هي معدل تغير المسافة s بالنسبة للزمن t وتعطي بالمشتقة $\frac{dy}{dt} = 6t^2$

السرعة الآنية عند اللحظة $t = 5\ Seconds$ هي:

$$\left(\frac{dy}{dt} \text{ عند النقطة } t=5\right) = \frac{dy}{dt}\Big|_{t=5} = 6\times 5^2 = 150\ m/s$$

تمارين

تمرين ١: احسب باستعمال التعريف مشتقة الدوال التالية:

$1)\, y = 3t + 7$ $\quad 3)\, y = \sqrt{x-5}$ $\quad 5)\, y = -x^2 + 5x - 7$ $\quad 7)\, y = 5 - +3t + 2t^2$

$2)\, y = 2x - 7$ $\quad 4)\, y = 2\sqrt{t+3}$ $\quad 6)\, y = x^2 + 4x - 3$ $\quad 8)\, y = x^3 - 1$

تمرين ٢: أوجد المشتقة الأولى لما يلي:

$1)\, y = (2x^3 - 7)(3x^2)$ $\quad 6)\, y = \dfrac{(3x-2)(x+7)}{3x-1}$ $\quad 11)\, y = \left(\dfrac{\sqrt{2x-7}}{x^2}\right)^{-1}$ $\quad 16)\, y = \dfrac{(3-2x)^{\frac{4}{3}}}{x^2}$

$2)\, y = \dfrac{2x^2 - 5}{3x}$ $\quad 7)\, y = \dfrac{3x^2}{(5x+7)(2x-1)}$ $\quad 12)\, y = \left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{3/2}$ $\quad 17)\, y = x^3(5x^2+1)^{\frac{-2}{3}}$

$3)\, y = \dfrac{2}{3x^2 - 7x + 4}$ $\quad 8)\, y = (2x^4 - 1.9)^3$ $\quad 13)\, y = \sqrt{\dfrac{2x}{x^2 + 1.8}}$ $\quad 18)\, y = 2x^{-3} + 7x^{-5}$

$4)\, y = \dfrac{5}{4x^3 - 3x^2}$ $\quad 9)\, y = \dfrac{\sqrt{x^3+4}}{x^2(x-2)^3}$ $\quad 14)\, y = x^2\sqrt{x-1}$ $\quad 19)\, y = (4x^2\sqrt{x^3})^{1/4}$

$5)\, y = \dfrac{1}{x+2} - x$ $\quad 10)\, y = (2x^3 - 4x + 7)^{-2}$ $\quad 15)\, y = \dfrac{1.9}{(2x+4)^3}$ $\quad 20)\, y = \sqrt{\dfrac{x-2}{x^2+5}}$

تمرين ٣: لتكن s معادلة المسافة معطاة بدلالة الزمن t أوجد السرعة الآنية عند اللحظة المعطاة

$1)\, s = (1.4t^2)(3t+2),\ t = 2s$ $\qquad 2)\, s = \dfrac{3.8t^3}{2t+7},\ t = 2s$

تمرين ٤: أوجد ميل المماس للمنحنيات المعطاة عند النقاط المحددة

$1)\, y = (3x^2 - 4x + 1)(5x^2 + 2), x = 3$ $\qquad 2)\, y = \dfrac{(2x-1)(4x^3)}{5x+6}, x = -1$

$3)\, y = x^2\sqrt{x-1},\ x = 2$ $\qquad 4)\, y = \dfrac{2x^3}{(3x-5)(x+2)},\ x = 1$

تمرين٥:

اكتب معادلتي المماس والناظم (العمودي على المماس) للمنحنى المعطى عند النقطة المعطاة

$1)\ 3x - 2y + 4 = 0\ ;\ (2,4)$ $\qquad 2)\ y = 4 - x + 3x^2\ ;\ (-1,8)$ $\qquad 3)\ y = x^4 - 2x^2;\ (2,8)$

٤. قواعد اشتقاق الدوال المثلثية

١) لتكن الدالة $y=\sin u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d(\sin u)}{du}\frac{du}{dx}=\cos u\frac{du}{dx}$$

٢) لتكن الدالة $y=\cos u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d(\cos u)}{du}\frac{du}{dx}=-\sin u\frac{du}{dx}$$

مثال ١٨: لتكن الدالة $y=\sin(2x^3-3)$

فإن $y'=3\times 2x^2\cos(2x^3-3)=6x^2\cos(2x^3-3)$

مثال١٩: أوجد مشتقة الدالة $y=\cos(2\theta^3-3\theta^{-2})$

الحل:

لدينا $u=2\theta^3-3\theta^{-2}\Rightarrow\frac{du}{d\theta}=6\theta^2+6\theta^{-3}$

إذاً $y'=-(6\theta^2+6\theta^{-3})\sin(2\theta^3-3\theta^{-2})$

٣) لتكن الدالة $y=\tan u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{d(\tan u)}{du}\frac{du}{dx}=\sec^2 u\frac{du}{dx}$$

مثال ٢٠: إذا كانت $y=\tan x^{-2}$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

لدينا $u=x^{-2}\Rightarrow\frac{du}{dx}=-2x^{-3}$

إذاً $y'=\frac{d(\tan u)}{dx}=\frac{du}{dx}\sec^2 u=-2x^{-3}\sec^2 x^{-2}$

٤) لتكن الدالة $y=\cot u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{d(\cot u)}{du}\frac{du}{dx}=-\csc^2 u\frac{du}{dx}$$

مثال ٢١: احسب مشتقة الدالة $y=\cot 3x$

الحل:

لدينا $u=3x\Rightarrow\frac{du}{dx}=3$

ومنه فإن $\qquad y' = \frac{d(\cot u)}{dx} = -\frac{du}{dx}\csc^2 u = -3\csc^2 3x$

٥) لتكن الدالة $y = \sec u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d(\sec u)}{du}\frac{du}{dx} = \frac{du}{dx}\tan u \sec u$$

مثال ٢٢: احسب مشتقة الدالة $y = \sec\theta^2$

الحل:

لدينا $\quad u = \theta^2 \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = 2\theta$

ومنه $\qquad y' = \frac{d(\sec u)}{d\theta} = \frac{du}{d\theta}\tan u \sec u = 2\theta \tan\theta^2 \sec\theta^2$

٦) لتكن الدالة $y = \csc u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d(\csc u)}{du}\frac{du}{dx} = -\frac{du}{dx}\cot u \csc u$$

مثال٢٣: احسب مشتقة الدالة $y = \csc x^3$

الحل:

لدينا $\quad u = x^3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2$

ومنه $\qquad y' = \frac{d(\csc u)}{dx} = -\frac{du}{dx}\cot u \csc u = -3x^2 \cot x^3 \csc x^3$

مثال ٢٤: احسب مشتقة الدالة $y = \csc(2x^5 - 3)$

الحل:

لدينا $\quad u = 2x^5 - 3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 10x^4$

$$y' = \frac{d(\csc u)}{dx} = -\frac{du}{dx}\cot u \csc u = -10x^4 \cot(2x^5 - 3)\csc(2x^5 - 3)$$

تمرين: احسب المشتقة الأولى للدوال التالية:

1) $y=\sin^5 3x^2$ 2) $y=x\tan\frac{1}{x}$ 3) $y=\sec(2x+1)^{\frac{5}{2}}$ 4) $y=\frac{1}{x^2\sin^3 x}$

5) $y=(x^4-\cot x)^3$ 6) $y=\sqrt{1+\cos^2 x}$ 7) $y=(\sin x-\cos x)^2$ 8) $y=\sqrt{\csc x^3}$

الحل:

1) $y=\sin^5 3x^2$

$$y'=5\sin^4 3x^2\ (6x)\cos 3x^2=30x\sin^4 3x^2\ \cos 3x^2$$

2) $y=x\tan\frac{1}{x}$

$$y'=\tan\frac{1}{x}-x\frac{1}{x^2}\sec^2\frac{1}{x}=\tan\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sec^2\frac{1}{x}$$

3) $y=\sec(2x+1)^{\frac{5}{2}}$

$$y'=\frac{5}{2}(2x+1)^{\frac{3}{2}}(2)\tan(2x+1)^{\frac{5}{2}}\sec(2x+1)^{\frac{5}{2}}$$

$$=5(2x+1)^{\frac{3}{2}}\tan(2x+1)^{\frac{5}{2}}\sec(2x+1)^{\frac{5}{2}}$$

4) $y=\frac{1}{x^2\sin^3 x}$

$$y'=-\frac{2x\sin^3 x+3x^2\sin^2 x\cos x}{\left(x^2\sin^3 x\right)^2}=-\frac{2\sin x+3x\cos x}{x^3\sin^4 x}$$

5) $y=(x^4-\cot x)^3$

$$y'=3\left(x^4-\cot x\right)^2\left(4x^3+\csc^2 x\right)$$

6) $y=\sqrt{1+\cos^2 x}\Rightarrow y=(1+\cos^2 x)^{1/2}$

$$y'=\frac{1}{2}(1+\cos^2 x)^{-\frac{1}{2}}(-2\cos x\sin x)=-(1+\cos^2 x)^{-\frac{1}{2}}\cos x\sin x$$

$$=\frac{-\cos x\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}.$$

$$7)\ y=(\sin x-\cos x)^2$$
$$y'=2(\sin x-\cos x)(\cos x+\sin x)$$
$$=2(\sin^2 x-\cos^2 x)=2(1-2\cos^2 x)$$

$$8)\ y=\sqrt{\csc x^3}=(\csc x^3)^{\frac{1}{2}}=\csc^{\frac{1}{2}} x^3$$
$$y'=\frac{1}{2}(\csc x^3)^{-\frac{1}{2}}(3x^2)(-\cot x^3\csc x^3)$$
$$=-\frac{3}{2}x^2\csc^{-\frac{1}{2}} x^3\cot x^3\csc x^3=-\frac{3}{2}x^2\csc^{\frac{1}{2}} x^3\cot x^3$$

تمرين تدريبي : احسب مشتقة الدوال التالية:

$1)\ f(x)=\sin^3 x$

$2)\ f(x)=\tan 4x^2$

$3)\ f(x)=\sec 2x^3.$

$4)\ y=\sqrt[3]{x^2-2x-3}\csc x$

$5)\ y=\sin x\cot\left(\frac{1}{x}-x^2\right)$

$6)\ f(x)=\cos^2(3\sqrt{x})$

$7)\ y=(x^3-7x+4)\sin(x^2-1)$

$8)\ y=\tan\left[(2x-1)^{\frac{-1}{3}}\right]$

$9)\ y=\cos^2 x\tan(\frac{1}{x}-x^3)$

$10)\ f(x)=2\sec^2 x^7$

$11)\ y=\sqrt[3]{2+\sin x^3}$

$12)\ f(x)=\cos^3\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$13)\ y=\sqrt[3]{2+\tan(x^2)}$

$14)\ \sqrt[3]{x^2-2x+7}\sec x$

$15)\ f(x)=\left[x+\csc(x^3+3)\right]^{-3}$

$16)\ f(x)=3\cot^4 x$

$17)\ f(x)=\csc 4x^2+2\sin x^2.$

$18)\ f(x)=\tan 4x^2$

٥. اشتقاق الدوال الأسية واللوغارتمية

١,٥. قوانين اشتقاق الدوال الأسية

القانون ١: إذا كانت لدينا الدالة $y = ba^u$ حيث u دالة قابلة للاشتقاق في x فإن

$$\frac{dy}{dt} = ba^u \ln a\, u'$$

مثال ٢٥: اشتق الدالة المعرفة كما يلي: $y = 8\ 2^{\left(3x^2+4x+5\right)}$

الحل:

$$y' = 8\ 2^{3x^2+4x+5} \ln 2\left(6x+4\right) = \left(48x+32\right)\ln 2\ 2^{3x^2+4x+5}$$

القانون ٢: اشتقاق الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعي $e \cong 2{,}718$

إذا كانت لدينا الدالة $y = b\ e^u$ حيث u دالة قابلة للاشتقاق في x فإن

$$y' = \frac{dy}{dt} = b\, e^u\, u'$$

مثال ٢٦: احسب المشتقة الأولى للدالة التالية: $y = 8\ e^{2x+1}$

الحل:

المشتقة الأولى للدالة السابقة يعطى كما يلي: $y' = 8 \times 2\, e^{2x+1} = 16e^{2x+1}$

مثال ٢٧: إذا كانت $y = -5\ e^{\sin x}$

فإن $y' = -5\ \cos x\, e^{\sin x}$

٢,٥. قوانين اشتقاق الدوال اللوغارتمية

القانون ١: إذا كانت لدينا الدالة $y = b\log_a u$ حيث $a > 0, a \neq 1$ ولتكن u دالة قابلة للاشتقاق في x

فإن المشتقة الأولى تعطى كما يلي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = b\frac{u'}{u}\log_a e$$

مثال٢٨: احسب المشتقة الأولى للدالة التالية: $y = 3\log\left(6x^5\right)$

الحل:

المشتقة الأولى للدالة السابقة يعطى كما يلي : $y' = \dfrac{3\left(30x^4\right)\log e}{6x^5} = \dfrac{15x^4}{x^5}\log e = \dfrac{15}{x}\log e.$

القانون ٢: إذا كانت لدينا الدالة $y=\ln u$ حيث u دالة قابلة للاشتقاق في x فإن

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{u'}{u}$$

مثال ٢٩: اشتق الدالة التالية: $y=e^{-x}\ln x^2$

الحل:

$$y'=-e^{-x}\ln x^2+\frac{2x}{x^2}e^{-x}=\left(\frac{2}{x}-\ln x^2\right)e^{-x}$$

تمرين:احسب المشتقة الأولى للدوال التالية:

1) $y=5^{3x^2}$ 2) $y=e^{-2x}\sin 3x$ 3) $y=\ln(x+3)^2$ 4) $y=e^{-x}\ln x$

5) $y=\ln^2(x+3)$ 6) $y=x^2 3^x$ .7) $y=\log_3(3x^2-5)$ 8) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

الحل:

1) $y=5^{3x^2}$

$$y'=5^{3x^2}\ln 5.\frac{d}{dx}(3x^2)=6x5^{3x^2}\ln 5$$

2) $y=e^{-2x}\sin 3x$

$$y'=e^{-2x}\frac{d}{dx}(\sin 3x)+\sin 3x\frac{d}{dx}(e^{-2x})=3e^{-2x}\cos 3x-2e^{-2x}\sin 3x$$

$$=e^{-2x}(3\cos 3x-2\sin 3x)$$

3) $y=\ln(x+3)^2\Rightarrow y=\ln(x+3)^2=2\ln(x+3)$

$$\frac{dy}{dx}=2\frac{1}{x+3}.\frac{d}{dx}(x+3)=\frac{2}{x+3}$$

4) $y=e^{-x}\ln x$

$$y'=e^{-x}\frac{d}{dx}(\ln x)+\ln x\frac{d}{dx}(e^{-x})=\frac{e^{-x}}{x}-e^{-x}\ln x=e^{-x}\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)$$

5) $y=\ln^2(x+3)$

$$\frac{dy}{dx}=2\ln(x+3).\frac{d}{dx}\ln(x+3)=2\ln(x+3).\frac{1}{x+3}\frac{d}{dx}(x+3)=\frac{2\ln(x+3)}{x+3}$$

6) $y = x^2 3^x$

$$y' = x^2 \frac{d}{dx}\left(3^x\right) + 3^x \frac{d}{dx}\left(x^2\right) = x^2 3^x \ln 3 + 2x3^x = x3^x(x\ln 3 + 2)$$

7) $y = \log_3\left(3x^2 - 5\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x^2 - 5}\log_3 e \frac{d}{dx}\left(3x^2 - 5\right) = \frac{6x}{3x^2 - 5}\log_3 e$$

8) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \frac{d}{dx}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}\left(1 + \frac{1}{2}\left(1 + x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}\left(1 + x^2\right)\right)$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}\left(1 + x\left(1 + x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\frac{\sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{x + \sqrt{1 + x^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

تمرين تدريبي : احسب مشتقة الدوال التالية:

1) $y = t^3 \ln\left(e^{5t} - 1\right)$

2) $y = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

3) $y = e^{x^2 - \sin 2x} \tan x$

4) $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x - 3} \csc x$

5) $y = x^2 2^{3\tan x}$

6) $y = x^3 \ln\sqrt{x}$

7) $y = \dfrac{e^{-x} + \cos x}{2e^{-2x} - 3\ln x}$

8) $y = \sec x^3 \ln(x - 3)$

9) $y = \sin x \ln\dfrac{2x - 3}{\sqrt{x^3 + 1}}$

10) $y = e^{3\ln\cos 2x}$

11) $y = e^{\cos 3x} \cot\left(\dfrac{1}{x} - x^2\right)$

12) $y = e^{\sin 2x} \cos(-x^2)$

13) $y = \dfrac{\tan x - x^2}{3^{\csc x}}$

14) $y = \sqrt{2 - \ln x^3}$

15) $y = x(\ln x)^2$

16) $y = \dfrac{3e^{2x} - 1}{\ln(x^2 + 5)}$

17) $y = \ln\left(3x^4 - 5x^2 + 7x - 1\right)$

18) $y = \dfrac{\log x^2}{x}$

19) $y = x\ln\dfrac{e^x\sqrt{2x - 3}}{x^2}$

20) $y = e^{1 + \tan 2x}$

21) $y = x^3 \log_2\left(2x^3 - 1\right)$

22) $y = x^4 \ln\left(x^3 - 1\right)$

23) $y = \dfrac{3\cot e^{2x}}{2\ln(x^2 + 3)}$

24) $y = \left(x^2 + 5x + 1\right)\log_5(x + 3)$

٦ . الاشتقاق الضمني

تعرف الدالة في بعض الحالات بمعادلة من الشكل $f(x,y)=0$ تحتوي المتغير x وقيمة الدالة y

مثال٣٠:

$$xy=1 \qquad (1)$$

إحدى الطرق لحساب المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$ هي كتابة المعادلة (1) من الشكل:

$$y=\frac{1}{x} \qquad (2)$$

ومنه يمكن حساب المشتقة كما يلي:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\right]=-\frac{1}{x^2}$$

كما أنه يوجد إمكانية أخرى وذلك باشتقاق طرفي المعادلة (1) قبل كتابة y بدلالة دالة في المتغير x ، باعتبارها دالة قابلة للاشتقاق(وإن كان ليس دائما هو الحال)، ومنه فإن:

$$\frac{d}{dx}(xy)=\frac{d}{dx}(1)\Rightarrow x\frac{d}{dx}(y)+y\frac{d}{dx}(x)=0\Rightarrow x\frac{dy}{dx}+y=0$$

ثم نستخرج $\frac{dy}{dx}$ بدلالة x,y

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$

نعوض (2) في العبارة الأخيرة فنحصل على:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}$$

- الطريقة الثانية لحساب المشتقة تسمى بالاشتقاق الضمني وتستعمل في حساب مشتقة دالة معرفة بشكل ضمني بمعادلة من الشكل: $f(x,y)=0$

دون حل هذه المعادلة وذلك باشتقاق طرفي هذه المعادلة ثم نستخرج قيمة المشتقة y' بدلالة x, y

- ويستعمل الاشتقاق الضمني خاصة عندما يصعب أو لا يمكن كتابة y بدلالة المتغير x وعندها نكتفي في حساب المشتقة y' بكتابة عبارتها بدلالة x, y

قاعدة

لتكن المعادلة $f(x,y)=0$ تحتوي المتغير x وقيمة الدالة y فإن اشتقاق y^n بالنسبة لـ x يعطى بما يلي:

$$\frac{d(y^n)}{dx}=ny^{n-1}\frac{dy}{dx}=ny^{n-1}y'$$

إننا اشتققنا y ضمنيا بالنسبة لـ x و ذلك باعتبار y دالة في x معرفة بشكل ضمني بالمعادلة المعطاة

$$f(x,y)=0$$

مثال٣١: أوجد $\frac{dy}{dx}$ في ما يلي :

$$xy^3-3x^2=xy+5 \qquad (1)$$

الحل:

نشتق طرفي المعادلة (1) فنحصل على:

$$\begin{aligned}
&y^3+3xy^2y'-6x=y+xy'\\
&\Rightarrow 3xy^2y'-xy'=y-y^3+6x\\
&\Rightarrow y'\left[x(3y^2-1)\right]=y-y^3+6x\\
&\Rightarrow y'=\frac{y-y^3+6x}{x(3y^2-1)}
\end{aligned}$$

مثال٣٢: ليكن $x^2-2xy+y^2=0$ أوجد المشتقة الأولى y'

الحل:

نشتق طرفي المعادلة المعطاة فنحصل على:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(x^2-2xy+y^2)=\frac{d}{dx}(0)\\
&\Rightarrow 2x-2y-2xy'+2yy'=0\\
&\Rightarrow y'(2y-2x)=2y-2x \Rightarrow y'=\frac{2y-2x}{2y-2x}=1
\end{aligned}$$

مثال٣٣: استخدم الاشتقاق الضمني لحساب المشتقة الأولى فيما يلي:

$$1)\ \ 5y^2+\sin y=x^2,\quad 2)\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=1,\quad 3)x^2=\frac{x+y}{x-y}\quad 4)x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}-y=1$$

الحل

1) نشتق طرفي المعادلة بالنسبة لـ x فنحصل على

$$\frac{d}{dx}\left[5y^2+\sin y\right]=\frac{d}{dx}\left[x^2\right]\Rightarrow 10yy'+y'\cos y=2x$$

ومنه فإن $(10y+\cos y)y'=2x$

وبالتالي فإنه يمكن كتابة المشتقة الأولى y' بدلالة x,y

$$y'=\frac{2x}{10y+\cos y}$$

وباتباع نفس الخطوات السابقة يكون لدينا ما يلي:

$$2)\ \ \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right]=\frac{d}{dx}(1)\ \Rightarrow -y^{-2}y'-x^{-2}=0$$

$$\Rightarrow y'=-\frac{x^{-2}}{y^{-2}}=\frac{y^2}{x^2}$$

$$3)\ \frac{d}{dx}\left[x^2\right]=\frac{d}{dx}\left[\frac{x+y}{x-y}\right]\Rightarrow 2x=\frac{(1+y')(x-y)-(1-y')(x+y)}{(x-y)^2}$$

$$\Rightarrow 2x(x-y)^2=(1+y')(x-y)-(1-y')(x+y)$$

$$\Rightarrow 2x(x-y)^2=y'(x-y+x+y)+x-y-x-y$$

$$\Rightarrow 2x(x-y)^2=y'(2x)-2y$$

$$\Rightarrow y'=\frac{2x(x-y)^2+2y}{2x}\Rightarrow y'=(x-y)^2+\frac{y}{x}$$

$$(4)\ x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} - y = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' - y' = 0$$

$$\Rightarrow y'\left(\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} + 1\right) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow y' = \frac{2}{3}\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{\left(\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} + 1\right)}$$

يمكن استخدام الاشتقاق الضمني لحساب المشتقة لدوال لم نتطرق إليها من قبل أو يصعب معرفة قانون المشتقة لها كما هو موضح في المثال التالي:

مثال ٣٤: أوجد y' إذا كان $y = x^x$

الحل:

لدينا $y = x^x \Rightarrow \ln y = \ln x^x \Rightarrow \ln y = x\ln x$

نشتق الطرفين فنحصل على:

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1 \Rightarrow y' = y(\ln x + 1)$$

نعوض قيمة $y = x^x$ إذن يصبح لدينا $y = x^x(\ln x + 1)$

مثال ٣٥: اكتب معادلتي المماس والناظم (العمودي على المماس) للمنحنى $x^2 + y^2 = 25$ عند النقطة $(3,4)$

الحل: ميل المماس

نشتق طرفي المعادلة بالنسبة للمتغير x فيكون لدينا

$$x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow 2yy' = -2x \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,4)} = \frac{-2(3)}{2(4)} = -\frac{3}{4}$$

معادلة المماس هي

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3) = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4} + 4 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$$

ميل العمودي على المماس $m_1 = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$

معادلة العمودي على المماس

$$y - y_0 = m_1(x - x_0)$$

$$y - 4 = \frac{4}{3}(x - 3) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - 4 + 4 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x$$

تمارين

تمرين ١ : احسب ضمنيا المشتقة الأولى للدوال التالية

1) $xy + e^{xy} - y^3 \sin x = y^3 + 9x$

2) $3x^2y^2 + 4xy - 2y = 0$

3) $x^3y^2 - 5x^2y + x = 13$

4) $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 1$

5) $(x^2 + 3y^2)^3 = x$

6) $xy^{2/3} + yx^{2/3} = x^2$

7) $x^2 = \frac{\cot y}{1 + \csc y}$

8) $\tan^3(xy^2 + y) = x$

9) $3x^2 - 4y^2 = 7$

10) $y^3 \sin x - x^2 = y^3 e^{2x}$

11) $y + \sin y = x$

12) $x \cos y = y$

تمرين ٢ : احسب مبل المماس لمنحنى الدوال التالية عند النقاط المعطاة:

1) $x^2y - 5xy^2 + 6 = 0;\ (3,1)$

2) $x^{2/3} - y^{2/3} - y = 1;\ (1,-1)$

3) $y^2 - x + 1 = 0;\ (10,3)$

4) $\frac{1-y}{1+y} = x;\ (0,1)$

تمرين ٣ :

اكتب معادلتي المماس والناظم (العمودي على المماس) للمنحنى المعطى بالمعادلات التالية عند النقطة المحددة

1) $x^2y - 3y^2 + 10 = 0\ ;\ (-1,2)$ 2) $2xy + y^2 - 3 = 0\ ;\ (1,1)$ 3) $y^2 - 3x^2 + 2x - 3 = 0\ ;\ (1,2)$

٧. المشتقات من الرتبة العليا

تعريف:

تعرف المشتقة من الرتبة n للدالة $f(x)$ على أنها المشتقة الأولى للمشتقة $(n-1)$ للدالة $f(x)$ بشرط أن تكون الدالة قابلة للاشتقاق n من المرات

فمثلا المشتقة السابعة هي المشتقة الأولى للمشتقة السادسة ولذلك لإيجاد المشتقة من الرتبة n نبدأ بالدالة فنحسب المشتقة الأولى ثم الثانية ثم الثالثة....ثم المشتقة من الرتبة $n-1$ ثم المشتقة من الرتبة n

لتكن $y=f(x)$ حيث y دالة في x و لنفرض أن f قابلة لاشتقاق n من المرات على المجال $I\subset\Re$.

فيكون لدينا التعريفات الآتية:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d\big(f(x)\big)}{dx}=f'(x)$$ (المشتقة الأولى لـ y بالنسبة لـ x)

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\big(f'(x)\big)}{dx}=f''(x)$$ (المشتقة الثانية لـ y بالنسبة لـ x)

$$y'''=\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d\big(f''(x)\big)}{dx}=f'''(x)$$ (المشتقة الثالثة لـ y بالنسبة لـ x)

$$y^{(4)}=\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d\big(f'''(x)\big)}{dx}=f^{(4)}(x)$$ (للمشتقة الرابعة لـ y بالنسبة لـ x)

. . . .

. . . .

. . . .

$$y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d\big(f^{(n-1)}(x)\big)}{dx}=f^{(n)}(x)$$ (للمشتقة n لـ y بالنسبة لـ x)

مثال٣٦ : أوجد المشتقة الثانية للدالة $y=\sin x$

الحل:

$$y'=\frac{d\sin x}{dx}=\cos x$$

$$y''=\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$$

مثال ٣٧ : أوجد $\frac{d^3y}{dx}$ (المشتقة الثالثة) إذا كانت $y=6x^5$

الحل: $y'=\frac{d}{dx}\left(6x^5\right)=5\times 6x^4=30x^4$

$$y''=\frac{d}{dx}\left(30x^4\right)=4\times 30x^3=120x^3$$

$$y'''=\frac{d}{dx}\left(120x^3\right)=3\times 120x^2=360x^2$$

قاعدة: إذا كان y كثيرة حدود من الدرجة n فإن المشتقة من الدرجة $n+1$ تساوي الصفر.

مثال ٣٨ : أوجد $y^{(6)}$ للدالة $y=2x^5+3x^3+5x-1$

الحل:

بما أن y كثيرة حدود من الدرجة الخامسة إذن $y^{(6)}=0$

مثال ٣٩ : إذا كانت $y=e^{-x}\ln x$ فأوجد y''

الحل:

$$y'=e^{-x}\frac{d}{dx}(\ln x)+\ln x\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right)=\frac{e^{-x}}{x}-e^{-x}\ln x=\frac{e^{-x}}{x}-y$$

$$y''=\frac{-xe^{-x}-e^{-x}}{x^2}-y'=\frac{-xe^{-x}-e^{-x}}{x^2}-\frac{e^{-x}}{x}+e^{-x}\ln x=-e^{-x}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\ln x\right)$$

مثال٤٠: إذا كانت $y=e^{-x}\ln x^2$ فأوجد y''

الحل: لدينا $y=e^{-x}\ln x^2=2e^{-x}\ln x$

ومنه ومن المثال السابق فإن $y''=-2e^{-x}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\ln x\right)$

مثال ٤١: إذا كانت $y=e^{-2x}\sin 3x$ فأوجد y''

الحل:

$$y'=e^{-2x}\frac{d}{dx}(\sin 3x)+\sin 3x\frac{d}{dx}\left(e^{-2x}\right)=3e^{-2x}\cos 3x-2e^{-2x}\sin 3x=3e^{-2x}\cos 3x-2y$$

$$\begin{aligned}y''&=3e^{-2x}\frac{d}{dx}(\cos 3x)+3\cos 3x\frac{d}{dx}\left(e^{-2x}\right)-2y'\\&=-9e^{-2x}\sin 3x-6e^{-2x}\cos 3x-2\left(3e^{-2x}\cos 3x-2e^{-2x}\sin 3x\right)\\&=-e^{-2x}\left(12\cos 3x+5\sin 3x\right)\end{aligned}$$

تمرين: جسم يتحرك على خط مستقيم بحيث أن المسافة (s) بالقدم feet عند الزمن (t) بالثانية تعطى بالمعادلة $s = t^3 - 2t$

١) أوجد السرعة الآنية عند اللحظة t تساوي ٤ ثواني

٢) أوجد التسارع الآني عند اللحظة t تساوي ٤ ثواني

٣) أوجد الزمن اللازم عندما يكون التسارع يساوي $2\ fet/\sec^2$

الحل

١) السرعة الآنية هي معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن

إذن $\frac{ds}{dt} = 3t^2 - 2$ هي السرعة بعد الزمن (t) ثانية أو عند الزمن (t) من بداية الحركة

السرعة بعد 4 ثواني $\frac{ds(4)}{dt} = \left(3t^2 - 2\right)\Big|_{t=4} = 3\left(4^2\right) - 2 = 46\ ft/\sec$

٢) العجلة (التسارع) هي معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن

إذن $\frac{d^2s}{dt^2} = 6t$ العجلة بعد الزمن (t) ثانية أو عند الزمن (t) من بداية الحركة

التسارع بعد 4 ثواني

$$\frac{d^2s}{dt^2}\Big|_{t=4} = 6t\Big|_{t=4} = 6 \times 4 = 24\ ft/\sec^2$$

٣) الزمن اللازم عندما يكون التسارع يساوي $2\ fet/\sec^2$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 6t = 2 \Rightarrow t = \frac{1}{3}\sec$$

تمارين :

تمرين ١: أوجد المشتقة المشار إليها للدوال التالية:

1) $y = 3x^2 - 2x^3;\quad y''$

2) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\ ;\ y''$

3) $y = 7 + 6x^2 - 4x^4;\ y'''$

4) $y = 8x^3 - 2x^4;\ y'''$

5) $y = x(x-1)^3;\ y''$

6) $y = e^{-2x}(\cos 3x - \sin 2x);\ y''$

7) $y = 3x^5 - 10x^3 + 15x\ ;\ \frac{d^6y}{dx^6}$

8) $y = \frac{x}{x-4}\ ;\ \frac{d^2y}{dx^2}$

9) $y = \frac{2x}{x^2+1}\ ;\ y''$

10) $y = \frac{1}{x-2} + \frac{x}{4};\ \frac{d^3y}{dx^3}$

11) $y = \sqrt{\frac{1}{x^2-1}}\ ;\ y''$

12) $y = (1+x^2)\ln x\ ;\ y''$

تمرين ٢: احسب المشتقة الثانية للدوال التالية عند النقاط المشار إليها:

1) $f(x) = 8x^{10} + 2x^8 - 4x^5 + 1\ ;\ x = 1$

2) $f(x) = \sqrt{4 - x + 2x^4}\ ;\ x = 1$

3) $f(x) = \frac{4x^2}{3x-7}\ ;\ x = 2$

4) $f(x) = 2x^2\sqrt{2x^4+3}\ ;\ x = -1$

تمرين ٣: تعطى معادلة المسافة $s(km)$ بدلالة الزمن $t(h)$ أوجد السرعة والتسارع عند الزمن المشار إليه

1) $s = (2t^2 - 3)^4\ ;\ t = 2h$

2) $s = \sqrt{3.4 - t^4}\ ;\ t = 1h$

3) $s = t^2\sqrt{1+t^2}\ ;\ t = 1h$

4) $s = \frac{t}{2t^2-3}\ ;\ t = 4h$

5) $s = (2t+7)\sqrt{t^3-1}\ ;\ t = 2h$

6) $s = 1.8t^3 - 2.9t^2 - 1\ ;\ t = 3h$

الفصل الأول :التكامل

١. الدوال الأصلية والتكامل

تعريف ١:

يقال إن $F(x)$ دالة أصلية (تكامل) لدالة $f(x)$ إذا تحققت العلاقة التالية :

$\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$ أي أن $dF(x)=f(x)dx$ بمعني أن تفاضل $F(x)$ هو $f(x)$

ومن التعريف السابق فإن الدالة $F(x)+c$ حيث c عدد ثابت اختياري، يمكن أن تكون دوال أصلية(تكامل) للدالة $f(x)$. والسبب يرجع لكون مشتقة العدد الثابت يساوي الصفر

نستنتج أنه إذا وجدت لدالة ما ، دالة أصلية ، فإنه يوجد عدد غير منته من الدوال الأصلية لها تختلف عن بعضها بالعدد الثابت ويكون لدينا التعريف التالي

تعريف ٢:

تكامل دالة $f(x)$ هو دالة $F(x)+c$ ، حيث c عدد ثابت و :

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$$

ويرمز لتكامل الدالة $f(x)$ بالرمز

$$\int f(x)dx=F(x)+c$$

ويقرأ بالتكامل غير المحدود لـ $f(x)dx$ ويسمى العدد الثابت c بثابت التكامل.

مثال ١:

لدينا $d(x^5)=5x^4dx$ إذن $\int 5x^4dx=x^5+c$

و $d(e^{3x})=3e^{3x}dx$ إذن $\int 3e^{3x}dx=e^{3x}+c$

و $d(\cos x^2)=-2x\sin x^2dx$ إذن $\int -2x\sin x^2dx=\cos x^2+c$

يعني أن التكامل هو العملية العكسية (للاشتقاق) للتفاضل

٢. قوانين التكامل غير المحدود للدوال الجبرية

القاعدة ١: تكامل العدد الثابت

ليكن a عدداً ثابتاً فإن

$\int a dx = ax + c$ حيث c ثابت التكامل

مثال ٢:

$$1)\ \int 5dx = 5x + c$$

$$2)\ \int -7dx = -7x + c$$

$$3)\ \int -\frac{5}{3}dx = -\frac{5}{3}x + c$$

القاعدة ٢:

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ باستثناء $n = -1$ حيث c ثابت التكامل

مثال ٣:

$$1)\ \int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{1}{4}x^4 + c$$

$$2)\ \int \frac{1}{x^4} dx = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + c = \frac{x^{-3}}{-3} + c = -\frac{1}{3x^3} + c$$

$$3)\ \int x^{\frac{2}{5}} dx = \frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} + c = \frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + c = \frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}} + c$$

القاعدة ٣:

يمكن إخراج عامل ثابت من تحت إشارة التكامل أو بالعكس دون أن تتغير النتيجة أي أن:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)\,dx$$

وذلك لأن اشتقاق الطرفين يعطي $af(x) = af(x)$

مثال ٤:

$$1)\ \int 7x^4 dx = 7\int x^4 dx = 7\frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{7}{5}x^5 + c$$

$$2)\int \frac{-2}{x^3}dx = -2\int \frac{1}{x^3}dx = -2\int x^{-3}dx = -2\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c = -2\frac{x^{-2}}{-2} + c = \frac{1}{x^2} + c$$

$$3)\int \sqrt{5}x^{-\frac{2}{3}}dx = \sqrt{5}\int x^{-\frac{2}{3}}dx = 3\sqrt{5}x^{\frac{1}{3}} + c$$

القاعدة٤:

تكامل المجموع الجبري لعدة دوال يساوي المجموع الجبري لتكاملا ت هذه الدوال أي أن :

إذا كانت $f(x), g(x)$ دوال قابلة للتكامل في x .فإن

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

وبصفة عامة إذا كانت $f_1(x), f_2(x), f_3(x),...., f_n(x)$ دوالاً قابلة للتكامل في x .فإن:

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x) \pm .... \pm f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \int f_3(x)dx \pm .... \pm \int f_n(x)dx$$

مثال ٥: احسب التكاملات التالية:

$$1)\int (x^2 - 2x + 5)dx, \qquad 2)\int \left(\sqrt{x} - \frac{2}{x^3}\right)dx, \qquad 3)\int \left(x^5 - \sqrt{2}x - \frac{3}{x^2}\right)dx.$$

الحل :

$$1)\int (x^2 - 2x + 5)dx = \int x^2 dx - \int 2x dx + \int 5 dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 5x + c = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5x + c$$

$$2)\int \left(\sqrt{x} - \frac{2}{x^3}\right)dx = \int \sqrt{x}dx - 2\int \frac{1}{x^3}dx$$

$$= \int x^{\frac{1}{2}}dx - 2\int x^{-3}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{3}{2}} - 2\frac{x^{-3+1}}{-2} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x^{-2} + c$$

$$3)\int \left(x^5 - \sqrt{2}x - \frac{3}{x^2}\right)dx = \int x^5 dx - \sqrt{2}\int x\, dx - 3\int x^{-2}dx$$

$$= \frac{1}{6}x^6 - \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + 3x^{-1} + c$$

القاعدة٥:

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق في x و n عدد يخالف -1 فتكون لدينا القاعدة التالية:

$\int u'u^n\, dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ باستثناء $n = -1$ حيث c ثابت التكامل

مثال ٦ : احسب التكاملات التالية :

$$1)\int 6x^2\left(2x^3-6\right)^4 dx,\qquad 2)\int x^3\left(x^4-2\right)^5 dx,\qquad 3)\int \left(x^2+1\right)\sqrt{x^3+3x+1}\, dx$$

الحل:

$$1)\int 6x^2\left(2x^3-6\right)^4 dx:$$

لدينا $u=2x^3-6 \Rightarrow u'=6x^2$ وبالتالي فإن:

$$\int 6x^2\left(2x^3-6\right)^4 dx=\int u'u^4\, dx=\frac{u^5}{5}+c=\frac{\left(2x^3-6\right)^5}{5}+c$$

$$2)\int x^3\left(x^4-2\right)^5 dx:$$

لدينا $u=x^4-2 \Rightarrow u'=4x^3$ ومنه فإن:

$$\int x^3\left(x^4-2\right)^5 dx=\frac{1}{4}\int 4x^3\left(x^4-2\right)^5 dx=\frac{1}{4}\frac{u^6}{6}+c=\frac{1}{24}\left(x^4-2\right)^6+c$$

$$3)\int \left(x^2+1\right)\sqrt{x^3+3x+1}\, dx=\int \left(x^2+1\right)\left(x^3+3x+1\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

لدينا $u=x^3+3x+1 \Rightarrow u'=3x^2+3=3\left(x^2+1\right)$ وبالتالي فإن:

$$\int \left(x^2+1\right)\sqrt{x^3+3x+1}\, dx=\frac{1}{3}\int 3\left(x^2+1\right)\left(x^3+3x+1\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$=\frac{1}{3}\int u'u^{\frac{1}{2}}\, dx=\frac{1}{3}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{9}\left(x^3+3x+1\right)^{\frac{3}{2}}+c$$

القاعدة ٦ : إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x فيكون لدينا القانون التالي :

$$\int \frac{u'}{u}dx=\ln|u|+c$$

مثال ٧ : احسب التكامل التالي :

$$1)\int \frac{2x^3+1}{x^4+2x+1}dx,\qquad 2)\int \frac{xe^{2x^2}}{e^{2x^2}+5}dx,\qquad 3)\int \frac{\sec^2 x}{5-\tan x}dx,\qquad 4)\int \frac{x+\cos 2x}{x^2+\sin 2x}\, dx$$

الحل :

$$1)\int \frac{2x^3+1}{x^4+2x+1}dx:$$

لدينا $u=x^4+2x+1 \Rightarrow u'=4x^3+2=2(2x^3+1)$ وبالتالي فإن

$$\int \frac{2x^3+1}{x^4+2x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(2x^3+1)}{x^4+2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{u'}{u}dx = \frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln\left|x^4+2x+1\right| + c$$

$$2)\int \frac{xe^{2x^2}}{e^{2x^2}+5}dx:$$

$$u = e^{2x^2}+5 \Rightarrow u' = 4xe^{2x^2}$$

$$\int \frac{xe^{2x^2}}{e^{2x^2}+5}dx = \frac{1}{4}\int \frac{u'}{u}dx = \frac{1}{4}\ln|u| + c = \frac{1}{4}\ln\left|e^{2x^2}+5\right| + c$$

$$3)\int \frac{\sec^2 x}{5-\tan x}dx:$$

$$u = 5-\tan x \Rightarrow u' = -\sec^2 x$$

$$\int \frac{\sec^2 x}{5-\tan x}dx = -\int \frac{-\sec^2 x}{5-\tan x}dx = -\int \frac{u'}{u}dx = -\ln|u| + c = -\ln|5-\tan x| + c$$

$$4)\int \frac{x+\cos 2x}{x^2+\sin 2x}\,dx:$$

$$u = x^2+\sin 2x \Rightarrow u' = 2x+2\cos 2x = 2(x+\cos 2x)$$

$$\int \frac{x+\cos 2x}{x^2+\sin 2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+\cos 2x)}{x^2+\sin 2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{u'}{u}dx = \frac{1}{2}\ln|u| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+\sin 2x\right| + c$$

تمرين تدريبي: احسب التكاملات التالية:

$1)\int (2\sqrt{x}-3x^4)dx$

$2)\int \left(\frac{3}{x^4}-4x^2+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$

$3)\int \sqrt{x}(x-3)^2\,dx$

$4)\int \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)dx$

$5)\int 3(3x^2-1)^3 x\,dx$

$6)\int (x^4+2x)^2(4x^3+2)dx$

$7)\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

$8)\int 5(5x^7+2)^2 x^6\,dx$

$9)\int \sqrt{1-4x}\,dx$

$10)\int \sqrt[3]{5+x^3}\,(x^2)dx$

$11)\int \frac{(1+3x)dx}{\sqrt{2x+3x^2}}$

$12)\int (3x-x^3)^5(1-x^2)dx$

$13)\int \frac{t^3-4t+3\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$

$14)\int \frac{\sec x\tan x}{3+2\sec x}dx$

$15)\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$

٣. قواعد تكامل الدوال المثلثية

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x بتطبيق القانون الأساسي لحساب التكامل للقوانين الأساسية للتفاضل يكون لدينا القوانين التالية:

$$1)\ \int u'\cos u\,dx = \sin u + c \qquad 2)\ \int u'\sin u\,dx = -\cos u + c$$

$$3)\ \int u'\sec^2 u\,dx = \tan u + c \qquad 4)\ \int u'\csc^2 u\,dx = -\cot u + c$$

$$5)\ \int u'\sec u\tan u\,dx = \sec u + c \qquad 6)\ \int u'\csc u\cot u\,dx = -\csc u + c$$

$$7)\ \int u'\tan u\,dx = \ln\left|\sec u\right| + c \qquad 8)\ \int u'\cot u\,dx = -\ln\left|\csc u\right| + c$$

مثال ٨: احسب التكاملات التالية:

$$1)\int \sin 4x\,dx, \quad 2)\int \cos 2x\,dx, \quad 3)\int x\tan\left(2x^2+1\right)dx, \quad 4)\int \cot\left(7-\frac{x}{2}\right)dx.$$

الحل:

$$1)\int \sin 4x\,dx = \frac{1}{4}\int 4\sin 4x\,dx = -\frac{1}{4}\cos 4x + c$$

$$2)\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int 2\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x + c$$

$$3)\int x\tan\left(2x^2+1\right)dx = \frac{1}{4}\int 4x\tan\left(2x^2+1\right)dx = \frac{1}{4}\ln\left|\sec\left(2x^2+1\right)\right| + c$$

$$4)\int \cot\left(7-\frac{x}{2}\right)dx = -2\int -\frac{1}{2}\cot\left(7-\frac{x}{2}\right)dx = 2\ln\left|\csc\left(7-\frac{x}{2}\right)\right| + c$$

مثال ٩: احسب التكاملات التالية :

$$1)\int \left[\sin(3x+2)+\cos(2-3x)\right]dx, \qquad 2)\int \sec^2(4x)\,dx$$

$$3)\int x^2\csc^2\left(3-\frac{x^3}{3}\right)dx, \qquad 4)\int x^2\csc\left(2x^3\right)\cot\left(2x^3\right)dx$$

الحل:

$$1)\ \int[\sin(3x+2)+\cos(2-3x)]dx=\int\sin(3x+2)dx+\int\cos(2-3x)dx.$$

$$=\frac{1}{3}\int 3\sin(3x+2)dx-\frac{1}{3}\int -3\cos(2-3x)dx.$$

$$=-\frac{1}{3}\cos(3x+2)-\frac{1}{3}\sin(2-3x)+c.$$

$$2)\int \sec^2 4x\,dx=\frac{1}{4}\int 4\sec^2 4x\,dx=\frac{1}{4}\tan 4x+c$$

$$3)\int x^2\csc^2\left(3-\frac{x^3}{3}\right)dx=-\int -x^2\csc^2\left(3-\frac{x^3}{3}\right)dx=\cot\left(3-\frac{x^3}{3}\right)+c$$

$$4)\int x^2\csc 2x^3\cot 2x^3dx=\frac{1}{6}\int 6x^2\csc 2x^3\cot 2x^3dx$$

$$=\frac{1}{6}\left(-\csc 2x^3\right)+c=-\frac{1}{6}\csc 2x^3+c$$

مثال ١٠: احسب التكاملات التالية :

$$1)\int\frac{3\sin(2-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx.,\qquad 2)\int\frac{\cos(3+5\ln 9x).}{7x}dx.$$

$$3)\int\cos 6x\cos(9+4\sin 6x)dx,\qquad 4)\int\frac{\tan(5-\frac{4}{\sqrt{x}})}{\sqrt{x^3}}dx$$

الحل:

$$1)\int\frac{3\sin(2-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx.$$

$$u=2-\sqrt{x}\Rightarrow u'=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\int\frac{3\sin(2-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=3(-2)\int-\frac{1}{2}\frac{\sin(2-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=-6\int u'\sin u\,dx$$

$$=6\cos u+c=6\cos(2-\sqrt{x})+c.$$

$$2)\int\frac{\cos(3+5\ln 9x)}{7x}dx$$

$$u=3+5\ln 9x\Rightarrow u'=\frac{5}{x}$$

$$\int\frac{\cos(3+5\ln 9x)}{7x}dx=\frac{1}{5}\frac{1}{7}\int\frac{5}{x}\cos(3+5\ln 9x)dx$$

$$=\frac{1}{35}\int u'\cos\ u\,dx=\frac{1}{35}\sin u+c=\frac{1}{35}\sin(3+5\ln 9x)+c$$

$$3)\int\cos\,6x\,\cos(9+4\sin 6x)\,dx.$$

$$u=9+4\sin 6x\Rightarrow u'=24\cos 6x$$

$$\int\cos\,6x\,\cos(9+4\sin 6x)\,dx=\frac{1}{24}\int 24\cos\,6x\cos(9+4\sin 6x)\,dx$$

$$=\frac{1}{24}\sin(9+4\sin 6x)+c$$

$$4)\int\frac{\tan\left(5-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x^3}}dx$$

$$u=5-4x^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow u'=\frac{4}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}=2x^{-\frac{3}{2}}=\frac{2}{\sqrt{x^3}}$$

$$\int\frac{\tan\left(5-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x^3}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2}{\sqrt{x^3}}\tan\left(5-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx=\frac{1}{2}\int u'\tan u\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|\sec u|+c=\frac{1}{2}\ln\left|\sec\left(5-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)\right|+c$$

تمرين تدريبي: احسب التكاملات التالية:

1) $\int \cos^3 x \sin x dx$

2) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\sqrt{x} dx$

3) $\int (1+\sin t)^2 \cos t dt$

4) $\int x\cos\left(3x^2\right)dx$

5) $\int x^2 \sec^2 x^3 dx$

6) $\int \cos^3 2t \sin 2t\, dt$

7) $\int \cos 4\theta \sqrt{2-\sin 4\theta} d\theta$

8) $\int \tan^3 5x \sec^2 5x\, dx$

9) $\int \sin 3\theta \sec^2 \cos 3\theta\, d\theta$

10) $\int (1-\cos x)^3 \sin x dx$

11) $\int (1-\sin 2\vartheta)^{\frac{1}{3}} \cos 2\vartheta\, d\vartheta$

12) $\int x^7 \tan(8x^8+6)dx$

13) $\int \sin(7-\cos 3x)\sin 3x dx$

14) $\int te^{t^2} \sec(2+e^{t^2})\tan(2+$

15) $\int \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt$

16) $\int \frac{\sec x \tan x}{(3+2\sec x)^2} dx$

17) $\int \frac{\cos x - \sin x}{(\sin x + \cos x)^3} dx$

18) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{5-\tan x}} dx$

19) $\int \frac{x+\cos 2x}{\sqrt[3]{x^2+\sin 2x}} dx$

20) $\int \frac{3\cot\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt$

21) $\int (2+\tan^2 x)\sec^2 x dx$

٤. قواعد تكامل الدوال الأسية

القاعدة١:

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x و a عدد موجب يخالف1 $(a \neq 1)$ يكون لدينا القانون التالي :

$$\int u' a^{u} dx = \frac{a^{u}}{\ln a} + c$$

مثال ١١: احسب التكامل التالي:

$$1)\int 5^{-3x}\, dx, \qquad 2)\int x\, 6^{2x^{2}}\, dx.$$

الحل:

$$1)\int 5^{-3x}\, dx = -\frac{1}{3}\int -3(5^{-3x})dx = -\frac{1}{3}\frac{5^{-3x}}{\ln 5} + c.$$

$$2)\int x\, 6^{2x^{2}}\, dx = \frac{1}{4}\int 4x\, 6^{2x^{2}}\, dx = \frac{1}{4}\frac{6^{2x^{2}}}{\ln 6} + c$$

القاعدة٢:

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x فيكون لدينا القانون التالي :

$$\int u' e^{u} dx = e^{u} + c.$$

مثال ١٢: احسب التكامل التالي:

$$1)\int (x-1)\, e^{x^{2}-2x+1} dx, \qquad 2)\int (\cos x - 1)\, e^{\sin x - x} dx$$

$$3)\int \frac{e^{x}}{\sqrt{e^{x}+1}} dx, \qquad 4)\int x e^{x^{2}} \left(e^{x^{2}}+1\right)^{7} dx$$

الحل :

$$1)\int (x-1)\, e^{x^{2}-2x+1} dx :$$

لدينا $u = x^{2} - 2x + 1 \Rightarrow u' = 2x - 2 = 2(x-1)$ وبالتالي فإن

$$\int (x-1)\, e^{x^2-2x+1} dx = \frac{1}{2}\int 2(x-1)\, e^{x^2-2x+1} dx = \frac{1}{2}\int u'\, e^u\, dx = \frac{1}{2}e^u + c$$
$$= \frac{1}{2}e^{x^2-2x+1} + c$$
$$2)\int (\cos x - 1)\, e^{\sin x - x} dx:$$

لدينا $u = \sin x - x \Rightarrow u' = \cos x - 1$ وبالتالي فإن

$$\int (\cos x - 1)\, e^{\sin x - x} dx = \int u'\, e^u dx = e^u + c = e^{\sin x - x} + c$$

$$3)\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx = \int e^x \left(e^x+1\right)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$u = e^x + 1 \Rightarrow u' = e^x$

$$\int e^x \left(e^x+1\right)^{-\frac{1}{2}} dx = \int u' u^{-\frac{1}{2}} dx = 2u^{\frac{1}{2}} + c = 2(e^x+1)^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{e^x+1} + c$$

$$4)\int x e^{x^2} \left(e^{x^2}+1\right)^7 dx$$

$u = e^{x^2} + 1 \Rightarrow u' = 2xe^{x^2}$

$$\int x e^{x^2} \left(e^{x^2}+1\right)^7 dx = \frac{1}{2}\int u' u^7 dx = \frac{1}{2}\frac{u^8}{8} + c = \frac{1}{16}u^8 + c = \frac{1}{16}\left(e^{x^2}+1\right)^8 + c$$

تمرين تدريبي: احسب التكاملات التالية:

$1)\int \left(e^{-x} + \cos 2x + 1\right) dx$

$2)\int 2e^{2x+\cos x}(2-\sin x) dx$

$3)\int \sec x \tan x\, e^{5+2\sec x} dx$

$4)\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

$5)\int 3^{2x} e^{5-3^{2x}} dx$

$6)\int e^{1+\cos x} \sin x dx$

$7)\int \frac{e^{5-\frac{2}{x^2}}}{x^3} dx$

$8)\int \frac{e^{3+\ln 2x}}{x} dx$

$9)\int \frac{e^{1+\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}} dx$

$10)\int (e^{-x} + e^x)^2 dx$

$11)\int e^{2x} \sec\left(e^{2x} - 1\right) dx$

$12)\int 5e^{2x} e^{1+e^{2x}} dx$

$13)\int \frac{e^{3-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

$14)\int \frac{11^{13+\csc 2x}}{\sin 2x\, \tan 2x} dx$

$15)\int 2^{1+\cot 5t} \csc^2 5t dt$

٥. التكامل بالتجزئة

مقدمة

لنفرض أننا نريد تكامل

$$\int \sin x e^{-x} dx \quad \text{أو} \quad \int x \sin x \, dx$$

نلاحظ أننا لا نستطيع تطبيق قوانين التكامل مباشرة ففي مثل هذه الحالات نحاول حلها بالتجزئة وهي تتمثل في تحويل التكامل الذي لا يمكن حسابه مباشرة إلى مجموع جبري لدالة وتكامل يمكن حسابه

١,٥. قانون التكامل بالتجزئة

من قانون مشتق جداء دالتين لدينا $d(uv) = vdu + udv$

نكامل الطرفين فنحصل على: $uv = \int vdu + \int udv$

ومنه قانون التكامل بالتجزئة

$$\int udv = uv - \int vdu$$

وبهذه الطريقة نكون قد انتقلنا من حساب التكامل $\int udv$ إلى حساب التكامل $\int vdu$ الذي يكون عادة أقل صعوبة من الأول إذا أحسنا اختيار u, dv

و طريقة استخدام هذه القاعدة موضحة في الأمثلة الآتية:

مثال ١٣: نفرض أننا نريد حساب $\int x \sin x dx$ لكننا لا يمكننا حسابه مباشرة لأنه لا ينطبق عليه أي من قوانين التكامل المباشرة ولذلك سنحسب هذا التكامل بطريقة التكامل بالتجزئة

ولنفرض أن

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

و

$$dv = \sin x \, dx \Rightarrow v = -\cos x$$

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx$$
$$= -x \cos x + \sin x + c$$

مثال ١٤: احسب ما يلي: $\int xe^{x} dx$

الحل :

نلاحظ أننا لا نستطيع أن نحلها مباشرة، إذن فنحاول حسابه باستعمال التكامل بالتجزئة.

لنفرض أن:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

و $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

نطبق القانون: $\int u dv = uv - \int v du$

ومنه $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$

$$= x e^x - e^x + c = e^x (x-1) + c$$

مثال ١٥: أوجد التكامل التالي: $\int \ln x \, dx$

الحل :

نلاحظ أننا لم نأخذ أي قاعدة تكامل تحسب $\int \ln x \, dx$

وبالتالي لنحسب التكامل باستعمال التكامل بالتجزئة

ولنأخذ $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

ولنطبق قانون التكامل بالتجزئة $\int u dv = vu - \int v du$

فيكون لدينا $\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx$

$$= x \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$$

مثال ١٦: احسب التكاملات التالية :

$$1)\int x^2 \ln x \, dx, \quad 2)\int x^3 \sin(2x^2) dx, \quad 3)\int x^5 e^{x^3} dx, \quad 4)\int \sin^2 x dx$$

الحل :

$$1)\int x^2 \ln x \, dx :$$

نفرض أن $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

ولنفرض $dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3}$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزئة فإن

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} + c = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} x^3 + c$$

$$2)\int x^3\sin(2x^2)dx:$$

بفرض أن $u=x^2 \Rightarrow du=2xdx$

وبفرض أن $dv=x\sin(2x^2)dx \Rightarrow v=-\frac{1}{4}\cos(2x^2)$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزئة نحصل على:

$$\int x^3\sin(2x^2)dx=-\frac{1}{4}x^2\cos(2x^2)+\frac{1}{2}\int x\cos(2x^2)dx=-\frac{1}{4}x^2\cos(2x^2)+\frac{1}{8}\sin(2x^2)+c$$

$$3)\int x^5e^{x^3}dx:$$

بفرض أن $u=x^3,\ dv=x^2e^{x^3}dx$ فإن $du=3x^2dx,\ v=\frac{1}{3}e^{x^3}$

إذن: $\int x^5e^{x^3}dx=\frac{1}{3}x^3e^{x^3}-\int x^2e^{x^3}dx=\frac{1}{3}x^3e^{x^3}-\frac{1}{3}e^{x^3}+c=\frac{1}{3}(x^3-1)e^{x^3}+c$

$$4)\int \sin^2 xdx:$$

لدينا $\int \sin^2 xdx=\int \sin x\sin xdx$

و لنفرض ما يلي :

$$u=\sin x \Rightarrow du=\cos xdx$$
$$du=\sin xdx \Rightarrow v=-\cos x$$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزئة $\int udv=vu-\int vdu$ يكون لدينا

$$\int \sin^2 xdx=-\sin x\cos x+\int \cos^2 xdx$$

وبما أن

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \Rightarrow \cos^2 x=1-\sin^2 x$$

إذن

$$\int \sin^2 dx=-\sin x\cos x+\int(1-\sin^2 x)dx$$
$$=-\sin x\cos x+\int dx-\int \sin^2 xdx$$
$$\Rightarrow \int \sin^2 xdx=-\sin x\cos x+x-\int \sin^2 xdx$$
$$\Rightarrow \int \sin^2 xdx+\int \sin^2 xdx=-\sin x\cos x+x+c$$
$$\Rightarrow 2\int \sin^2 xdx=-\sin x\cos x+x+c$$

ومنه فإن $\int \sin^2 x dx = -\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}x + c = -\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + c$

تمرين تدريبي: احسب التكاملات التالية:

1) $\int \cos^2 x dx$

2) $\int \ln(5x+3)dx$

3) $\int xe^{-3x}dx$

4) $\int x\sqrt{x+4}dx$

5) $\int xe^{1-3x}dx$

6) $\int x \sec x \tan x dx$

7) $\int x(x+5)^{-10}dx$

8) $\int x^2 e^x dx$

9) $\int x^2 \cos(5x^2)dx$

٦. التكامل بالكسور الجزئية

تمهيد

تسمى الدالة $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ دالة كسرية إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ كثيرات حدود في x

مثال ١٧: الدوال التالية: $\dfrac{x-1}{x^2+1},\dfrac{-2x+1}{x^2+1},\dfrac{x(x+1)}{x^3+1},\dfrac{1}{x(x^2+1)}$ دوال كسرية

بينما الدوال التالية : $\dfrac{\ln x}{x},\dfrac{\sin x+e^x}{x^2},\dfrac{|x-2|}{x^3}$ ليست بدوال كسرية

إذا كانت درجة $f(x)$ أقل من درجة $g(x)$ فإن $F(x)$ تسمى كسرا حقيقيا

يمكن التعبير عن كل كسر غير حقيقي بمجموع كثيرة حدود وكسر حقيقي مثل

$$\frac{x^3-1}{x^2+1}=x-\frac{x+1}{x^2+1}$$

ويمكن التعبير عن كل كسر حقيقي بمجموع كسور بسيطة (كسور جزئية) من الشكل:

$\dfrac{A}{(x-r)^k}$ أو $\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$ حيث ax^2+bx+c غير قابل للاختزال أي لا يقبل جذورا حقيقية

وسنقتصر دراستنا على الكسور التي يمكن كتابتها بمجموع كسور بسيطة (كسور جزئية)

الحالة الأولى:

إذا كانت $g(x),f(x)$ كثيرات حدود في x ويمكن كتابة $g(x)$ في الصورة

$g(x)=(x+r_1)(x+r_2)(x+r_3).....(x+r_n)$ حيث $r_1\neq r_2\neq r_3\neq ...\neq r_n$

وإذا كانت $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ كسرا حقيقيا. فإنه يمكن وضعه في الصورة

$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A_1}{x+r_1}+\dfrac{A_2}{x+r_2}+\dfrac{A_3}{x+r_3}+.....\dfrac{A_n}{x+r_n}$ حيث $A_1,A_2,...,A_n$ ثوابت يجب تعيينها.

مثال ١٨: أوجد التكامل $\displaystyle\int\frac{2x+1}{x^2-4}dx$

الحل :

نلاحظ أنه لا يمكننا استخدام أحد قوانين التكامل مباشرة وبالتالي نجزئ الكسر

لنفرض أن الثابتين A_1,A_2 يحققان ما يلي :

$$\frac{2x+1}{x^2-4}=\frac{2x+1}{(x-2)(x+2)}=\frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{x+2}\qquad(1)$$

حيث A_1,A_2 ثوابت يجب تعيينها

نوحد المقامات فيصبح لدينا.

$$\frac{2x+1}{x^2-4}=\frac{A_1(x+2)+A_2(x-2)}{x^2-4}$$

نضرب طرفي المعادلة في x^2-4 فنحصل على

$$2x+1=A_1(x+2)+A_2(x-2)$$

هذه المعادلة صحيحة من أجل كل عدد x

نأخذ $x=-2$ فنحصل على $2(-2)+1=A_1(-2+2)+A_2(-2-2)$

ومنه $-3=-4A_2 \Rightarrow A_2=\frac{3}{4}$

نأخذ $x=2$ فنحصل على $2(2)+1=A_1(2+2)+A_2(2-2)$

ومنه $5=4A_1 \Rightarrow A_1=\frac{5}{4}$

نعوض A_1, A_2 في المعادلة (1) فيصبح لدينا

$$\frac{2x+1}{x^2-4}=\frac{5}{4}\frac{1}{x-2}+\frac{3}{4}\frac{1}{x+2}$$

إذن

$$\int\frac{2x+1}{x^2-4}dx=\frac{5}{4}\int\frac{1}{x-2}dx+\frac{3}{4}\int\frac{1}{x+2}dx$$
$$=\frac{5}{4}\ln|x-2|+\frac{3}{4}\ln|x+2|+c$$

الحالة الثانية :

إذا كانت $f(x), g(x)$ كثيرات حدود في x ويمكن كتابة $g(x)$ في الصورة

$g(x)=(x+r)^n$ حيث $n\in \mathrm{N}$

و كانت $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ كسرا حقيقيا .فإنه يمكن وضعه في الصورة

$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_1}{(x+r)}+\frac{A_2}{(x+r)^2}+\dots\frac{A_{n-1}}{(x+r)^{n-1}}+\frac{A_n}{(x+r)^n}$ حيث $A_1, A_2, \dots, A_n$ ثوابت يجب تعيينها

مثال ١٩: احسب التكامل $\int\frac{x-2}{(x+1)^3}dx$

الحل :

نلاحظ أنه لا يمكننا استخدام قوانين التكامل مباشرة وبالتالي نجزئ الكسر

لنفرض أن الثوابت A_1, A_2, A_3 تحقق ما يلي :

$$\frac{x-2}{(x+1)^3}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{A_3}{(x+1)^3} \qquad (2)$$ حيث A_1, A_2, A_3 ثوابت يجب تعيينها

نوحد المقامات فيصبح لدينا

$$\frac{x-2}{(x+1)^3}=\frac{A_1(x+1)^2+A_2(x+1)+A_3}{(x+1)^3}$$

نضرب طرفي المعادلة في $(x+1)^3$ فنحصل على

$$x-2=A_1(x+1)^2+A_2(x+1)+A_3$$

هذه المعادلة صحيحة من أجل كل عدد x

نأخذ $x=-1$ فنحصل على $-1-2=0+0+A_3$ ومنه $A_3=-3$

نأخذ $x=0$ فنحصل على $-2=A_1+A_2+A_3$

ومنه $-2=A_1+A_2-3 \Rightarrow A_2=1-A_1$

نأخذ $x=1$ فنحصل على $1-2=A_1(2)^2+A_2(2)+A_3$

ومنه فإن $-1=4A_1+2A_2-3 \Rightarrow -1=4A_1+2(1-A_1)-3$

بتعويض $A_2=1-A_1$ نحصل على

$$-1=4A_1+2-2A_1-3 \Rightarrow 2A_1=-1+1=0 \Rightarrow A_1=0$$

وبالتالي فإن $0=1-A_2 \Rightarrow A_2=1$

نعوض A_1, A_2, A_3 في المعادلة (2) فيصبح لدينا

$$\frac{x-2}{(x+1)^3}=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{3}{(x+1)^3}$$

إذن

$$\int\frac{x-2}{(x+1)^3}dx=\int\frac{1}{(x+1)^2}dx-3\int\frac{1}{(x+1)^3}dx.$$

$$=-(x+1)^{-1}+\frac{3}{2}(x+1)^{-2}+c.$$

ملاحظة : يمكن استعمال الحالتين في آن واحد كما هو موضح في المثال التالي:

مثال ٢٠ : أوجد التكامل $\int\frac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)}dx$

الحل :

نلاحظ أننا نحتاج إلى تجزئة الكسر $\frac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)}$

نفرض أن A_1, A_2, A_3 تحقق ما يلي:

$$\frac{3x-1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{(x-1)^2} \qquad (3)$$ حيث A_1, A_2, A_3 ثوابت يجب تعيينها

نلاحظ أننا استعملنا الحالتين الأولى والثانية معا

نوحد المقامات فيصبح لدينا.

$$\frac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)} = \frac{A_1(x-1)^2 + A_2(x+1)(x-1) + A_3(x+1)}{(x^2-1)(x-1).}$$

نضرب طرفي المعادلة في $(x^2-1)(x-1)$ فيكون لدينا

$$3x-1 = A_1(x-1)^2 + A_2(x+1)(x-1) + A_3(x+1)$$

لنأخذ $x=1$ فنحصل على $3(1)-1 = A_1(1-1)^2 + A_2(1+1)(1-1) + A_3(1+1)$

ومنه $2 = 2A_3 \Rightarrow A_3 = 1$

لنأخذ $x=-1$ فنحصل على $3(-1)-1 = A_1(-1-1)^2 + A_2(-1+1)(-1-1) + A_3(-1+1)$

ومنه $-4 = 4A_1 \Rightarrow A_1 = -1$

لنأخذ $x=0$ فنحصل على $3(0)-1 = A_1(0-1)^2 + A_2(0+1)(0-1) + A_3(0+1)$

ومنه $-1 = A_1 - A_2 + A_3 \Rightarrow A_2 = A_1 + A_3 + 1 = 1$

نعوض A_1, A_2, A_3 في المعادلة (3) فيصبح لدينا

$$\frac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)} = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

إذن
$$\int \frac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)}dx = -\int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx$$

$$= -\ln|x+1| + \ln|x-1| - (x-1)^{-1} + c = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{x-1} + c$$

تمرين تدريبي: احسب التكاملات الآتية

$1)\int \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}dx$

$2)\int \frac{x+3}{x^2-3x+2}dx$

$3)\int \frac{dx}{x^2-16}$

$4)\int \frac{3x\,dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

$5)\int \frac{2x^2+3}{x^2(x-1)}dx$

$6)\int \frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)}dx$

$7)\int \frac{2t^2-4}{(t+1)(t-2)(t-3)}dt$

$8)\int \frac{t-5}{t^2+6t+5}dt$

$9)\int \frac{3t+7}{t^2-2t-3}dt$

الفصل الثاني :. التكامل المحدود

١. النظرية الأساسية لحساب التكامل

لتكن الدالة $f(x)$ دالة مستمرة على المجال $[a, b]$ ولتكن $F(x)$ تكاملا غير محدد للدالة $f(x)$ فإن التكامل المحدود يعطى بما يلي:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

مثال ١ : احسب التكامل التالي $\int_1^2 xdx.$

الحل :

$$\int_1^2 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

مثال ٢ : احسب التكامل التالي $\int_0^3 (x^3 - 4x + 1)dx.$

الحل :

$$\int_0^3 (x^3 - 4x + 1)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2} + x\right)\Big|_0^3$$

$$= \left(\frac{3^4}{4} - \frac{4\times 3^2}{2} + 3\right) - (0 - 0 + 0)$$

$$= \frac{81}{4} - 18 + 3 = \frac{81}{4} - 15 = \frac{81-60}{4} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$$

مثال ٣ : احسب التكامل التالي $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta.$

الحل :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta = \sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

٢,١. خواص التكاملات المحدودة :

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين متصلتين على فترة التكامل $a \le x \le b$ فإن:

١) $\int_{a}^{a} f(x)dx = 0$

٢) $\int_{a}^{b} f(x)dx = -\int_{b}^{a} f(x)dx$

٣) إذا كانت $a \le c \le b$ فإن $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx$

مثال ٤ : احسب التكامل التالي $\int_{-1}^{2} |x|$

الحل : لدينا
$$|x| = \begin{cases} x\ , & \text{كانت} \quad \text{إذا} \quad x \ge 0 \\ -x, & \text{كانت} \quad \text{إذا} \quad x < 0. \end{cases}$$

ومنه فإن

$$\int_{-1}^{2} |x|dx = \int_{-1}^{0} -xdx + \int_{0}^{2} xdx. = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{4}{2} - 0 = \frac{5}{2}.$$

تمرين: احسب التكاملات المحدودة التالية:

1) $\int_{0}^{2} x\sqrt{4-x^2}\,dx$

2) $\int_{0}^{2} (2-4x)dx$

3) $\int_{-1}^{2} |2x-3|\ dx$

4) $\int_{2}^{3} \frac{x^2-2}{x^2}dx$

5) $\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{2-x^3}\,dx$

6) $\int_{0}^{3} f(x)$, حيث $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \le 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$

7) $\int_{-2}^{2} f(x)dx$, حيث $f(x) = \begin{cases} 3, & x \le 0 \\ x+3, & x > 0 \end{cases}$

8) $\int_{1}^{4} \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$

9) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos x)dx$

10) $\int_{0}^{1} \frac{x}{x+1}dx$

11) $\int_{-1}^{2} x\sqrt{9-x^2}\,dx$

12) $\int_{0}^{2} (x^3-1)^{\frac{2}{3}} x^2 dx$

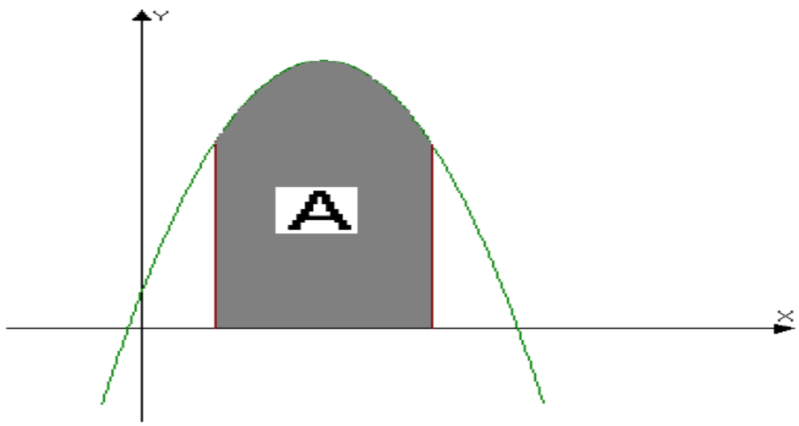
٢. تطبيقات على التكامل المحدود

من المعلوم أن تطبيقات التكامل في شتي التخصصات كثيرة جدا وسنتطرق هنا فقط لتطبيقات التكامل في حساب المساحة

١,٢.قواعد حساب المساحة باستعمال التكامل المحدود

لتكن الدالة $y = f(x)$ متصلة في الفترة $[a , b]$

١) إذا كانت $f(x) \geq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[a , b]$ فإن المساحة A المحصورة بين منحنى الدالة الواصلة بين النقطتين a, b ومحور السينات تحسب كما يلي :



$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

مثال٥: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $y = x^2$ والمحور السيني والمستقيمين $x = 1$ و $x = 3$.

الحل :

بما أن $f(x) \geq 0$ من أجل كل قيم x فإن المساحة A تعطى بما يلي

$$\textbf{Square units } A = \int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

٢) إذا كانت $f(x) \leq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[a , b]$ فإن المساحة A المحصورة بين منحني الدالة الواصلة بين النقطتين a, b ومحور السينات تحسب كما يلي:

$$A = \left| \int_a^b f(x)dx. \right|$$

مثال٦: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $y = -x^2$ والمحور السيني والمستقيمين $x = -2$ و $x = 2$

الحل :

بما أن $f(x)=-x^2\le 0$ من أجل كل قيم x فإن المساحة A تعطى بما يلي:

$$A=\left|\int_{-2}^{2} f(x)dx\right|=\left|\int_{-2}^{2} -x^2dx\right|=\left|-\frac{x^3}{3}\right|=\left|-\frac{2^3}{3}+\frac{(-2)^3}{3}\right|=\left|-\frac{16}{3}\right|=\frac{16}{3}\ \textbf{Square units}$$

٣) إذا وجد c بين النقطتين a و b أي أن $a<c<b$ حيث أن $f(x)\ge 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[a\ ,c]$ و $f(x)\le 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[c\ ,b]$ فإن المساحة A المحصورة بين منحنى الدالة الواصلة بين النقطتين a, b ومحور السينات تحسب كما يلي:

$$A=\int_a^c f(x)dx+\left|\int_c^b f(x)dx\right|$$

٤) وإذا وجد c بين النقطتين a و b أي أن $a<c<b$ حيث أن $f(x)\le 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[a\ ,c]$ و $f(x)\ge 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[c\ ,b]$ فإن المساحة A المحصورة بين منحنى الدالة الواصلة بين النقطتين a, b ومحور السينات تحسب كما يلي :

$$A=\left|\int_a^c f(x)dx\right|+\int_c^b f(x)dx$$

مثال ٧: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $y=x^3$ والمحور السيني والمستقيمين $x=-2$ و $x=2$

الحل :

بما أن $f(x)=x^3\ge 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[0,2]$ و $f(x)=x^3\le 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[-2,0]$ فإن المساحة A تعطى بما يلي

$$A=\left|\int_{-2}^{0} x^3dx\right|+\int_0^2 x^3dx.=\left|\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{0}\right|+\frac{x^4}{4}\Big|_0^2=\left|-\frac{16}{4}\right|+\frac{16}{4}=4+4=8\ \textbf{Square units}$$

مثال ٨: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $y=-x^3$ والمحور السيني والمستقيمين $x=-3$ و $x=2$

الحل :

بما أن $f(x)=-x^3\ge 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[-3,0]$ و $f(x)=-x^3\le 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[0,2]$ فإن المساحة A تعطى بما يلي

$$A=\int_{-3}^{0} -x^3dx+\left|\int_0^2 -x^3dx\right|=-\frac{x^4}{4}\Big|_{-3}^{0}+\left|\frac{-x^4}{4}\Big|_0^2\right|=\frac{81}{4}+\left|-\frac{16}{4}\right|=\frac{81}{4}+\frac{16}{4}=\frac{97}{4}\ \textbf{Square units}$$

مثال ٢٩: أوجد المساحة المحصورة بين المحور السيني ومنحنى الدالة $f(x)=x^2-6x+8$ الواصل بين نقطتي تقاطع المنحنى مع المحور السيني .

الحل :

يتقاطع منحنى الدالة مع المحور السيني إذا كان $f(x)=0$ وبالتالي للإيجاد نقاط التقاطع نضع:

$$x^2-6x+8=0$$

لدينا $x^2-6x+8=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4)=0 \Leftrightarrow x=2$ أو $x=4$

إذن يقطع المنحنى المحور السيني عند $x=2$ و $x=4$ وتكون هاتان القيمتان حدي التكامل

ومن الجدول التالي :

x	$-\infty$	2	$4 \quad \infty$
$x-2$	-	+	+
$x-4$	-	-	+
$f(x)=(x-2)(x-4)$	+	-	+

يكون لدينا $f(x)\leq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[2,4]$ وبالتالي فإن المساحة A تعطى بما يلي

$$A=\left|\int_2^4\left(x^2-6x+8\right)dx\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}+8x\right)\Big|_2^4\right|=\left|\left(\frac{4^3}{3}-3(4)^2+8(4)\right)-\left(\frac{2^3}{3}-3(2)^2+8(2)\right)\right|$$

$$=\left|\left(\frac{64}{3}-48+32\right)-\left(\frac{8}{3}-12+16\right)\right|=\left|\frac{64-48}{3}-\frac{8+12}{3}\right|=\left|\frac{16}{3}-\frac{20}{3}\right|=\left|-\frac{4}{3}\right|=\frac{4}{3}\text{Square units}$$

تمارين:

تمرين ١: احسب المساحة المحصورة بين المنحنى $y=x^2+1$ ومحور السينات من $x=2$ إلى $x=3$.

تمرين ٢: احسب المساحة المحصورة بين المنحنى $y=2x^2$ ومحور السينات من $x=-1$ إلى $x=2$.

تمرين ٣: احسب المساحة المحصورة بين المنحنى $y=(x+2)(x^2-2x-3)$ ومحور السينات من $x=-2$ إلى $x=1$.

تمرين ٤: احسب المساحة المحصورة بين المنحنى $y=3x$ ومحور السينات من $x=-1$ إلى $x=0$.

تمرين ٥: احسب المساحة المحصورة بين المنحنى $y = 2(x+4)(x^2 - 2x - 3)$ ومحور السينات من $x = -5$ إلى $x = 3$.

تمرين ٦: احسب المساحة المحصورة بين المنحنى $y = \sin x$ ومحور السينات من $x = 0$ إلى. $x = \dfrac{3\pi}{2}$

تمرين ٧: احسب المساحة المحصورة بين المحور السيني ومنحنى الدالة $y = -2x^2 + 4x + 30$ الواصل بين نقطتي تقاطع المنحنى مع المحور السيني .