الباب الأول

أنظمة العد

Numeration Systems

الهدف من دراسة أنظمة العد:

(1−1) التعرف على الأنظمة المختلفة للعد (النظام العشري والنظام الثنائي والنظام الثماني والنظام السادس عشر).

(1−2) إمكانية التحويل من نظام لآخر.

(1−3) كيفية أداء العمليات الحسابية (الجمع والطرح والضرب والقسمة) على النظام الثنائي.

يوجد أربعة أنظمة رئيسية للعد:

1− النظام العشري.

2− النظام الثنائي.

3− النظام الثماني.

4− النظام السادس عشر.

أولاً: النظام العشري للعد:

- أساس هذا النظام هو 10.
- في نظام العد العشري، كل موقع داخل العد هو إحدى الأرقام الآتية:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

<u>مثال (1):</u>

في النظام العشري ذو الأربع أرقام يكون المعامل الوزني لخانة الآحاد 10^0 ولخانة العشرات 10^1 ولخانة المئات 10^2 ... وهكذا. فيمكن كتابة أي عدد عشري عن طريق المعامل الوزني لموقع الرقم داخل العدد.

فمثلاً: العدد 4633 يمكن كتابته كالتالي:

4 6 3 3

$$3 \times 10^0 = 3$$
$$3 \times 10^1 = 30$$
$$6 \times 10^2 = 600$$
$$4 \times 10^3 = 4000$$

4633

ثانياً: النظام الثنائي للعد:

- أساس هذا النظام هو 2.
- في نظام العد الثنائي كل موقع داخل العدد هو إحدى الرقمين 0 أو 1.
- الأنظمة الإلكترونية تستخدم نظام العد الثنائي لأنه يتكون فقط من الرقمين 0 ,1 وهكذا التمثيل يتناسب مع الأنظمة الرقمية حيث يتم تمثيل هذين الرقمين بمستويين للجهد كالآتي:

$$+5 \text{ volt} = 1, \qquad 0 \text{ volt} = 0$$

- معاملات الأوزان للنظام الثنائي هي: $2^0\ 2^1\ 2^2 \ldots$

<u>مثال (2):</u>

حول العدد الثنائي $(01010110)_2$ إلى العدد العشري المناظر.

<u>الحل:</u>

نضرب كل رقم ثنائي في المعامل الوزني المناسب ونجمع النتائج:

$$0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0$$

$$\begin{aligned}
0 \times 2^0 &= 0\\
1 \times 2^1 &= 2\\
1 \times 2^2 &= 4\\
0 \times 2^3 &= 0\\
0 \times 2^4 &= 16\\
0 \times 2^5 &= 0\\
0 \times 2^6 &= 64\\
0 \times 2^7 &= 0\\
&\overline{}\\
&(86)_{10}
\end{aligned}$$

أي أن العدد الثنائي $(01010110)_2$ يكافئ العدد العشري $(86)_{10}$.

<u>ملحوظة:</u>

- التحويل من ثنائي إلى عشري يتم عن طريق أجهزة الحاسب الآلي لأن النظام العشري بالنسبة للإنسان يسهل التعامل معه بعكس النظام الثنائي.
- من ناحية أخرى، عندما يُدخل الإنسان عدد عشري إلى جهاز الحاسب الآلي، هذا العدد العشري يتم تحويله إلى النظام الثنائي قبل التعامل معه بواسطة الحاسب الآلي.

<u>مثال (3):</u>

حول العدد $(133)_{10}$ إلى النظام الثنائي.

<u>الحل:</u>

يوجد طريقتين للتحويل من النظام العشري إلى النظام الثنائي.

الطريقة الأولى:

1	0	0	0	0	1	0	1
2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

$$\begin{array}{rl} & 133 \\ - & \\ & \underline{128} \rightarrow 2^7 \\ & 5 \\ - & \\ & \underline{4} \rightarrow 2^2 \\ & 1 \\ - & \\ & \underline{1} \rightarrow 2^0 \\ & 0 \end{array}$$

∴ العدد $(133)_{10}$ يكافئ العدد الثنائي $(10000101)_2$.

الطريقة الثانية:

133	2	
66	2	1
33	2	0
16	2	1
8	2	0
4	2	0
2	2	0
1	2	0
0		1

∴ العدد $(133)_{10}$ يكافئ العدد الثنائي $(10000101)_2$.

ثالثاً: النظام الثماني للعد:

- أساس هذا النظام هو $8 = 2^3$.
- نظام العد الثماني هو طريقة لتجميع الأرقام الثنائية في مجموعات، كل مجموعة تحتوي على ثلاث أرقام ثنائية.
- نظام العد الثماني يستخدم الأرقام:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

- بما أن نظام العد الثماني يستخدم كل ثلاث أرقام ثنائية لتكوين رقم ثماني واحد، وبالتالي فإن هذا النظام يقلل الحجم التخزيني لتخزين البيانات، كما يسهل التعامل معها بواسطة الحاسب الآلي.

جدول (1): يوضح العلاقة بين النظام العشري والثنائي والثماني للأعداد من 0 إلى 10

النظام العشري	النظام الثنائي	النظام الثماني
0	000	0
1	001	1
2	010	2
3	011	3
4	100	4
5	101	5
6	110	6
7	111	7
8	1000	10
9	1001	11
10	1010	12

مثال (4):

حول العدد الثنائي $(011101)_2$ إلى الثماني.

الحل:

$$\begin{array}{c} 011101 \\ 3\quad 5 \end{array}$$

$\therefore$ العدد الثنائي $(011101)_2$ يكافئ العدد الثماني $(35)_8$.

مثال (5):

حول العدد الثنائي $(10111001)_2$ إلى الثماني.

الحل:

$010111001 = (278)_8$ $\rightarrow$ يتم إضافة 0 لتكون 3 أرقام ثنائية

$2 \quad 7 \quad 1$

$\therefore$ العدد الثنائي $(10111001)_2$ يقابل العدد الثماني $(271)_8$.

مثال (6):

حول $(624)_8$ إلى العدد الثنائي.

الحل:

$6 \quad 2 \quad 4$

$110\,010\,100 = (110010100)_2$

$\therefore$ العدد الثماني $(624)_8$ يقابله $(110010100)_2$.

مثال (7):

حول $(326)_8$ إلى العدد العشري.

الحل:

$3 \quad 2 \quad 6$

$6 \times 8^0 = 6$

$2 \times 8^1 = 16$

$3 \times 8^2 = 192$

$(214)_{10}$

$\therefore$ العدد $(326)_8$ يقابله $(214)_{10}$.

مثال (8):

حول $(486)_{10}$ إلى العدد الثماني.

$$\begin{array}{r|cc} 486 & 8 & \\ 60 & 8 & 6 \\ 7 & 8 & 4 \\ 0 & & 7 \end{array}$$

$\therefore$ العدد $(486)_{10}$ يقابله $(746)_8$.

للتأكد من صحة النتيجة يمكن إجراء التحويل العكسي أي نحول $(746)_8$ إلى النظام العشري.

$$7 \quad 4 \quad 6$$

$$\begin{aligned} 6 \times 8^0 &= 6 \\ 4 \times 8^1 &= 32 \\ 7 \times 8^2 &= 448 \\ \hline & (486)_{10} \end{aligned}$$

$\therefore$ العدد $(746)_8$ يقابله $(486)_{10}$.

$\therefore$ هذا يؤكد صحة النتيجة السابقة.

رابعاً: النظام السادس عشر:

- أساس هذا النظام هو $16 = 2^4$.
- نظام العدد السادس عشر هو طريقة لتجميع الأرقام الثنائية في مجموعات كل مجموعة تحتوي على أربع أرقام ثنائية.
- نظام العدد السادس عشر يستخدم الأرقام:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

- بما أن نظام العدد السادس عشر يستخدم محل أربع أرقام ثنائية لتكون رقم واحد بالنظام السادس عشر وبالتالي فإن هذا النظام أيضاً يقلل الحجم التخزيني لتخزين

البيانات، كما يسهل التعامل معه بواسطة الحاسب الآلي.

جدول (2): يوضح العلاقة بين النظام العشري والثنائي السادس عشر للأعداد من 0 إلى 20

النظام العشري	النظام الثنائي	النظام السادس عشر
0	0000 0000	00
1	0000 0001	01
2	0000 0010	02
3	0000 0011	03
4	0000 0100	04
5	0000 0101	05
6	0000 0110	06
7	0000 0111	07
8	0000 1000	08
9	0000 1001	09
10	0000 1010	0A
11	0000 1011	0B
12	0000 1100	0C
13	0000 1101	0D
14	0000 1110	0E
15	0000 1111	0F
16	0001 0000	10
17	0001 0001	11
18	0001 0010	12
19	0001 0011	13
20	0001 0100	14

مثال (9):

حول العدد $(01101101)_2$ إلى العدد المقابل بالنظام السادس عشر.

الحل:

$$01101101 = (6D)_{16}$$
$$6 \quad D$$

$\therefore$ العدد $(01101101)_2$ يقابله العدد $(6D)_{16}$ بالنظام السادس عشر.

مثال (10):

حول العدد $(A9)_{16}$ إلى النظام الثنائي.

<u>الحل:</u>

$$\overset{A}{1010}\,\overset{9}{1001} = (10101001)_2$$

$\therefore$ العدد $(A9)_{16}$ يقابله العدد $(01011001)_2$ بالنظام الثنائي.

<u>مثال (11):</u>

حول العدد $(2A6)_{16}$ إلى العدد المقابل بالنظام العشري.

<u>الحل:</u>

$$\begin{array}{lcr}
6 \times 16^0 = & & 6 \\
A \times 16^1 = & 10 \times 16 = & 160 \\
2 \times 16^2 = & & 512 \\
\hline
 & & (678)_{10}
\end{array}$$

$\therefore$ العدد $(2A6)_8$ يقابله $(678)_{10}$ بالنظام العشري.

<u>مثال (12):</u>

حول العدد $(151)_{10}$ إلى العدد المقابل بالنظام السادس عشر.

<u>الحل:</u>

$$\begin{array}{r|rr}
151 & 16 & \\
9 & 16 & 7 \\
0 & & 9
\end{array}$$

$\therefore$ العدد $(151)_{10}$ يقابله $(97)_{16}$.

للتأكد من صحة النتيجة السابقة نقوم بإجراء التحويل العكسي أي نحول العدد $(97)_{16}$ إلى النظام العشري.

$$
\begin{array}{ll}
9\quad 7 & \\
7 \rightarrow & 7 \times 16^{0} = 7 \\
9 \rightarrow & 9 \times 16^{1} = 144 \\
 & \overline{\quad (151)_{10}}
\end{array}
$$

∴ العدد $(97)_{16}$ يقابله $(151)_{10}$ بالنظام العشري.

وهذا يؤكد صحة النتيجة السابقة.

<u>مثال (13):</u>

حول العدد $(498)_{10}$ إلى العدد المقابل بالنظام السادس عشر.

<u>الحل:</u>

$$
\begin{array}{r|ll}
498 & 16 & \\
31 & 16 & 2 \\
1 & 16 & 15 = (F)_{16} \\
0 & & 1
\end{array}
$$

∴ العدد $(498)_{10}$ يقابله $(1F2)_{16}$.

للتأكد من صحة النتيجة السابقة نقوم بإجراء التحويل العكسي أي نحول العدد $(1F2)_{16}$ إلى النظام العشري.

$$
\begin{array}{ll}
1\quad F\quad 2 & \\
2 \rightarrow & 2 \times 16^{0} = \qquad 2 \\
F \rightarrow & F \times 16^{1} = 15 \times 16 = 240 \\
1 \rightarrow & 1 \times 16^{2} = \qquad 256 \\
 & \overline{\quad 498}
\end{array}
$$

∴ العدد $(1F2)_{16}$ يقابل العدد $(498)_{10}$ بالنظام العشري.

وهذا يؤكد صحة النتيجة السابقة.

تمارين

1- حول من النظام الثنائي إلى النظام العشري:

0110 – 1011 – 1001 – 0111 – 1100 – 01001011 – 00110111 – 10110101 – 10100111 - 01110110

2- حول من النظام العشري إلى النظام الثماني:

$(186)_{10} – (214)_{10} – (27)_{10} – (251)_{10} – (146)_{10}$

3- حول من النظام الثنائي إلى النظام الثماني:

011001 – 11101 – 1011100 – 01011001 - 1101101

4- حول من النظام الثماني إلى النظام الثنائي:

$(46)_8 – (74)_8 – (61)_8 – (32)_8 – (57)_8 – (27)_8$

5- حول من النظام الثماني إلى النظام العشري:

$(27)_8 – (37)_8 – (14)_8 – (72)_8 – (51)_8$

6- حول من النظام العشري إلى النظام الثماني:

$(126)_{10} – (49)_{10} – (87)_{10} – (94)_{10} – (108)_{10}$

7- حول من النظام الثنائي إلى النظام السادس عشر:

10111001 – 11011100 – 01110100 – 11111011 - 11000110

8- حول من النظام السادس عشر إلى النظام الثنائي:

$(C5)_{16} – (FA)_{16} – (D6)_{16} – (A94)_{16} – (62)_{16}$

9- حول من النظام السادس عشر إلى النظام العشري:

$(86)_{16} – (F4)_{16} – (92)_{16} – (AB)_{16} – (3C5)_{16}$

10- حول من النظام العشري إلى النظام السادس عشر:

$(127)_{10} – (68)_{10} – (107)_{10} – (61)_{10} – (29)_{10}$

العمليات الحسابية على النظام الثنائي:

نعلم أن الوظيفة الهامة للأنظمة الرقمية والحاسب الآلي هو تنفيذ العمليات الحسابية (الجمع والطرح والضرب والقسمة). سنتناول في هذا الجزء العمليات الحسابية المختلفة على النظام الثنائي.

(1) عملية الجمع في النظام الثنائي:

نعلم أن النظام الثنائي يتكون من الرقمين 0 ,1 وبالتالي سيكون جميع الاحتمالات الممكنة لجمع هذين الرقمين هما:

$$\begin{array}{ll} 0+0=0 & \text{carry } 0 \\ 0+1=1 & \text{carry } 0 \\ 1+0=1 & \text{carry } 0 \\ 1+1=0 & \text{carry } 1 \end{array}$$

وبالتالي فإن الشكل العام لجمع أول رقمين ثنائيين يمكن كتابته كالتالي:

$$A_0 + B_0 = \Sigma_0 + C_{out}$$

ويمكن تمثيل ذلك في الجدول التالي:

جدول (3): جمع أول رقمين في العدد الثنائي

A_0	B_0	Σ_0	C_{out}
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

يمكن كتابة الشكل العام لجمع عددين ثنائيين كالتالي:

$$\begin{array}{ccc} C_{in} & C_{in} & \\ & A_1 & A_0 \\ & B_1 & B_0 \\ \hline \Sigma_2 & \Sigma_1 & \Sigma_0 \\ & + & + \\ & C_{out} & C_{out} \end{array}$$

ويمكن تمثيل ذلك في الجدول الآتي:

جدول (1): جميع الاحتمالات الممكنة لجمع رقمين A_1 مع B_1 في حالة وجود C_{in}

A_1	B_1	C_{in}	Σ_1	C_{out}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

<u>مثال (1):</u>

حول الأعداد العشرية إلى ثنائية ثم قم بجمعهم وقارن النتائج:

(a) 5 + 2 (b) 8 + 3 (c) 18 + 2 (d) 147 + 75 (e) 31 + 7

<u>الحل:</u>

		Decimal		Binary	
(a)		5		0000 0101	
	+		+		
		2		0000 0010	
		7		0000 0111	$= (7)_{10}$
(b)		8		0000 1000	
	+		+		
		3		0000 0011	
		11		0000 1011	$= (11)_{10}$
(c)		18		0001 0010	
	+		+		
		2		0000 0010	
		20		0001 0100	$= (20)_{10}$

(d)

$$\begin{array}{r} 147 \\ +\ 75 \\ \hline 222 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1001\ 0011 \\ +\ 0100\ 1011 \\ \hline 1101\ 1110 \end{array} = (222)_{10}$$

(e)

$$\begin{array}{r} 31 \\ +\ 7 \\ \hline 38 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0001\ 1111 \\ +\ 0000\ 0111 \\ \hline 0010\ 0110 \end{array} = (38)_{10}$$

(2) عملية الطرح في النظام الثنائي:

جميع احتمالات طرح أول رقمين ثنائيين:

$0 - 0 = 0$ borrow 0
$0 - 1 = 1$ borrow 1
$1 - 0 = 1$ borrow 0
$1 - 1 = 0$ borrow 0

بالتالي فإن الشكل العام لطرح أول رقمين ثنائيين يمكن كتابته كالتالي:

$$A_0 - B_0 = R_0 + B_{out}$$

difference ← R_0 B_{out} → borrow

ويمكن تمثيل ذلك في الجدول التالي:

جدول (5): طرح أول رقمين في العدد الثنائي

A_0	B_0	R_0	B_{out}
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0

يمكن كتابة الشكل العام لطرح عددين ثنائيين كالآتي:

$$\begin{array}{lll} B_{in} & B_{in} & \\ & A_1 & A_0 \\ - & B_1 & B_0 \\ \hline & R_1 & R_0 \\ & + & + \\ & B_{out} & B_{out} \end{array}$$

ويمكن تمثيل ذلك في الجدول الآتي:

جدول (5): جميع الاحتمالات الممكنة لطرح رقمين A_1 ، B_1 في حالة وجود B_{in}

A_1	B_1	B_{in}	R_1	B_{out}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Borrow 1 from A_1

$$\begin{array}{lcccc} (2)_{10} & A_1 & A_0 & \overset{0}{\cancel{1}} & \overset{2}{\cancel{0}} \\ - & - & & - & \\ (1)_{10} & B_1 & B_0 & 0 & 1 \\ \hline (1)_{10} & R_1 & R_0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccc} (4)_{10} & A_3\ A_2\ A_1\ A_0 & 0 & \overset{0}{\cancel{1}} & \overset{\overset{1}{\cancel{2}} \to 2}{0}\ \ 0 \\ - & - & - & & \\ (1)_{10} & B_3\ B_2\ B_1\ B_0 & 0 & 0 & 0\ \ 1 \\ \hline (3)_{10} & R_3\ R_2\ R_1\ R_0 & 0 & 0 & 1\ \ 1 \end{array}$$

مثال (2):

حول الأعداد العشرية الآتية إلى ثنائية ثم قم بعملية الطرح:

(a) 27 – 10 (b) 9 – 4 (c) 172 – 42 (d) 154 – 54 (e) 192 – 3

الحل:

	Decimal	Binary	
(a)	27	0001 1011	
	– 10	– 0000 1010	
	17	0001 0001	$= (17)_{10}$
(b)	9	0000 1001	
	– 4	– 0000 0100	
	5	0000 0101	$= (5)_{10}$
(c)	172	1010 1100	
	– 42	– 0010 1010	
	130	1000 0010	$= (130)_{10}$
(d)	154	1001 1010	
	– 54	– 0011 0110	
	100	0110 0100	$= (100)_{10}$
(e)	192	1100 0000	
	– 3	– 0000 0011	
	189	1011 1101	$= (189)_{10}$

(3) عملية الضرب في النظام الثنائي:

عملية الضرب في النظام الثنائي تشبه عملية الضرب في النظام العشري.

مثال (3):

حول الأعداد العشرية إلى المقابل لها بالنظام الثنائي ثم قم بضرب العددين وقارن النتائج:

(a) 5×3 (b) 45×3 (c) 15×15 (d) 23×9 (e) 13×11

الحل:

(a)

Decimal	Binary
5	$0000\ 0101$
$\times\ 3$	$\times\ 0000\ 0011$
15	$0000\ 0101$
	$+\ 0\ 0000\ 101$
	$0\ 0000\ 1111 = (15)_{10}$

(b)

Decimal	Binary
45	$0010\ 1101$
$\times\ 3$	$\times\ 0000\ 0011$
135	$0010\ 1101$
	$+\ 0\ 0101\ 101$
	$0\ 1000\ 0111 = (135)_{10}$

(b)

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times \quad 15 \\ \hline 75 \\ + \quad 15 \\ \hline 225 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 0000\ 1111 \\ \times \quad 0000\ 1111 \\ \hline 0000\ 1111 \\ + \quad 0\ 0001\ 111 \\ 00\ 0011\ 11 \\ 000\ 0111\ 1 \\ \hline 000\ 1110\ 0001 \end{array} = (225)_{10}$$

(1) عملية القسمة في النظام الثنائي:

عملية القسمة في النظام الثنائي تشبه عملية القسمة في النظام العشري.

مثال (4):

حول الأعداد العشرية الآتية إلى المقابل لها بالنظام الثنائي ثم قم بإيجاد حاصل القسمة وقارن النتائج:

(a) $9 \div 3$ (b) $35 \div 5$ (c) $135 \div 15$ (d) $221 \div 17$

الحل:

Decimal Binary

(a)

$$\begin{array}{r|r} & 3 \\ \hline 3 & 9 \\ & -\ 9 \\ \hline & 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|r} & 0011 \\ \hline 0000\ 0011 & 0000\ 1001 \\ & -\ 0000\ 0110 \\ \hline & 0000\ 0011 \\ & -\ 0000\ 0011 \\ \hline & 0 \end{array} = (3)_{10}$$

(b)

$$\begin{array}{r|l} & 7 \\ \hline 5 & 35 \\ & -35 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 111 = (7)_{10} \\ \hline 0000\ 0101 & 0010\ 0011 \\ & -0001\ 01 \\ \hline & 0000\ 111 \\ & -0000\ 101 \\ \hline & 0101 \\ & -0101 \\ \hline & 0 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{r|l} & 9 \\ \hline 5 & 135 \\ & -135 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 1001 = (9)_{10} \\ \hline 0000\ 1111 & 1000\ 0111 \\ & -111\ 1 \\ \hline & 0000\ 1111 \\ & -0000\ 1111 \\ \hline & 0 \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{r|l} & 13 \\ \hline 17 & 221 \\ & -17 \\ \hline & 51 \\ & -51 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 1101 = (13)_{10} \\ \hline 0001\ 0001 & 1101\ 1101 \\ & -1000\ 1 \\ \hline & 0101\ 01 \\ & -0100\ 01 \\ \hline & 0001\ 0001 \\ & -0001\ 0001 \\ \hline & 0000\ 0000 \end{array}$$

تمارين

(1) قم بحساب ما يلي، ثم قم بتحويلهم إلى النظام الثنائي واجمع ثم قارن بين النتيجتين:

(a) $6 + 3$	(b) $8 + 7$	(c) $22 + 6$	(d) $29 + 37$
(e) $134 + 66$	(f) $254 + 36$	(g) $208 + 127$	(h) $196 + 156$

(2) كرر السؤال السابق بالنسبة لما يلي:

(a) $15 – 4$	(b) $22 – 11$	(c) $84 – 36$	(d) $66 – 31$
(e) $126 – 64$	(f) $113 – 88$	(g) $109 – 60$	(h) $111 – 104$

(3) كرر السؤال السابق بالنسبة لما يلي:

(a) 7×3	(b) 6×7	(c) 12×5	(d) 39×7
(e) 125×63	(f) 127×15	(g) 13×13	(h) 255×127

(4) كرر السؤال السابق بالنسبة لما يلي:

(a) $12 \div 4$	(b) $15 \div 3$	(c) $48 \div 12$	(d) $25 \div 5$
(e) $125 \div 5$	(f) $294 \div 14$	(g) $195 \div 15$	(h) $228 \div 12$

الباب الثاني

المنطق الرياضي
Mathematical Logic

(1) مقدمة(*Introduction*) :

في مطلع القرن التاسع عشر صاغ العالم الانجليزي جورج بول جبر المنطق الرمزي , و منذ ذلك الوقت أصبح المنطق فرع مستقل من فروع الرياضيات. والمنطق ينظم عملية المناقشة و يخضعها لأسس موضوعية , و يتعامل المنطق مع الجمل الخبرية المفيدة و يضع لنا قواعد متفق عليها لطرق الربط بين العبارات المختلفة. و لغة المنطق و رموزه هي لغة الرياضيات.

تعريف التقرير(Statement Or Proposition):

هو جملة خبرية تحمل معنى محدد إما الصدق (وفي هذه الحالة يسمي تقريرا صائبا) أو الكذب (وفي هذه الحالة يسمي تقريرا خاطئا) و لا تحتمل الكذب و الصدق في نفس الوقت.

مثال(1):

الجمل الآتية تمثل تقارير:

(1) جورج بول أحد مؤسسي علم المنطق الرياضي

(تقرير صائب – تاريخ الرياضيات)

(2) 2=3+4

(تقرير خاطئ – حساب الأعداد الطبيعية)

(3) لكل فعل لا يوجد رد فعل

(تقرير خاطئ – علم الميكانيكا)

(4) كل الطلاب يكرهون الرياضيات (تقرير خاطئ)

(5) $10 > 5$ (تقرير صائب – حساب الأعداد الطبيعية)

<u>مثال(2):</u> الجمل الآتية لا تمثل تقارير:

(1) ضع القلم (فعل أمر)

(2) ماذا تفعل ؟ (استفهام)

(3) ما أجملك ! (تعجب)

(4) في المشمش (شبه جملة)

(5) $X+3=8$ (x مجهولة)

(6) 32 أكبر بكثير من 20 (غير معلوم مفهوم كلمة بكثير)

سوف نرمز للتقارير بالرموز $P,Q,R,\ldots$

<u>تعريف: التقرير البسيط:</u>

هو التقرير الذي يحمل خبرا واحدا فقط.

<u>تعريف: التقرير المركب:</u>

هو التقرير الذي يتكون من اثنين أو أكثر من التقارير البسيطة المرتبطة بواسطة أدوات الربط.

<u>مثال(3):</u>

(1) $2+3=6$ (تقرير بسيط)

(2) $3+5=8$ (تقرير بسيط)

(3) $2+3=6$ أو $3+5=8$ (تقرير مركب)

(4)تتساوى زوايا المثلث إذا و فقط إذا تساوى أضلاعه

(تقرير مركب)

(2) جداول الصدق(*Truth tables*):

فيما يلي يستخدم الرمز T للدلالة على أن تقرير ما صادق و هي اختصار لكلمة True كما سنستخدم الرمز F للدلالة على أن تقرير ما خاطئ و هي اختصار كلمة False .

تعريف جداول الصدق:

هي تلك الجداول التي تتضمن كل إمكانيات قيم الصدق للتقارير تحت الدراسة.

(3) أدوات الربط المنطقية(*Logical connectives*):

نستخدم أدوات الربط المنطقية للربط بين التقارير لتكوين تقرير مفرد . سندرس رابط النفي (Negative) و الوصل (Conjunction) و الفصل (Disjunction) و الشرط (Conditional) و الشرط المزدوج (Bi-Conditional).

3−1 النفي(negation):

نفي التقرير هو أيضاً تقرير. ويستخدم الرابط (not) للنفي. نفي التقرير P هو التقرير ليس P و يرمز له بالرمز $\neg P$.

■ اعتبر المثال الآتي:–

التقرير P: القاهرة عاصمة جمهورية مصر العربية

نفي التقرير P: القاهرة ليست عاصمة جمهورية مصر العربية

■ نلاحظ أن:–

لو التقرير(P) صحيح فان التقرير(P¬) سيكون خاطئ. ولو التقرير(P) خاطئ فان التقرير(P¬) سيكون صحيح. بالتالي فان جدول الصدق للنفي كما يلي:

P	¬p
T	F
F	T

3–2 الوصل(Conjunction):

الوصل بين تقريرينP,Q هو أيضاً تقرير و يرمز له بالرمزP^Q . ونستخدم الرابط "و" (And) للوصل بين التقارير.

■ اعتبر المثال الآتي:–

P:ذهب رامي إلي المدرسة.

Q:ذهب سامي إلي المدرسة.

P^Q:ذهب سامي و رامي إلي المدرسة.

■ نلاحظ:

لكي يكون التقريرP^Q صحيح لابد أن يكون كلاً من P,Q صحيحين في آن واحد. بالتالي فان جدول الصدق للوصل بين التقريرين P,Q

كما يلي:

P	Q	P^Q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

3-3 الفصل(Disjunction):

الفصل بين تقريرينP,Q هو أيضاً تقرير و يرمز له بالرمزPvQ . ونستخدم الرابط "أو" (OR) للفصل بين التقارير.

- اعتبر المثال الآتي:-

P:ذهب سامي إلي المدرسة.

Q:ذهب رامي إلي المدرسة.

PvQ:ذهب سامي أو رامي إلي المدرسة.

- نلاحظ:

لكي يكون التقرير PvQ صحيح لابد أن يكون احدي التقريرين P,Q صحيح أو كليهما صحيح. بالتالي فان جدول الصدق للفصل بين التقريرين P,Q كما يلي:

P	Q	PvQ
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

3−4 الشرط(Conditional):

بفرض أن P,Q أي تقريرين فان التقرير $P \to Q$ يسمي تقرير شرطي و يقرأ اذا كان P فان Q أو P يؤدي الي Q. والتقرير الشرطي يأخذ احدي الصور الاتية:

a) If P,then Q .
b) P Only if Q .
c) P implies Q .
d) Q if P .

في التقرير الشرطي $P \to Q$ التقرير P يسمي الفرض(Hypothesis) و التقرير Q يسمي الاستنتاج (Conclusion).

■ اعتبر المثال الآتي:−

"سوف اسافر يوم الجمعة اذا لم تمطر"

في هذه الحالة:

P:إذا لم تمطر.

Q:سوف اسافر يوم الجمعة.يمكن اختزال التعبير السابق إلي $P \to Q$.

■ نلاحظ أن:

التعبير $P \to Q$ يكون خاطئ إذا كان التقرير P صحيح و التقرير Q خاطئ و غير ذلك سيكون التقرير $P \to Q$ صحيح.بالتالي فان جدول الصدق للتقرير الشرطي $P \to Q$ كما يلي:

P	Q	$P\to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

5−3 **الشرط المزدوج(Bi-Conditional):**

بفرض أن P,Q أي تقريرين فان التقرير $P\leftrightarrow Q$ يسمي تقرير شرطي مزدوج و يقرأ P اذا كان وفقط اذا كان Q ويعني أن $P\to Q$ و $Q\to P$ أي أن: التقرير الشرطي المزدوج $P\leftrightarrow Q$ يكافئ التقرير $[(P\to Q)\wedge(Q\to P)]$.

■ نلاحظ أن:

التعبير $P\leftrightarrow Q$ يكون صحيح عندما يكون كلاً من التقريرين P,Q صحيحين معاً أو خاطئين معاً.بالتالي فان جدول الصدق للتقرير الشرطي المزدوج $P\leftrightarrow Q$ كما يلي:

P	Q	$P\to Q$	$Q\to P$	$(P\to Q)\wedge(Q\to P)$	$P\leftrightarrow Q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

مثال(4):

كون جدول الصدق لتقرير واحد P ثم لتقريرين P, Q ثم تلك لثلاث تقارير P, Q, R.

الحل:

جدول الصدق لثلاث تقارير

P	Q	R
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

جدول الصدق لتقريرين

P	Q
T	T
T	F
F	T
F	F

جدول الصدق لتقرير واحد

P
T
F

مثال(5): كون جدول الصدق للتقرير المركب $(P \wedge Q) \rightarrow R$.

الحل:–

لدينا ثلاث تقارير P, Q, R

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \rightarrow R$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

مثال(6): كون جدول الصدق للتقرير المركب $\neg (P \wedge \neg Q)$.

الحل:– لدينا تقرين فقط P, Q

P	Q	¬ Q	P ^¬ Q	¬ (P^¬ Q)
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T

مثال(7): كون جدول الصدق للتقرير $(P\rightarrow Q)\leftrightarrow(\neg P \vee Q)$.

الحل:–

P	Q	¬ P	P→Q	¬P v Q	(P→Q)↔(¬P v Q)
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

مثال(8): كون جدول الصدق للتقرير $P\rightarrow(Q\leftrightarrow P\wedge Q)$.

الحل:–

P	Q	P^Q	Q↔P^Q	P→(Q↔P^Q)
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	F	F	T
F	F	F	F	T

(1) العلاقات المنطقية:

سيتم دراسة التكافؤ و التضمين للتقارير.

أولا) التكافؤ Equivalence:

يقال أن التقريرين P,Q متكافئان منطقيا و يرمز لذلك بالرمز $P \equiv Q$ إذا كان و فقط إذا كان P,Q لهما نفس قيم الصدق مهما كان قيم المكونات لكل منهما.

مثال(9): اثبت أن $(P\rightarrow Q) \wedge (Q\rightarrow P) \equiv P \leftrightarrow Q$

الحل:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P\rightarrow Q$	$Q\rightarrow P$	$(P\rightarrow Q) \wedge (Q\rightarrow P)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

واضح من الجدول أن قيم الصدق لتقرير $P \leftrightarrow Q$ هي نفسها قيم الصدق لتقرير $(P\rightarrow Q) \wedge (Q\rightarrow P)$ بالتالي فان التقريران متكافئان.

من العمود الثالث و السادس ينتج المطلوب مباشرة.

مثال(10): اثبت أن $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q \equiv \neg(P \wedge \neg Q) \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$

الحل: لكي نثبت تكافئ هذه التقارير لا بد من إثبات أن لها نفس قيم الصدق

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg(P \wedge \neg Q)$	$\neg Q \rightarrow \neg P$
T	T	T	F	T	F	F	T	T
T	F	F	F	F	T	T	F	F
F	T	T	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	F	T	T

من الأعمدة الثالث و الخامس و الثامن و التاسع ينتج المطلوب مباشرة.

مثال(11): اثبت عن طريق إنشاء جدول الصدق أن

$$P \rightarrow (Q \vee R) \equiv (P \rightarrow Q) \vee (P\rightarrow R)$$

الحل:

لدينا ثلاث تقارير P,Q,R بالتالي فان عدد صفوف جدول الصدق $=2^{\text{عدد التقارير}}=2^3$

=8 صفوف علي النحو التالي:

P	Q	R	Q v R	P→(Q v R)	P→ Q	P→R	(P→ Q) v (P→R)
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T
				↑			↑

من العمودين الخامس و الثامن ينتج المطلوب مباشرة.

<u>(ثانيا) التضمين</u>:

التقرير الشرطي $Q \rightarrow P$ قد يكون صائبا أو خاطئا . فإذا كان صائبا دائما فإننا نقول انه تضمين و نرمز له بالرمز $P \Rightarrow Q$ و يقرأ P يؤدي إلي Q.

<u>مثال(12)</u>: اثبت أن $P \vee P \Rightarrow P$

<u>الحل</u>: المطلوب إثبات أن التقرير $P \vee P \rightarrow P$ صائبا دائما.

P	P ∨ P	P ∨ P → P
T	T	T
F	F	T

و حيث أن العمود الأخير صائب دائما فان $P \vee P \Rightarrow P$.

مثال(13): اثبت أن $((P \to Q)\wedge P) \Rightarrow Q$

الحل:

المطلوب إثبات أن التقرير $((P \to Q)\wedge P) \to Q$ صائبا دائما.

P	Q	$P \to Q$	$(P \to Q)\wedge P$	$((P \to Q)\wedge P) \to Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

من العمود الأخير ينتج المطلوب. أى أن

$$((P \to Q)\wedge P) \Rightarrow Q$$

(2) **التوتولوجي والتناقض:** (Toutology and contradiction)

التوتولوجي هو تقرير مركب يكون صائب دائما , أما التناقض يكون خاطئ دائما.

سنستخدم الرمز =| للدلالة علي أن التقرير p هو توتولوجي.

مثال(14): اثبت أن التقرير $[(P \to Q)\wedge(Q \to R)] \to (P \to R)$ توتولوجي.

الحل: المطلوب إثبات أنه تقرير صائبا دائما نكون جدول الصدق للتقارير كما يلي:

P	Q	R	$P \to Q$	$Q \to R$	$[(P \to Q)\wedge(Q \to R)]$	$P \to R$	$[(P \to Q)\wedge(Q \to R)] \to (P \to R)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

واضح من العمود الأخير أن التقرير المذكور صائبا دائما مما يثبت انه توتولوجي.

مثال(15): اثبت أن التقرير الآتي توتولوجي:

$$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$$

الحل: المطلوب إثبات أنه تقرير صائب دائما.

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

من العمود الأخير يتضح لنا أن التقرير المذكور صائب دائما , وبالتالي فهو توتولوجي.

مثال(16):

وضح أن التقريرين الآتيين متكافئين:

التقرير الأول: الطعام الجيد لا يكون رخيص الثمن .

التقرير الثاني: الطعام رخيص الثمن لا يكون جيد.

الحل:

بفرض أن:

$P\equiv$ الطعام يكون جيد

$Q\equiv$ الطعام يكون رخيص

بالتالي فيمكن وضع التقريرين السابقين كالآتي:

التقرير الأول: $P \rightarrow \neg Q$

التقرير الثاني: $Q \rightarrow \neg P$

لإثبات أن التقريرين السابقين متكافئين نكون جدول الصدق لكلاً منهما:

P	Q	¬Q	¬ P	P→¬Q	Q→¬P
T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T
				↑	↑

واضح من جدول الصدق أن العمودين الأخيرين لهما نفس قيم الصدق و بالتالي فهما متكافئان أي أن :

$$P\rightarrow\neg Q\equiv Q\rightarrow\neg P$$

<u>بمعني آخر:</u>

أن التقرير (الطعام الجيد لا يكون رخيص) يكافئ في المعني التقرير (الطعام الرخيص لا يكون جيد).

<u>مثال(17)</u>: وضح مستخدماً جدول الصدق أن التقريرين الآتيين متكافئين:

التقرير الأول: الرجال الأغنياء يكونوا غير سعداء.

التقرير الثاني: الرجال يكونوا غير سعداء أو فقراء.

<u>الحل:</u> بفرض:

P≡الرجال يكونوا أغنياء

Q≡الرجال يكونوا غير سعداء

بالتالي فيمكن وضع التقريرين السابقين كالآتي:

التقرير الأول: يعني أن لو الرجال أغنياء عندئذ سيكونوا غير سعداء $P\rightarrow Q$

التقرير الثاني: يعني أن الرجال يكونوا غير سعداء أو فقراء(غير أغنياء)$Q \vee \neg P$

لإثبات أن التقريرين السابقين متكافئين نكون جدول الصدق لكلاً منهما:

P	Q	¬ P	P→Q	Q v ¬P
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

واضح من العمود الثالث و العمود الخامس أن التقريرين لهما نفس قيم الصدق و بالتالي فهما متكافئين .أي أن:

$$P\rightarrow Q\equiv Q \vee \neg P$$

أي أن: التقرير الأول الرجال الأغنياء يكونوا غير سعداء تكافئ في المعني الرجال يكونوا غير سعداء أو فقراء (غير أغنياء).

<u>مثال(18)</u>: اثبت أن التقرير $(P \vee Q)\wedge\neg P\wedge\neg Q$ هو تناقض .

<u>الحل</u>: المطلوب إثبات أنه تقرير خاطئ دائما.

P	Q	P v Q	¬P	(P v Q)^¬P	¬Q	(P v Q)^¬P^¬Q
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	T	T	F	F
F	F	F	T	F	T	F

↑

من العمود الأخير يتضح لنا أن التقرير المذكور خاطئ دائما , أي انه تناقض.

(3) **<u>السور الكلي و السور الجزئي</u>:** يستخدم لتحويل الجمل المفتوحة إلي تقرير.

<u>تعريف الجملة المفتوحة</u>: هي تلك الجمل التي لا يمكننا الحكم على صوابها أو خطأها.

مثال(19): الجمل

$x+3=5$, $x^2-1=0$

$xy=6$, هو تلميذ مجتهد

هي جمل مفتوحة لأننا لا نعرف المجهول x,y أو "هو" . و يمكن تحويل مثل هذه الجمل إلي تقارير باستخدام أحد السورين الآتيين:

- **سور كلي:** و يسمي لكل و يرمز له بالرمز $\forall$
- **سور جزئي:** و يسمي يوجد و يرمز له بالرمز $\exists$

مثال(20): الجملة المفتوحة $x+3=5$ بعد تسويرها بالسور الكلي تصبح:

$\forall\ x$ حقيقي : $x+3=5$

تصبح تقرير . وهو تقرير خاطئ فمثلاً $4+3\neq5$.و إذا استخدمنا السور الجزئي تصبح:

$\exists\ x$ حقيقي : $x+3=5$

تصبح تقرير. وهو تقرير صائب فمثلاً لأنه إذا وضعنا $x=2$ فان $x+3=5$ تصبح تقرير صائب.

مثال(21): ضع السور المناسب لتحصل علي تقرير صائب في كل مما يلي :

(1) $(x+1)^2=x^2+2x+1$

(2) $xy=12$

الحل:

(1) x حقيقي : $(x+1)^2=x^2+2x+1$

(3) $\exists\ x, y$ حقيقي : $xy=12$

نفي التقرير السور : تنفي التقارير المسورة كما يلي:

$$\forall \xrightarrow{\text{نفيها}} \exists$$

$$\exists \xrightarrow{\text{نفيها}} \forall$$

مثال(22):

(1) إذا كان لدينا التقرير المسور:

$$\forall\ x_{\text{حقيقي}} : x^2=25$$

فان نفيه هو

$$\exists\ x_{\text{حقيقي}} : x^2\neq 25$$

(2) و إذا كان لدينا التقرير المسور:

$$\exists\ x_{\text{حقيقي}} : x^2=-1$$

فان نفيه هو

$$\forall\ x_{\text{حقيقي}} : x^2\neq -1$$

تماريـن

1) عين التقارير فيما يأتي و اذكر ما إذا كان التقرير صواب أم خطأ في كل حالة:

أ- $8+3=12$

ب- $x-1=-2$

ت- يوجد عدد صحيح بحيث أن $x+1=2$

ث- كل الأعداد الصحيحة x تحقق $x+1=2$

ج- لجميع قيم x,y الحقيقة $(x+y)(x-y)=(x^2-y^2)$

ح- إذا كان $8+2=7$ فان $4+4=8$

خ- العدد18 يقبل القسمة على 3 أو 7

2) كون جدول الصدق لكل من التقارير الآتية:

a) $\neg P \wedge Q$
b) $\neg(P \rightarrow \neg Q)$
c) $\neg(P \wedge Q) \vee (P \leftrightarrow Q)$
d) $(P \rightarrow Q) \vee \neg(P \leftrightarrow \neg Q)$
e) $[P \rightarrow (\neg Q \vee R)] \wedge \neg[Q \vee (P \leftrightarrow \neg R)]$
f) $(P \vee \neg Q) \vee [R \rightarrow (S \wedge \neg S)]$
g) $[(P \vee \neg Q) \vee R)] \rightarrow (S \wedge \neg S)$

اثبت صحة ما يلي:

a) $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
b) $P \vee Q \equiv Q \vee P$
c) $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$
d) $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$
e) $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
f) $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
g) $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
h) $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
i) $\neg(P \rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$
j) $\neg(P \leftrightarrow Q) \equiv \neg P \leftrightarrow Q \equiv P \leftrightarrow \neg Q$
k) $P \rightarrow (Q \wedge R) \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$

3) اثبت أن:

a) $[(P \vee Q) \wedge \neg P]Q \Rightarrow$
b) $[P \wedge (P \rightarrow Q)]Q \Rightarrow$

4) اثبت أن:

a) $\models P \vee \neg P$
b) $\models [(P \vee Q) \wedge \neg P]Q \Rightarrow$
c) $\models \neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
d) $\models \neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
e) $\models \neg(P \wedge \neg P)$

5) اثبت أن كل من التقارير الآتية هو تناقض:

a) $P \wedge \neg Q$
b) $\neg(P \vee \neg P)$

6) انف كل من التقارير الآتية:

a) $\exists x_{\text{طبيعي}}: x \times 0 = 0$
b) $\forall x_{\text{طبيعي}}: x \times 0 = 0$
c) $\exists x_{\text{حقيقي}}: x^2 = 1$
d) $\exists x_{\text{حقيقي}}: x^2+1 = 0$

البرهان الرياضي

(1) مقدمة:

البرهان الرياضي يعتمد على توتولوجية منطقية أي أننا نعتمد على تقرير مركب دائم الصواب. و هناك طريقتان للبرهان الرياضي و هي البرهان المباشر و البرهان الغير مباشر.

أولاً: البرهان المباشر:

مثال(1): استخدم طريقة البرهان المباشر لإثبات انه إذا كان رقم الآحاد في عدد صحيح يقبل القسمة على 2 فان العدد كله يقبل القسمة على 2.

الحل:

نفرض أن رقم الآحاد هو a و رقم عشراته b و رقم مئاته c...وهكذا

العدد $=a+10b+100c+1000d+\dots$

$=a+2(5b+50c+500d+\dots)$

و حيث أن $2(5b+50c+500d+\dots)$ يقبل القسمة على 2, والرقم a يقبل القسمة على 2, إذن العدد كله يقبل القسمة على 2.

ثانياً: البرهان الغير المباشر:

(1) **طريقة التناقض:** في هذه الطريقة نصل إلي تناقض مع الفروض و ذلك بفرض عكس المطلوب.

مثال(2): استخدم طريقة التناقض لإثبات أن $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي.

الحل: نفرض العكس , أي أن $\sqrt{2}$ عدد نسبي.

إذن يمكن وضع $\sqrt{2}$ علي الصورة:

$$\sqrt{2} = m/n$$

حيث أن m,n أعداد صحيحة ليس بينها عامل مشترك.بالتربيع

$$m^2=2n^2$$

إذن m^2 عدد زوجي . من هذا نستنتج أن m عدد زوجي.

نفرض أن: $m=2L$

$$\therefore 4L^2=2n^2$$

$$\therefore n^2=2L^2$$

أي أن n^2 عدد زوجي , ومن ثم n عدد زوجي . إذن يوجد عامل مشترك بين n,m وهو 2 مما يتناقض مع الفرض . هذا التناقض نشأ من فرضنا الخاطئ أن $\sqrt{2}$ عدد نسبي.أي أن $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي.

(2) **طريقة التعاكس**: إذا كان المطلوب إثبات أن $P\Rightarrow Q$, و حيث أن هذا يكافئ منطقياً أن $\neg Q\Rightarrow\neg P$, فإننا نفترض أن $\neg Q$ صحيح و نثبت أن $\neg P$ صحيح.

(3) **طريقة الاستنتاج الرياضي**: نفرض أن n عدد طبيعي و انه مطلوب إثبات أن التقرير P_n صائب لأي قيمة للعدد الطبيعي n.لإثبات ذلك نستخدم طريقة الاستنتاج الرياضي التي تتلخص في الثلاث خطوات الآتية:

a) نثبت أن P_1 تقرير صائب.

b) نفرض أن P_k تقرير صائب حيث أن k عدد طبيعي.

c) نثبت أن P_{k+1} تقرير صائب , أي أن $P_k \Rightarrow P_{k+1}$.

بإجراء الثلاث خطوات السابقة نكون قد بينا أن:

$$P_1 \Rightarrow P_2 , P_2 \Rightarrow P_3 \ldots P_{n-1} \Rightarrow P_n$$

أي أن $P_1 \Rightarrow P_n$.و حيث أن P_1 تقرير صائب , إذن P_n يكون تقرير صائب.

<u>مثال(3):</u> اثبت أن $n(n+1)$ عدد زوجي لجميع قيم n الطبيعية.

<u>الحل:</u> نفرض أن P_n هو التقرير "$n(n+1)$ عدد زوجي "

a) حيث أن $2=(1+1)1$ عدد زوجي . إذن P_1 تقرير صائب .

b) نفرض أن P_k تقرير صائب , أي أن $k(k+1)$ عدد زوجي.

c) نثبت صواب التقرير P_{k+1} , أي أن $(k+1)(k+2)$ عدد زوجي .

و حيث أن:

$$(k+1)(k+2)=k^2+3k+2=k^2+k+2k+2$$
$$=k(k+1)+2(k+1)$$

و لكن من الفرض $k(k+1)$ تقبل القسمة على 2, و الحد الثاني يقبل القسمة علي 2 أيضاً , إذن $(k+1)(k+2)$ عدد زوجي .

من مبدأ الاستنتاج الرياضي ينتج أن $n(n+1)$ عدد زوجي لجميع قيم n.

مثال(4): اثبت مستخدماً مبدأ الاستنتاج الرياضي انه لجميع n∈N يكون :

$$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

الحل:

نثبت صحة التقرير عندما n=1

L.H.S= $\frac{1}{1\times 3}=\frac{1}{3}$

L.H.S= $\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$

أي أن التقرير صحيح عندما n=1

نفرض صحة التقرير عندما n=k أي أن:

$$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$

و نثبت صحة التقرير عندما n=k+1 . عندما n=k+1 يكون الطرف الأيسر

$$L.H.S.=\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}=\frac{k+1}{2(k+1)+1}$$

و هذا يساوي الطرف الأيمن من التقرير عندماn=k+1 .أي أن التقرير صحيح

عندما n=k+1 و بناءاً على مبدأ الاستنتاج الرياضي يكون التقرير صحيحاً لجميع قيم $n\in N$.

مثال(5): اثبت مستخدماً مبدأ الاستنتاج الرياضي انه لجميع $n\in N$ يكون :

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

الحل:

نثبت صحة التقرير عندما n=1

L.H.S= $1^2=1$

R.H.S= $\frac{1}{6}(1+1)(2+1)=1$

أي أن التقرير صحيح عندما n=1

نفرض صحة التقرير عندما n=k أي أن:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

و نثبت صحة التقرير عندما n=k+1 . عندما n=k+1 يكون الطرف الأيسر

$$\begin{aligned}
\text{L.H.S.} &= 1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2\\
&=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2\\
&=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+k+6k+6)\\
&=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)\\
&=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)\\
&=\frac{1}{6}(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)
\end{aligned}$$

و هذا يساوي الطرف الأيمن من التقرير عندما n=k+1. أي أن التقرير صحيح عندما n=k+1 و بناءاً على مبدأ الاستنتاج الرياضي يكون التقرير صحيحاً لجميع قيم $n \in N$.

مثال(6): إذا كان $n \in N,\ x \geq -1$ اثبت باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي المتباينة الآتية:

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

تسمي هذه المتباينة بمتباينة برنولي .

الحل:

نثبت صحة التقرير عندما n=1

L.H.S=$1+x$
R.H.S=$1+x$

أي أن التقرير صحيح عندما n=1

نفرض صحة التقرير عندما n=k أي أن:

$$(1+x)^k \geq 1+kx \qquad (1)$$

و نثبت صحة التقرير عندما n=k+1. وحيث أن $x \geq -1$ إذن $1+x \geq 0$. بضرب طرفي المتباينة (1) في $(1+x)$ نحصل علي:

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &\geq (1+kx)(1+x) = 1+(k+1)x+kx^2 \\ &\geq 1+(k+1)x\end{aligned}$$

حيث kx^2 هو مقدار موجب دائماً.أي أن المتباينة صحيحة في حالة n=k+1 و بناءاً على مبدأ الاستنتاج الرياضي تكون متباينة برنولي صحيحة لجميع قيم $n \in N$.

تمارين

(1) اثبت باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي أن التقارير الآتية صحيحة لجميع قيم $n\in N$:

i. $1+2+3+\cdots+n=\frac{n}{2}(n+1)$

ii. $1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{n}{2}(3n-1)$

iii. $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n}{3}(4n^2-1)$

iv. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2}{4}(n+1)^2$

v. $1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$

vi. $1+7+13+\cdots+(6n-5)=n(3n-2)$

vii. $1+5+5^2+\cdots+5^{n-1}=\frac{1}{4}(5^n-1)$

viii. $1.2+2.3+3.4+\cdots+n(n+1)=\frac{n}{3}(n+1)(n+2)$

ix. $2.5+3.7+4.9+\cdots+(n+1)(2n+3)=\frac{n}{6}(4n^2+21n+35)$

x. $\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r(r+1)}=\frac{n}{n+1}$

xi. $\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{(2r-1)(2r+1)}=\frac{n}{2n+1}$

xii. $\sum_{r=1}^{n}r.3^r=\frac{3}{4}[(2n-1).3^n+1]$

xiii. $\sum_{r=1}^{n}\frac{r+2}{r(r+1)2^r}=1-\frac{1}{(n+1).2^n}$

(2) اثبت أن $x^{2n}-y^{2n}$ تقبل القسمة على $x+y$ لجميع قيم $n \in N$.

(3) اثبت أن $5^{2n}-6n+8$ تقبل القسمة على 9 لجميع قيم $n \in N$.

الباب الرابع

نظرية الفئة
Set Theory

مقدمة:

الفئة عبارة عن تجميع من الأشياء المعرفة جيداً (يعني مختلفة وقابلة للتمييز). في القرن التاسع عشر على يد العالم الرياضي الألماني جورج كانتور (Geroge Cantor) تطورت نظرية الفئات حيث وضع للفئات أسس مبنية على علم الرياضيات، كما ساهم بشكل كبير كلاً من العالمين بيرت لاند ريسيل (Bertrand Russell)، نورس ويت هد (North whitehead) في تطور نظرية الفئات. لوحظ في عام 1940 أن جميع الرياضيات يمكن تطويرها من نظرية الفئات.

سندرس المبادئ الأساسية للفئات وبعض العمليات على الفئات وحاصل الضرب الكارتيزي للفئات وتطبيق على نظرية الفئات.

4–1 الفئات:

كما ذكرنا سابقاً أن الفئة هي عبارة عن تجميع من الأشياء المعرفة جيداً، هذه الأشياء تسمى عناصر الفئة. تغيير ترتيب العناصر داخل الفئة لا يغير الفئة، بمعنى أن ترتيب العناصر داخل الفئة لا يلعب دور حيوي في نظرية الفئات.

على سبيل المثال، الفئتين الآتيتين متساويتين:

$$A = \{a, b, c, d\}, \qquad B = \{b, a, d, c\}$$

الرمز $\in$ يعني "ينتمي إلى" لو أن العنصر x واقع داخل الفئة A فنعبر عنه رياضياً $x \in A$. نلاحظ أن لو أن الفئة A وx أي عنصر فإما $x \in A$ أو $x \notin A$ لكن ليس

كليهما. عموماً نعبر الفئة بحروف كبيرة $A, B, C, \ldots$.

أمثلة للفئات:

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$$
$$B = \{x, y, z, u, v, w\}$$
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$
$$I = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

بصفة عامة:

الفئة يمكن التعبير عنها بطريقتين،هما:

الطريقة المسطحة أو المستوية (Tabular) تسمى أيضاً طريقة (Roster) وطريقة التحديد (Specification) تسمى أيضاً طريقة (Setbuilder).

1- **الطريقة المسطحة أو المستوية (Tabular):** **(وتعرف أيضاً بطرية السرد)**

تعبر عن عناصر الفئة عن طريق وضعها داخل أقواس مجموعة، ويفصل بين العناصر بوضع فاصلة، كما في المثال الآتي:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 7, \ldots\}$$

2- **طريقة التحديد (Specification method):** **(وتعرف أيضاً بطرية الصفة المميزة)**

تعبر عن عناصر الفئة بقاعدة أو صيغة. كما في المثال الآتي:

$$S = \{x \mid P(x)\}$$

حيث أن $P(x)$ هي الخاصية التي تصف عناصر الفئة، الرمز "|" يعني "بحيث"

ليس من الممكن كتابة كل فئة بطريقة Tabula. على سبيل المثال:

$$S = \{x \mid x \text{ is an Egyptian}\}$$

لا يمكن كتابة هذه الفئة بالطريقة الأولى لأنه من الصعب حصر جميع المصريين.

اعتبر الأمثلة الآتية:

$$A = \{x \mid x = 2n + 1;\ 0 \le n \le 7;\ n \in I\}$$
$$= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$$

$$B = \{x \mid x = 1, x = \text{a}, x = \text{book}, x = \text{pen}\}$$
$$= \{1, \text{a}, \text{book}, \text{pen}\}$$

واضح أن عناصر الفئة B ليس لها خاصية مشتركة، أي أن عناصر أي فئة قد يكون بينهم خاصية مشتركة أو لا، كما في الفئة A أو ليس بينهم خاصية مشتركة كما في الفئة B.

2–4 أنواع الفئات:

يوجد نوعين من الفئات:

1–2 فئات منتهية Finite Sets

الفئة التي تحتوي على عدد محدود من العناصر تعرف بالفئات المنتهية، كما في المثال الآتي:

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

2–2 الفئات الغير منتهية Infinite Sets

الفئة التي تحتوي على عدد غير محدود من العناصر تعرف بالفئات الغير منتهية (اللانهائية)، كما في المثال الآتي:

فئة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

فئة الأعداد الصحيحة I

$$I = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

3–2 الفئة المفردة Singleton Set

الفئة التي تحتوي على عنصر واحد فقط وتعرف بالفئة المفردة، كما في المثال:

$$S = \{3\}.$$

4–2 فئة الزوج Pair Set

الفئة التي تحتوي على عنصرين فقط تعرف بفئة الزوج.

$$S = \{e, f\}$$
$$S = \{\{a\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

5–2 الفئة الخالية Empty Set or Void Set or Null

الفئة التي لا تحتوي على عناصر تعرف بالفئة الخالية ويرمز لها عموماً بالرمز $\varnothing$ كما في الأمثلة الآتية:

1) $\varnothing = \{x : x \neq x\}$
2) $\varnothing = \{x : x$ is a month of year containing 40 days$\}$.

6–2 فئة الفئات Set of Sets

الفئة التي تحتوي على فئات تعرف بفئة الفئات، كما في المثال الآتي:

$$A = \{\{a, b\}, \{1\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{\text{book, pen}\}, \{5, \text{u}\}\}.$$

7–2 الفئة الشاملة Universal Set

الفئة التي تحتوي على جميع عناصر الفئات التي تحت الاعتبار تعرف بالفئة الشاملة ويرمز لها بالرمز U أو E أو Ω. كما في المثال الآتي:

الفئة الشاملة U تحتوي على عناصر الفئات A, B, C

$$A = \{\text{a, b, c}\}, \quad B = \{\text{a, e, i, o, u}\}, \quad C = \{\text{p, q, r, s}\}$$
$$U = \{x : x \text{ alphabetic characters}\}$$
$$= \{\text{a, b, c, …, z}\}$$

3–4 قوة الفئة *Cardinality of Set*

إذا كانت S فئة، عدد عناصر الفئة S يسمى قوة الفئة S ويرمز له بالرمز $|S|$.

رياضياً إذا كانت:

$$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$$

فإن:

$$|S| = k; \qquad k \in \mathbb{N}$$

على سبيل المثال، اعتبر الفئة الآتية:

$$A = \{x : x = 2^n, n = \{1, 2, \ldots, 8\}\}$$
$$= \{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256\}$$

$\therefore$ عدد عناصر الفئة $A = |A| = 8$.

3–1 الفئات المتكافئة Equivalent Sets

الفئتين A, B يقال أنهما متكافئتان إذا كان لهما نفس عدد العناصر، أي لهما نفس قوة الفئة، أي أن: $|A| = |B|$.

الفئات المتكافئة تعرف أيضاً بالفئات المتشابهة ويرمز لها بالرمز $A \approx B$.

اعتبر أن A, B فئتين معرفتين كالآتي:

$$A = \{\text{a, e, i, o, u}\}, \quad B = \{7, 9, 11, 13, 15\}$$
$$|A| = |B| = 5.$$

$\because$ الفئتين A, B لهما نفس عدد العناصر بالتالي فإنهما متكافئتان.

4–4 الفئة الجزئية والاحتواء *Subset and Superset*

يقال أن الفئة A جزئية من الفئة B أو بمعنى آخر الفئة B تحتوي الفئة A إذا كان كل عنصر في الفئة A هو أيضاً عنصر في الفئة B وتكتب: $A \subseteq B$، أي أن:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \{x \in A \Rightarrow x \in B; \forall x \in A\}$$

الرمز $\Leftrightarrow$ يعني "إذا كان وفقط إذا كان" والرمز $\Rightarrow$ يعني "يؤدي إلى" والرمز $\forall$ يعني "لكل".

- اعتبر الأمثلة الآتية:

(i) Let $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\quad B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
So, $\quad A \subseteq B$.

(ii) Let $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, a\}$

So, $A \subseteq B$, $B \subseteq A$.

(iii) Let $A = \{\ \}$ and $B = \{1, 2, 3\}$

So, $A \subseteq B$.

4-1 الفئات المتساوية

يقال أن الفئتين A, B أنهما متساويتان إذا كان وفقط إذا كان كل عنصر في A يكون موجود في B وكل عنصر في B يكون موجود في أيضاً في A. رياضياً:

$$A = B \Leftrightarrow \{A \subseteq B \text{ and } B \subseteq A\}$$

$$A = B \Leftrightarrow \{x \in A \Leftrightarrow x \in B\}$$

اعتبر المثال الآتي:

Let $A = \{x, y, z, p, q, r\}$, $B = \{p, q, r, x, y, z\}$

واضح أن كل عنصر في A أيضاً موجود في B، أي أن $A \subseteq B$ وكل عنصر في B أيضاً موجود في A، أي أن $B \subseteq A$، أي أن:

$$A \subseteq B \quad \text{and} \quad B \subseteq A$$

بالتالي فإن الفئتين A, B متساويتان $(A = B)$.

4-2 الفئة الجزئية الفعلية Proper Subset

يقال أن الفئة A فئة جزئية فعلية من الفئة B إذا كان كل عنصر في A هو أيضاً عنصر في B ويوجد على الأقل عنصر في B غير موجود في A وتكتب $A \subset B$ ونعبر عنها رياضياً كالآتي:

$$A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad \{x \in A \Rightarrow x \in B \text{ and for at least one } y \in B \Rightarrow y \notin A\}$$

اعتبر المثال الآتي:

$$A = \{a, b, c, d\}, \qquad B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

واضح أن لكل عنصر $x \in A$ فإن $x \in B$ أي أن جميع عناصر الفئة A موجودة داخل الفئة B. ويوجد على الأقل عنصر وليكن $e \in B$ ولكن $e \notin A$، أي أن:

$$A \subset B.$$

لاحظ الآتي:

(1) أي فئة هي فئة جزئية من نفسها، أي أن $A \subseteq A$.

(2) الفئة الخالية هي فئة جزئية من أي فئة، أي أن $\varnothing \subseteq A$.

4–5 مقارنة الفئات *Comparability of Sets*

يقال أن الفئتين A, B أنهما قابلتان للمقارنة comparable إذا كان وفقط إذا كان أحد العلاقات الآتية متحققة:

(i) $A \subset B$ or (ii) $B \subset A$ or (iii) $A = B$.

اعتبر الفئات الآتية:

$$A = \{a, b, c, d, e\}, \quad B = \{2, 3, 5\}, \quad C = \{c, d, e\}$$

واضح أن $A \neq B$, $B \not\subset A$, $A \not\subset B$ وبالتالي فإن الفئتين B, A غير قابلتين للمقارنة.

بالمثل $C \neq B$, $C \not\subset B$, $B \not\subset C$ وبالتالي فإن الفئتين C, B غير قابلتين للمقارنة.

بينما $C \subset A$ وبالتالي فإن الفئتين C, A قابلتين للمقارنة.

4–6 فئة القوى *Power Set*

بفرض أن A فئة ما، فإن فئة جميع الفئات الجزئية من الفئة A تُعرف بقوة الفئة A ويرمز لها بالرمز $\mathrm{P}(A)$. رياضياً:

$$\mathrm{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}.$$

اعتبر الأمثلة الآتية:

$$A = \{a\} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}\}.$$

$$A = \{a, b\} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

$$A = \{a, b, c\} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

من الأمثلة السابقة واضح أن إذا كانت الفئة A بها n من العناصر فإن قوة الفئة A تحتوي

على 2^n من العناصر، أي أن:

$$\text{If } |A| = n \qquad \Rightarrow \qquad P(A) = 2^n.$$

7–4 العمليات على الفئات Operators on Sets

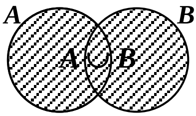
سنتناول في هذا الجزء العمليات المختلفة على الفئات كالاتحاد والتقاطع والفرق كمدخل لجبر الفئات.

7–1 الاتحاد Union

اتحاد فئتين B, A يرمز له بالرمز $A \cup B$ ويعرف على انه فئة كل العناصر الموجودة في الفئتين A أو B أو كليهما. ويعبر عنه رياضياً كالآتي:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$$

ونعبر عنه بشكل ڤن (Venn diagram) كالآتي:



اعتبر المثال الآتي:

بفرض أن:

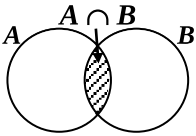
$$A = \{a, b, c, d, e\}, \quad B = \{a, e, i, o, u\}$$
$$\therefore\ A \cup B = \{a, b, c, d, e, i, o, u\}.$$

7–2 التقاطع Intersection

تقاطع الفئتين B, A يرمز له بالرمز $A \cap B$ ويعرف على أنه فئة جميع العناصر المشتركة بين الفئتين B, A ويعبر عنه رياضياً كالآتي:

$$A \cap B = \{\, x : x \in A \text{ and } x \in B\}$$

ونعبر عنه بشكل ڤن كالآتي:



اعتبر المثال الآتي:

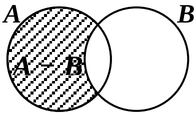
$$A = \{a, b, c, d, e\}, \quad B = \{a, e, i, o, u\}$$
$$\therefore\ A \cap B = \{a, e\}.$$

3−7 الفرق Difference

الفرق بين الفئتين B, A ويكتب $A - B$ يُعرف على أنه فئة جميع العناصر التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B ويعبر عنه رياضياً كالآتي:

$$A - B = \{\ x : x \in A \text{ and } x \notin B\}$$

ويعبر عن الفرق بشكل ڤن كالآتي:



اعتبر المثال الآتي:

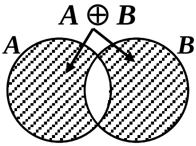
$$A = \{a, b, c, d, e, f\}, \qquad B = \{a, c, i, o, u, k\}$$
$$\therefore\ A - B = \{b, d, e, f\}.$$

4−7 الفرق المتماثل Symmetric Difference

الفرق المتماثل بين الفئتين B, A يكتب $A \Delta B$ أو $A \oplus B$ يُعرف على أنه فئة جميع العناصر التي تنتمي إلى A أو تنتمي إلى B ولكن لا تنتمي إلى كليهما. ويعبر عنه رياضياً كالآتي:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

ويعبر عنها بشكل ڤن كالآتي:



اعتبر المثال الآتي:

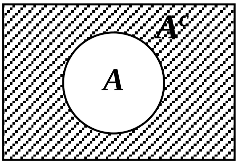
$$A = \{a, b, c, k, p, q, r, s\}, \quad B = \{b, k, q, m, n, o, t\}$$
$$\therefore A - B = \{a, c, p, r, s\}, \quad B - A = \{m, n, o, t\}$$
$$\therefore A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$
$$= \{a, c, p, r, s, m, n, o, t\}$$

5–7 مكملة الفئة Complement of a set

مكملة الفئة A وتكتب A^c أو A' أو $\bar{A}$ وتعرف على أنها فئة جميع العناصر التي تنتمي إلى الفئة الشاملة U ولا تنتمي إلى A ويعبر عنها رياضياً كالآتي:

$$A^c = \{x : x \in U \text{ and } x \notin A\}$$

ويعبر عن مكملة الفئة بشكل ڤن كالآتي:



اعتبر المثال الآتي:

$$A = \{b, c, k, d, i, p, q, r, s, t\},$$
$$B = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$$
$$\therefore A^c = U - A = \{a, e, f, g, h, j, l, m, n, o, u, v, w, x, y, z\}.$$

6–7 نظرية:

بفرض أن C, B, A فئات جزئية من الفئة الشاملة U. فإن القوانين الآتية متحققة:

(1) قانون التبديل Commutative Law:

$A \cup B = B \cup A,$ $\qquad$ $A \cap B = B \cap A.$

(2) قانون الدمج Associative Law:

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$ $\qquad$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(3) قانون التماثل Idempotent Law:

$A \cup A = A,$ $\qquad$ $A \cap A = A$

(4) قانون الوحدة Identity Law:

$A \cup \varnothing = A,$ $\qquad$ $A \cap U = A$

(5) قانون الحد Bound Law:

$A \cup U = U,$ $\qquad$ $A \cap \varnothing = \varnothing$

(6) قانون الامتصاص Absorption Law:

$A \cup (A \cap B) = A,$ $\qquad$ $A \cap (A \cup B) = A$

(7) قانون المكملة Complementary Law:

$A \cup A^c = U,$ $\qquad$ $A \cap A^c = \varnothing$

(8) قانون الالتفاف Involution Law:

$$\left(A^c\right)^c = A\ .$$

(9) قانون التوزيع Distribution Law:

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$

(ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$

الإثبات:

إثبات القوانين من (1) إلى (8) تأتي مباشرة من التعريفات التي ذكرناها سابقاً. سنثبت هنا فقط قانون التوزيع:

(i) $x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \text{ or } x \in (B \cap C)$

$\Leftrightarrow x \in A \text{ or } (x \in B \text{ and } x \in C)$

$\Leftrightarrow (x \in A \text{ or } x \in B) \text{ and } (x \in A \text{ or } x \in C)$

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \text{ and } x \in (A \cup C)$

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

تذكر أن السهم $\Leftrightarrow$ يعني أن الإثبات في الاتجاهين.

$$\therefore\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii)}\ x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ and } x \in (B \cup C)\\
&\Leftrightarrow x \in A \text{ and } (x \in B \text{ or } x \in C)\\
&\Leftrightarrow (x \in A \text{ and } x \in B) \text{ or } (x \in A \text{ and } x \in C)\\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \text{ or } x \in (A \cap C)\\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}$$

$$\therefore\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

7–7 نظرية:

بفرض أن A, B فئتين جزئيتين من الفئة الشاملة U. فإن القوانين الآتية متحققة:

(a) $A \Delta A = \varnothing$.

(b) $A \Delta B = B \Delta A$.

(c) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

(d) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

الإثبات:

إثبات (a), (b) يأتي مباشرة من تعريف الفرق المتماثل. هنا سنثبت (c), (d)

$$\begin{aligned}
\text{(c)}\ x \in A \cap (B \Delta C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ and } x \in \left(B \Delta C\right)\\
&\Leftrightarrow x \in A \text{ and } x \in \left(\left(B - C\right) \cup \left(C - B\right)\right)\\
&\Leftrightarrow x \in A \text{ and} \left(x \in \left(B - C\right) \text{or } x \in \left(C - B\right)\right)\\
&\Leftrightarrow \left(x \in A \text{ and } x \in \left(B - C\right)\right) \text{or} \left(x \in A \text{ and} x \in \left(C - B\right)\right)\\
&\Leftrightarrow \left(x \in A \text{ and} \left(x \in B \text{ and } x \notin C\right)\right) \text{or}\\
&\qquad \left(x \in A \text{ and} \left(x \in C \text{ and } x \notin B\right)\right)\\
&\Leftrightarrow \left(\left(x \in A \text{ and } x \in B\right) \text{and} \left(x \in A \text{ and } x \notin C\right)\right) \text{or}\\
&\qquad \left(\left(x \in A \text{ and } x \in C\right) \text{and} \left(x \in A \text{ and } x \notin B\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \big(x \in (A \cap B) \text{ and } x \notin (A \cap C)\big) \text{ or }$$
$$\big(x \in (A \cap C) \text{ and } x \notin (A \cap B)\big)$$
$$\Leftrightarrow \big(x \in (A \cap B) - (A \cap C)\big) \text{ or } \big(x \in (A \cap C) - (A \cap B)\big)$$
$$\Leftrightarrow x \in \big((A \cap B) - (A \cap C)\big) \cup \big((A \cap C) - (A \cap B)\big)$$
$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$
$$\therefore\ x \in A \cap (B \,\Delta\, C) \quad \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$
$$\therefore\ A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C).$$

هذا هو المطلوب إثباته.

(d) $x \in (A \cup B) - (A \cap B) \quad \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \text{ and } x \notin (A \cap B)$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \text{ and } (x \notin A \text{ or } x \notin B)$$
$$\Leftrightarrow \big(x \in (A \cup B) \text{ and } x \notin A\big) \text{ or }$$
$$\big(x \in (A \cup B) \text{ and } x \notin B\big)$$
$$\Leftrightarrow \big((x \in A \text{ or } x \in B) \text{ and } x \notin A\big) \text{ or }$$
$$\big((x \in A \text{ or } x \in B) \text{ and } x \notin B\big)$$
$$\Leftrightarrow \big((x \in A \text{ and } x \notin A) \text{ or } (x \in B \text{ and } x \notin A)\big) \text{ or }$$
$$\big((x \in A \text{ and } x \notin B) \text{ or } (x \in B \text{ and } x \notin B)\big)$$
$$\Leftrightarrow \big(x \in \varnothing \text{ or } x \in (B - A)\big) \text{ or }$$
$$\big(x \in (A - B) \text{ or } x \in \varnothing\big)$$
$$\Leftrightarrow x \in \big(\varnothing \cup (B - A)\big) \text{ or } x \in \big((A - B) \cup \varnothing\big)$$
$$\Leftrightarrow x \in (B - A) \text{ or } x \in (A - B)$$
$$\Leftrightarrow x \in (B - A) \cup (A - B)$$
$$\Leftrightarrow x \in (B \Delta A)$$
$$\Leftrightarrow x \in (A \Delta B)$$
$$\therefore\ x \in (A \cup B) - (A \cap C) \quad \Leftrightarrow x \in (A \Delta B)$$

$$\therefore\ A \,\Delta\, B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

هذا هو المطلوب إثباته.

8–7 قانون دي مورجان De-Morgan's Law:

بفرض أن A, B فئتين جزئيتين من الفئة الشاملة U فإن:

(a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

الإثبات:

(a)
$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ and } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \text{ and } x \in B^c \\ &\Leftrightarrow x \in (A^c \cap B^c) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \in (A^c \cap B^c)$$

$$\therefore \ (A \cup B)^c = A^c \cap B^c .$$

(b)
$$\begin{aligned} x \in (A \cap C)^c &\Leftrightarrow x \notin A \cap B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ or } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \text{ or } x \in B^c \\ &\Leftrightarrow x \in (A^c \cup B^c) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad x \in (A \cap C)^c \Leftrightarrow x \in (A^c \cup B^c)$$

$$\therefore \ (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

هذا هو المطلوب إثباته.

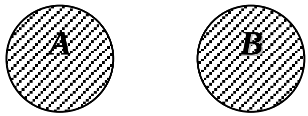
8–4 الفئات المتنافية *Disjoint Sets*:

يقال أن الفئتين A, B أنهما متنافيتان إذا كان كليهما لا يوجد بينهما عنصر مشترك.

و يعبر عنها رياضيا:

$$A \cap B = \varnothing$$

وبشكل ڤن يكون:



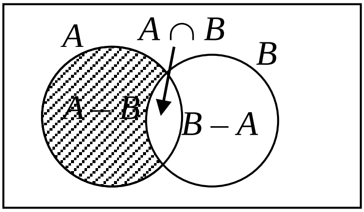
9–4 تطبيقات على نظرية الفئة Applications of Set Theory

بفرض أن A, B فئات منتهية وبفرض أن $n(A)$ هو عدد العناصر المختلفة للفئة A فإن:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

وإذا كان A, B متنافيان فإن:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$



الإثبات:

من شكل ڤن واضح أن:

$$n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$$

$$n(B) = n(B - A) + n(A \cap B)$$

$$\therefore\ n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$$

$$= n(A) - n(A \cap B) + n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\therefore\ n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

هذا هو المطلوب إثباته أولاً.

إذا كان A, B متنافيان فإن $A \cap B = \varnothing$ وبالتالي فإن $n(A \cap B) = 0$ لذلك سيصبح:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

10–4 ضرب الفئات Product of Sets

سنستخدم الزوج المرتب في تعريف ضرب الفئات. يرمز للزوج المرتب بالرمز (x, y) حيث $(x, y) \neq (y, x)$ حينما $x \neq y$.

حاصل ضرب الفئتين B, A هو فئة جميع الأزواج المرتبة التي إحداثيها الأول هو عنصر من الفئة A وإحداثيها الثاني هو عنصر من الفئة B ويرمز له بالرمز $A \times B$.

رياضياً:

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ and } y \in B\}$$

اعتبر على سبيل المثال:

$$A = \{1, 2, 3, 5, 7\}, \quad B = \{4, 9, 25\}$$

$$\therefore A \times B = \{(1, 4), (1, 9), (1, 25), (2, 4), (2, 9), (2, 25), (3, 4), (3, 9), (3, 25), (5, 4), (5, 9), (5, 25), (7, 4), (7, 9), (7, 25)\}.$$

<u>لاحظ أن:</u> حاصل ضرب الفئات يمكن تعميمه لعدد n من الفئات فيصبح:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \in A_1 \text{ and } x_2 \in A_2 \ldots x_n \in A_n\}$$

حيث $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ يسمى n-tuple من العناصر $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

ولتوضيح ذلك اعتبر المثال الآتي:

$$A = \{a, b, c\}, \qquad B = \{1, 2\}, \qquad C = \{\alpha, \beta\}$$

$$A \times B \times C = \{(a, 1, \alpha), (a, 1, \beta), (a, 2, \alpha), (a, 2, \beta), (b, 1, \alpha), (b, 1, \beta), (b, 2, \alpha), (b, 2, \beta), (c, 1, \alpha), (c, 1, \beta), (c, 2, \alpha), (c, 2, \beta)\}$$

من الأمثلة السابقة واضح أن:

$$|A \times B \times C| = |A| \times |B| \times |C|.$$

وكحالة عامة:

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \ldots \times |A_n|.$$

1-10 نظرية:

بفرض أن A, B, C ثلاث فئات جزئية من الفئة الشاملة U فإن:

(a) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

(b) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

الإثبات:

$$\begin{aligned}
\text{(a)}\ (x,y)\in A\times(B\cup C) &\Leftrightarrow x\in A \text{ and } y\in(B\cup C)\\
&\Leftrightarrow x\in A \text{ and}(y\in B \text{ or } y\in C)\\
&\Leftrightarrow (x\in A \text{ and } y\in B)\text{or } (x\in A \text{ and } y\in C)\\
&\Leftrightarrow (x,y)\in(A\times B)\text{or } (x,y)\in(A\times C)\\
&\Leftrightarrow (x,y)\in(A\times B)\cup(A\times C)\\
\therefore\ (x,y)\in A\times(B\cup C) &\Leftrightarrow (x,y)\in(A\times B)\cup(A\times C)
\end{aligned}$$

$$\therefore A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C).$$

هذا هو المطلوب إثباته أولاً.

$$\begin{aligned}
\text{(b)}\ (x,y)\in A\times(B\cap C) &\Leftrightarrow x\in A \text{ and } y\in(B\cap C)\\
&\Leftrightarrow x\in A \text{ and}(y\in B \text{ and } y\in C)\\
&\Leftrightarrow (x\in A \text{ and } y\in B)\text{and } (x\in A \text{ and } y\in C)\\
&\Leftrightarrow (x,y)\in(A\times B)\text{and } (x,y)\in(A\times C)\\
&\Leftrightarrow (x,y)\in(A\times B)\cap(A\times C)\\
\therefore\ (x,y)\in A\times(B\cap C) &\Leftrightarrow (x,y)\in(A\times B)\cap(A\times C)
\end{aligned}$$

$$\therefore\ A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C).$$

هذا هو المطلوب إثباته ثانياً.

4–11 حواصل الضرب الأساسية Fundamental Products

بفرض أن $A_1, A_2, \ldots, A_n$ هم n من الفئات. حاصل الضرب الأساسي لهذه الفئات يعبر عنه كالآتي:

$$B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n$$

حيث أن B_i هو إما A_i أو A_i^c.

على سبيل المثال: بفرض أن لدينا ثلاث فئات A, B, C حواصل الضرب الأساسية لهذه الفئات الثلاث يساوي

$$2^{\text{عدد الفئات}} = 2^3 = 8$$

وهي كالآتي:

$$A \cap B \cap C, A^c \cap B \cap C, A \cap B^c \cap C, A \cap B \cap C^c,$$
$$A^c \cap B^c \cap C, A^c \cap B \cap C^c, A \cap B^c \cap C^c, A^c \cap B^c \cap C^c$$

تمارين

(1) بفرض أن A ,B ,C فئات جزئية من الفئة الشاملة U. أثبت أن:

(a) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

(b) $A-(B\cup C)=(A-B)-C$

(c) $(A\cap B)-C=A\cap(B-C)$

(2) أثبت أن $A-\bigcup_{i=1}^{n}B_i=\bigcap_{i=1}^{n}(A-B_i)$

(3) أثبت أن:

(a) $A-B=A\cap B^c$ (b) $(A-B)\cap C=\varnothing$

(4) بفرض أن A ,B ,C فئات جزئية من الفئة الشاملة U. أثبت أن:

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$$
$$-n(C\cap A)+n(a\cap B\cap C)$$

(5) أثبت أنه إذا كان $A\subset B$,$B\subset C$ فإن $A\subset C$.

(6) لأي فئتين A ,B أثبت أن:

$$\overline{A\times B}=\bar{A}\times\bar{B}$$

(7) لأي ثلاث فئات A ,B ,C أثبت أن:

$$A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$$

(8) باستخدام خصائص الفئات، أثبت أن لأي فئتين A ,B فإن:

(a) $(A\cap B)\cup(B-A)=B$ (b) $(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$

(9) أثبت أنه لأي ثلاث فئات X ,Y ,Z فإن:

(a) $X\cap(Y-Z)=(X\cap Y)-(X\cap Z)$

(b) $X-(Y\cup Z)=(X-Y)\bigcap Z^c$

(10) عين التساوي لزوج الفئات الآتي:

$$A=\{x\mid x=1,2,3\}\ \ and\ \ B=\{x\mid x\in\mathbb{N};x^3-6x^2+11x-6=0\}$$

الباب الخامس

العلاقات الثنائية

Binary Relations

يعتبر مفهوم العلاقات مبين على نظرية الفئات. فالعلاقات لها تطبيقات عديدة خصوصاً في علوم الحاسب. فالعلاقات المستخدمة في الرياضيات وعلوم الحاسب هي: "أقل من"، "جزئية من"، "عمودي على"، "مساوي لـ"، ... وهكذا.

تُعرّف العلاقة على أنها فئة من الأزواج المرتبة.

5–1 العلاقة الثنائية *Binary Relation*

بفرض أن A, B فئتين. بالتالي أي فئة جزئية R من حاصل الضرب الديكارتي $(A \times B)$ هي علاقة (علاقة ثنائية) من الفئة A إلى الفئة B. أي أن:

$$R \subseteq (A \times B) \Leftrightarrow R = \{(x, y) \mid x \in A \text{ and } y \in B\}$$

إذا كان $(x, y) \in R$ فإننا نكتبها بالصورة $x\,R\,y$ ومعناها أن x في علاقة مع y.

إذا كان $(x, y) \notin R$ فإننا نكتبها بالصورة $x \not{R} y$ ومعناها أن x ليست في علاقة مع y.

إذا كان $A = B$ فإننا نقول أن R هي علاقة ثنائية علي الفئة A.

اعتبر المثال الآتي:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13\}$$

وبفرض أن العلاقة R من الفئة A إلى الفئة B كالتالي:

$$R = \{(x, y) : x \in A \text{ and } y = 2x + 3 \in B\}$$
$$R = \{(1, 5), (2, 7), (3, 9), (4, 11), (5, 13)\}$$

واضح أن:

$$R \subseteq A \times B$$

1–1 مجال العلاقة Domain of Relation:

بفرض أن R علاقة من الفئة A إلى الفئة B فإن فئة جميع المركبات الأولى للأزواج المرتبة في العلاقة تسمى مجال العلاقة R. ويرمز لها بالرمز $D(R)$. أي أن:

$$D(R) = \{x : (x, y) \in R \text{ for } x \in A\}$$

أي أن:

$$D(R) \subseteq A.$$

5 –1–2 مدى العلاقة Range of Relation:

بفرض أن R علاقة من الفئة A إلى الفئة B. فإن فئة جميع المركبات الثانية للأزواج المرتبة في العلاقة R تسمى مدى العلاقة R. ويرمز لها بالرمز $\mathrm{R}(R)$. أي أن:

$$\mathrm{R}(R) = \{y : (x, y) \in R \text{ for } y \in B\}$$

أي أن:

$$\mathrm{R}(R) \subseteq B$$

اعتبر المثال الآتي:

بفرض أن:

$$A = \{a, b, c, d\}, \qquad B = \{5, 6, 7\}$$

بفرض أن العلاقة R من الفئة A إلى الفئة B معرفة كالآتي:

$$R = \{(a, 5), (a, 6), (c, 6), (d, 6)\}$$

فإن:

$$D(R)= \{a, c, d\}, \qquad R(R) = \{5, 6\}$$

2–5 العلاقة العكسية *Inverse Relation*:

بفرض أن R علاقة من الفئة A إلى الفئة B فإن معكوس العلاقة R هي علاقة من الفئة B إلى الفئة A ويرمز لها بالرمز R^{-1} وتعرف كالتالي:

$$R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$$

اعتبر المثال الآتي:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{4, 9, 10, 17, 25\}$$

وبفرض أن العلاقة R من الفئة A إلى الفئة B معرفة كالآتي:

$$R = \{(2, 4), (3, 9), (4, 16), (3, 17)\}$$

وبالتالي فإن:

$$R^{-1} = \{(4,2),(9,3),(16,4),(17,3)\}$$

<u>5-2-1 نظرية:</u>

إذا كانت R علاقة من الفئة A إلى الفئة B فإن:

(i) $D(R) = \mathrm{R}(R^{-1})$ (ii) $\mathrm{R}(R) = D(R^{-1})$

(iii) $(R^{-1})^{-1} = R$.

<u>الإثبات:</u>

لإثبات (i) لا بد من إثبات أن $D(R) \subseteq \mathrm{R}(R^{-1})$، $\mathrm{R}(R^{-1}) \subseteq D(R)$ وبما أن معطى أن R علاقة من الفئة A إلى الفئة B، أي أن:

$$R \subseteq (A \times B)$$

من تعريف العلاقة نعلم أن:

$$R = \{(x, y): x \in A \text{ and } y \in B\}$$

نثبت أولاً أن $D(R) \subseteq \mathrm{R}(R^{-1})$

بفرض أن $x \in D(R)$. وبالتالي فإنه يوجد $y \in B, x \in A$ بحيث أن $(x, y) \in R$.

وهذا بدوره يؤدي من تعريف العلاقة العكسية أن:

$$(y, x) \in R^{-1}$$

$$\therefore \; x \in \mathrm{R}(R^{-1})$$

أي أننا أخذنا $x \in D(R)$ وجدنا أن $x \in \mathrm{R}(R^{-1})$ بالتالي فإن:

$$D(R) \subseteq \mathrm{R}(R^{-1}) \qquad (1)$$

بقي لنا أن نثبت أن $\mathrm{R}\left(R^{-1}\right) \subseteq D\left(R\right)$ بنفس الكيفية السابقة.

بفرض أن $x \in \mathrm{R}\left(R^{-1}\right)$، بالتالي فإنه يوجد $y \in B, x \in A$ بحيث أن:

$$\left(y, x\right) \in R^{-1}$$
$$\therefore\ (x, y) \in R$$
$$\therefore\ x \in D(R)$$

أي أننا أخذنا $x \in \mathrm{R}\left(R^{-1}\right)$ وجدنا أن $x \in D(R)$ وبالتالي فإن:

$$\mathrm{R}\left(R^{-1}\right) \subseteq D\left(R\right) \qquad (2)$$

من (2) ,(1) واضح أن:

$$D\left(R\right) = \mathrm{R}\left(R^{-1}\right)$$

لإثبات (ii) لا بد من إثبات أن $\mathrm{R}\left(R\right) \subseteq D\left(R^{-1}\right)$ ، $D\left(R^{-1}\right) \subseteq \mathrm{R}\left(R\right)$.

نثبت أن $\mathrm{R}\left(R\right) \subseteq D\left(R^{-1}\right)$ وذلك بفرض أن $y \in \mathrm{R}(R)$ وبالتالي فإنه يوجد $x \in A, y \in B$ بحيث أن $(x, y) \in R$ وهذا يؤدي عن تعريف العلاقة العكسية إلى:

$$\left(y, x\right) \in R^{-1}$$
$$\therefore\ y \in D\left(R^{-1}\right)$$

أي أننا أخذنا $y \in \mathrm{R}(R)$ وجدنا أن $y \in D\left(R^{-1}\right)$ وبالتالي فإن:

$$\mathrm{R}\left(R\right) \subseteq D\left(R^{-1}\right) \qquad (3)$$

بقي لنا إثبات أن $D\left(R^{-1}\right) \subseteq \mathrm{R}\left(R\right)$ وذلك بفرض أن $y \in D\left(R^{-1}\right)$ وبالتالي فإن يوجد $y \in B, x \in A$ بحيث أن $\left(y, x\right) \in R^{-1}$ وهذا يؤدي إلى أن:

$$(x, y) \in R$$

أي أن $y \in \mathrm{R}(R)$. أي أننا أخذنا $y \in D\left(R^{-1}\right)$ وجدنا أن $y \in \mathrm{R}(R)$ وبالتالي فإن:

$$D\left(R^{-1}\right) \subseteq \mathrm{R}\left(R\right) \qquad (4)$$

من (4) ,(3) ينتج أن:

$$\mathrm{R}(R) = D\left(R^{-1}\right)$$

لإثبات (iii) لا بد من إثبات أن $R \subseteq \left(R^{-1}\right)^{-1}, \left(R^{-1}\right)^{-1} \subseteq R$

نفرض

$$(x, y) \in \left(R^{-1}\right)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R$$

$$\therefore\ (x, y) \in \left(R^{-1}\right)^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R$$

وبالتالي فإن

$$\left(R^{-1}\right)^{-1} = R\ .$$

3–5 أنواع العلاقة *Kinds of Relation*

العلاقة R من الفئة A إلى الفئة B أربع أنواع:

(1) علاقة واحد إلى واحد one – one

(2) علاقة واحد إلى متعدد one – many

(3) علاقة متعدد إلى واحد many – one

(4) علاقة متعدد إلى متعدد many - many

تعريف العلاقة واحد إلى واحد:

العلاقة R من الفئة A إلى الفئة B يقال أنها علاقة واحد إلى واحد إذا كان:

$$(x_1, y_1) \in R,\ (x_2, y_2) \in R$$

فإن:

$$y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

تعريف العلاقة واحد إلى متعدد:

العلاقة R من الفئة A إلى الفئة B يقال أنها علاقة واحد إلى متعدد إذا كان:

$$(x_1, y_1) \in R, \ \ (x_1, y_2) \in R$$

حيث أن $.x_1 \in A, y_1, \ y_2 \in B \quad \text{and} \quad y_1 \neq y_2$

تعريف العلاقة متعدد إلى واحد:

العلاقة R من الفئة A إلى الفئة B يقال أنها علاقة إلى متعدد واحد إذا كان:

$$(x_1, y_1) \in R, \ \ (x_2, y_1) \in R$$

حيث أن $x_1, x_2 \in A, \ y_1 \in B \quad \text{and} \quad x_1 \neq x_2$

تعريف العلاقة متعدد إلى متعدد:

العلاقة R من الفئة A إلى الفئة B يقال أنها علاقة متعدد إلى متعدد إذا كان:

$$(x_1, y_1) \in R, \ \ (x_1, y_2) \in R, \ \ (x_2, y_1) \in R, \ \ (x_2, y_2) \in R$$

حيث أن: $.x_1, x_2 \in A \ , \ y_1, y_2 \in B \ \ \text{and} \ \ x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$

4–5 الرسم البياني السهمي *Arrow Diagram*:

يستخدم الرسم البياني السهمي لتمثيل العلاقات.

اعتبر المثال الآتي:

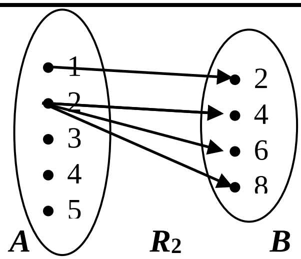
بفرض أن:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{2, 4, 6, 8\}$$

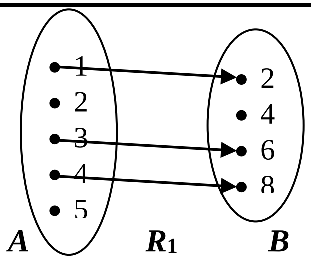
بفرض وجود أربع علاقات R_1, R_2, R_3, R_4 من الفئة A إلى الفئة B. معرفين كالآتي:

$$R_1 = \{(1, 2), (3, 6), (4, 8)\}$$
$$R_2 = \{(2, 4), (2, 6), (2, 8), (1, 2)\}$$
$$R_3 = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (5, 8)\}$$
$$R_4 = \{(1, 4), (2, 4), (1, 8), (2, 8), (5, 2)\}$$

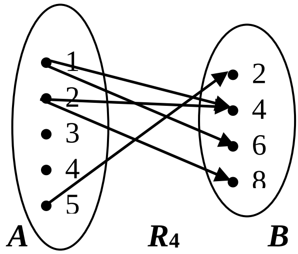
يمكن تمثيل العلاقات الأربع برسم بياني سهمي كالآتي:



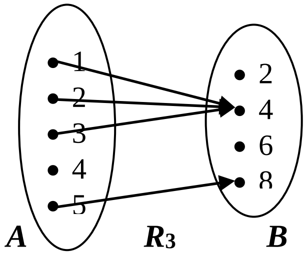
علاقة واحد إلى متعدد



علاقة واحد إلى واحد



علاقة متعدد إلى متعدد



علاقة متعدد إلى واحد

5–5 العلاقة الخالية *Void Relation*:

العلاقة R من الفئة A إلى الفئة B يقال أنها علاقة خالية إذا كانت $R = \varnothing$.

اعتبر المثال الآتي:

بفرض أن:

$$A = \{3, 5, 7\}, \quad B = \{2, 4, 8\}, \quad R \subseteq A \times B$$

بفرض أننا عرفنا العلاقة R على أنها (x يكون في علاقة مع y إذا كان وفقط اذا كان x يقسم y، أي أن $\frac{y}{x}$ عدد صحيح حيث أن $y \in B, x \in A$)

واضح أنه لا يوجد عناصر في الفئة B تقبل القسمة على عناصر الفئة A، أي أنه دائماً $\frac{y}{x} \neq$ عدد صحيح، بالتالي فإن $R = \varnothing$.

5–6 علاقة الوحدة *Identity Relation*:

بفرض أن R علاقة على الفئة A، أي أن A فئة جزئية من $A \times A$، فإن العلاقة R يقال أنها علاقة وحدة إذا كان $(x, x) \in R$ ويرمز لها بالرمز I_A. أي أن:

$$I_A = \{(x, x): x \in A\}$$

اعتبر المثال الآتي:

بفرض أن $A = \{a, b, c\}$.

العلاقة I_A معرفة على الفئة A بحيث:

$$I_A = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$$

واضح أن I_A هي علاقة وحدة على الفئة A.

5–7 العلاقة الشاملة *Universal Relation*:

العلاقة R من الفئة A إلى الفئة B يقال أنها علاقة شاملة إذا تساوت R مع $A \times B$. أي أن:

$$R = A \times B.$$

اعتبر المثال الآتي:

بفرض أن:

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{a, b\}$$

بالتالي فإن العلاقة الشاملة R من الفئة A إلى الفئة B تعطى كالآتي:

$$R = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

5–8 تحصيل العلاقات:

بفرض أن R_1 علاقة من الفئة A إلى الفئة B، R_2 علاقة من الفئة B إلى الفئة C، أي أن:

$$R_1 \subseteq A \times B, \quad R_2 \subseteq B \times C$$

تحصيل العلاقتين R_1, R_2 يرمز له بالرمز $R_1 \circ R_2$ أو R_1R_2 ويعرف كالآتي:

$$R_1R_2 = \{(x, z) \in (A \times C) : \text{for some } y \in B, (x, y) \in R_1, (y, z) \in R_2\}.$$

اعتبر المثال الآتي:

بفرض أن:

$$A= \{1, 2, 4, 5, 7\}, \quad B = \{a, b, c, d, e\}, \quad C = \{1, 4, 16, 25\}$$

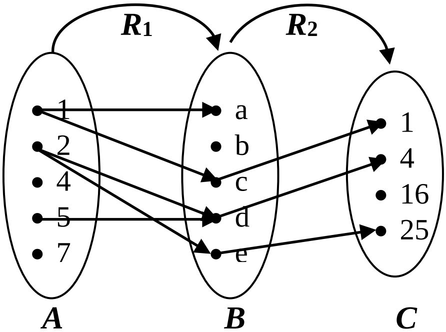
اعتبر العلاقات:

$$R_1 : A \to B, \quad R_2 : B \to C$$

معرفة كالآتي:

$$R_1 = \{(1, a), (1, c), (2, d), (2, e), (5, d)\}$$
$$R_2 = \{(c, 1), (d, 4), (e, 25)\}$$

يمكن تمثيل العلاقات R_1, R_2 بالتمثيل البياني السهمي:



واضح من تعريف تحصيل العلاقتين R_1, R_2 أن:

$$R_1R_2 = \{(1, 1), (2, 4), (2, 25), (5, 4)\}.$$

5-8-1 نظرية:

بفرض أن R_1, R_2 علاقتين من الفئة A إلى الفئة B وأن R_3, R_4 علاقتين من الفئة B إلى الفئة C. إذا كانت $R_1 \subseteq R_2$, $R_3 \subseteq R_4$ فإن:

$$R_1R_3 \subseteq R_2R_4.$$

الإثبات:

معطى لدينا أن R_1, R_2 علاقتين من A إلى B، وأن R_3, R_4 علاقتين من B إلى C. بفرض أن $(x, z) \in R_1R_3$ فإنه يوجد $y \in B$ بحيث:

$$(x, y) \in R_1, \quad (y, z) \in R_3$$

معطى لدينا أن $R_1 \subseteq R_2$, $R_3 \subseteq R_4$ فإن:

$$(x, y) \in R_1 \subseteq R_2 \quad \Rightarrow \quad (x, y) \in R_2$$
$$(y, z) \in R_3 \subseteq R_4 \quad \Rightarrow \quad (y, z) \in R_4$$

أي أن:

$$(x, y) \in R_2, (y, z) \in R_4 \quad \Rightarrow \quad (x, z) \in R_2R_4$$

أي أننا أخذنا $(x, z) \in R_1R_3$ وجدنا أن $(x, z) \in R_2R_4$ وبالتالي فإن:

$$R_1R_3 \subseteq R_2R_4.$$

2-9-5 نظرية:

بفرض أن R_1 علاقة من الفئة A إلى الفئة B، R_2 علاقة من الفئة B إلى الفئة C فإن:

$$\left(R_1R_2\right)^{-1} = R_2^{-1}R_1^{-1}.$$

الإثبات:

لإثبات أن $\left(R_1R_2\right)^{-1} = R_2^{-1}R_1^{-1}$ لا بد من إثبات أن $\left(R_1R_2\right)^{-1} \subseteq R_2^{-1}R_1^{-1}$، $R_2^{-1}R_1^{-1} \subseteq \left(R_1R_2\right)^{-1}$.

أولاً: سنثبت أن $\left(R_1R_2\right)^{-1} \subseteq R_2^{-1}R_1^{-1}$.

بفرض أن:

$$\begin{aligned}
(x, z) \in \left(R_1R_2\right)^{-1} \quad &\Rightarrow \quad (z, x) \in R_1R_2 \\
&\Rightarrow \quad \exists\, y \in B \text{ s.t. } (z, y) \in R_1 \text{ and } (y, x) \in R_2 \\
&\Rightarrow \quad (y, z) \in R_1^{-1} \text{ and } (x, y) \in R_2^{-1}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad (x,z) \in R_2^{-1}R_1^{-1}.$$

$$\Rightarrow \quad (x,y) \in R_2^{-1} \text{ and } (y,z) \in R_1^{-1}$$

أي أن: $(R_1R_2)^{-1} \subseteq R_2^{-1}R_1^{-1}$

ثانياً: سنثبت أن: $R_2^{-1}R_1^{-1} \subseteq (R_1R_2)^{-1}$.

بفرض أن:

$$(x,z) \in R_2^{-1}R_1^{-1} \quad \Rightarrow \quad \exists\, y \in B \text{ s.t. } (x,y) \in R_2^{-1} \text{ and } (y,z) \in R_1^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad (y, x) \in R_2 \text{ and } (z, y) \in R_1$$

$$\Rightarrow \quad (z, y) \in R_1 \text{ and } (y, x) \in R_2$$

$$\Rightarrow \quad (z,x) \in R_1R_2$$

$$\Rightarrow \quad (x,z) \in (R_1R_2)^{-1}$$

أي أن: $R_2^{-1}R_1^{-1} \subseteq (R_1R_2)^{-1}$

من أولاً وثانياً ينتج أن:

$$(R_1R_2)^{-1} = R_2^{-1}R_1^{-1}.$$

5–9 أنماط العلاقات Types of Relations

سنناقش في هذا الفصل عدد من أنماط العلاقات الهامة على الفئة A.

5–9–1 العلاقات العاكسة Reflexive Relations:

العلاقة R المعرفة على الفئة A يقال أنها عاكسة إذا كان $(x, x) \in R$ لكل $x \in A$، بمعنى:

$$x\, R\, x \quad \forall\, x \in A$$

اعتبر العلاقات الآتية على الفئة $A = \{1, 3, 5, 7\}$

$R_1 = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (5, 5), (5, 7)\}$

$R_2 = \{(1, 3), (1, 5), (5, 7), (3, 7)\}$

$$R_3 = \{(1, 1), (1, 3), (3, 3), (5, 5), (5, 7), (1, 7), (7, 7)\}$$

واضح من هذه العلاقات أن R_3 علاقة عاكسة ولكن العلاقة R_1 ليست عاكسة لأن $(3, 3) \notin R_1$، $(7, 7) \notin R_1$، بالمثل العلاقة R_2 ليست عاكسة.

5-9-2 العلاقات المتماثلة Symmetric Relations:

العلاقة R المعرفة على الفئة A يقال أنها علاقة متماثلة إذا كان:

$(x, y) \in R$ فإن $(y, x) \in R$. بمعنى أن:

$$x\,R\,y \;\Rightarrow\; y\,R\,x$$

اعتبر المثال الآتي:

لدينا العلاقات الآتية على الفئة $A = \{1, 3, 5, 7\}$

$$R_1 = \{(1, 1), (1, 3), (3, 5), (3, 1), (5, 3), (5, 5)\}$$
$$R_2 = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 5), (5, 3), (5, 7), (7, 7)\}$$

واضح أن R_1 علاقة متماثلة ولكن R_2 ليست علاقة متماثلة لأن:

$$(5, 7) \in R_2 \;\Rightarrow\; (7, 5) \notin R_2.$$

5-9-3 العلاقات الناقلة Transitive Relations:

العلاقة R المعرفة على الفئة A يقال أنها ناقلة إذا كان:

$$(x, y) \in R \text{ and } (y, z) \in R \;\Rightarrow\; (x, z) \in R$$

أو بطريقة أخرى:

$$x\,R\,y \text{ and } y\,R\,z \;\Rightarrow\; x\,R\,z$$

اعتبر العلاقات الآتية على الفئة $A = \{1, 3, 5, 7\}$

$$R_1 = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (3, 3), (3, 5), (3, 7), (5, 3), (5, 5), (5, 7)\}$$
$$R_2 = \{(1, 1), (1, 3), (3, 5), (5, 5), (7, 7)\}$$

واضح أن هذه العلاقات تكون كالآتي: R_1 علاقة ناقلة، والعلاقة R_2 ليست ناقلة لأن:

$$(1, 3) \in R_2 \text{ and } (3, 5) \in R_2 \;\Rightarrow\; (1, 5) \notin R_2.$$

10–5 علاقة التكافؤ *Equivalence Relation*:

العلاقة R المعرفة على الفئة A يقال أنها علاقة تكافؤ على الفئة A إذا كان وفقط إذا كان العلاقة R عاكسة ومتماثلة وناقلة.

اعتبر علاقة "تساوي" المعرفة على فئة الأعداد الحقيقية، بمعنى أن:

$$x\,R\,y : x = y$$

(1) العلاقة R عاكسة لأنه إذا كان x عدد حقيقي فإن:

$$x = x \;\Rightarrow\; x\,R\,x$$

(2) العلاقة R متماثلة لأنه بفرض أن:

$$x\,R\,y \Rightarrow x = y \Rightarrow y = x \;\Rightarrow y\,R\,x$$

(3) العلاقة R ناقلة لأن:

$$x\,R\,y \text{ and } y\,R\,z \Rightarrow x = y \text{ and } \; y = z \;\Rightarrow x = z \Rightarrow x\,R\,z$$

بالتالي فإن علاقة "تساوي" المعرفة على فئة الأعداد الحقيقية تمثل علاقة تكافؤ.

نظرية:

إذا كانت R علاقة تكافؤ معرفة على الفئة A فإن R^{-1} تمثل أيضاً علاقة تكافؤ على الفئة A.

الإثبات:

بما أن R علاقة تكافؤ على الفئة A بالتالي فإن العلاقة R عاكسة ومتماثلة وناقلة والمطلوب هو إثبات أن R^{-1} علاقة تكافؤ أي أننا نريد أن نثبت أن R^{-1} عاكسة وناقلة ومتماثلة لكل عنصر $x \in A$.

(1) نثبت أن R^{-1} علاقة عاكسة:

$\because$ R علاقة عاكسة بالتالي:

$(x, x) \in R \quad \Rightarrow \quad (x, x) \in R^{-1}$ (من خواص العلاقة العكسية)

$\therefore$ R^{-1} علاقة عاكسة.

(2) نثبت أن R^{-1} علاقة متماثلة:

Let $(x, y) \in R^{-1} \quad \Rightarrow \quad (y, x) \in R$ (من خواص العلاقة العكسية)

$\Rightarrow \quad (y, x) \in R$ (لأن R علاقة متماثلة)

$\Rightarrow \quad (y, x) \in R^{-1}$ (من خواص العلاقة العكسية)

أي أن:

$$(x, y) \in R^{-1} \quad \Rightarrow \quad (y, x) \in R^{-1}$$

$\therefore$ R^{-1} علاقة متماثلة.

(3) نثبت أن R^{-1} علاقة ناقلة:

Let $(x, y) \in R^{-1}$ and $(y, z) \in R^{-1}$

$\Rightarrow (y, x) \in R$ and $(z, y) \in R$ (من خواص العلاقة العكسية)

$\Rightarrow (z, y) \in R$ and $(y, x) \in R$

$\Rightarrow (z, x) \in R$ (لأن R علاقة ناقلة)

$\Rightarrow (x, z) \in R^{-1}$ (من خواص العلاقة العكسية)

$\therefore (x, y) \in R^{-1}$ and $(y, z) \in R^{-1} \quad \Rightarrow \quad (x, z) \in R^{-1}$

$\therefore$ R^{-1} علاقة ناقلة.

11–5 فصول التكافؤ Equivalence Classes

بفرض أن A فئة غير خالية. R علاقة تكافؤ على الفئة A لكل عنصر x ينتمي للفئة A. فإن الفئات $[x]$ تسمى فصول تكافؤ للفئة A والمعطاة بالعلاقة R. تُعرف فصول التكافؤ كالآتي:

$$[x] = \{y \in A : y\, R\, x\}$$

اعتبر علاقة التكافؤ المعرفة على الفئة $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ كالآتي:

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (7, 7), (7, 9), (9, 7), (9, 9)\}$$

فصول التكافؤ للفئة A هي:

$$[1] = [3] = [5] = \{1, 3, 5\}$$
$$[7] = [9] = \{7, 9\}.$$

5–11–1 خصائص فصول التكافؤ:

بفرض أن R علاقة تكافؤ معرفة على فئة غير خالية A، x, y عناصر اختيارية في A فإن:

(i) $x \in [x]$.

ونعني أن أي عنصر لا بد أن ينتمي لفصل تكافؤه.

(ii) if $y \in [x]$, then $[x] = [y]$.

ونعني إذا انتمى عنصر y لفصل التكافؤ للعنصر x فإن فصلي التكافؤ للعنصرين y, x يتساويان.

(iii) $[x] = [y] \quad \Leftrightarrow \quad x\,R\,y$

ونعني إذا تساوى فصلي التكافؤ للعنصرين y, x فإن x تكون في علاقة مع y والعكس صحيح أي أن إذا كان x في علاقة مع y فإن فصلي التكافؤ يتساويان.

(iv) Either $[x] = [y]$ or $[x] \cap [y] = \varnothing$.

ونعني أن أي فصلي تكافؤ إما يكونا متساويان أو متنافيان.

الإثبات:

(i) بما أن $x \in A$ بالتالي:

$$[x] = \{y \in A: y\,R\,x\}$$

بما أن R علاقة تكافؤ على الفئة A بالتالي فإن R علاقة عاكسة، أي أن $x\,R\,x$

وباستخدام تعريف فصل التكافؤ $[x]$ ينتج أن $x \in [x]$.

(ii) بما أن $y \in [x]$

$$\because\ y \in [x] \quad \Rightarrow \quad y\,R\,x \quad \text{(من تعريف فصل التكافؤ)}$$

$$\Rightarrow \quad x\,R\,y \quad (R\text{علاقة متماثلة})$$

$$\text{Let } a \in [x] \quad \Rightarrow \quad a\,R\,x$$

أي أن الآن لدينا

$$a\,R\,x \text{ and } x\,R\,y \quad \Rightarrow \quad a\,R\,y \quad (R \text{ علاقة ناقلة})$$

$$\Rightarrow \quad a \in [y]$$

أخذنا عنصر $a \in [x]$ وجدنا أن $a \in [y]$ هذا يؤدي إلى أن:

$$[x] \subseteq [y] \qquad (1)$$

بقي لنا أن نثبت أن $[y] \subseteq [x]$

$$\text{Let} \quad b \in [y] \quad \Rightarrow \quad b\,R\,y$$

بالتالي فإن:

$$b\,R\,y \text{ and } y\,R\,x \quad \Rightarrow \quad b\,R\,x \quad (R \text{ علاقة ناقلة})$$

$$\Rightarrow \quad b \in [x]$$

أخذنا عنصر $b \in [y]$ وجدنا أن $b \in [x]$ هذا يؤدي إلى أن:

$$[y] \subseteq [x] \qquad (2)$$

من (1), (2) نصل إلى أن:

$$[x] = [y]$$

(iii) نثبت أولاً أن:

$$[x] = [y] \quad \Rightarrow \quad x\,R\,y$$

$\because$ R علاة تكافؤ، بالتالي فهي علاقة عاكسة، أي أن:

$$x\,R\,x \quad \Rightarrow \quad x \in [x] \quad \text{(من تعريف فصل التكافؤ)}$$

$$\Rightarrow \quad x \in [x] = [y] \quad \text{(من المعطي)}$$

$$\Rightarrow \quad x \in [y]$$

$\Rightarrow \quad x\,R\,y$ (من تعريف فصل التكافؤ)

ثانياً: نثبت أن:

$$x\,R\,y \;\Rightarrow\; [x] = [y]$$

$\because\; x\,R\,y \;\Rightarrow\; y\,R\,x$ (Rعلاقة متماثلة)

Let $a \in [x] \;\Rightarrow\; a\,R\,x$

$\therefore\; a\,R\,x$ and $x\,R\,y \;\Rightarrow\; a\,R\,y$ (Rعلاقة ناقلة)

$\Rightarrow\; a \in [y].$

أي أننا أخذنا عنصر $a \in [x]$ وجدنا أن $a \in [y]$ بالتالي:

$$[x] \subseteq [y] \qquad (1)$$

بالمثل:

Let $a \in [y] \;\Rightarrow\; a\,R\,y$

$\therefore\; a\,R\,y$ and $y\,R\,x \;\Rightarrow\; a\,R\,x$ (Rعلاقة ناقلة)

$\Rightarrow\; a \in [x].$

أي أننا أخذنا عنصر $a \in [y]$ وجدنا أن $a \in [x]$ بالتالي:

$$[y] \subseteq [x] \qquad (2)$$

من (2) ,(1) نصل إلى أن:

$$[x] = [y]$$

إثبات (iv)

بفرض أن فصلي التكافؤ $[x], [y]$ غير متنافيين، أي أن:

$$[x] \cap [y] \neq \varnothing$$

بالتالي فإن يوجد عنصر واحد على الأقل a في $[x] \cap [y]$، أي أن:

$$\begin{aligned} a \in [x] \cap [y] \quad &\Rightarrow \quad a \in [x] \text{ and } a \in [y] \\ &\Rightarrow \quad a\,R\,x \text{ and } a\,R\,y \\ &\Rightarrow \quad x\,R\,a \text{ and } a\,R\,y \\ &\Rightarrow \quad x\,R\,y \quad (\text{ناقلة } R) \end{aligned}$$

نعلم أن (من الخاصية (iii) التي أثبتناها)

$$x \, R \, y \quad \Leftrightarrow \qquad [x] = [y]$$

بالتايلي فإن فصلي التكافؤ $[x] = [y]$ إما أن يكونا متنافيين أو متساويين.

12–5 التجزيئات Partitions

بفرض أن A فئة غير خالية. التجزيء p للفئة A هو تجميع $\{A_i\}$ من الفئات الجزئية غير الخالية للفئة A وله هاتين الخاصيتين:

$$\text{(i)} \ \bigcup_i A_i = A \qquad \text{(ii)} \ A_i \cap A_j = \varnothing \quad \text{for } A_i \neq A_j$$

بمعنى آخر تجزيء الفئة A هو تجميع من الفئات الجزئية غير الخالية والمتنافية للفئة A واتحادها يعطي الفئة A.

اعتبر العلاقة:

$$x \equiv y \ (\text{mod } 3)$$

والمعرفة على فئة الأعداد الصحيحة I وهي تعني أن $x - y$ تقبل القسمة على العدد 3 أي أن $(x - y = 3k;\ k \in I)$ وبالتالي:

$$x \, R \, y : (x - y) = 3k; \quad k \in I$$

هذه العلاقة هي علاقة تكافؤ على فئة الأعداد الصحيحة I وذلك لأن:

(1) R علاقة عاكسة:

$$\because \ x - x = 0 = (3)0 = 3k; \qquad k = 0 \in I$$

$$\therefore \ x \, R \, x \qquad \Rightarrow \qquad R \text{ علاقة عاكسة}$$

(2) R علاقة متماثلة:

$$\text{Let} \quad x \, R \, y \ \Rightarrow \quad x - y = 3k \quad \Rightarrow \quad y - x = -3k$$

$$\Rightarrow \quad y - x = 3(-k)$$

$$\because \ k \in I \qquad \therefore \ -k \in I$$

$$\Rightarrow \ y \, R \, x$$

$\therefore$ R علاقة متماثلة

(3) R علاقة ناقلة:

Suppose $x\, R\, y$ and $y\, R\, z$

$$\Rightarrow \quad x - y = 3k_1 \text{ and } y - z = 3k_2, \qquad k_1, k_2 \in I$$
$$\Rightarrow \quad (x - y) + (y - z) = 3(k_1 + k_2)$$
$$\because k_1, k_2 \in I \quad \therefore\ k_1 + k_2 \in I$$
$$\Rightarrow (x - z) = 3(k_1 + k_2)$$
$$\Rightarrow \quad x\, R\, z$$

$\therefore$ R علاقة ناقلة.

من (1)، (2)، (3) ينتج أن:

R علاقة عاكسة ومتماثلة وناقلة وبالتالي تكون علاقة تكافؤ على فئة الأعداد الصحيحة I.

علاقة التكافؤ R تقسم الفئة I إلى مجموعة من فصول التكافؤ المتنافية مثنى مثنى واتحادهم يعطي الفئة الكلية I.

$\therefore$ فصول التكافو هي:

$$[0], [1], [2]$$

حيث:

$$[0] = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$$
$$[1] = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\}$$
$$[2] = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\}$$

واضح أن فصول التكافؤ $[0], [1], [2]$ فئات جزئية غير خالية من I ومتنافية مثنى مثني وأيضاً $I = [2] \cup [1] \cup [0]$ وبالتالي فإن $[0], [1], [2]$ هي تجزيء للفئة I.

تمارين على العلاقات

(1) بفرض أن $\mathbb{N}$ فئة الأعداد الطبيعية. R هي علاقة معرفة على $\mathbb{N}$ كالآتي:

$$x\,R\,y \quad \Leftrightarrow \quad x + 3y = 12$$

هل العلاقة R هي علاقة تكافؤ؟ لماذا؟

(2) بفرض أن $A = \{2, 4, 6, 8\}$، $B = \{1, 5, 7, 9\}$، R هي علاقة من الفئة A إلى B معرفة كالآتي:

$$x\,R\,y \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

أوجد المجال والمدى والعلاقة العكسية للعلاقة R.

(3) بفرض أن I هي فئة الأعداد الصحيحة، R علاقة معرفة على الفئة I بحيث:

$$x\,R\,y \quad \Leftrightarrow \quad x \geq y$$

هل العلاقة R علاقة تكافؤ؟ لماذا؟

(4) بفرض أن R هي علاقة على الفئة $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ومعرفة بالقاعدة $(x, y) \in R$ إذا كان $x + y \leq 6$. أوجد العلاقة R، العلاقة العكسية R^{-1}، مجال ومدى كل من R، R^{-1}.

(5) اختبر العلاقات الآتية على فئة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ على كونها علاقة تكافؤ أم لا؟ ولماذا؟

(أ) $x + y$ عدد زوجي.

(ب) $x + y \leq 20$.

(ج) $\frac{x}{y}$ هي قوة للعدد 2.

(6) بفرض أن A هي فئة الأعداد الصحيحة التي لا تساوي الصفر، R علاقة على الفئة A معرفة كالآتي:

$$(a, b)\,R\,(c, d) \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc$$

أثبت أن R هي علاقة تكافؤ.

(7) إذا كانت R_1, R_2 هي علاقة تكافؤ على الفئة X. فهل $R_1 \cup R_2, R_1 \cap R_2$ علاقة تكافؤ على X؟

(8) إذا كانت R هي علاقة معرفة على $\mathbb{N}$ على النحو التالي:

$$a\,R\,b \Leftrightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{N}$$

أثبت أن R علاقة عاكسة وناقلة وليست متماثلة.

(9) إذا كانت R معرفة على الفئة $\mathbb{N}^2$ بالعلاقة الآتية:

$$(x, y)\,R\,(z, w) \Leftrightarrow x = z \quad \forall\, x, y, z, w \in \mathbb{N}$$

أثبت أن R هي علاقة تكافؤ.

(10) إذا كانت R معرفة على الفئة $\mathbb{N}^2$ بالعلاقة الآتية:

$$(a, b)\,R\,(c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c \quad \forall\, a, b, c, d \in \mathbb{N}$$

أثبت أن R على تكافؤ على الفئة $\mathbb{N}^2$.

الباب السادس

الدالة

Function

6–1 مقدمة

تعتبر الدالة من أهم المفاهيم الأساسية في الرياضيات. العالم الألماني ليبنز Leibniz أول من استخدم مصطلح الدالة (1646 – 1716) كما تعتبر المصطلحات راسم mapping وتحويل transformation هي مرادفات للدالة.

الدالة لها العديد من التطبيقات في جميع المجالات، كما أنها تلعب دور أساسي في علوم الحاسب.

6–2 الدالة *Function*

بفرض أن A, B فئتين غير خاليتين. العلاقة f من الفئة A إلى الفئة B يقال أنها دالة إذا حققت الشرطين التاليين:

(i) $D(f) = A$.

(ii) If $(x_1, y_1) \in f$ and $(x_1, y_2) \in f$ then $y_1 = y_2$.

بمعنى آخر العلاقة f من الفئة A إلى الفئة B يقال أنها دالة إذا كان لكل عنصر x في A يوجد عنصر وحيد y في B.

الدالة من A إلى B يرمز لها كالآتي:

$$f : A \to B$$

اعتبر العلاقات f_1, f_2, f_3, f_4 من الفئة A إلى الفئة B حيث:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad B = \{1, 4, 6, 9, 16, 18\}$$

$f_1 = \{(1, 1), (2, 6), (4, 9), (4, 18)\}$

$f_2 = \{(1, 1), (2, 6), (3, 9), (4, 9), (4, 16)\}$

$f_3 = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16)\}$

$f_4 = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 9)\}$

1− نجد أن مجال العلاقة f_1 هو $D(f_1) = \{1, 2, 4\} \neq A$

وبالتالي فإن f_1 ليست دالة من الفئة A إلى الفئة B.

2− بالمثل مجال العلاقة f_2 هو $D(f_2) = \{1, 2, 3, 4\} = A$

وبالتالي تحقق أول شرط من شروط الدالة ولكن الشرط الثاني غير متحقق لأن:

$$(4, 9) \in f_2, \quad (4, 16) \in f_2 \quad \text{but} \quad 9 \neq 16$$

أي أننا وجدنا عنصر (4) ينتمي إلى الفئة A وله صورتين مختلفتين في الفئة B وبالتالي العلاقة f_2 ليست دالة.

3− مجال العلاقة f_3 هو: $D(f_3) = \{1, 2, 3, 4\} = A$

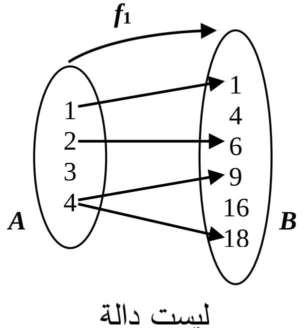
واضح أيضاً من العلاقة f_3 أنه لكل عنصر $x \in A$ يوجد عنصر وحيد $y \in B$ وبالتالي فإن f_3 هي دالة من الفئة A إلى الفئة B.

4− مجال العلاقة f_4 هو $D(f_4) = \{1, 2, 3, 4\} = A$

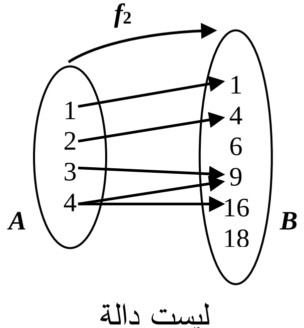
واضح أيضاً من تعريف العلاقة f_4 أنه لكل $x \in A$ يوجد عنصر وحيد $y \in B$ وبالتالي فإن f_4 هي دالة من الفئة A إلى الفئة B.

<u>ملاحظة:</u>

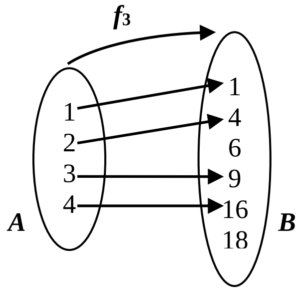
من المناقشة السابقة واضح أن العلاقة (واحد إلى متعدد) والعلاقة (متعدد إلى متعدد) لا تمثل دالة.يمكن تمثيل f_1, f_2, f_3, f_4 باستخدام الرسم البياني السهمي كما يلي:



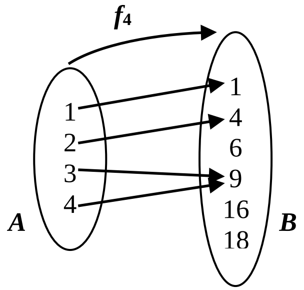
ليست دالة



ليست دالة



دالة



دالة

<u>6−2−1 المجال والمجال المقابل للدالة:</u>

<u>Domain and co-domain of a function</u>

بفرض أن f هي دالة من الفئة A إلى الفئة B. الفئة A تسمى مجال الدالة f بينما الفئة B تسمى المجال المقابل للدالة f.

اعتبر الدالة f من الفئة $A = \{a, b, c, d\}$ إلى الفئة $B = \{1, 2, 3, 4\}$ كالتالي:

$$f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2), (d, 4)\}$$

بالتالي فإن مجال الدالة f هو $\{a, b, c, d\}$ والمجال المقابل للدالة f هو $\{1, 2, 3, 4\}$.

<u>6−2−2 مدى الدالة Range of a function</u>

بفرض أن f دالة من A إلى الفئة B. العنصر $y \in B$ والناتج عن تأثير الدالة f على العنصر $x \in A$ يقال للعنصر y أنه صورة العنصر x تحت تأثير الدالة f. لاحظ أنه من تعريف الدالة أن جميع العناصر التي تنتمي إلى الفئة A لكل منها صورة وحيدة فقط في الفئة B.

بالتالي فإن مدى الدالة $f : A \to B$ يُعرف على أنه صورة عناصر المجال ويعبر عنه رياضياً كالآتي:

$$R(f) \text{ or } rng(f) = \{y \in f(x) : x \in A\}$$

واضح أن مدى الدالة وهو فئة جزئية من المجال المقابل. أي أن:

$$R(f) \subseteq B$$

اعتبر الدالة f من الفئة $A = \{a, b, c\}$ إلى الفئة $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ حيث:

$$f = \{(a, 3\}, (b, 5), (c, 5)\}$$

بالتالي فإن مدى الدالة f هو

$$R(f) = \{3, 5\}$$

3–6 تساوي الدوال Equality of functions

إذا كانت f, g دوال من الفئة A إلى الفئة B، يقال أنهما متساويتين، أي أن $f = g$ إذا تحققت الشروط الآتية:

(i) $D(f) = D(g)$,
(ii) $R(f) = R(g)$,
(iii) $f(x) = g(x), \quad \forall\, x \in A$

وكمثال على ذلك، اعتبر الدالتين f, g معرفتين كالتالي:

$$f(x) = 3x^2 + 6 \qquad : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$g(x) = 3x^2 + 6 \qquad : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

حيث أن $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ هما الأعداد الحقيقية والأعداد المركبة على التوالي. واضح أن:

$$D(f) \neq D(g)$$

وبالتالي فإن $f(x) \neq g(x)$.

وكمثال آخر، اعتبر الفئتين A, B والدالة $f : A \to B$ معرفتين كالتالي:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad B = \{1, 2, 7, 8, 17, 18, 31, 32\}$$
$$f = \{(1, 2), (2, 8), (3, 18), (4, 32)\}$$

اعتبر دالة أخري $g : A \to \mathbb{N}$ حيث $g(x) = 2x^2$. واضح أن:

$$D(f) = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$f(1) = 2, f(2) = 8, f(3) = 18, f(4) = 32$$

أي أن مدى الدالة f هو $R(f) = \{2, 8, 18, 32\}$.

بالمثل:

$$D(g) = A = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$g(1) = 2,\ g(2) = 8,\ g(3) = 18,\ g(4) = 32$$

أي أن مدى الدالة g هو:

$$R(g) = \{2, 8, 18, 32\}$$

واضح مما سبق:

(i) $D(f) = \{1, 2, 3, 4\} = D(g)$
(ii) $R(f) = \{2, 8, 18, 32\} = R(g)$
(iii) $f(x) = g(x) \quad \forall\, x \in \{1, 2, 3, 4\} = A$

هذا يؤدي إلى أن الدالتين f, g متساويتين، أي أن $f = g$.

6–4 أنواع الدوال Types of functions

سنناقش في هذا الفصل الأنواع المختلفة للدوال:

6–4–1 الدالة واحد إلى واحد أو الدالة الأحادية:

One – one function or Injective function

الدالة $f : A \to B$ يقال أنها دالة واحد إلة واحد أو دالة أحادية إذا كان:

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 \qquad \forall\, x_1, x_2 \in A$$

أو إذا كان

$$x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2)$$

وكمثال على ذلك، اعتبر الدالة: $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ ومعرفة كالتالي:

$$f(x) = 4x + 3; \qquad x \in \mathbb{Q}$$

بفرض أن $f(x_1) = f(x_2)$ لكل x_1, x_2 في $\mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \quad 4x_1 + 3 = 4x_2 + 3 \;\Rightarrow\; 4x_1 = 4x_2 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$$

أي أن:

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$$

بالتالي فإن الدالة $f(x) = 4x + 3: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ هي دالة واحد إلى واحد.

وكمثال آخر اعتبر الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرفة كالتالي:

$$f(x) = x^2; \qquad x \in \mathbb{R}$$

بفرض أن $f(x_1) = f(x_2)$

$$x_1^2 = x_2^2 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \pm x_2 \qquad \Rightarrow x_1 \neq x_2$$

أي أن:

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 \neq x_2$$

واضح أن:

$$f(1) = 1 = f(-1)$$

ولكن $1- \neq 1$ وبالتالي فإن:

$$f(x) = x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \in \mathbb{R}$$

ليست دالة واحد إلى واحد.

6–4–2 الدالة الفوقية Onto function or Surjective

الدالة $f : A \to B$ يقال أنها فوقية لو أن لكل عنصر $y \in B$ يوجد على الأقل عنصر واحد $x \in A$ بحيث $f(x) = y$.

بمعنى آخر الدالة $f : A \to B$ يقال أنها فوقية لو $f(A) = B$ أي أن مدى الدالة f يساوي المجال المقابل لها.

وكمثال على ذلك اعتبر الدالة $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ والمعرفة كالتالي:

$$f(x) = 4x + 3; \qquad x \in \mathbb{Q}$$

واضح أن لكل عنصر y ينتمي لفئة المجال المقابل $\mathbb{Q}$ يوجد $x = \dfrac{y-3}{4}$ ينتمي إلى الفئة (فئة المجال $\mathbb{Q}$) بحيث:

$$f(x) = f\left(\frac{y-3}{4}\right) = 4\left(\frac{y-3}{4}\right) + 3 = y$$

أي أن:

$$\forall y \in \mathbb{Q} \, \exists x = \frac{y-3}{4} \in \mathbb{Q} \; s.t. \; f(x) = y$$

أي أن الدالة فوقية.

6–4–3 الدالة أحادية التناظر One – one onto function or Bijective

الدالة $f : A \to B$ يقال أنها دالة أحادية التناظر إذا كان f دالة واحد إلى واحد وفوقية.

كمثال على ذلك، اعتبر الدالة $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ والمعرفة كالتالي:

$$f(x) = 4x + 3; \qquad x \in \mathbb{Q}$$

من المناقشة الموضحة أعلاه واضح أن هذه الدالة واحد إلى واحد وأيضاً فوقية بالتالي فهي أحادية التناظر.

6–4–4 الدالة (Into) Into function

الدالة $f : A \to B$ يقال أنها into لو وجد على الأقل عنصر $y \in B$ ليس له $x \in A$ أي وجدنا صورة على الأقل ليس لها أصل. في هذه الحالة:

$$f(A) \subset B.$$

أي أن مدى الدالة f مجموعة جزئية فعلية من المجال المقابل.

وكمثال على ذلك، اعتبر الدالة $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ والمعرفة كالتالي:

$$f(x) = x + 4; \;\; x \in \mathbb{Q}$$

واضح أن العنصر $y = \sqrt{3} \in \mathbb{R}$ لا يوجد له عنصر $x = \sqrt{3} - 4$ ينتمي إلى فئة الأعداد القياسية $\mathbb{Q}$ بالتالي فإن الدالة:

$$f(x) = x + 4: \;\; \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$$

ليست دالة فوقية onto ولكنها دالة into.

6–5 رسم الدالة *Graph of function*

بفرض أن f دالة من الفئة A إلى الفئة B، أي أن لكل $x \in A$ يوجد عنصر وحيد $y \in B$ حيث $f(x) = y$.

يمكن التعبير عن الدالة في الصورة الآتية:

$$f = \{(x, f(x)) : x \in A\},$$

هذا التعبير يسمى رسم الدالة f.

وكمثال على ذلك، اعتبر الدالتين:

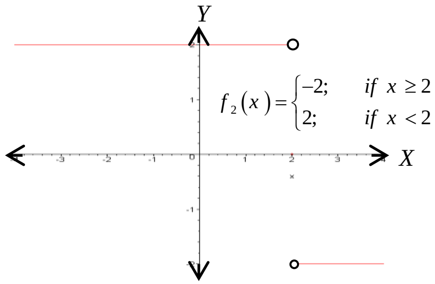
$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ والمعرفة كالتالي:

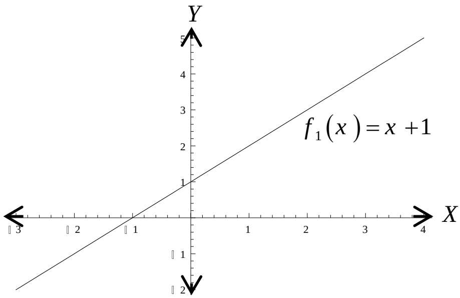
$$f_1(x) = x + 1$$

والدالة $f_2 : \mathbb{R} \to \{-2, 2\}$ والمعرفة كالتالي:

$$f_2(x) = \begin{cases} -2; & if \;\; x \geq 2 \\ 2; & if \;\; x < 2 \end{cases}$$

عندما نرسم الدالتين السابقتين، نحصل على:





وكمثال آخر، اعتبر العلاقتين:

$f_1 : [-4, 4] \to [-4, 4]$ والمعرفة كالتالي:

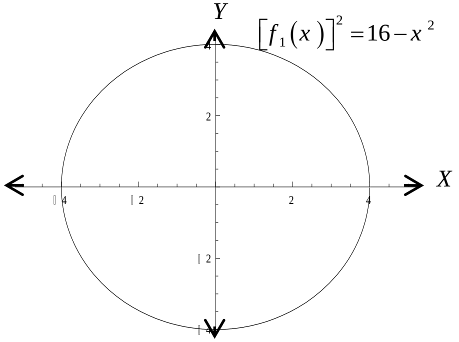
$$\left[f_1(x)\right]^2 = 16 - x^2; \quad x \in [-4, 4]$$

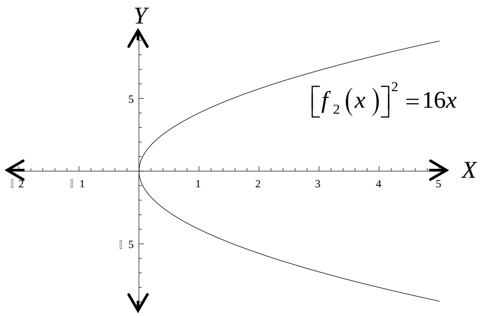
والعلاقة $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ والمعرفة كالتالي:

$$\left[f_2(x)\right]^2 = 16x; \quad x \in \mathbb{R}$$

رسم العلاقتين السابقتين موضح بالأسفل.

واضح أن العلاقة الأولى ما هي إلا دائرة $x^2 + y^2 = 16$ ومركزها (0, 0) ونصف قطرها = 4. والعلاقة الثانية هي قطع مكافئ $y^2 = 16x$ رأسه عند (0, 0) وفتحته متجهة ناحية اليمين.





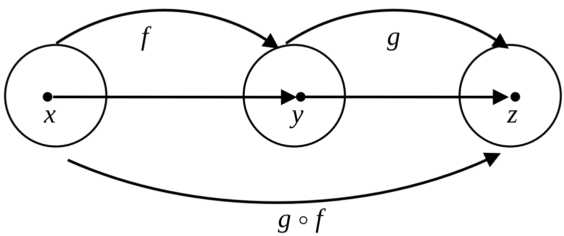
واضح من الرسم أن أي قيمة x في فئة المجال تؤدي إلى قيمتين في فئة المدى.

بمعنى آخر:

أي خط مستقيم رأسي يقطع المنحنى في نقطتين. بالتالي فإن العلاقتين السابقتين لا يمثلا دوال.

6–6 تحصيل الدوال Composition of functions

نفرض أن f دالة من الفئة A إلى الفئة B، g دالة من الفئة B إلى الفئة C، تحصيل الدالتين g, f ترمز له بالرمز $g \circ f$ أو gf وهذا التحصيل يعتبر دالة من الفئة A إلى الفئة C. نلاحظ أن مجال الدالة g يساوي المجال المقابل للدالة f.



بما أن f دالة من الفئة A إلى الفئة B، بالتالي فإن لكل $x \in A$ يوجد عنصر وحيد $y \in B$ بحيث $y = f(x)$. بالمثل g دالة من الفئة B إلى الفئة C بالتالي فإن لكل $y \in B$

يوجد عنصر وحيد $z \in C$ بحيث $z = g(y)$.

بما أن $g \circ f$ دالة من الفئة A إلى الفئة C، فنحصل على:

$$(g \circ f)(x) = z \qquad \forall x \in A$$

وباستخدام أن $z = g(y)$ فإن:

$$(g \circ f)(x) = g(y)$$

وأيضاً باستخدام أن $y = f(x)$ فإن:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

وكمثال على ذلك، اعتبر الدالتين:

$$f(x) = 2x + 5, \qquad g(x) = 3x$$

وبالتالي فإن:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 5) = 3(2x + 5) = 6x + 15$$

بالمثل:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x) = 2(3x) + 5 = 6x + 5$$

لاحظ أنه ليس بالضرورة أن:

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$$

6-6-1 نظرية:

بفرض أن $g : B \to C, f : A \to B$ دالتين. فإن $g \circ f$ يكون دالة واحد إلى واحد إذا كانت كل من g, f دالة واحد إلى واحد. وأيضاً $g \circ f$ يكون دالة فوقية إذا كانت كلاً من g, f دوال فوقية.

الإثبات:

$\because$ f دالة من الفئة A إلى الفئة B فإن لكل $x \in A$ يوجد عنصر وحيد $y \in B$ بحيث $y = f(x)$.

بالمثل، بما أن g دالة من الفئة B إلى الفئة C فإن لكل $y \in B$ يوجد عنصر وحيد $z \in C$ بحيث $z = g(x)$.

أولاً: لدينا g, f دوال واحد إلى واحد والمطلوب إثبات أن $g \circ f$ دالة واحد إلى واحد.

$$\because \; f : A \to B, \qquad g : B \to C$$

فإن:

$$g \circ f : A \to C$$

بفرض أن $x_1, x_2 \in A$ وأن:

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

$$\Rightarrow \quad g\left(f\left(x_1\right)\right) = g\left(f\left(x_2\right)\right) \quad \text{(}g\text{ راسم واحد إلى واحد)}$$

$$\Rightarrow \quad f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right)$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_2 \quad \text{(}f\text{ راسم واحد إلى واحد)}$$

وبالتالي فإن:

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

$\therefore$ $g \circ f$ راسم واحد إلى واحد.

<u>ثانياً:</u> لدينا g, f دوال فوقية والمطلوب إثبات أن $g \circ f$ دالة فوقية.

بما أن g دالة فوقية من الفئة B إلى الفئة C بالتالي فإن لكل $z \in C$ يوجد على الأقل عنصر واحد $y \in B$ بحيث أن:

$$g(y) = z$$

بالمثل، f دالة فوقية من الفئة A إلى الفئة B بالتالي فإن لكل $y \in B$ يوجد على الأقل عنصر واحد $x \in A$ بحيث أن:

$$f(x) = y$$

وكنتيجة لذلك ومن تعريف التحصيل يكون لدينا $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ لكل عنصر $z \in C$ يوجد على الأقل عنصر واحد $x \in A$ بحيث أن

$$(g \circ f)(x) = z$$

بالتالي فإن $g \circ f$ دالة فوقية.

<u>2-6-6 نظرية:</u>

إذا كان f, g, h ثلاث دوال معرفه كالآتي:

$$f : A \to B, \quad g : B \to C, \quad h : C \to D$$

فإن:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

أي أن تحصيل الدوال يحقق قانون الترتيب associative law.

<u>الإثبات:</u>

لكي نثبت أن $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ نثبت أولاً أن الطرفين لهما نفس المجال والمجال المقابل ثم نثبت التساوي.

$$\because\ f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$$

$$\therefore\ (g \circ f) : A \to C, \qquad h \circ (g \circ f) : A \to D$$

$$\therefore\ (h \circ g) : B \to D, \qquad (h \circ g) \circ f : A \to D$$

وبالتالي فإن $h\circ(g\circ f),(h\circ g)\circ f$ لهما نفس المجال A والمجال المقابل D.

الآن سنقوم بإثبات التساوي.

بما أن f دالة من الفئة A إلى الفئة B بالتالي فإن لكل عنصر $x \in A$ يوجد عنصر وحيد $y \in B$ بحيث أن $f(x) = y$.

وبما أن g دالة من الفئة B إلى الفئة C بالتالي فإن لكل عنصر $y \in B$ يوجد عنصر وحيد $z \in C$ بحيث أن $g(y) = z$.

بالمثل h دالة من الفئة C إلى الفئة D بالتالي فإن لكل عنصر $z \in C$ يوجد عنصر وحيد $t \in D$ بحيث أن $h(z) = t$.

$$\therefore\ h\circ(g\circ f)(x)=h\left(g\circ f(x)\right)=h\left(g\left(f(x)\right)\right)=h\left(g(y)\right)=h(z)=t$$

وبالمثل

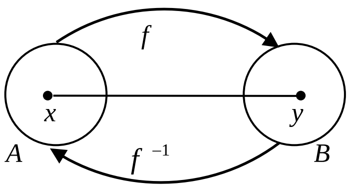
$$(h\circ g)\circ f(x)=(h\circ g)\left(f(x)\right)=(h\circ g)(y)=h\left(g(y)\right)=h(z)=t$$

$$\therefore\ h\circ(g\circ f)(x)=(h\circ g)\circ f(x),\qquad \forall x\in A$$

$$\therefore\ h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$$

6–7 الدالة العكسية ***Inverse function***

بفرض أن $f : A \to B$ دالة أحادية التناظر وبالتالي فإن معكوس الدالة f (يرمز له بالرمز f^{-1}) وهو دالة من الفئة B إلى الفئة A.



لاحظ أن:

بما أن f دالة من الفئة A إلى الفئة B فبالتالي لكل عنصر $x \in A$ يوجد عنصر وحيد y

$B \ni$ بحيث $y = f(x)$. بما أن f^{-1} دالة من الفئة B إلى الفئة A بالتالي فإن لكل عنصر $y \in B$ يوجد عنصر وحيد $x \in A$ بحيث أن $f^{-1}(y) = x$، أي أن:

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$

<u>6-7-1 نظرية:</u>

إذا كان f راسم من الفئة A الي الفئة B $(f : A \to B)$ وكان أحادي التناظر بالتالي فإن الدالة f سيكون لها معكوس.

<u>الإثبات:</u>

نفرض جدلاً أن الراسم $f : A \to B$ ليس أحادي التناظر وله راسم عكسي، بالتالي فإن الراسم f إما أن يكون:

(1) f راسم فوقي ولكن ليس واحد إلى واحد.

(2) f راسم واحد إلى واحد وليس راسم فوقي.

(3) f ليس راسم واحد إلى واحد وليس راسم فوقي.

<u>(1) الحالة الأولى:</u>

إذا كان f راسم فوقي ولكن ليس راسم واحد إلى واحد.

$\because$ f راسم فوقي بالتالي فإن لكل $y_1 \in B$ يوجد على الأقل $x_1 \in A$ بحيث $f(x_1) = y_1$ وأيضاً $\mathrm{R}(f) = B$.

$\because$ f ليس راسم واحد إلى واحد بالتالي فإن:

$$\text{if } x_1 \neq x_1,\ x_1, x_2 \in A \quad \Rightarrow \quad y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2 \qquad (1)$$

$$\because f : A \to B \qquad \therefore f^{-1} : B \to A$$

$$\because \mathrm{D}(f^{-1}) = \mathrm{R}(f) = B \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{D}(f^{-1}) = B$$

$$\therefore\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f$$

$$\Rightarrow\ (y_1, x_1), (y_2, x_2) \in f^{-1}$$ (من تعريف الراسم العكسي)

وباستخدام (1) نحصل على:

$$x_1 \neq x_2, \qquad y_1 = y_2$$

بالتالي فإن f^{-1} لا يمكن أن يكون راسم لأن وجدنا عنصر في المجال B له صورتين مختلفتين في المجال المقابل A.

(2) الحالة الثانية:

إذا كان f راسم واحد إلى واحد ولكن ليس فوقي.

بما أن f ليس راسم فوقي بالتالي فإنه يوجد على الأقل عنصر واحد $y_1 \in B$ لا يوجد له $x_1 \in A$ بحيث أن $f(x_1) = y_1$ وأيضاً $\mathrm{R}(f) \neq B$.

إذا كان لدينا $f : A \to B$ بالتالي $f^{-1} : B \to A$ أي أن

$$\mathrm{D}\left(f^{-1}\right) = \mathrm{R}\left(f\right) \neq B \;\; \Rightarrow \;\; \mathrm{D}\left(f^{-1}\right) \neq B$$

وتعني أن مجال f^{-1} لا يساوي الفئة B بالتالي لا يمكن أن يكون f^{-1} راسم.

(3) الحالة الثالثة:

إذا كان f ليس راسم واحد إلى واحد ولا راسم فوقي بالمثل يمكن إثبات أن f^{-1} لا يمكن أن يكون راسم.

في الحالات (1)، (2)، (3) وجدنا تناقض ناشئ من الفرض الجدلي بأن الراسم f ليس أحادي التناظر وله معكوس وبالتالي فإن هذا الفرض الجدلي خاطئ. ومن ثم فإن الراسم f $A \to B$: يجب أن يكون أحادي التناظر لكي يكون له معكوس.

2-7-6 نظرية:

بفرض أن $g : B \to C, f : A \to B$ دالتين. إذا كان كلاً من g, f قابلتين للانعكاس (أي لهما معكوس) فإن:

$$\left(g \circ f\right)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

<u>الإثبات</u>: (فكره الإثبات نطبق شروط تساوي دالتين و التي ذكرناها سابقا)

$\because$ g, f قابلتين للانعكاس بالتالي فإن كلاً من g, f دوال أحادية التناظر.

من نظرية 6–7–1 يكون $g \circ f$ أيضاً راسم أحادي التناظر بالتالي له معكوس.

وبما أن $g : B \to C, f : A \to B$ فإن:

$$g \circ f : A \to C$$

بالتالي فإن:

$$\left(g \circ f\right)^{-1} : C \to A$$

أيضاً:

$$f^{-1} : B \to A,\ g^{-1} : C \to B \Rightarrow f^{-1} \circ g^{-1} : C \to A$$

ومن ثم فإن كلاً من $f^{-1} \circ g^{-1}, \left(g \circ f\right)^{-1}$ دوال من الفئة C إلى الفئة A اي أن كلا منهما له نفس المجال و المدى ....(1)

$$\because \left(g \circ f\right)^{-1}(z) = x, \qquad z \in C, x \in A$$

أيضاً g^{-1} راسم من الفئة C إلى الفئة B بالتالي فإن لكل عنصر $z \in C$ يوجد عنصر وحيد $y \in B$ بحيث أن $g^{-1}(z) = y$.

بالمثل f^{-1} راسم من الفئة B إلى الفئة A بالتالي فإن لكل عنصر $y \in B$ يوجد عنصر $x \in A$ بحيث أن $f^{-1}(y) = x$.

بالإضافة إلى ذلك:

$$\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)(z) = f^{-1}\left(g^{-1}(z)\right) = f^{-1}(y) = x$$

لدينا الآن:

$$\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)(z) = x = \left(g \circ f\right)^{-1}(z) \qquad \forall z \in C \qquad (2)$$

وبالتالي من (1) و(2) ينتج أن:

$$\left(g \circ f\right)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

3-7-6 نظرية:

إذا كان $f : A \to B$ راسم أحادي التناظر فإن $f^{-1} : B \to A$ أيضاً سيكون راسم أحادي التناظر.

الإثبات:

(فكره الإثبات لكي نثبت أن f^{-1} راسم أحادي التناظر نثبت f أنه راسم واحد الي واحد وانه فوقي)

بما أن $f : A \to B$ راسم أحادي التناظر، أي أن f راسم واحد إلى واحد وأيضاً راسم فوقي بالتالي لكل $y \in B$ يوجد عنصر وحيد $x \in A$ بحيث أن $f(x) = y$.

لدينا f^{-1} راسم من الفئة B الي الفئة A $(f^{-1} : B \to A)$ بالتالي فان لكل $y \in B$ يوجد عنصر وحيد$x \in A$ بحيث $f^{-1}(y) = x$

أولا: نثبت ان f^{-1} راسم واحد الي واحد

نفرض

$$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2), \quad y_1, y_2 \in B$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = f(x_2) \quad (\text{راسم واحد إلى واحد } f)$$

$$\therefore\ y_1 = y_2$$

أي أن: $$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) \quad \Rightarrow \quad y_1 = y_2$$

$\therefore$ f^{-1} راسم واحد إلى واحد.

ثانياً: نثبت ان f^{-1} راسم فوقي

$$\because\ \mathrm{R}(f^{-1}) = \mathrm{D}(f) = A \quad \Rightarrow \quad \mathrm{R}(f^{-1}) = A$$

هذا يعني أن f^{-1} راسم فوقي.

أثبتنا أن f^{-1} راسم واحد إلى واحد وأيضاً فوقي وبالتالي فإن f^{-1} راسم أحادي التناظر.

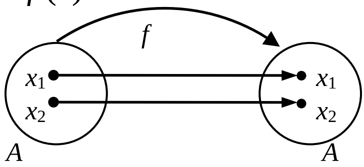
6–8 بعض الدوال الهامة *Some important functions*

في هذا الفصل سنناقش بعض الدوال الهامة.

6–8–1 دالة الوحدة **Identity function**

بفرض أن A فئة، الدالة $f : A \to A$ يقال أنها دالة وحدة إذا كان لكل $x \in A$ نجد أن $f(x) = x$ ونعبر عنه رياضياً كالتالي:

$$f(x) = x \qquad \forall\, x \in A$$

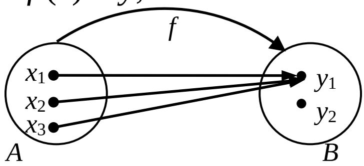


6–8–2 الدالة الثابتة **Constant function**

الدالة $f : A \to B$ يقال لها أنها دالة ثابتة إذا كان لكل $x \in A$ يوجد عنصر وحيد $y \in B$ بحيث $f(x) = y$

ويعبر عن ذلك رياضياً كالتالي:

$$f(x) = y, \qquad \forall\, x \in A$$



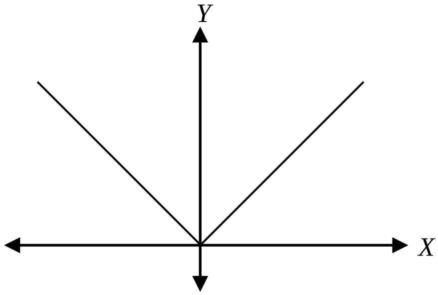
مثال على ذلك الدالة $f(x) = 2,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ هي دالة ثابتة.

6–8–3 دالة المقياس **Absolute function**

دالة المقياس أو دالة القيمة المطلقة $f(x) = |x|$ معرفة كالتالي:

$$|x| = \begin{cases} x\,; & x \geq 0 \\ -x\,; & x < 0 \end{cases}$$

ولها الشكل الآتي:



4−8−6 دالة **floor** ودالة **ceiling**   floor and ceiling functions

دالة floor ويرمز لها بالرمز:

$$f(x) = \lfloor x \rfloor$$

وتعرف على أنها أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x.

ومثال على ذلك:

$$\lfloor 3.5 \rfloor = 3, \qquad \lfloor 5 \rfloor = 5, \qquad \lfloor -7.2 \rfloor = -8$$

دالة ceiling ويرمز لها بالرمز

$$f(x) = \lceil x \rceil$$

وتعرف على أنها أقل عدد صحيح أكبر من أو يساوي x.

ومثال على ذلك:

$$\lceil 3.5 \rceil = 4, \qquad \lceil 5 \rceil = 5, \qquad \lceil -7.2 \rceil = -7$$

واضح من المناقشة السابقة أن:

$$\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$$

إذا كان x عدد غير صحيح. غير ذلك سيكون:

$$\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor$$

6–8–6 الدوال الزوجية والفردية Even and odd functions

الدالة الحقيقية $y = f(x)$ يقال أنها دالة زوجية إذا كان:

$$f(-x) = f(x)$$

ويقال أنها دالة فردية إذا كان:

$$f(-x) = -f(x)$$

وكمثال على ذلك الدالة:

$$f(x) = 5x^6 + 2x^4 - x^2$$

هي زوجية لأن:

$$\begin{aligned} f(-x) &= 5(-x)^6 + 2(-x)^4 - (-x)^2 \\ &= 5x^6 + 2x^4 - x^2 = f(x) \end{aligned}$$

والدالة $f(x) = \sin x - 5x^3$ هي دالة فردية وذلك لأن:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \sin(-x) - 5(-x)^3 \\ &= -\sin x - 5(-1)x^3 \\ &= -\sin x + 5x^3 \\ &= -[\sin x - 5x^3] = -f(x) \end{aligned}$$

بينما الدالة $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 - x$ ليست دالة زوجية ولا فردية لأن:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^4 + (-x)^3 + (-x)^2 - (-x) \\ &= x^4 - x^3 + x^2 + x \end{aligned}$$

بالتالي فإن:

$$f(-x) \neq f(x), \qquad f(-x) \neq -f(x)$$

أي أنها ليس زوجية ولا فردية.

6–8–7 الدالة المميزة:

نفرض أن A فئة جزئية من الفئة الشاملة U. الدالة المميزة للفئة A ويرمز لها بالرمز χ_A هي دالة حقيقية القيمة.

$$\chi_A : U \to \{0, 1\}$$

وتعرف كالآتي:

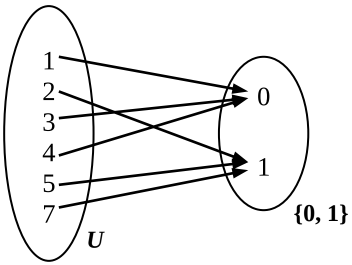
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1; & x \in A \\ 0; & x \notin A \end{cases}$$

وكمثال على ذلك، بفرض أن $A = \{2, 5, 7\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

بالتالي فإن:

$$\chi_A(1) = 0, \quad \chi_A(2) = 1, \quad \chi_A(3) = 0, \quad \chi_A(4) = 0,$$
$$\chi_A(5) = 1, \quad \chi_A(7) = 1$$

ويمكن وضعها في رسم تخطيطي كالتالي:



6‒8‒8 دالة الباقي Reminder function

بفرض أن x عدد صحيح غير سالب (يعني إما موجب أو يساوي صفر) وy عدد موجب. نُعرف $x \bmod y$ أو $R_y(x)$ على أنه الباقي الناتج من قسمة x على y. بالتالي فإن R_y هو دالة على فئة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$.

اعتبر الأمثلة الآتية:

$$8 \bmod 2 = 0, \quad 15 \bmod 4 = 3, \quad 251 \bmod 2 = 1, \quad 177 \bmod 3 = 0$$

يمكن وضعها على الصورة الآتية:

$$R_2(8) = 0, \quad R_4(15) = 3, \quad R_2(251) = 1, \quad R_3(177) = 0$$

6−8−8 دالة signum

دالة signum المعرفة على فئة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ويرمز لها بالرمز $\text{sgn}(x)$ وتعرف على أنها:

$$\text{sgn}(x)=\begin{cases}0; & x=0\\ \dfrac{x}{|x|}; & x\neq 0\end{cases}$$

مدى هذه الدالة هو $\{-1, 0, 1\}$.

6−8−10 دالة Hash:

بفرض أن لدينا خلايا في ذاكرة الكمبيوتر مرقمة من 0 إلى 16 كما بالشكل الآتي:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

ونريد تخزين أو استرجاع أعداد موجبة اختيارية في هذه الخلايا الفارغة. أحد هذه الطرق لأداء ذلك هي استخدام دالة Hash. حيث أن دالة Hash تقوم بحساب موقع البيانات (العدد) المراد تخزينها أو استرجاعها والعلاقة التي تحدد موقع العدد هي:

$$\text{H}(n) = n \bmod k,$$

حيث n هي البيانات (العدد) المرد تخزينها أو استرجاعها، k هي حجم ذاكرة الكمبيوتر (يفضل أن يكون عدد أولي). لو أن موقع العدد المراد تخزينه في الذاكرة والذي تم تحديده بدالة Hash كان مشغول، فإن في هذه الحالة تقوم دالة Hash بحساب الموقع الفارغ التالي في الذاكرة، وهكذا إلى أن يتم تخزين العدد في أول مكان خالي في ذاكرة الحاسب.

لو أردنا الحصول على موقع العدد n، نحسب $m = \text{H}(n)$ حيث m هي موقع العدد n في الذاكرة. إذا لم تجد العدد n في هذا الموقع، ننتقل إلى الموقع التالي وهكذا إلى أن يتم

الحصول على موقع العدد n.

وكمثال على ذلك: بفرض أن لدينا الأعداد:

$$15, 286, 77, 18, 5, 572, 102, 257, 55$$

يراد تخزينها بالترتيب في ذاكرة الكمبيوتر والمرقمة من 0 إلى 16

في هذه الحالة $k = 17$. واضح:

$$H(15) = 15 \bmod 17 = 15$$
$$H(286) = 286 \bmod 17 = 14$$

بالمثل:

$$H(77) = 9, \quad H(18) = 1, \quad H(5) = 5, \quad H(272) = 11,$$
$$H(102) = 0, \quad H(257) = 2, \quad H(55) = 4$$

بالتالي فإن مواقع تخزين هذه الأعداد في ذاكرة الحاسب ستكون كالتالي:

102	18	257		55	5	89			77		272			286	15	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

الآن بفرض أن لدينا تخزين العدد 89. بما أن

$$H(89) = 89 \bmod 14 = 4$$

بالتالي فإن 89 يجب أن يتم تخزينه في الموقع 4، ولكن هذا الموقع مشغول (لأنه مُخزن به القيمة 55). بالتالي يتم تخزين العدد 89 في أول مكان خالي بعد الموقع 4.

واضح أن أول مكان خالي بعد الموقع 4 هو الموقع رقم 7(لاحظ ان ترقيم الخلايا بادئ من الصفر بالتالي فان الموقع 7 هو الخليه رقم 6) كما هو موضع بالشكل أعلاه.

<u>ملاحظة:</u>

في حالة أن الموقع المراد تخزين فيه العدد كان مشغولاً فيقال في هذه الحالة أنه حدث تعارض (a collision has occurred) وعملية الانتقال إلى أول خلية فارغة بعد الخلية المشغولة تسمى هذه العملية (a collision resolution policy).

تمارين

(1) بفرض أن $A = \{a, b, c, d\}, B = \{7, 8, 9\}$.

أي من الفئات الجزئية الآتية من $A \times B$ تمثل دوال من A إلى B:

(i) $f_1 = \{(a, 7), (b, 8), (c, 8)\}$
(ii) $f_2 = \{(a, 7), (a, 8), (b, 9), (c, 9), (d, 9)\}$
(iii) $f_3 = \{(a, 7), (b, 8), (c, 9), (d, 9)\}$
(iv) $f_4 = \{(a, 7), (b, 7), (c, 9), (d, 8)\}$

(2) أعط مثال لدالة تكون:

(أ) واحد إلى واحد ولكن ليست فوقية.

(ب) فوقية ولكن ليست واحد إلى واحد.

(ج) أحادية التناظر.

(د) ليست واحد إلى واحد ولا فوقية.

(هـ) ثابتة.

وبين ذلك باستخدام التخطيط السهمي.

(3) إذا كان $h : x \to x + 1, g : x \to x^2, f : x \to 2x$. أوجد كلاً من:

$$f \circ (g \circ h), \qquad (f \circ g) \circ h$$

ثم وضح أن:

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

(4) بفرض أن $f(x)$ أي دالة حقيقية. وضح أن $g_1(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ دالة زوجية بينما $g_2(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ دالة فردية.

(5) أوجد التحصيل $g \circ f, g \circ f$ في الحالات الآتية:

(i) $f(x) = \sin^2 x$ and $g(x) = x^2 + 1$
(ii) $f(x) = e^x$ and $g(x) = x^3$

(iii) $f(x) = 2x^2 + x$ and $g(x) = x^2 + 1$

ومن ثم وضح أن $f \circ g \neq g \circ f$

(6) حدد أي من الدوال الآتية واحد إلى واحد، فوقي، أحادي التناظر:

(i) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ f(x) = |x|$

(ii) $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^+,\quad f(x) = 2x + 7$

(iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f(x) = |x|$

(7) بفرض أن $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x, y, z, t\}$, $C = \{2, 4, 9\}$ وبفرض أن الدالتين $g : B \to C, f : A \to B$ معرفتين كالآتي:

$$f = \{(1, x), (2, z), (3, y), (4, t)\},$$
$$g = \{(x, 2), (y, 2), (z, 4), (t, 9)\}$$

أوجد التحصيل $g \circ f$ ووضح ذلك بالرسم البياني السهمي.

(8) بفرض أن $\mathbb{Q}$ هي فئة الأعداد القياسية. وضح أن الدالة $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ والمعرفة كالآتي:

$$f(x) = 2x + 7, \qquad x \in \mathbb{Q}$$

دالة أحادية التناظر. أوجد $f^{-1}(0),\ f^{-1}(1),\ f^{-1}(2)$

(9) بفرض أن $B = \mathbb{R} - \{1\}, A = \mathbb{R} - \{3\}$ حيث R هي فئة الأعداد الحقيقية. بفرض $f : A \to B$ والمعرفة كالآتي $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}, x \in A$. وضح أن f راسم أحادي التناظر، وأوجد المعكوس للدالة f.

(10) بفرض أن $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ والمعرفة كالآتي:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

أوجد المعكوس للدالة f (إن وجد).

(11) أوجد الدالة المميزة للفئة A حيث أن الفئة الشاملة هي:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \qquad A = \{1, 4, 7, 8\}$$

(12) بفرض أن $g(x), f(x)$ دوال زوجية. أثبت أن $f \circ g$ تكون أيضاً دالة زوجية.

(13) إذا كان $g(x) = e^x$، $f \circ g$ هي دالة الوحدة. أثبت أن $f(x) = \ln x$.

(14) بفرض أن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ والمعرفة كالآتي:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x; & x < 2 \\ x + 2; & x \geq 2 \end{cases}$$

أوجد $f(-2), f(0), f(2), f(5)$.

(15) أوجد المجال $D(f)$ لكل من الدوال الآتية:

(i) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

(ii) $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$

(iii) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

تمارين عامة

أجب علي الأسئلة الآتية:

(1) أثبت الآتي مستخدماً جدول الصدق:

(a) $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

(b) $P \vee Q \equiv \neg (\neg P \wedge \neg Q)$

(c) $\neg(P \vee Q) \vee (\neg P \wedge Q) \equiv \neg P$

(d) $P \rightarrow (Q \wedge R) \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$

(2) أثبت باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي:

(a) $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n = \dfrac{a\left(1-r^{n+1}\right)}{1-r};\ r \neq 1$

(b) $a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + \left(a + (n-1)d\right) = \dfrac{n\left(2a + (n-1)d\right)}{2}$

(c) $1^2 + \left(1^2 + 2^2\right) + \left(1^2 + 2^2 + 3^2\right) + \ldots + \left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right)$

$$= \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$$

علماً بأن: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

(d) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2^{n-1}} = \dfrac{2^n - 1}{2^{n-1}}$

(e) $1*4 + 2*7 + 3*10 + \ldots + n(3n+1) = n(n+1)^2$

(3) إذا كان $A, B_1, B_2, \ldots, B_n$ فئات. أثبت أن:

$$A - \bigcap_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} (A - B_i)$$

(4) بفرض أن Z, Y, X ثلاث فئات. وضح أن:

$$X-(Y\cap Z)=(X-Y)\cup(X-Z)$$

(5) بفرض أن $S=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ وبفرض أن R علاقة معرفة بالقاعدة $x\,R\,y$ فإذا كان $(x-y)$ عدد زوجي طبيعي. أوجد الآتي:

(أ) عناصر العلاقة R.

(ب) العلاقة العكسية R^{-1}.

(ج) مجال R.

(د) مدى R^{-1}.

(6) بفرض ان R_2, R_1 علاقتين على الفئة S. وضح أن $(R_1\cup R_2)$ تكون علاقة عكسية لو أن كلاً من R_2, R_1 علاقتين عاكستين.

(7) وضح أن إذا كان R_2, R_1 علاقتين ناقلتين على الفئة A فإن $R_1\cup R_2$ ليس بالضرورة تكون ناقلة على الفئة A.

(8) أوجد فصول التكافؤ المحددة بواسطة علاقتي التكافؤ R على الفئة $\mathbb{Z}$ والمعرفة كالآتي:

$$a\,R\,b \;\Leftrightarrow a\equiv b \bmod (5) \quad \text{for } a, b\in\mathbb{Z}$$

(9) بفرض R علاقة على فئة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ والمعرفة كالآتي:

$a\,R\,b$ إذا كان وفقط إذا كان a مضاعفات للعدد b. اختبر العلاقة السابقة هل هي علاقة تكافؤ أم لا؟ ولماذا؟

(10) إذا كان $f(x)=2x-3$, $g(x)=x^2+3x+5$. أوجد:

$(g \circ f)(5)$, $(f \circ g)(5)$. وضح أنهما غير متساويين.

(11) بفرض أن $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ والمعرفة بواسطة $f(x) = 2x + 5$. وضح أن $f(x)$ قابلة للانعكاس، ثم أوجد $f^{-1}(2)$, $f^{-1}(4)$, $f^{-1}(5)$.

(12) بفرض أن $A = \mathbb{R} - \{2\}$, $B = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{5}\right\}$، حيث $\mathbb{R}$ هي فئة الأعداد الحقيقية.

بفرض أن $f: A \to B$ معرفة بواسطة $f(x) = \dfrac{3x+9}{5x-10}; x \in \mathbb{R}$. وضح أن f أحادية التناظر ومن ثم أوجد معكوس f.

(13) بفرض أن $f: X \to X$ حيث $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ومعرفة كالآتـي: $f(x) = 3x \bmod 5$. أكتب عناصر الدالة ثم ارسم المخططي السهمي لها.

(14) بفرض أن $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ والمعرفة بواسطة $f(x) = \dfrac{1}{x}$. وضح أن f دالة أحادية التناظر ثم أوجد المعكوس.

(15) وضح أن الدالة $\mathbb{R} \to \mathbb{R}: f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ ليست دالة واحد – إلى – واحد ولا دالة فوقية.

(16) حول الأعداد الآتية إلى النظام الثنائي ثم أجري العمليات الآتية:

(a) $(140)_{10} + (70)_{10}$ (b) $(225)_{10} / (15)_{10}$

(c) $(210)_{10} - (77)_{10}$ (d) $(30)_{10} * (12)_{10}$