2024-12-07

Tömningstid för cylindriska rör

Khaled Hamza

Sammanfattning

Syftet med denna rapport var att undersöka tömningstiden för vätskebehållare genom hål i botten, med fokus på hur olika faktorer som rördiameter, håldiameter och vattenhöjd påverkar tiden det tar för en vätska att tommas och samtidigt formulera en matematisk modell som beskriver tömningstiden för vatten genom cylindriska rör. En matematisk modell som beskriver detta samband har utvecklats genom att använda dimensionsanalys och linjärisering av experimentdata. Det gjordes tre experiment där tömningstiden mättes för olika kombinationer av rör och håldiameter och vattennivå. Därefter använder man resultaten och kända ekvationer för att lösa formeln

$$T = k \cdot D^2 \cdot \sqrt{h} / D^2 \cdot \sqrt{g}$$

T är tömningstiden, k för konstant, D diameter för röret, h för vattenhöjden, d för håldiametern(dysa) och g för tyngdacceleration.

E-postadress: Khha2400@student.miun.se

Kurs: TF005G, Teknisk fysik GR (A), Ingenjörsmetodik, 6 hp

Handledare: Nicklas Blomquist

1. Inledning

Det tidsintervall som krävs för att tömma en vätskebehållare genom ett hål i botten är ett betydande fenomen inom en mängd olika ingenjörs- och naturvetenskapliga discipliner. Vattenhantering, flödesmätare och reservoarer designas alla med detta problem. Det finns olika faktorer att ta hänsyn till som hur lång tid tar det för vätskan att tömmas, vilka samband finns det. Genom att förstå och analysera de faktorer som påverkar tömningstiden kan hjälpa till att förbättra utformningen av system och optimera deras funktion. Målet med denna rapport är att bestämma en formel för tömningstiden för cylindriska rör med hjälp av mätningar och dimensionsanalys.

2. Metod

Teori:

Periodtiden, t, för tömningstiden för cylindriska rör bero på ett antal oberoende variabler (storheter) som presenteras i tabell 1

Tabell 1: Storheter som antas ha inverkan på tömningstiden för ett cylindriskt rör. [1]

Beskrivning	Variabelbeteckning	SI-enhet	Dimension
vattenhöjd	h	(m)	L
Rörets diameter	D	(m)	L
håldiameter	Dh	(m)	L
Vätskans densitet	p	(kg/m^3)	ML^-3
Vätskan viskositet	µ	kg/ (m.s) eller (Pa.s)	ML^-1T^-1
Gravation	g	(m/s^2)	LT^-2
Tömningstid	t	(s)	T

Det krävs noggrann planering och struktur för att ett experiment ska kunna genomföras. Det är nödvändigt att identifiera problemet och de variabler som kommer att undersökas. Detta gör det möjligt etablera ett matematiskt samband och skapa en rätt ekvation. När ett experiment utförs med avsikten att fastställa sambandet mellan flera variabler, ofta enbart en medan de andra variablerna förblir konstanta, varierar de förstnämnda. Denna metod skapar en formel som är sammansatt av flera separata samband.
För att underlätta grafisk analys sammanställs mätdata från experimentet vanligtvis i tabellform. Först väljs två variabler för att bestämma ett matematiskt samband mellan variablerna, och för dessa genomförs mätningar. Sedan överförs mätdata till ett x-y-diagram som visar sambandet på ett visuellt sätt eftersom att analysera grafens utseende kan göras med hjälp av vilken typ av funktion beskriver sambandet bäst, potentiell funktion exponentiell funktion eller båda.

Linjärisering av funktionen

En typisk uttryckelse av en potensfunktion är ($y=Cx^k$) där C och k är konstanter som måste bestämmas. Metoden för linearisering kan användas för att hitta exponenten k. För att förenkla och hitta exponenten används denna teknik för att ta logaritmen av båda sidorna av ekvationen:

$$\ln(y) = \ln(Cx^k) \quad (1)$$

$$\ln(y) = \ln(C) + k*\ln(x) \quad (2)$$

Därmed kan ln(y) ersättas med Y, ln(x) med X, och ln(C) med c, vilket ger det linjära sambandet:

$$Y = c + kX \quad (3)$$

Denna koppling är lik ekvationen för en rät linje. För att använda denna teknik måste mätdata omvandlas till värden för In(y) och In(x) och sedan sammanställs i en tabell som har uppdaterats. En rak linje skapas när dessa värden plottas i ett x-y-diagram. Värdet på konstanten C ges av skärningspunkten på y-axeln och lutning på denna linje motsvarar värdet på exponenten k.

Val av ansats

När man bestämmer en matematisk modell för experimentet är det viktigt att välja en lämplig ansats. När olika värden läggs till en graf kommer det att vara möjligt att identifiera vilken typ av funktion som kommer att inträffa baserat på tidigare kunskap om hur olika funktioner fungerar. En potentiell funktionen som beskriver kopplingen kan beskrivas som:

$$T = k \cdot D^a \cdot D^b{}_h \cdot h^c \cdot g^d \cdot \mu^e \cdot \varrho^f \quad (4)$$

Här visas följande värden: D rörets diameter, D_h håldiametern, h vattenhöjden, g accelerationen av gravationen, µ vätskans viskositet och ϱ vätskans densitet. En okänd proportionalitets faktor är konstanten k, och exponenterna a, b, c, d, e och f beskriver hur varje variabel påverkar resultatet.

Dimensionsanalys

Dimensionsanalys används för att hitta exponenternas värden. Metoden kräver att enhetssambanden på båda sidor av ekvationen är identiska. Denna metod garanterar att sambandet är dimensionellt korrekt. Dimensionell analys är särskilt användbar för att hitta exponenter för storheter som inte kan mätas direkt, som viskositet (μ), tyngdacceleration (g) och densitet (ρ).
Ekvationen för dimensionsanalysen ser ut enligt följande:

$$[T] = [D]^a \cdot [D]_h^b \cdot [h]^c \cdot [g]^d \cdot [\mu]^e \cdot [\rho]^e \qquad (5)$$

Där dimensionerna för de olika storheterna är:

$[T] = T$

$[D] = L$

$[D_h] = L$

$[h] = L$

$[g] = LT^{-2}$

$[\mu] = ML^{-1}\,T^{-1}$

$[\rho] = ML^{-3}$

Genom att substituera dessa dimensioner in i ekvationen fås:

$$T^1 = L^a \cdot L^b \cdot L^c \cdot (LT^{-2})^d \cdot (ML^{-1}T^{-1})^e \cdot (ML^{-3})^f \qquad (6)$$

Det bryts ner i sina delar för att säkerställa att dimensionerna på höger-och vänsterledet stämmer överens:

Dimensioner för tid (T):

$$1 = -2d - e \qquad (7)$$

Dimensioner för längd (L):

$$0 = a + b + c + d - e - 3f \qquad (8)$$

Dimensioner för massa (M):

$$0 = e + f \tag{9}$$

$$a = -f \tag{10}$$

På detta sätt kan det fastställas att densitet (ϱ) och viskositet (μ) inte påverkar den slutliga modellen eftersom deras exponenter är 0. Detta innebär att de kan uteslutas från den sista typen av funktion. Den grundläggande teorin bygger på sambandet mellan tryck, vätskehastighet och gravitation, samt Bernoullis ekvation. Torricellis lag säger att en vätskas flödeshastighet kan korreleras med höjden på vätskespegeln ovanför hålet. Sambandet presenteras som: $v = \sqrt{2gh}$ där v är vätskans hastighet, g är tyngdaccelerationen, och h är vattenhöjden. [2] [3]

Material

- Tre plaströr med diametrarna (4.5, 55.1, 7.05 och 2.1) cm
- Tre dysor med diametrarna (1.125, 1.55, 0.65, 0.912, 1.345) cm
- Mätrigg med pump, slang och plastkar
- Måttband
- Sjuktmått
- Två små bollar
- Metallstall
- Två små bollar
- Timer
- White board penna

3. Utförande

Laborationen utfördes i tre steg. Först kopplades mätriggen samman med pumpen via en strömförstärkare, och därefter placerades ett plastkar under ett metallstativ. Plastkaret fylldes med vatten, och pumpen placerades i karet. Tre olika experiment genomfördes efter detta.

Första experimentet: Ett plaströr förbereddes genom att diametern mättes med ett skjutmått och höjden mättes med ett måttband, där höjden togs från insidan av röret. Mätvärdena antecknades. Därefter förbereddes fyra dysorer (hål) med olika diametrar, vilka också mättes med ett skjutmått och antecknades. Dysorer (hål)a placerades en efter en på metallstativet och plaströren monterades ovanpå med hjälp av fyra skruvar. Hålen i plaströren täcktes sedan med två små bollar. När plaströren fylldes med vatten med hjälp av pumpen, släpptes bollarna, och tiden för vattnet att rinna ut mättes med en timer. Tiden antecknades för senare beräkning.

Andra experimentet: Samma procedur upprepades, men denna gång användes endast ett dysorer (hål) vars diameter mättes med ett skjutmått. Skillnaden här var att i stället för att testa olika dysorer (hål), varierades vattennivån i samma plaströr. För att markera de olika vattennivåerna mättes plaströret med ett måttband och nivåerna markerades med en whiteboardpenna. Vattnet fylldes på, bollarna täckte hålen, och tiden för vattnets utflöde mättes och antecknades.

Tredje experimentet: I detta experiment användes fyra olika plaströr med varierande diametrar, som mättes med ett skjutmått och antecknades. Vattennivån var densamma i alla rör och mättes med ett måttband. Ett dysorer (hål) förbereddes på samma sätt som tidigare, med mätning av dess diameter. Sedan upprepades proceduren där rören fylldes med vatten, hålen täcktes med bollar, och tiden för utflödet mättes med en timer. Mätvärdena antecknades för vidare analys.

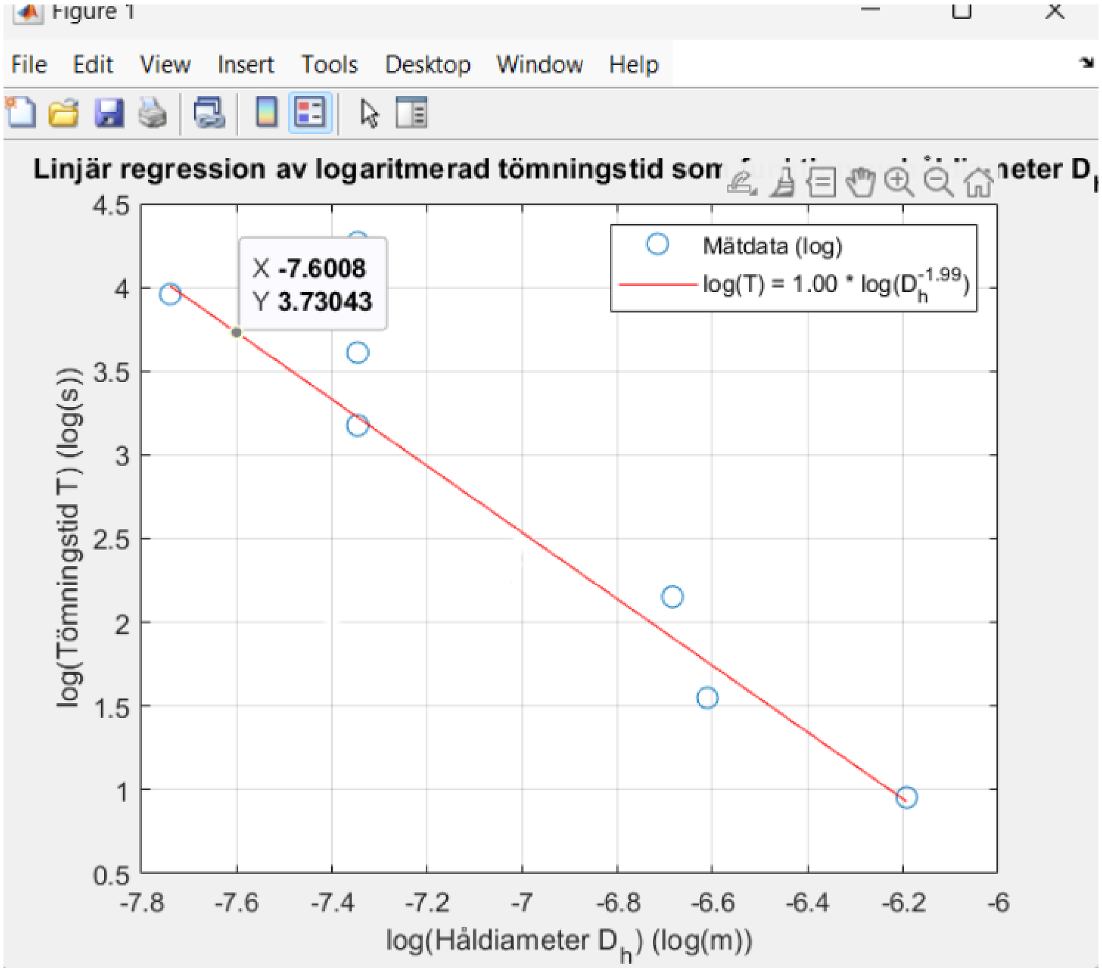
Bild 1 och 2: visar hur experimentet gick till och vilka material som användes.

4. Resultat

Första experimentet

Rördimater	Vattenhöjd	Dysor diameter	Tid
4.5	100 cm	1,125 cm	8.61 s
4.5	100 cm	1,345 cm	4.71 s
4.5	100 cm	0,435 cm	52.39 s
4.5	100 cm	2,045 cm	2.60 s

Tabell 2: variation av dysornas diametrar med resulterande tid.



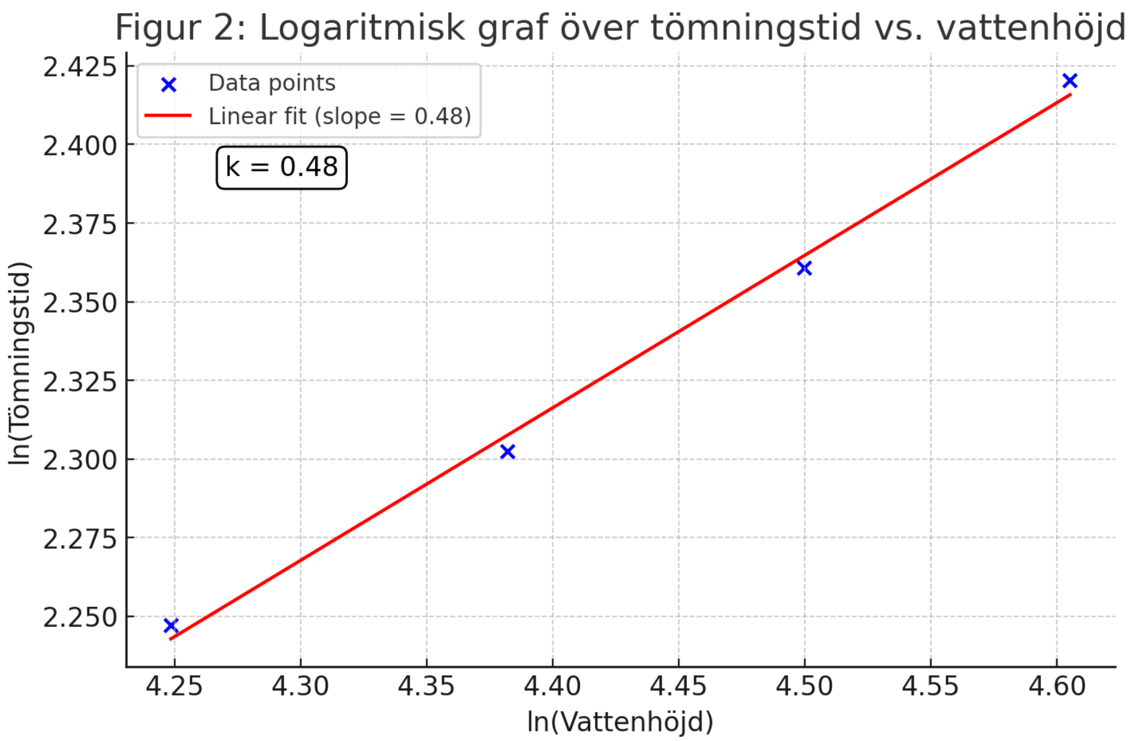
Figur 1: Logaritmering över sambandet mellan tömningstiden[t] och håldiameter [D_h]

Andra experimentet

Rördimater	Vattenhöjd	Dysor diameter	Tid
4.5	70 cm	0,912 cm	9.46 s
4.5	80 cm	0,912 cm	10.00 s
4.5	90 cm	0,912 cm	10.60 s

4.5	100 cm	0,912 cm	11.25 s

Tabell 3: variation av vattenhöjddiametrar med resulterande tid



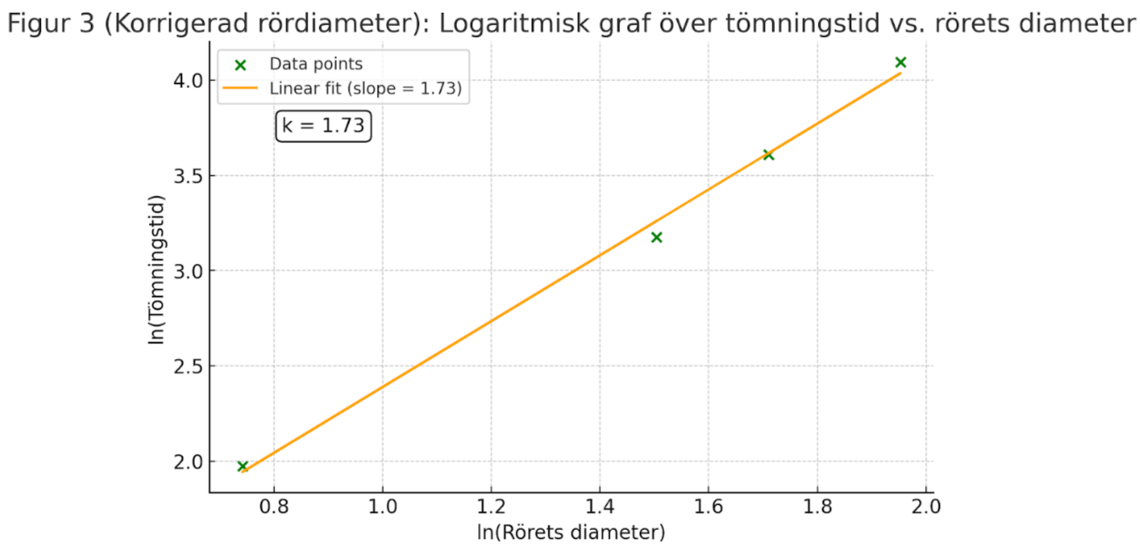
Figur 2: Logaritmering över sambandet mellan tömningstiden[t] och vattenhöjden [h]

Tradige experimentet

Rördimater	Vattenhöjd	Dysor diameter	Tid
55,1 cm	100 cm	0,645 cm	36,96 s
7.05 cm	100 cm	0,645 cm	60 s

2,1 cm	100 cm	0,645 cm	7,21 s
4,5 cm	100 cm	0,645 cm	23,96 s

Tabell 4: variation av rördiameter med resulterande tid



Figur 3: Logaritmering över sambandet mellan tömningstiden[t] och rördiameter [D]

Genom att använda linjärisering av funktionerna kunde vi omvandla exponenten till en y=kx + m-formel, där k representerar exponenten. Derivatan av funktionen gav oss lutningskoefficienten, vilket motsvarar riktningskoefficienten. Exponenten a, som beskriver rördiametern, beräknades till 1,7 och avrundades till 2, vilket stämmer överens med teorin som säger att a=-b. Detta indikerar att b (exponenten för rördiametern) ska vara -2, vilket bekräftades av lutningen på grafen i figur 1, där lutningskoefficienten blev -1,99, avrundat till -2. Slutligen blev exponenten för vattenhöjden c = 0,62, vilket avrundades till 0,5 eller ½.

Exponenterna experimentet kom fram till att:

Håldiameter exponent [b]= -2

Rördiameter exponent[a]= 2

Vattenhöjd exponent[c]= 0.5

Från teorin vi har:

Dimensioner för tid (T):

$1 = -2d - e$ (7)

Dimensioner för längd (L):

$0 = a + b + c + d - e - 3f$ (8)

Dimensioner för massa (M):

$0 = e + f$ (9)

Första steget är att beräkna a + b + c eftersom dessa värden är kända.

$a + b + c = -2 + 2 + 0.5 = 0.5$ (11)

Nu löser ut d från ekvation 7

$1 = -2d - e \rightarrow d = -(e+1)/2$ (12)

Nu substerar d i formeln

$-0.5 = -(e+1)/2 + e - 3f$ (13)

Multplicerar båda leden med 2

$-1 = -e + 1 + 2e - 6f \rightarrow 0 = e - 6f$ (14)

Då får vi

$0 = e + f$ (15)

Från ekvation 14 så kan man få att f = 0 då är e = 0

Nu har alla okända variabler utan d som kan lösa ut från ekvationen 7

$1 = -2d - e \rightarrow 1 = -2d - 0 \rightarrow d = -0.5$ (16)

Slut värdet till ekvationen

$$T = k \cdot D^2 \cdot D^{-2}{}_h \cdot h^{0.5} \cdot g^{-0.5} \cdot \mu^0 \cdot p^0 \qquad (17)$$

Förenklas till

$$T = k \cdot (D^2 \cdot h^{0.5}) / D^{-2}{}_h \cdot g^{-0.5} \qquad (19)$$

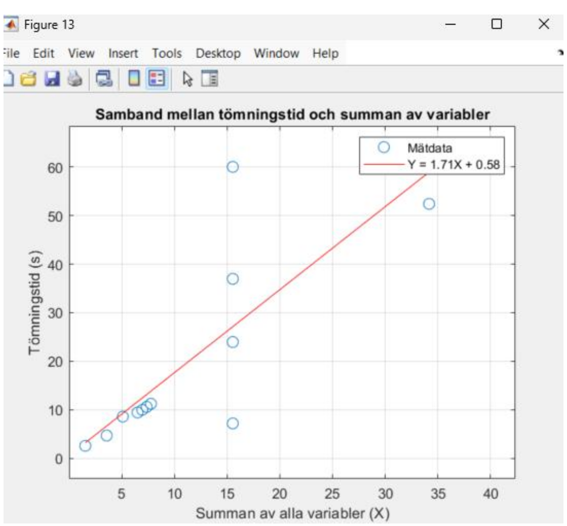
Beräkningen av konstanten K

Ekvationen $T = k \cdot D^2 \cdot D^{-2}{}_h \cdot h^{0.5} \cdot g^{-0.5} \cdot \mu^0 \cdot p^0$ 3

beskriver sambandet, där grafen plottades med T på y-axeln och uttrycket k ($T = k \cdot D^2 \cdot D^{-2}{}_h \cdot h^{0.5} \cdot g^{-0.5} \cdot \mu^0 \cdot p^0$) på x-axeln. Detta kan förenklas till formen Y = KX, där Y representerar tömningstiden för alla variationer och X motsvarar summan av variablerna (rördiameter, vattenhöjd och dysdiameter). I detta sammanhang blir K lutningskoefficienten för det förenklade uttrycket.

X [värdet av variablerna] = [5.1084, 5.1084, 34.1674, 1.5460, 6.5035, 6.9526, 7.3743, 7.7732, 15.5407, 15.5407, 15.5407, 15.5407]

Y [tömningstid] = [8.61, 4.71, 52.39, 2.60, 9.46, 10.00, 10.60, 11.25, 39.96, 60.00, 7.21, 23.96]



Figur4: plottad graf med sammanband mellan tömningstiden och samman av variablerna.

Resultaten av figur 4 visade att konstanten k uppskattades till cirka 1,71, vilket kan avrundas till √3

Den slutgiltiga formeln för resultat 1 blev:

$T = \sqrt{3} \cdot (D^2 \cdot h^{0.5}) / D^{-2}{}_h \; . \; g^{-0.5}$

5. Diskussion

Resultaten av experimenten visar att en mängd variabler, inklusive rördiameter, vattenhöjd och håldiameter, påverkar tömningstiden. Vi kunde hitta exponenterna för varje variabel genom att linjärisera sambanden. Vi hittade exponenten 2 för rördiametern (D). Detta stämmer överens med tidigare forskning och den teoretiska modellen. Det visade sig att håldiameterns exponent (D_h) var -2, vilket också stöds av teorin om flödeshastighet, såväl som dess beroende av öppningens storlek. Exponenten för vattenhöjden (h) var 0,5, vilket motsvarar Torricellis lag, som säger att flödeshastigheten ökar med kvadratroten av vattenhöjden.

Den som skulle påverkas resultat som används i metoden är att endast tre olika rör- och dysdiameterar använd, mätpunkter kan ge en mätosäkerhet också, vattennivå kan påverkas uppmätta tömningstiden särskilt när det högnivåvatten över sträckan(mätpunkter) som kan ha bidragit till vissa avvikelser från den teoretiska modellen. Det kunna förbättras om fanns fler mätpunkter så skulle ge mer mät säkerhet.

Varan resultat stämmer väl överens med tidigare studier och särskilt vad gäller exponenterna för rör och håldiametern, som tidigare forskning har bevisat att flödeshastigheten är proportionell mot kvadraten på rördiametern och inversen av kvadraten på håldiametern, som vår undersökning har visat också. Det är möjligt att mätfel eller andra faktorer i omgivningen, såsom förändringar i vattennivån under experimentet eller luftmotstånd, är orsaken till den mindre avvikelsen i exponenten för vattenhöjden (0,62 istället för 0,59)

6. Slutsatser

Avslutningsvis, att tömningstiden har påverkats av flera faktorer till exempel som håldiameter och cylinderdiameter och vätskenivå. När det är större diameter så det bli snabbare att töms. Cylinderdimater och vätskenivå spelar en viktig roll, och förändringar i dessa variabler påverkar också flödeshastigheten. Förändringar i dessa tre faktorer avgör den totala tömningstiden, och att varje förändring i någon av dessa faktorer kan ha en betydande inverkan på resultatet.

Labben hade som huvudsakligt syfte att fastställa en formel för tiden det tar för vatten att tömmas ur en behållare. Utifrån resultaten kan vi dra slutsatsen att formeln är:

$T= \sqrt{3} \cdot (D^2 \cdot h^{0.5}) / D^2_h \, . \, g^{-0.5}$

Referenser

[1] Wikipedia, Fysikaliska storheter. Hämtades: 2024-10-14.
https://sv.wikipedia.org/wiki/Lista_%C3%B6ver_fysikaliska_storheter

[2] TECS, Discharge of liquids (Torricelli's law). Hämtades: 2024-10-15.
https://www.tec-science.com/mechanics/gases-and-liquids/discharge-outflow-liquid-speed-torricellis-law/

[3] PraxiLabs, Learn All about Bernoulli Equation and Its Applications. Hämtades: 2024-10-15.
https://praxilabs.com/en/blog/2022/06/22/bernoulli-equation-and-applications/