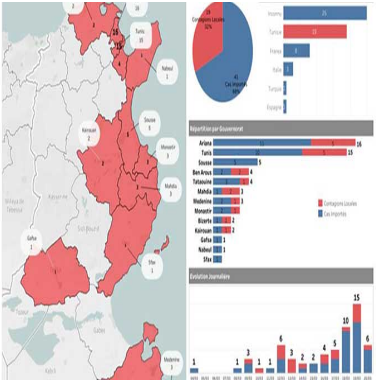
Chapitre 1 :
éléments de probabilité

Abdallah Ben Abdallah
Université de Sfax
Institut Supérieur d'Informatique et de Multimédia de Sfax

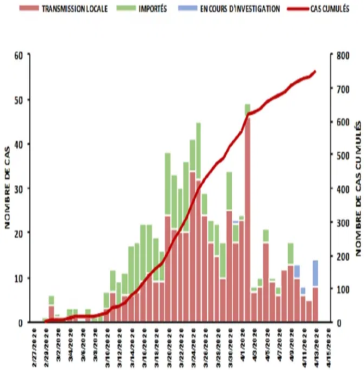
Octobre 2020

Plan du Chapitre

Cov-19 en Tunisie



(a)



(b)

Il ya deux branches de statistique

- Statistique déscriptive
- Statistique inférentielle.

Programme Probabilités et Statistique

- Chapitre 1 : Notion de probabilité
- Chapitre 2 : Variables aléatoires discrètes
- Chapitre 3 : Variables aléatoires continues
- Chapitre 4 : Échantillonnage aléatoire
- Chapitre 5 : Estimation des paramètre
- Chapitre 6 : Test des hypothèses

Exemple de motivation : Considérons un lancé de pièce de monnaie au début d'un match de foot pour attribuer la balle à une équipe.
La question qui se pose est la suivante :

- Qu'obtient-on? pile ou face?

Réponse : ? C'est une expérience aléatoire.
Question plus "correcte" :

- Quelle est la chance d'obtenir pile? ou face?

Réponse : 0,5 ou proche de 0,5.

- Quelle est la signification de ce nombre 0,5?

Si on lance cette pièce de monnaie 10 fois.

- Sur les dix lancés, combien de fois on obtient pile?

1. Expérience Aléatoire

Définition 1. Une **expérience aléatoire** est une expérience tel que ses résultats ne peuvent pas être prévus avec certitude, avant que l'expérience soit réalisée.

Exemples d'expériences aléatoires

- **Pile ou Face :** On lance n fois ($n \geq 1$) successives une pièce de monnaie. On enregistre 1 si on obtient Face et 0 si on obtient Pile.
- **Dé cubique :** On lance $n \geq 1$ fois successives un dé cubique numéroté de 1 à 6.
- **Urne :** Une urne contient m boules distinctes, numérotés de 1 à m. L'expérience consiste à extraire **successivement** et **sans remise** n boules de l'urne.
- **La pièce de monnaie de Buffon :** On jette une pièce de monnaie de rayon $r \leq 1/2$ sur un plancher de coté 1 mètre et on enregistre les coordonnées du centre de la pièce de monnaie.

2. Événements

L'univers d'une expérience aléatoire est un ensemble Ω qui contient tous les résultats possibles de l'expérience.

Dans plusieurs cas, l'univers Ω d'une expérience aléatoire est une partie de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

Si l'expérience consiste à jeter un dé cubique numéroté de 1 à 6 et on enregistre les résultats, l'univers est

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Exercice 1. Déterminer les univers pour les exemples donnés dans l'exemple de motivation.

Un **événement** A est un ensemble de résultats de l'expérience.

Ainsi, A est une partie de l'univers Ω.

Des exercices

Exercice 2. Déterminer les événements:

1. Exemple de Pile ou face : A: La somme des numéros est 1.
2. Exemple Dé cubique : B: La somme des numéros est $n+1$.
3. Exemple Urne: C: La somme des numéros est n.

Exercice 3. Supposons que 50 étudiants sont inscrit en mastère professionnelle d'informatique et multimédia à ISIMS. Soit les événements suivants

- A : étudiants poursuit le cours de Réseau.
- B : étudiants poursuit le cours de Lunix.

Parmi les 50 étudiants, il y a 30 poursuivent le cours de Réseau, 25 poursuivent le cours de Lunix, et 10 poursuivent les deux. Quelle est le nombre des étudiants qui

1. poursuivent l'un des deux cours?
2. ne poursuivent aucun des deux cours?
3. ne poursuivent pas le cours de Réseau?

Rappel des opérations sur les ensembles

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble Ω.

- Distributivité :
  - $A \cap (B \cup C) =$.
  - $A \cup (B \cap C) =$.
- $A \cup \overline{A} =$ et $A \cap \overline{A} =$.
- $\overline{A \cap B} =$ et $\overline{A \cup B} =$.

Exercice 4 : 20 ordinateurs sont inspectés à la fin d'une ligne de production. 11 ordinateurs ne présente aucun défaut, 8 ayant un défaut extérieur et 3 ayant un défaut intérieur et ne démarrent pas. Notons I l'ensemble des ordinateurs ayant un défaut intérieur et E ayant un défaut extérieur. En utilisant I et E, écrire par un symbole les ensembles suivants :

1. Les ordinateurs ayant les deux défauts.
2. Les ordinateurs ayant au moins un défauts.
3. Les ordinateurs n'ayant aucun défaut.
4. Les ordinateurs ayant exactement un défaut.

3. Mesure de probabilité

La probabilité d'un événement est une **mesure** de la façon dont probablement l'événement se produira si nous réalisons l'expérience.

Considérons une expérience aléatoire d'univers Ω. Soit $\mathcal{E}$ = l'ensemble des événements.

Axiomes de Probabilité (Kolmogorov 1903-1987)

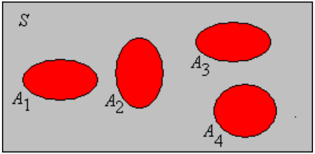
Une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω est une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les trois axiomes suivantes:

1. Pour tout événement A de $\mathcal{E}$, on a $\mathbb{P}(A) \geq 0$.
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
3. Si $\{A_i, i \in I \subset \mathbb{N}\}$ est une famille d'événements deux à deux disjoints ($A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$), alors

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

Des exemples de mesure de probabilité

Remarque : Par l'axiome 3, on veut dire que la mesure d'un événement qui se compose lui même des événements deux à deux disjoints est la somme des mesures des événements.

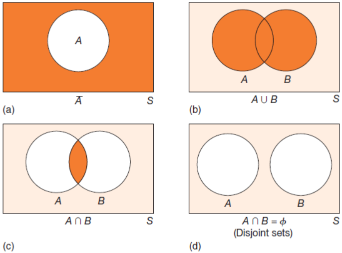


$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_4)$$

Un exemple de mesure de probabilité discrète : Soit Ω une partie finie. Pour toute partie A de Ω on définit: $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.
$\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité sur Ω.

Un exemple de mesure de probabilité continue : Soit Ω une partie (mesurable) de $\mathbb{R}^2$ de surface $\mathcal{S}(\Omega)$ finie. Pour toute partie (mesurable) A de Ω on définit $\mathbb{P}(A) = \frac{\mathcal{S}(A)}{\mathcal{S}(\Omega)}$.
$\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité sur Ω.

Propriétés de mesure de probabilité



- Pour tout événement A, on a $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- Pour tout événements A et B, on a

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

- Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
- Soit $\{A_i, i \in I\}$ une famille d'événements. On a

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i \in I} A_i) \leq \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

C'est l'inégalité de **Boole**.

Soit une expérience aléatoire d'univers fini Ω.

équiprobabilité

On dit qu'il y a équiprobabilité, si pour tous événements élémentaires $\{w_i\}$ et $\{w_j\}$ on a

$$\mathbb{P}(\{w_i\}) = \mathbb{P}(\{w_j\}).$$

Dans le cas d'équiprobabilité, on a

$$\mathbb{P}(\{w_i\}) = \frac{1}{Card(\Omega)}.$$

Plus généralement,

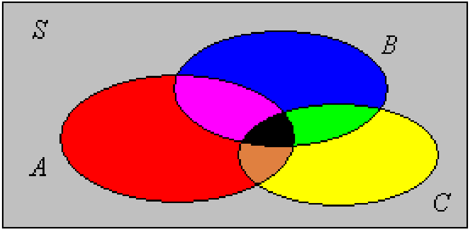
Pour tout événement A de Ω, on a

$$\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}.$$

Des exercices

Exercice 5 : Un total de 28% des hommes Tunisiens fument des cigarettes, 7% fument des cigares, et 5% fument les deux cigares et cigarettes. Quel est le pourcentage des hommes qui ne fument ni cigares, ni cigarettes?

Exercice 6 :



Déterminer $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$ en fonction de $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(A \cap B), \mathbb{P}(A \cap C), \mathbb{P}(B \cap C)$ et $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.

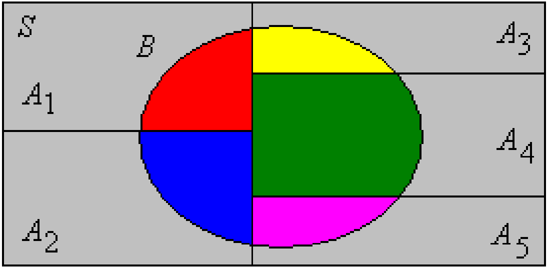
Loi de la probabilité totale

Soit $\{A_i, i \in I\}$ une partition d'événements de l'univers Ω :

- $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j,$
- $\cup_{i \in I} A_i = S.$

Alors pour toute événement B, on a

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$



Arrangement :

Considérons un ensemble D à n éléments. Un **arrangement** de k éléments de D est un placement de k éléments distincts de D :

$$\begin{cases} (x_1, x_2, .., x_k), & x_i \in D, \text{ pour tout } i, \quad \textbf{Il y a ordre} \\ x_i \neq x_j, & \text{pour } i \neq j, \quad \textbf{Pas de répétition} \end{cases}$$

Le **nombre des arrangements** de k éléments d'un ensemble à n éléments est

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **factoriel** n l'entier :

$$n! = n(n-1)(n-2)...1$$

Par convention, $0! = 1$. Avec ces notations,

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Permutation : Une permutation d'un ensemble D à n éléments est un arrangement de n éléments de D.

Le **nombre des permutations** d'un ensemble à n éléments est

$$A_n^n = n(n-1)...1 = n!$$

Arrangement avec répétition : Considérons un ensemble D à n éléments. Un **arrangement avec répétition** de k éléments de D est un placement de k éléments de D :

$$(x_1, x_2, .., x_k),\ x_i \in D,\ \text{pour tout } i, \quad \textbf{il y a Ordre}.$$

Il y a répétition.

Le **nombre des arrangements avec répétition** de k éléments d'un ensemble D à n éléments est n^k.

Combinaison : Considérons un ensemble D à n éléments. Une **combinaison** de k éléments de D est un sous-ensemble (non ordonné) à k éléments distincts de D :

$$\{x_1, x_2, ..., x_k\}\,, \quad \textbf{Pas d'ordre}$$

où $x_i \in D$, pour tout i, $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$. **Pas de répétition.**

Théorème

Le **nombre des combinaisons** de k éléments d'un ensemble à n éléments est

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Propriétés des nombres des combinaisons

(P1) $C_n^0 = C_n^n = 1.$

(P2) $C_n^k = C_n^{n-k}.$

(P3) Formule de Pascale

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k.$$

(P4) Formule de Binôme de Newton: $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Exercice 7 : Dans une course avec 10 chevaux, on enregistre le premier, le second, et troisième. Combien y a-t-il de résultats?

Exercice 8 : Douze livres, se composant de 5 livres de maths, de 4 livres de science, et de 3 livres d'histoire sont aléatoirement arrangés sur une étagère.

Trouvez le nombre d'arrangements dans chacun des cas suivants :

1. Il n'y a aucune restriction.
2. Les livres de chaque type doivent être ensemble.
3. Les livres de maths doivent être ensemble.

Exercice 9 : Un enfant a 12 blocs; 5 sont rouges, 4 sont verts, et 3 sont bleus.

Dans combien de manières mettent les blocs qui sont arrangés dans une ligne (des blocs d'une couleur donnée sont considérés identiques).

Exercice 10 : Un club a 20 membres, 12 sont des femmes et 8 sont des hommes. Un comité de 6 membres doit être choisi.

1. Trouvez le nombre de différents comités.
2. Trouvez le nombre de différents comités dans chacun des cas suivants:
   (a) Le comité doit avoir 4 femmes et 2 hommes.
   (b) Le comité doit avoir au moins 2 femmes et au moins 2 hommes.

Exercice 11 : On lance 5 dés cubiques distincts numérotés de 1 à 6.

1. Trouvez le nombre des résultats.
2. Trouvez le nombre des résultat avec les points sont tous différents.

Considérons une expérience aléatoire d'univers Ω et la mesure de probabilité $\mathbb{P}$. Soit A et B deux événements tel que $\mathbb{P}(B) > 0$.

Définition 5.

La **probabilité conditionnelle** de A sachant B est définie par :

$$\mathbb{P}_B(A) = \left(ou \;\; \mathbb{P}(A/B)\right) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Exercice 12 : Exprimer $\mathbb{P}_B(A)$ en fonction de $\mathbb{P}_A(B)$.
Exercice 13 : Un stock contient 5 transistors défectueux (qui ne fonctionnent pas immédiatement lors de la mise en service), 10 transistors partiellement défectueux (qui fonctionnent au début mais au bout de quelques heures d'utilisation ils s'arrêtent), et 25 transistors non défectueux. Un transistor est choisi au hasard du stock et mis en service. Si le transistor fonctionne immédiatement, quelle est la probabilité qu'il soit non défectueux?

Soit $\{A_i, i \in I\}$ une partition d'événements de l'univers Ω.

La loi de la probabilité totale:

Pour tout événement B, on a

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)$$

En particulier, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$.

La formule de Bayes:

Pour tout événement B, on a

$$\forall j \in I, \ \mathbb{P}_B(A_j) = \frac{\mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}_{A_j}(B)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)}$$

En particulier,

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}_{\overline{A}}(B)}.$$

Exercice 14: Soit A et B deux événements d'une expérience aléatoire d'univers Ω tels que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}, \ \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}, \ \text{et } \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{10}$$

Trouvez $\mathbb{P}_B(A), \mathbb{P}_A(B), \mathbb{P}_B(\overline{A})$ et $\mathbb{P}_{\overline{A}}(\overline{B})$.

Exercice 15: Soit A, B et C des événements d'une expérience aléatoire d'univers Ω tels que

$$\mathbb{P}_C(A) = \frac{1}{2}, \ \mathbb{P}_C(B) = \frac{1}{3}, \ \text{et } \mathbb{P}_C(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

Trouvez $\mathbb{P}_C(A \backslash B), \mathbb{P}_C(A \cup B)$ et $\mathbb{P}_C(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Exercice 16: Dans une certaine population, 30% des personnes fument et 8% ont un certain type de maladie de cœur. De plus, 12% des personnes qui fument ont la maladie.

1. Quel est le pourcentage de la population des personnes qui fument et ont la maladie?
2. Quel est le pourcentage des fumeurs parmi les malades?
3. Le tabagisme et la maladie sont-ils positivement corrélés?

Deux événements A et B sont **positivement corrélés** si et seulement si

$$\mathbb{P}_B(A) > \mathbb{P}(A).$$

Deux événements A et B sont **négativement corrélés** si et seulement si

$$\mathbb{P}_B(A) < \mathbb{P}(A).$$

Exercice 17: Une usine a 3 chaines de montage qui produit des morceaux de mémoire. La ligne 1 produit 50% des morceaux et a un taux défectueux de 4%; la ligne 2 a produit 30% des morceaux et a un taux défectueux de 5%; la ligne 3 produit 20% des morceaux et a un taux défectueux de 1%. Un morceau est choisi au hasard de l'usine.

1. Trouvez la probabilité que le morceau est défectueux.
2. étant donné que le morceau est défectueux, trouvez la probabilité conditionnelle pour chaque ligne.

Exercice 18 : A un certain stade d'une enquête criminelle, l'inspecteur en charge est de 60% convaincu de la culpabilité d'un certain suspect. Supposons maintenant qu'un nouvel élément de preuve est découvert. Cet élément montre que le criminel a une certaine caractéristique (comme gaucher, la calvitie, les cheveux bruns, etc). Supposons que 20% de la population possède cette caractéristique. Si le suspect est parmi ce groupe, quel devrait être le degré de certitude de l'inspecteur de la culpabilité du suspect?

Correction de l'exercice 17 : Soit les événements

- D "le morceau de mémoire choisi est défectueux"
- L_i "le morceau de mémoire choisi provient de la ligne i", $i = 1, 2, 3$.

1. Nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(D/L_1)\mathbb{P}(L_1) + \mathbb{P}(D/L_2)\mathbb{P}(L_2) + \mathbb{P}(D/L_3)\mathbb{P}(L_3),\\ &= 1 \times 0,6 + 0,2 \times 0,4\\ &= 0,68.\end{aligned}$$

Il reste de calculer

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Ca) &= \mathbb{P}(Ca/Co)\mathbb{P}(Co) + \mathbb{P}(Ca/\overline{Co})\mathbb{P}(\overline{Co}),\\ &= 1 \times 0,6 + 0,2 \times 0,4\\ &= 0,68.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathbb{P}(Co/Ca) = \frac{\mathbb{P}(Co \cap Ca)}{\mathbb{P}(Ca)} = \frac{0,6}{0,68} = 0,882.$$

Ainsi, avec le nouveau élément découvert, l'inspecteur possède une certitude supérieur à 88 % que le suspect est coupable.

Correction de l'exercice 18 : Soit les événements

- Co "le suspect est coupable"
- Ca "le suspect possède la caractéristique"

Nous voulons calculer $\mathbb{P}(Co/Ca)$.
Nous avons $\mathbb{P}(Co \cap Ca) = \mathbb{P}(Ca/Co)\mathbb{P}(Co) = 1 \times 0,6 = 0,6$.
Il reste de calculer

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Ca) &= \mathbb{P}(Ca/Co)\mathbb{P}(Co) + \mathbb{P}(Ca/\overline{Co})\mathbb{P}(\overline{Co}),\\ &= 1 \times 0,6 + 0,2 \times 0,4\\ &= 0,68.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathbb{P}(Co/Ca) = \frac{\mathbb{P}(Co \cap Ca)}{\mathbb{P}(Ca)} = \frac{0,6}{0,68} = 0,882.$$

Ainsi, avec le nouveau élément découvert, l'inspecteur possède une certitude supérieur à 88 % que le suspect est coupable.

5. L'indépendance

Considérons une expérience aléatoire d'univers Ω et de mesure de probabilité $\mathbb{P}$.

Définition :

Deux événements A et B sont **indépendant** si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Si $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$ alors :

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ indépendants} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A), \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B). \end{aligned}$$

Exercice 19 : Montrer que si A et B sont deux événements indépendants, il en ait de même pour A et $\overline{B}$.

Exercice 20 : Trois étudiants se sont absentés à un examen de mathématiques. Ils décident alors de mentir au professeur en disant qu'un pneu de la voiture a été éclater. Le professeur sépare les étudiants et demande à chacun quel est le pneu qui a été éclater. Les étudiants, qui n'ont pas prévu ceci, choisissent leurs réponses indépendamment et au hasard.

Trouvez la probabilité que les étudiants partent avec leur déception.

6. Conclusion

- Une **mesure de probabilité** $\mathbb{P}$ d'une expérience aléatoire d'univers Ω est une application

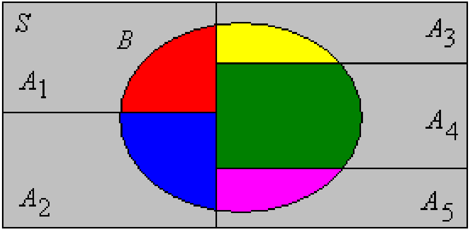
$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P}: & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \longmapsto & \mathbb{P}(A) \end{array}$$

où $\mathcal{E}$=l'ensemble des événements, vérifiant les trois axiomes suivantes:

1. Pour tout événement $A \in \mathcal{E}$, $\mathbb{P}(A) \geq 0$.
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
3. Si $\{A_i, i \in I \subset \mathbb{N}\}$ une famille d'événements deux à deux disjoints, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

- On a
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$
- Soit $\{A_i, i \in I\}$ une partition d'événements de l'univers Ω.



La **loi de la probabilité totale**.

$$\forall B \in \mathcal{E},\ \mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)$$

- On veut choisir un échantillon de k objets d'une population à n objets.
  - S' **il y a de l'ordre** et les objets sont prélevés **avec remise**, alors le nombre d'échantillons est n^k.
  - S'**il y a de l'ordre** et les objets sont prélevés **sans remise**, alors le nombre d'échantillons est

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

  - S'il **n'y a pas d'ordre** et les objets sont prélevés **sans remise**, alors le nombre d'échantillons est

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

- La probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par :

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

- **La formule de Bayes:**

$$\forall j \in I,\ \mathbb{P}_B(A_j) = \frac{\mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}_{A_j}(B)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)}$$

où $\{A_i, i \in I\}$ est une partition de l'univers Ω.

- En particulier,
  - **La loi de la probabilité totale:**

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}_{\overline{A}}(B).$$

  - **La formule de Bayes:**

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}_{\overline{A}}(B)}$$

- Une famille d'événements $\{A_1, ..., A_k\}$ est **indépendante** si

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i).$$

En particulier, A et B sont **indépendantes** si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Bibliographie

Jay Devore
Probability and Statistics for Engineering and the Sciences.
Brooks/Cole, Cengage Learning, 2010.

Sheldon M. Ross
Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists.
Elsevier Academic Press, 2004.