

# Variables Aléatoires Continues

Abdallah BEN ABDALLAH

Université de Sfax

Institut Supérieur d'Informatique et de Multimédia de Sfax

Novembre 2019

# Plan du Chapitre

1. Généralités
2. Espérance et variance
3. Variables continues usuelles
4. Couple de variables aléatoires
5. Covariance et corrélation
6. Lois usuelles provenant de la loi normale

## 1. Variable aléatoire continue

**Exemple 1:** Une expérience consiste à mesurer la durée de vie,  $X$ , d'une batterie.

- Il y a un nombre **infini** de valeurs possibles que  $X$  peut prendre.
- Les durées de vie (en centaines d'heures) de 50 batteries choisies parmi une population très grande sont présentées dans le tableau suivant :

0.406	0.685	4.778	1.725	8.223
2.343	1.401	1.507	0.294	2.230
0.538	0.234	4.025	3.323	2.920
5.088	1.458	1.064	0.774	0.761
5.587	0.517	3.246	2.330	1.064
2.563	0.511	2.782	6.426	0.836
0.023	0.225	1.514	3.214	3.810
3.334	2.325	0.333	7.514	0.968
3.491	2.921	1.624	0.334	4.490
1.267	1.702	2.634	1.849	0.186

On observe que

- 32% des observations sont dans l'intervalle  $[0, 1]$ .
- 22% des observations sont dans l'intervalle  $[1, 2]$ .

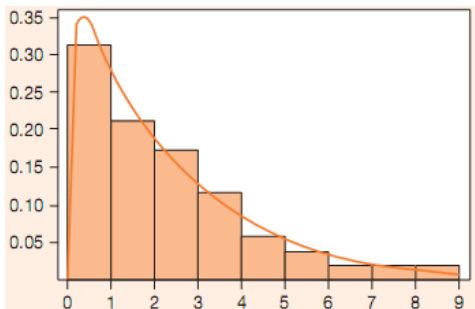


Figure: Histogramme des 50 observations

L'histogramme peut être approximé par la fonction

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2}, \quad x > 0.$$

## Définition 1.

Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dite **densité** (ou **loi**) **de probabilité** d'une variable aléatoire continue  $X$  si :

1

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

2

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

3

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Notons que si  $X$  est une variable aléatoire continue, alors

$$\forall a \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X = a) = \int_a^a f(x) dx = 0.$$

**Exercice 1: (suite de l'exemple 1)** On suppose que la loi de probabilité de durée de vie d'un certain type des batteries est

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- ❶ Quelle est la probabilité que la durée de vie d'une batterie de ce type soit entre 100 et 200 heures? soit supérieur à 200 heures?
- ❷ Connaissant que la batterie a été utilisée plus de 200 heures, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 300 heures?

### Définition 2.

La **fonction de répartition** d'une v.a. continue de densité de probabilité  $f(\cdot)$  est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt.$$

**Propriétés .** Si  $F(\cdot)$  est une fonction de répartition d'une v.a. continue  $X$  de densité de probabilité  $f(\cdot)$ , alors :

**(P1)**  $F(\cdot)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x).$$

**(P2)**  $F$  est croissante:

$$\text{si } x \leq y, \text{ alors } F(x) \leq F(y).$$

**(P3)** Pour tout  $a < b$ , on a :

$$\mathbb{P}(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

**(P4)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ .

**Exercice 2.** Pour une chaîne de production dans une usine, soit  $X$  le pourcentage du temps de travail d'une semaine que la chaîne est en fait en fonctionnement. Supposons que  $X$  est une variable aléatoire de densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- ① Vérifier que  $f$  est bien une densité de probabilité.
- ② Déterminer la fonction de répartition  $F$  de  $X$ .

**Exercice 3.** La fonction de répartition de  $X$  est

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .



## 2. Espérance et variance

**Définition :** L'**espérance** d'une variable aléatoire continue  $X$  de densité  $f(\cdot)$  est le réel (s'il existe)

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

La **variance** de  $X$  est définie par

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx = \mathbb{E}(X^2) - \mu^2.$$

**Remarque :** L'espérance est la valeur **moyenne prévue** de  $X$ .  
L'écart type

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)},$$

est une **mesure de dispersion** de  $X$  autour de l'espérance.

**Exercice 4:** Soit  $X$  une v.a. continue de densité

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer l'espérance et la variance de  $X$ .

Comme pour les variables discrètes l'espérance et la variance vérifient les propriétés:

- ❶  $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b.$
- ❷  $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X).$
- ❸  $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y).$

### 3. Variables aléatoires usuelles

**3.1. La loi uniforme:** On dit qu'une variable aléatoire continue suit la loi uniforme sur l'intervalle  $[a, b]$  si sa densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'espérance et la variance de  $X$  sont donnés par

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

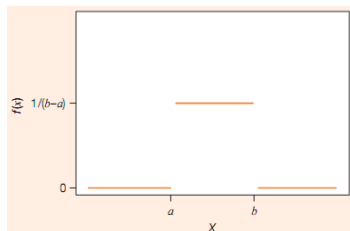


Figure: La loi uniforme sur  $[a, b]$

**Exercice 5 :** Soit  $X$  une variable aléatoire de loi uniforme sur  $[a, b]$ .

- ① Montrer que la fonction de répartition de  $X$  est donnée par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

- ② Déterminer  $\mathbb{P}(X > c)$  pour un certain  $c \in [a, b]$ .  
③ Si  $a \leq c \leq d \leq b$ , déterminer  $\mathbb{P}(X > d | X > c)$ .  
④ Déterminer le troisième quartile  $Q_{0.75}$ , c'est à dire

$$F(Q_{0.75}) = 0.75$$

**3.2. La loi exponentielle :** On dit qu'une v. a. continue suit la **loi exponentielle** de paramètre  $\lambda > 0$  si sa densité est:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

L'espérance et la variance de  $X$  sont donnés par

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

La fonction de répartition est

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

**Exercice 6.** La durée  $T$  d'un appel téléphonique suit la loi exponentielle de moyenne 5 minutes. Quelle est la probabilité que la durée de l'appel soit entre 8 et 12 mn? moins que 8mn? plus que 12mn?

### 3.3. La Variable normale :

Sans doute, la distribution de probabilité la plus utilisée est la distribution normale.

Soit  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$ .

Une variable aléatoire  $X$  suit la loi **normale**  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$  si sa densité est:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

L'espérance et la variance de  $X$  sont donnés par

$$\mathbb{E}(X) = \mu, \quad \mathbb{V}(X) = \sigma^2.$$

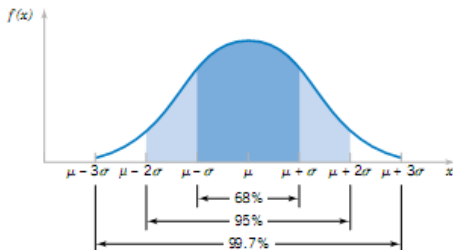


Figure: La loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$

On dit que  $Z$  est une variable aléatoire de loi **normale centrée réduite** ( $\mathcal{N}(0, 1)$ ) si  $\mu = 0$  et  $\sigma = 1$ :

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Sa fonction de répartition est définie par :

$$\phi(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

### Proposition :

La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite vérifie:

$$\phi(-z) = 1 - \phi(z), \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

### Théorème 1:

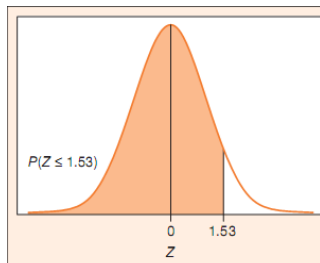
Si la v.a.  $X$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ , alors la v.a.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

suit la loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$ .



z	.00	.01	.02	.03	.04
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738



**Figure:** Le tableau des valeurs de la loi normale  $\mathcal{N}(0,1)$ ,  
 $\phi(1,53) = \mathbb{P}(Z \leq 1,53) = 0,9370$

**Exercice 7:** Soit  $Z$  la variable aléatoire de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Déterminer

- ①  $\mathbb{P}(Z \leq 1)$ .
- ②  $\mathbb{P}(Z < -1, 51)$ .
- ③  $\mathbb{P}(-1, 51 < Z < 0, 5)$ .
- ④  $z_0$  tel que  $\mathbb{P}(Z < z_0) = 0, 99$ .

**Exercice 8:** Supposons que  $X$  est une v.a. suit la loi normale  $\mathcal{N}(10, 3)$ . Déterminer  $\mathbb{P}(4 < X < 16)$  et  $\mathbb{P}(|X - 4| \leq 12)$ .

**Exercice 9:** Considérons une v.a.  $X$  distribuée selon la loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ . Si on sait que

$$\mathbb{P}(X \leq 30) = 0.9772 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X \geq 15) = 0.8413,$$

déterminer les valeurs de  $\mu$  et  $\sigma$ .

**Exercice 10:** Une machine fabrique des pièces dont le diamètre  $X$  (en cm) est une variable aléatoire normale d'espérance  $\mu = 20\text{cm}$  et d'écart type  $\sigma$ . Quelle devrait être la valeur de  $\sigma$  de sorte que pas plus de 99% des pièces aient un diamètre entre 19,5 et 20,5?

## 4. Couple de variables aléatoires

La fonction  $f(x, y)$  est dite **loi conjointe** d'un couple variable aléatoire  $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  si

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

Si  $f(x, y)$  est une loi conjointe d'un couple  $(X, Y)$ , alors

- $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx = 1.$

On appelle **densité marginale** de  $X$  la fonction

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy.$$

On appelle **densité marginale** de  $Y$  la fonction

$$\forall y \in \mathbb{R}, f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$$

On dit que  $X$  et  $Y$  sont **indépendantes** si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = f_X(x)f_Y(y).$$

**Exercice 11:** Soit  $(X, Y)$  un couple de variables de densité conjointe la fonction  $f$  définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} 3x & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1 Vérifier que  $f$  est bien une loi conjointe de probabilité.
- 2 Calculer  $\mathbb{P}\left(X \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \leq Y \leq \frac{3}{4}\right)$ .
- 3 Déterminer les densités marginales  $f_X(x)$  et  $f_Y(y)$ .
- 4  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes?

**Exercice 12:** Soit  $(X, Y)$  un couple de variables de densité conjointe la fonction  $f$  définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} 6x^2y & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1 Déterminer les densités marginales  $f_X(x)$  et  $f_Y(y)$ .
- 2  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes?

**Généralisation :** Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  une variable aléatoire de densité une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $X_1, \dots, X_n$  sont **indépendantes** si

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, f(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \times \dots \times f_{X_n}(x_n).$$

où  $f_{X_k}(x_k)$  est la densité marginale de  $X_k$ .

La somme de deux variables normales indépendante est une variable normale.

## Théorème 2

Si  $X_1$  et  $X_2$  sont deux v.a. indépendantes qui suivent respectivement les lois normales  $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$  et  $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ , alors la v.a.

$$Z = X_1 + X_2$$

suit la loi normale  $\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$ .

**Définition 9:** La **covariance** d'un couple  $(X, Y)$  est le réel définie par

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))).$$

Le **coefficient de corrélation** du couple  $(X, Y)$  est défini par

$$r(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

La covariance du couple  $(X, Y)$  est encore donnée par

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y),$$

où

$$\mathbb{E}(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y)dx dy.$$

## Propriétés de covariance :

(P1)  $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$  et  $\text{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X)$ .

(P2)  $\text{Cov}(aX + bZ, Y) = a \text{Cov}(X, Y) + b \text{Cov}(Z, Y)$ .

(P3)  $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)$ .

(P4)  $\mathbb{V}(X + Y) + \mathbb{V}(X - Y) = 2\mathbb{V}(X) + 2\mathbb{V}(Y)$ .

(P5) Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes alors  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .

(P6) Le coefficient de corrélation  $r(X, Y) \in [-1, 1]$ .

(P7) Si  $Y = aX + b$  alors

$$r(X, Y) = \begin{cases} 1 & \text{si } a > 0 \\ -1 & \text{si } a < 0 \end{cases}$$



**Exercice 13:** Soit  $X$  une v.a. continue dont la densité est

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1 Déterminer le réel  $a$ .
- 2 Calculer l'espérance  $\mathbb{E}(X)$  et la variance  $\mathbb{V}(X)$ .
- 3 On considère la v.a.  $Y = X^2$ . Déterminer la fonction de répartition et puis la densité de  $Y$ .
- 4 Calculer l'espérance  $\mathbb{E}(Y)$  et la variance  $\mathbb{V}(Y)$ .

**Exercice 14:** Lors d'un examen, la note  $X$  a suivi une loi normale  $\mathcal{N}(8.5, 4)$ .

- 1 Quelle est la proportion d'étudiants ayant la moyenne?
- 2 On veut améliorer les notes à l'aide d'une transformation affine  $Y = aX + b$  (la variable  $Y$  désignant la nouvelle note). Déterminer  $a$  et  $b$  pour que 50% des étudiants aient la moyenne et que 75% des étudiants aient une note supérieure ou égale à 8.

## 6. Lois déduites de la loi normale

### 6.1. La loi Khi-deux : (K. Pearson (1857-1936))

On appelle loi **Khi-deux** de **degré de liberté**  $n$ , la loi de la variable aléatoire

$$\chi_n^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_n^2,$$

avec  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  sont des variables aléatoires indépendantes de même loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

L'espérance et la variance de  $\chi_n^2$  sont données par

$$\mathbb{E}(\chi_n^2) = n, \quad \mathbb{V}(\chi_n^2) = 2n.$$

**La variable Khi-deux est additive:** Pour deux lois du Khi-deux indépendantes de degré de libertés  $n$  et  $p$ , on a :

$$\chi_n^2 + \chi_p^2 = \chi_{n+p}^2.$$

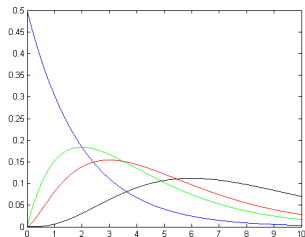


Figure: la densité de la loi Khi-deux  $n = 2, n = 4, n = 5$  et  $n = 8$ .

**Exercice 15:** L'erreur de mesure d'une certaine grandeur physique suit une loi normale  $\mathcal{N}(0, 2)$ . On effectue 4 mesures indépendantes  $E_1, E_2, E_3, E_4$ , et on définit la v. a.

$$K = \frac{1}{4} (E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 + E_4^2) .$$

Quelle est la loi de  $K$  et ses éléments caractéristiques. Déterminer le réel  $x$  tel que  $\mathbb{P}(K < x) = 0,99$ .

On donne  $\chi_4^2(13, 27) = 0.99$ .

**Exercice 16:** Un missile est lancé par un avion vers une cible supposée à l'origine d'une repère ( $oxy$ )(l'unité est le mètre). Le missile atteint un point de coordonnées  $(X, Y)$  où  $X$  et  $Y$  sont deux variables indépendantes de même loi normale  $\mathcal{N}(0, 10)$ . Le missile détruira la cible s'il atteindra un point qui n'est pas loin du cible de 20 mètres.

- 1 Quelle est la loi de

$$K = \frac{X^2}{100} + \frac{Y^2}{100}?$$

- 2 Déterminer la probabilité pour que le missile détruira la cible. On donne  $\chi_2^2(4) = 0,8647$  où  $\chi_2^2(x)$  est la fonction de répartition de la loi Khi-deux de degré de liberté 2.

## 6.2. Distribution de Student : W. Gosset (1876-1937)

La loi de **Student de degré de liberté**  $n$  est la loi de la v.a.

$$T = \frac{Z}{\sqrt{V/n}}$$

- $Z$  de loi normale centrée réduite,
- $V$  de loi Khi-deux de degré de liberté  $n$ ,
- $Z$  et  $V$  indépendantes.

$$\mathbb{E}(T) = 0, \quad \mathbb{V}(T) = \frac{n}{n-2}, \quad n > 2.$$

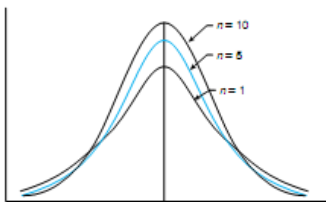


Figure: la densité de la loi Khi deux

### 6.3. Distribution de Fisher : R. Fisher (1890-1962)

Soit  $K_1$  et  $K_2$  deux v.a. de loi Khi-deux de degrés de liberté respectifs  $n_1$  et  $n_2$ . Si  $K_1$  et  $K_2$  sont indépendants, alors la v.a.

$$F = \frac{K_1/n_1}{K_2/n_2}$$

suit la de **Fisher de degré de liberté**  $(n_1, n_2)$ .

Soit  $T_n$  une variable aléatoire de Student de degré  $n$ . Pour  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , soit  $t_{\alpha,n}$  le réel vérifiant

$$\mathbb{P}(T \geq t_{\alpha,n}) = \alpha.$$

Soit  $K_n$  une variable aléatoire de loi Khi-deux de degré  $n$ . Pour  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , soit  $\chi_{\alpha,n}^2$  le réel vérifiant

$$\mathbb{P}(K \geq \chi_{\alpha,n}^2) = \alpha.$$



R. L. Scheaffer, M. S. Mulekar and J. T. McClave

*Probability and Statistics for Engineers .*

Brooks/Cole, Cengage Learning, (fifth edition) 2011.



Sheldon M. Ross

*Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists.*

Elsevier Academic Press, 2004.



Douglas C. Montgomery, George C. Runger

*Applied Statistics and Probability for Engineers.*

John Wiley & Sons, 2003.