Chapitre 3

Chemins dans un graphe

Chapitre 3: Chemin dans un graphe

I. Les matrices

1) Cas d'un graphe orienté

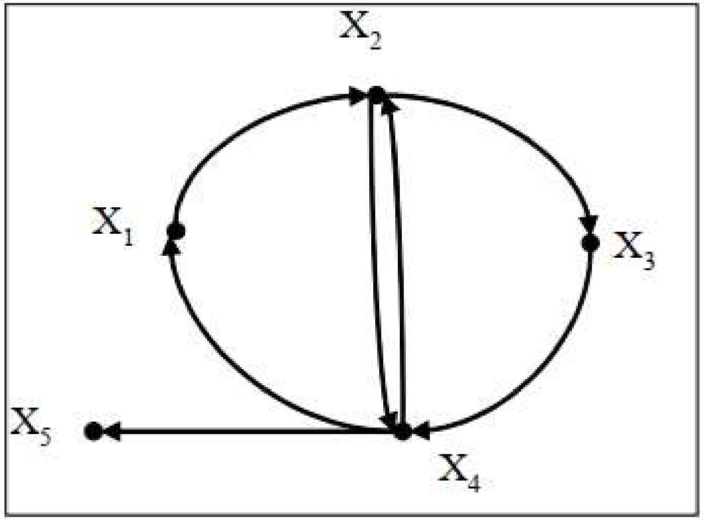
a. Matrice d'incidence aux arcs

Soit G = (X, U) un graphe orienté <u>sans boucle</u> où |X| = n et |U| = m. la matrice d'incidence aux arcs <u>E</u> est une matrice à n lignes et m colonnes dont l'élément e_{ij} de la $i^{émé}$ ligne et la $j^{éme}$ colonne est définit par :

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 : \text{si } I(u_j) = x_i \\ -1 : \text{si } T(u_j) = x_i \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Chapitre 3: Chemin dans un graphe

Exemple :



E :

	(X_1, X_2)	(X_2, X_3)	(X_3, X_4)	(X_4, X_1)	(X_4, X_2)	(X_2, X_4)	(X_4, X_5)
X_1	1	0	0	-1	0	0	0
X_2	-1	1	0	0	-1	1	0
X_3	0	-1	1	0	0	0	0
X_4	0	0	-1	1	1	-1	1
X_5	0	0	0	0	0	0	-1

Remarque :

Toute colonne de E contient exactement deux éléments non nuls : +1 et -1.

Chapitre 3: Chemin dans un graphe

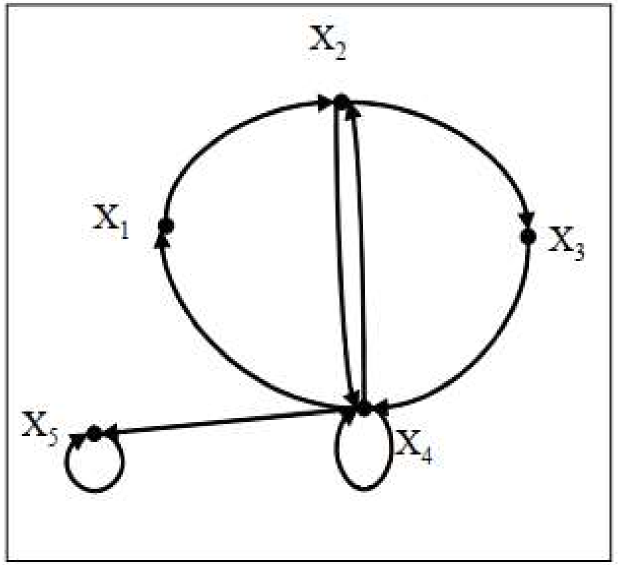
b. Matrice d'adjacence d'un graphe (orienté)

Soit G = (X, U) un graphe orienté où |X| = n. La matrice d'adjacence <u>A</u> est une matrice à n lignes et n colonnes dont l'élément a_{ij} de la $i^{émé}$ ligne et la $j^{éme}$ colonne est définit par :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1: \text{si } \exists\, u \in U \,/\, I(u) = x_i \text{ et } T(u) = x_j \\ 0 \text{ si non} \end{cases}$$

Chapitre 3: Chemin dans un graphe

Exemple :



Terminal

$$\text{Initial} \quad A : \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \mathbf{X_1} & \mathbf{X_2} & \mathbf{X_3} & \mathbf{X_4} & \mathbf{X_5} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{X_1} \\ \mathbf{X_2} \\ \mathbf{X_3} \\ \mathbf{X_4} \\ \mathbf{X_5} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarque : la matrice A exprime l'existence des chemins de longueur 1 entre tout couple de sommet.

Chapitre 3: Chemin dans un graphe

c. Matrice de longueur

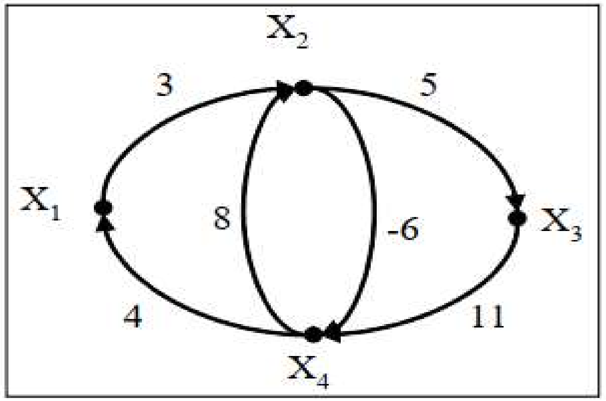
Soit G = (X, U) un graphe simple (ne possède ni boucle ni deux arêtes (arcs) identiques) dont <u>A</u> est la matrice d'adjacence.

Soit l'application C : U → R

u → C (u) qui à tout arc u associe une longueur. La matrice des longueurs L est une matrice n x n définie par :

$$l_{ij} = \begin{cases} C(u) \text{ si } I(u) = x_i \text{ et } T(u) = x_j \text{ c.à.d. si } (a_{ij} = 1) \\ +\infty \text{ si non} \end{cases}$$

<u>Exemple</u> :



Terminal

Initial

$$L : \begin{array}{c} \\ \mathbf{X_1} \\ \mathbf{X_2} \\ \mathbf{X_3} \\ \mathbf{X_4} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{X_1} & \mathbf{X_2} & \mathbf{X_3} & \mathbf{X_4} \end{array} \\ \begin{pmatrix} +\infty & 3 & +\infty & +\infty \\ +\infty & +\infty & 5 & -6 \\ +\infty & +\infty & +\infty & 11 \\ 4 & 8 & +\infty & +\infty \end{pmatrix} \end{array}$$

Chapitre 3: Chemin dans un graphe

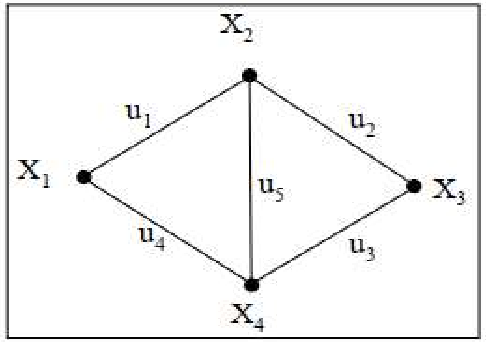
2) Cas d'un graphe non orienté

a. Matrice d'incidence aux arêtes

Soit $G = (X, U)$ un graphe non orienté sans boucle où $|X| = n$ et $|U| = m$. la matrice d'incidence aux arêtes E de G est une matrice à n lignes et m colonnes dont l'élément e_{ij} est définit par :

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 : \text{si } x_i \text{ est une extrémité de l'arête } u_j \\ 0 : \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple :



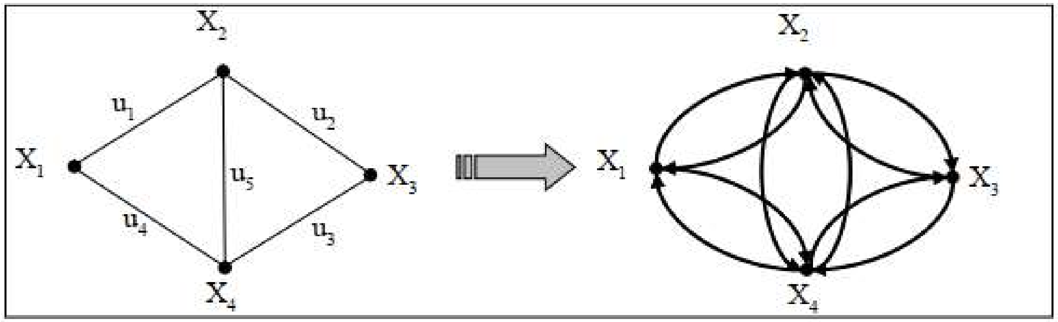
$$E : \begin{array}{c} \\ \mathbf{X_1} \\ \mathbf{X_2} \\ \mathbf{X_3} \\ \mathbf{X_4} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathbf{u_1} & \mathbf{u_2} & \mathbf{u_3} & \mathbf{u_4} & \mathbf{u_5} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Chapitre 3: Chemin dans un graphe

b. Matrice d'adjacence d'un graphe non orienté

Pour obtenir la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté, on remplace chaque arête de G (X, U) par deux arcs de sens opposés ayant mêmes extrémités et on considère la matrice d'adjacence du graphe orienté obtenu.

<u>Exemple</u> :



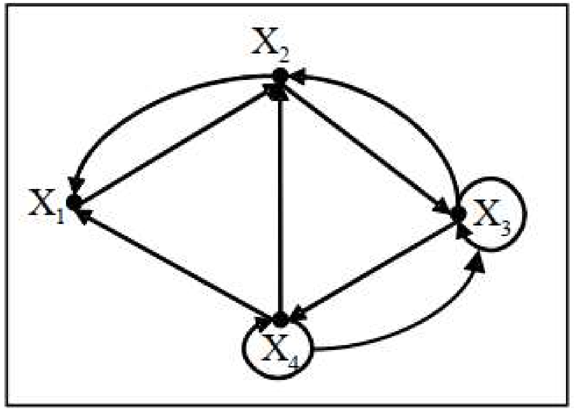
$$A : \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \mathbf{X_1} & \mathbf{X_2} & \mathbf{X_3} & \mathbf{X_4} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{X_1} \\ \mathbf{X_2} \\ \mathbf{X_3} \\ \mathbf{X_4} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

<u>Remarque</u> : la matrice A obtenu est une matrice symétrique.

Chapitre 3: Chemin dans un graphe

II. Chemin dans un graphe

Soit G = (X, U) un graphe orienté et soit x et y deux sommets de X.



<u>Question</u> : ∃ t'il un chemin allant de x à y ?

Si oui, quelle est le nombre de chemins allant de x à y ? Quelles sont leurs longueurs ?

Chapitre 3: Chemin dans un graphe

solution : (détermination des nombres de chemin)

Avec cette première solution on peut déterminer <u>l'existence</u> et le <u>nombre de chemin</u> allant de x à y.

Soit la matrice d'adjacence au graphe G = (X, U)

$$A : \begin{array}{c} \\ \mathbf{X_1} \\ \mathbf{X_2} \\ \mathbf{X_3} \\ \mathbf{X_4} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{X_1} & \mathbf{X_2} & \mathbf{X_3} & \mathbf{X_4} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Les éléments a_{ij} de A représentent l'existence d'un chemin de longueur 1 allant de x_i à x_j.

Pour déterminer l'existence des chemins de longueur 2 calculons A^2.

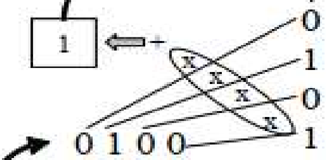
Les éléments de $(a_{ij})^2$ de A^2 sont définis par : $a^2{}_{ij} = \sum_{K=1}^{n} (a_{ik} \text{ x } a_{kj})$

Chapitre 3: Chemin dans un graphe

Exemple :

$$a^2_{32} = (0\ 1\ 1\ 1)\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix} = 2$$

→ Il existe deux chemins entre x_3 et x_2 de longueur 2.



$$\begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_4 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_4 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ x_3 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ x_4 & 2 & 3 & 3 & 2 \end{array} = A^2 = A \times A$$

Chapitre 3: Chemin dans un graphe

Calculons A^3

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 7 & 7 & 5 \\ 5 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Il y à 3 chemins de longueur 3 allant de x_2 à x_1

Ces chemins sont : $(x_2\ x_3\ x_4\ x_1)$; $(x_2\ x_3\ x_2\ x_1)$; $(x_2\ x_1\ x_2\ x_1$

Attention la longueur est égale à 3 car on à calculé A^3

Il y à 5 circuits de longueur 3 passant par x_4.

Les éléments $a^{(p)}_{ij}$ de A^p sont définis par : $a^{(p)}_{ij} = \sum_{K=1}^{n} (a^{(p-1)}_{ik} + a_{kj}) = a^{(p)}_{ij} = \sum_{K=1}^{n} (a_{ik} + a^{(p-1)}_{kj})$

$a^{(p)}_{ij}$ représente le nombre de chemin de longueur p allant de x_i à x_j.

Chapitre 3: Chemin dans un graphe

Remarque :

1) Soit le nombre total de chemin allant de x_i à x_j est v_{ij} de $V = \sum_{p \geq 1} A^{(p)}$ tel que :

$v_{ij} = a_{ij} + a^2_{ij} + a^3_{ij} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

→Si on veut déterminer le nombre de chemin de longueur $\leq$ k allant de x_i à x_j ont calcule :

v_{ij} de $V = \sum_{P=1}^{k} a^p_{ij}$.

2) G est sans circuit si et seulement si $A^{(p)} = 0$ à partir d'une certaine valeur de $p \leq n = |X|$.