Chapitre 1 : Eléments de probabilité.

- Expérience aléatoire :

  - Univers $\Omega = \{w_1, \dots, w_n\}$: toutes les issus possibles.
  - Evénements : Parties de Ω.
  - Probabilité : mesure pour les événements.

- Pour A, B événements :

  - $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
  - $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
  - Si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Dans le cas d'équiprobabilité : $\mathbb{P}(\{w_i\}) = \mathbb{P}(\{w_j\})$

on aura : pour tout événement A de Ω

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$

- Dénombrement = trouver le nombre de configurations possibles.

	= avec remise répétition	= sans remise pas de répétition
ordonné	n^p	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
non ordonné	$\times$	$C_n^p \quad \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Probabilité conditionnelle :

- Pour A et B deux événements tq $\mathbb{P}(B) > 0$.

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

- Formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(\bar{A})\,\mathbb{P}(B|\bar{A})}.$$

plus généralement si $\{A_i ; i \in I\}$ une partition d'événements de l'univers Ω. Pour tout événement B :

$$\mathbb{P}(A_j|B) = \frac{\mathbb{P}(A_j)\,\mathbb{P}(B|A_j)}{\sum \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(B|A_i)}$$

· Indépendance :

$A \perp\!\!\!\perp B \iff \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$

$\iff \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$.

$A \perp\!\!\!\perp B$ si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$

TD 1 : probabilités et statistique

ADBD
2ème année
2023 - 2024

Exercice 1:

1) On choisit 5 lettres dans $\{A, B, C, D, E\}$ avec ordre et sans répétition donc il y'a $5!$ choix.

2) On choisit les emplacements de A soit C_5^1, puis on choisit les emplacements de B soit C_4^2 puis on place les C.
il y'a donc $5 \times 6 = 30$ mots de 5 lettres en utilisant 1 fois la lettre A, deux fois la lettre B et deux fois la lettre C.

Exercice 2:

1) Il y'a 3×6^3 codes différents. $\Rightarrow \text{card}(\Omega) = 3 \times 6^3$

2) Il y'a 3×5^3 " sans le chiffre 4 $\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \dfrac{3 \times 5^3}{3 \times 6^3}$

3) Il y'a $3 \times 6^3 - 3 \times 5^3$ contenant au moins une fois le chiffre 4. $\Rightarrow \mathbb{P}(B) = \dfrac{3 \times 6^3 - 3 \times 5^3}{3 \times 6^3}$

4) Il y'a $3 \times 6 \times 5 \times 4$ codes de chiffres $\neq$: $\mathbb{P}(C) = \dfrac{3 \times 6 \times 5 \times 4}{3 \times 6^3}$.

5) Il y'a $3 \times 6^3 - 3 \times 6 \times 5 \times 4$ codes comportant au moins deux chiffres identiques. $\mathbb{P}(D) = \dfrac{3 \times 6^3 - 3 \times 6 \times 5 \times 4}{3 \times 6^3}$.

Exercice 3 :

1) Si A et B sont complémentaires alors

$$b = \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$
$$= a + \frac{3}{4}.$$

de plus $A \cup B = \Omega$ donc $b = 1$ et $a + \frac{3}{4} = 1$ d'où $\boxed{a = 1/4}$

) Si A implique B alors $A \subset B$, donc

$$b = \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B) = \frac{3}{4}$$

et $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) = a = 0$.

Exercice 4 :

C : Assuré ayant une voiture de sport.
Π : Assuré ayant plusieurs voitures

$\mathbb{P}(\Pi) = 0.7$; $\mathbb{P}(C) = 0.2$; $\mathbb{P}(C \mid \Pi) = 0.15$

Cherchons $\mathbb{P}(\overline{\Pi} \cap \overline{C})$

$$\mathbb{P}(\overline{M} \cap \overline{C}) = \mathbb{P}(\overline{M \cup C})$$
$$= 1 - \mathbb{P}(M \cup C)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(M) - \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(M \cap C)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(M) - \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(C|M)\mathbb{P}(M)$$
$$= 1 - 0.7 - 0.2 + 0.15 \times 0.7$$
$$= 0.205.$$

<u>Exercice 5 :</u>

A : " fauteil type A"
B : " " " B"
C : " " " C"
D : " " " D"
E : " " " E"
M : " " motorisé" ,

$\mathbb{P}(A) = 0.12.$
$\mathbb{P}(B) = 0.34.$
$\mathbb{P}(C) = 0.07$
$\mathbb{P}(D) = 0.25$
$\mathbb{P}(E) = 0.22.$
$\mathbb{P}(M|A) = 0.19$

$\mathbb{P}(M|B) = 0.5$
$\mathbb{P}(M|C) = 0.04$
$\mathbb{P}(M|D) = 0.32$
$\mathbb{P}(M|E) = 0.76$

1) $$\mathbb{P}(C|M) = \frac{\mathbb{P}(M|C)\ \mathbb{P}(C)}{\{\mathbb{P}(M|A) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(M|B)\ \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(M|C)\ \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(M|D)\ \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(M|E) \times \mathbb{P}(E)\}}$$

$$= \frac{0.68 \times 0.25}{\{(0.19 \times 0.12) + (0.5 \times 0.34) + (0.04 \times 0.07) + (0.32 \times 0.25) + 0.76 \times 0.22\}}$$

$= 0.$

2) $$\mathbb{P}(D|\overline{M}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{M}|D) \times \mathbb{P}(D)}{\{\mathbb{P}(\overline{M}|A)\ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{M}|B)\ \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(\overline{M}|C)\ \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(\overline{M}|D) \times \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(\overline{M}|E) \times \mathbb{P}(E)\}}.$$

$$= \frac{0.68 \times 0.25}{\{(0.81 \times 0.12) + (0.5 \times 0.34) + (0.96 \times 0.07) + (0.68 \times 0.25) + (0.24 \times 0.22)\}}.$$

$= 0.305.$

Exercice 6 :

$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$.

$\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$.

H : " exactement un de ces évément se produit".

$$H = (A \cap B^c \cap C^c) \cup (B \cap A^c \cap C^c) \cup (C \cap A^c \cap B^c)$$

$$\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B^c)\,\mathbb{P}(C^c) + \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(A^c)\,\mathbb{P}(C^c) + \mathbb{P}(C)\,\mathbb{P}(A^c) \times \mathbb{P}(B^c)$$

$$= (1/4)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right).$$