Chapitre 1: Généralité sur les graphes

Chapitre 1: Généralité sur les graphes

I. Introduction

Il existe deux types de graphes :
Graphe orienté (GO)
Graphe non orienté (GNO)

1) Définition d'un graphe

a) Graphe non orienté (GNO)

Par définition un graphe non orienté G = (X, U) est un ensemble fini X appelée ensemble de sommets, une partie U de X * X appelé ensemble des arêtes tel que :

$$u = \{\underbrace{x}_{\in X} , \underbrace{y}_{\in X}\} \in U$$

Avec u une arête joignant le sommet x au sommet y.
L'arête {x, y}= l'arête {y, x}.

Exemple :

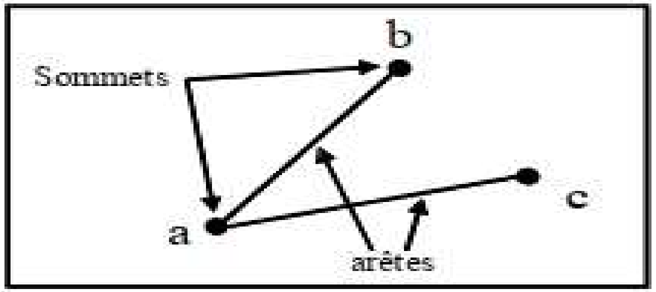


Figure 1 : Graphe non orienté

Chapitre 1: Généralité sur les graphes

b) Graphe orienté (GO)

On défini un graphe orienté G = (X, U) par un ensemble fini X appelée <u>ensemble de sommets</u> et une partie U de X * X appelé <u>ensemble des arcs</u> tel que :

$$u = (\underset{\in X}{x} , \underset{\in X}{y}) \in U$$

- Avec u un arc allant du sommet x au sommet y.
- L'arc $(x, y) \neq$ l'arc (y, x).
- x est appelé extrémité initiale ou <u>prédécesseur</u>
- y est appelé extrémité finale ou <u>successeur</u>.
- Si x = y, on parle alors d'une <u>boucle</u>.

<u>Exemple :</u>

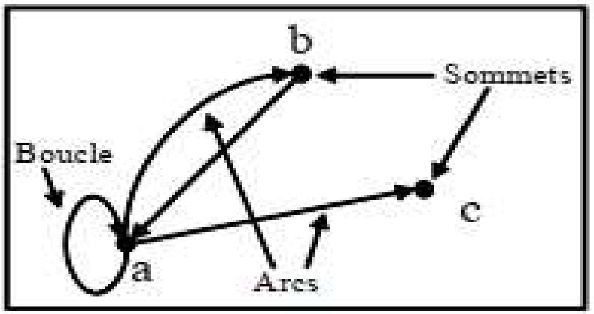


Figure 2 : Graphe orienté

Chapitre 1: Généralité sur les graphes

2) Application Initiale, Terminal et Successeur (GO)

Pour un graphe G = (X, U) ont défini les deux applications suivantes :

- L'application $I : U \rightarrow X$
  $u \rightarrow I(u) = x$, extrémité initiale de l'arc.

- L'application $T : U \rightarrow X$
  $u \rightarrow T(u) = x$, extrémité terminale de l'arc.

Exemple :

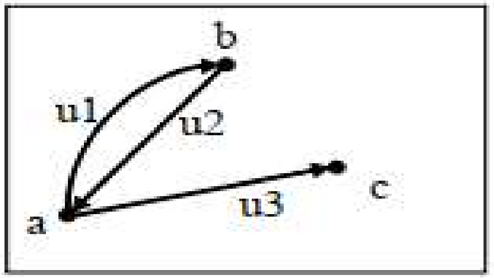


Figure 3 :

I (u1) = a	T (u1) = b
I (u3) = a	T (u3) = c
I (u2) = b	T (u2) = a

Chapitre 1: Généralité sur les graphes

<u>Exercice :</u>

Déterminer le graphe G = (X, U) représenté par la figure suivante :

Déterminer l'ensemble X et U

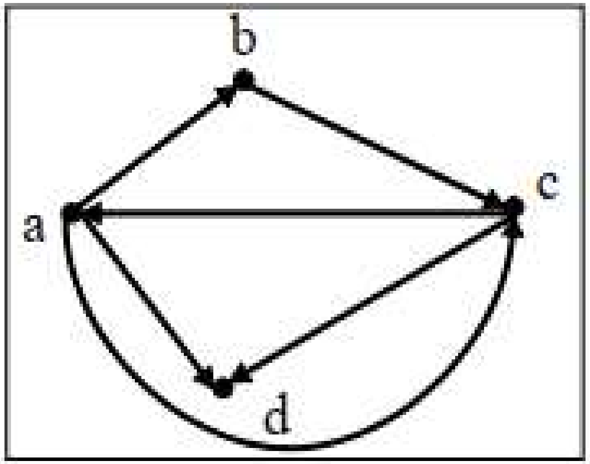


Figure 4

<u>Solution :</u>

$$G \begin{cases} X = \{a, b, c, d\} \\ U = \{(a, b) ; (a, d) ; (a, c) ; (b, c) ; (c, a) ; (c, d)\} \end{cases}$$

Chapitre 1: Généralité sur les graphes

L'application multivoque (successeur)

Un graphe G peut être défini par la donnée d'un ensemble fini X appelé l'ensemble des sommets et d'une application « multivoque » Γ tel que :

$$\Gamma : X \rightarrow X$$
$$x \rightarrow \Gamma(x)$$
$$\Gamma(x) = \{y/(x, y) \in U\} \text{ autrement dit :}$$
$$U = \{(x, y) / y \in \Gamma(x)\}$$

<u>Exemple :</u>

$\Gamma(a) = \{b, c, d\}$ $\Gamma(b) = \{c\}$ $\Gamma(c) = \{a, d\}$ $\Gamma(d) = \varnothing$

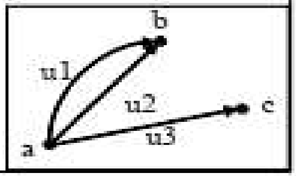
<u>Remarque :</u>

Si $x \in \Gamma(x)$ on dit qu'on a affaire à des <u>boucles</u>.

Par exemple, si on rajoute une boucle dans la figure 4 de (a) → (a) on à :

$\Gamma(a) = \{a, b, c, d\} \supset \{a\}$ Rq : (⊃ : contient)

<u>Remarque importante:</u>
Pour pouvoir parler d'application multivoque, il faut que G soit un **1-Graphe** c.à.d. ne possède pas d'arc multiple.



Chapitre 1: Généralité sur les graphes

II. Graphes simples, complets, partiels et sous graphes

1) Graphes simples

Un graphe est dit simple s'il ne possède ni boucle ni deux arêtes (arcs) identiques.

<u>Exemple :</u>

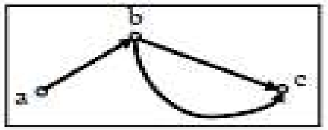


Figure 5 : Graphe non simple

2) Graphes complets

Un graphe est dit complet s'il existe une arête pour chaque paire de sommets c.à.d. il à le maximum d'arête.

<u>Exemple :</u>

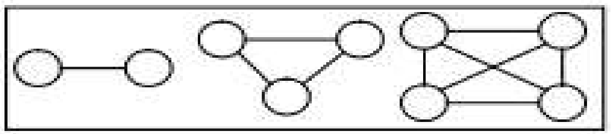
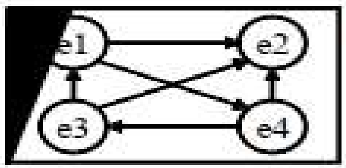


Figure 6 a : graphe NO complet



<u>Tournoi</u>
Les sommets : les équipes
Les arcs à gagné.
e1→ e2 : e1 à gagné e2

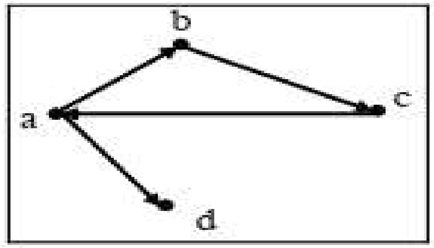
Figure 6 b : graphe orienté non complet

Chapitre 1: Généralité sur les graphes

3) Graphes partiels

Soit G = (X, U) et soit U' ⊂ U, alors G'(X, U') est un <u>graphe partiel</u>

<u>Exemple :</u>



Le graphe G' est un graphe partiel du graphe présent à la figure 4.

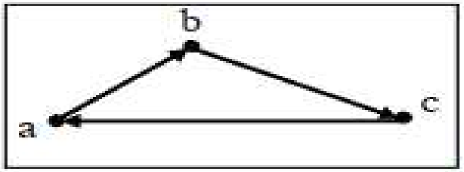
Figure 7 : G' est un graphe partiel du graphe de la figure 4

4) Sous graphes

Soit G = (X, U) ; X' ⊂ X et U' = {(x, y) ∈U / x ∈ X' et y∈X'}, alors G'(X', U') est appelé un <u>sous graphe</u>.

Dans un sous graphe on enlève quelque sommets mais on **garde** les arcs qui relient les sommets restants

<u>Exemple :</u>



Le graphe G' est un sous graphe du graphe présent à la figure 4.

Figure 8 : G' n'est pas un sous graphe du graphe de la figure 4 (page 3) car il manque l'arc a->c

Chapitre 1: Généralité sur les graphes

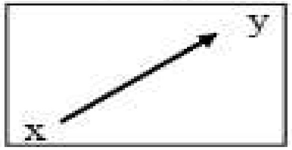
III. Ordre, taille, adjacence degré et incidence dans un graphe

1) Ordre, taille et adjacence

- On appelle ordre d'un graphe le nombre de ces sommets.
- On appelle la taille d'un graphe le nombre de ces arêtes (arcs).
- Deux sommets reliés par une arête (un arc) sont dits adjacents.
- Deux arêtes (arcs) ayant une extrémité commune sont dits adjacentes.

2) Degré et incidence

Soit $u = (x, y) \in U \,/\, x \neq y$

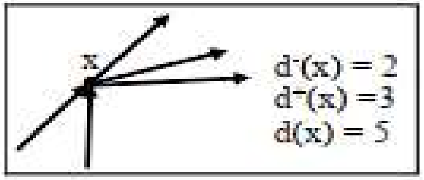


- On dit que l'arc u est incident vers l'intérieur à y.
- On dit que l'arc u est incident vers l'extérieur à x.

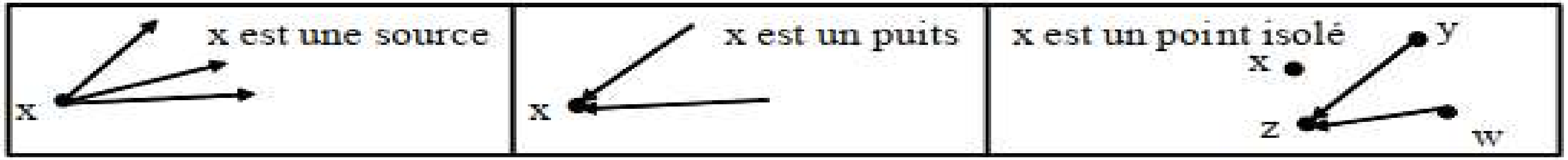
- le demi-degré intérieur $d^-(x)$ du sommet x est le nombre d'arc (on parle obligatoirement de graphe orienté) incident vers l'intérieur à x.
- le demi-degré extérieur $d^+(x)$ du sommet x est le nombre d'arc incident vers l'extérieur à x.

Chapitre 1: Généralité sur les graphes

Exemple :

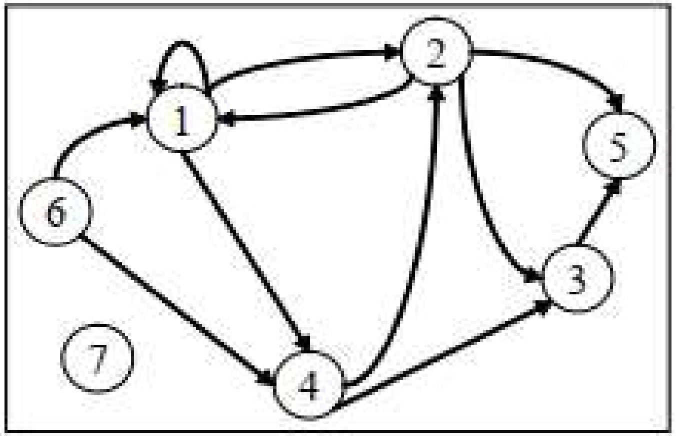


- Le <u>degré</u> de x est défini par $d(x) = d^-(x) + d^+(x)$. Autrement dit, le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes (arcs) dont il est une extrémité.
- x est appelé une entrée ou <u>une source</u> si $d^-(x) = 0$ et $d^+(x) > 0$.
- x est appelé une sortie ou <u>un puits</u> si $d^+(x) = 0$ et $d^-(x) > 0$.
- x est un <u>point isolé</u> si $d^+(x) = 0$ et $d^-(x) = 0$.



Chapitre 1: Généralité sur les graphes

Exercice : Soit le graphe G suivant :



1) Donner l'ordre et la taille du graphe G.
2) Quels sont les sommets adjacents au sommet 3.
3) Déterminer les demi-degrés intérieurs et extérieurs pour chaque sommet. En déduire leurs degrés.
4) Déterminer les sommets qui sont une source, un puits ou un point isolé.

Chapitre 1: Généralité sur les graphes

Théorème :

Dans un graphe G =(X, U) on à :

$$\sum_{x \in X} d^+(x) = \sum_{x \in X} d^-(x) = |U|$$

Cardinal de U

Démonstration évidente :

On a « Autant d'extrémité initiale que d'extrémité finale ».

Corolaire 1:

Dans un graphe on à : $\sum_{x \in X} d(x) = 2\,|U|$ → <u>démonstration</u> :

$$d(x) = d^+(x) + d^-(x)$$

$$\sum_{x \in X} d(x) = \sum_{x \in X} d^+(x) + \sum_{x \in X} d^-(x)$$

$$= |U| + |U|$$

$$= 2\,|U|$$

Chapitre 1: Généralité sur les graphes

Corolaire 2:

Dans un graphe, le nombre de sommet de degré impair est pair.

Démonstration :

$$\text{On à : } \overbrace{\sum_{x \in X} d(x)}^{\text{① Pair car } = 2\,|U|} = \overbrace{\sum_{x \in X\,pair} d(x)}^{\text{② Or } \sum_{x \in X\,pair} d(x) \text{ est pair (évidant)}} + \overbrace{\sum_{x \in X\,impair} d(x)}^{\text{③ D'ou } \sum_{x \in X\,imp} d(x) \text{ est pair : (pair =pair + pair)}} = 2\,|U|$$

Tel que : $X = X_{imp} + X_{pair}$

④ $\sum_{x \in X\,impair} d(x)$ est pair $\rightarrow$ $|X_{imp}|$ est pair

C'est pair car : impaire + impaire = pair.

La somme des degrés des sommets de degré impaire

La somme des degrés des sommets de degré pair

Chapitre 1: Généralité sur les graphes

IV. Graphes valués

Un graphe est dit graphe valué si à chaque arête (arc) ou sommet on associe des informations supplémentaires

Exemple 1 :

Un ensemble de ville peut être modélisé par un graphe orienté (ou non – chemin d'aller diffèrent du chemin de retour-) dont les arêtes modélisent la distance ou le coût entre deux villes. Application : chercher le plus petit chemin ; le chemin le moins cher ; le chemin le plus rapide…En utilisant des algorithmes dédiés.

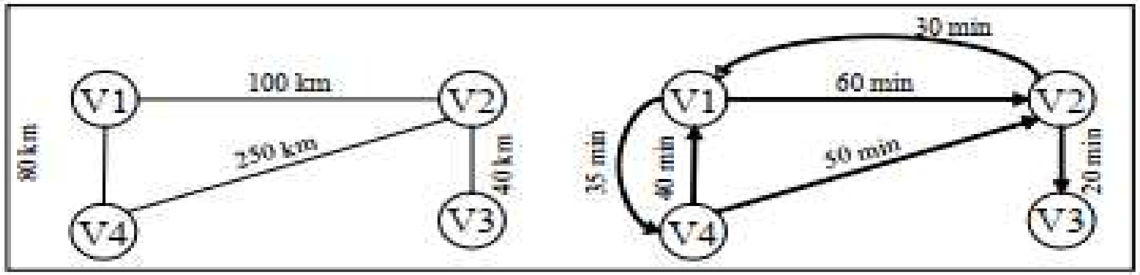


Figure 9 : graphe valué

Chapitre 1: Généralité sur les graphes

V. Graphes isomorphes

Soit deux graphe G = (X, U) et G' = (X', U'). G et G' sont dit **isomorphes** s'il ∃ 2 bijections : $\begin{cases} B_{So}\ X \rightarrow X' \text{ et} \\ B_{Arc}\ U \rightarrow U' \text{ tel que :} \end{cases}$

deux arc qui se correspondent dans la bijection B_{Arc} aient pour extrémités initiale et terminale respectivement des sommets qui se correspondent dans la bijection B_{So}.

Exercice :

Soit les deux graphes G et G' suivants :

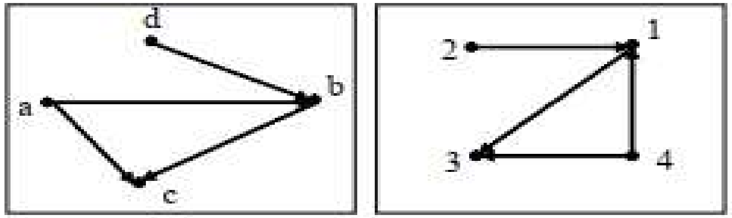


Figure 11 : Les deux graphes G et G' sont isomorphes

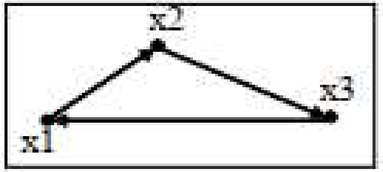
a) Déterminer les degrés pour chaque sommet des deux graphes G et G' :

b) Les deux graphes G et G' sont ils isomorphes ?

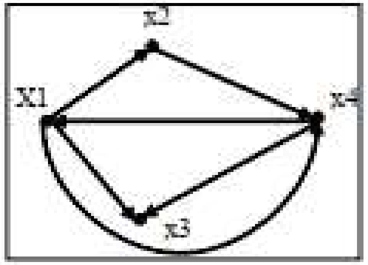
Chapitre 1: Généralité sur les graphes

Remarque : bien évidemment pour que deux graphes soit isomorphes il faut qu'ils aient le même nombre de sommet et le même nombre d'arc !

Contre exemple :



Le graphe G'' n'est pas isomorphe au graphe G car le nombre de sommet n'est pas le même.



Le graphe G''' n'est pas isomorphe au graphe G car il n'y à pas de sommet de degré 1.

Chapitre 1: Généralité sur les graphes

VI. Graphes particuliers

1) Graphes planaires

Un graphe planaire est un graphe qui peut être dessiné sans que ses arêtes ne se coupent.

Exemple 1:

Le graphe suivant est-il planaire ? (oui)

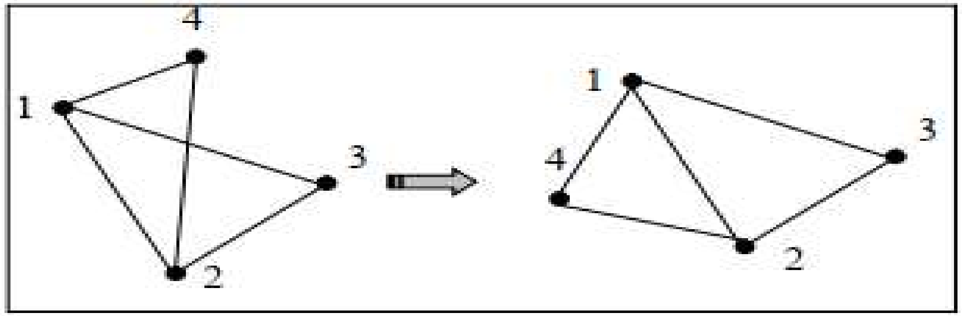


Figure 12 : Graphe planaire

Exemple 2:

Le graphe suivant est-il planaire ? (oui)

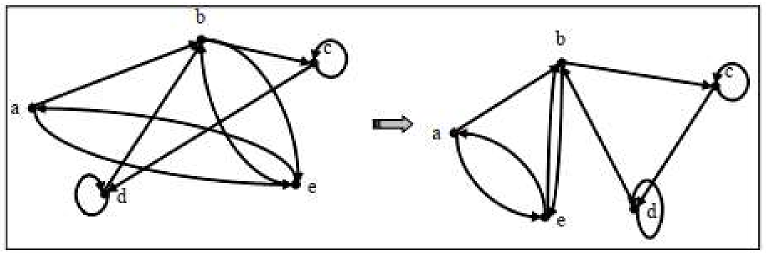


Figure 13 : Graphe planaire

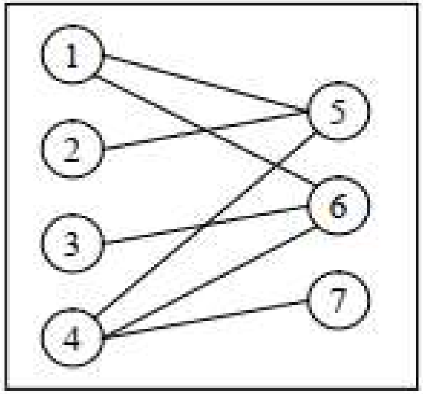
Chapitre 1: Généralité sur les graphes

2) Graphes biparties

Le graphe G = (X, U) est un <u>graphe bipartie</u> si l'ensemble X peut être partagé en deux sous ensemble A et B tel que :

- Les éléments de A ne sont reliés entre eux par aucune arête (aucun arc).
- Les éléments de B ne sont reliés entre eux par aucune arête (aucun arc).
- Les arêtes (arcs) relient uniquement des éléments de A à des éléments de B

<u>Exemple 1</u>:



Dans l'exemple1, A se compose des sommets 1, 2, 3 et 4. L'ensemble B se compose des sommets 5, 6 et 7.

<u>Exemple 2</u> : 8 personnes candidats pour 3 postes différents.
La modélisation d'une telle situation peut s'effectuer à l'aide d'un graphe bipartie tel que :

A : les personnes.
B : les postes
Les arcs : est candidat pour

Chapitre 1: Généralité sur les graphes

3) Les arbres

Un arbre est un graphe non orienté, <u>connexe</u> et sans cycle.

(Cf chapitre 2)

Un graphe est connexe si chaque deux sommet sont reliés par une chaine (GNO).
Cycle pour (GNO)

<u>Exemple</u> :

Le graphe G présente un arbre qui permet d'exprimé l'expression mathématique suivante : (a-b) * (c + d).