Chapitre 2

Connexité dans un graphe

Chapitre 2: connexité dans un graphe

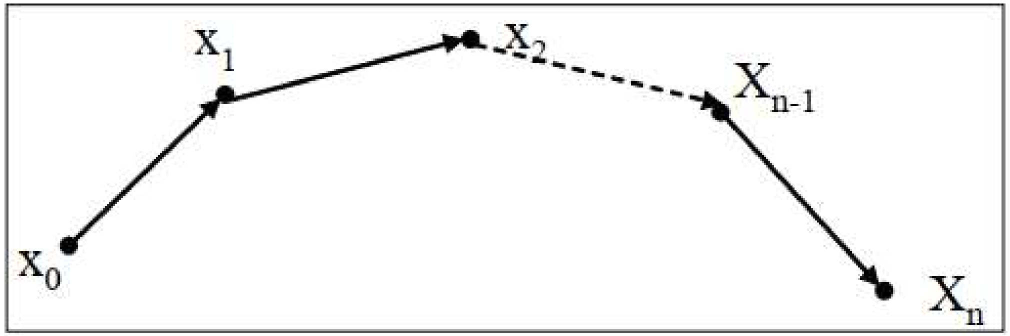
I. Chemin et circuit (cas d'un graphe orienté)

1) Chemin

Un chemin est une suite d'arc $(u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots u_n)$ / $\forall$ i $1 \leq i \leq n-1$: $I(u_{i+1}) = T(u_i)$.

Autrement dit : un chemin est une succession d'arcs parcouru dans le même sens.

Exemple :



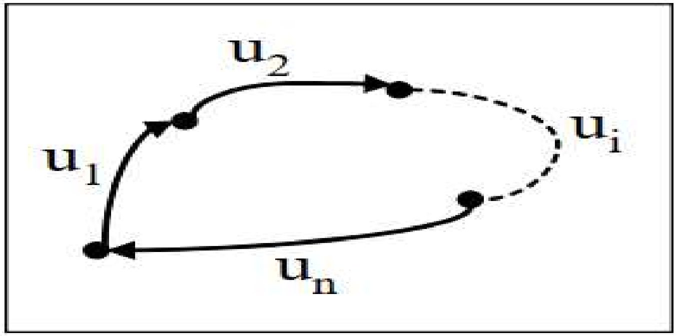
Chapitre 2: connexité dans un graphe

2) Circuit

Un circuit est un chemin tel que : $T(u_n) = I(u_1)$.

Autrement dit : un circuit est un chemin dont son début coïncide avec sa fin.

<u>Exemple</u> :



- **<u>Longueur</u>** : la longueur d'un <u>chemin</u> est le nombre d'arc qui le compose.
- **<u>Distance</u>** : la distance entre deux <u>sommets</u> d'un graphe est la longueur du chemin le plus court entre ces deux sommets.
- **<u>Diamètre</u>** : le diamètre d'un <u>graphe</u> est la distance maximale qui sépare deux sommets quelconque de ce graphe.

Chapitre 2: connexité dans un graphe

<u>Exercice</u> : soit le graphe G suivant :

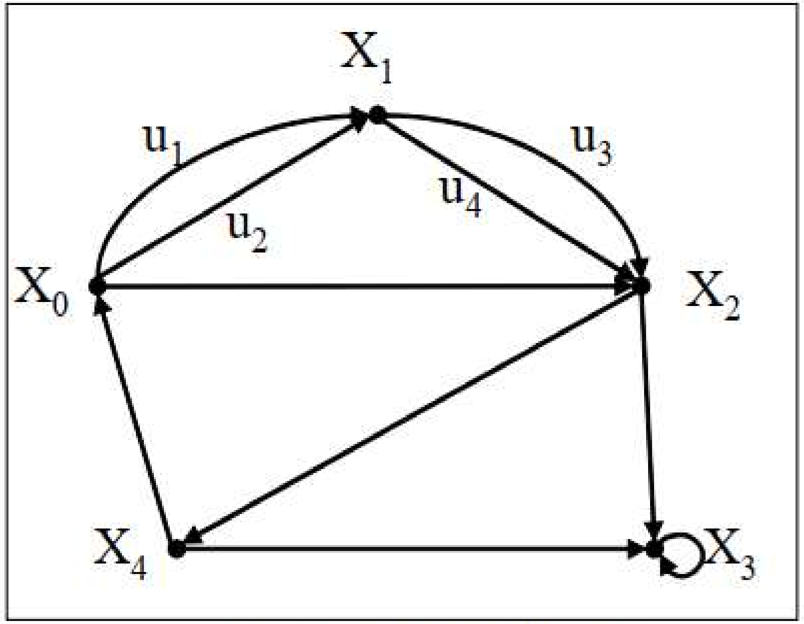


Figure 1 Graphe G

Questions :

a) Déterminer les chemins possibles entre x_0 et x_3 ainsi que leurs longueurs.

b) Le graphe G contient t'il un circuit ?

c) Quelle est le diamètre du graphe G ?

Chapitre 2: connexité dans un graphe

3) Différents types de chemin

a. Chemin simple

Un chemin est dit simple s'il ne comporte pas plusieurs fois le même arc.

Exemple :

Le chemin : $x_0\ x_1\ x_2\ x_3$ est un chemin simple et (élémentaire).

Le chemin : $x_0\ x_2\ x_4\ x_0\ x_1\ x_2\ x_3$ est un chemin simple (non élémentaire)

b. Chemin élémentaire

Un chemin est dit élémentaire s'il ne passe pas plusieurs fois par le même

Exemple :

Le chemin $x_0\ x_1\ x_2\ x_3$ est un chemin simple et (élémentaire).

Le chemin : $x_0\ x_1\ x_2$ (u_3) $x_4\ x_0\ x_1$ (u_4) $x_2\ x_3$ est un chemin simple (non élémentaire)

Chapitre 2: connexité dans un graphe

c. Chemin eulérien

Un chemin est dit eulérien s'il est simple et contient tout les arcs.

Il n'existe pas de chemin eulérien dans le graphe G car le sommet x_3 possède deux arcs entrant (si on passe par l'un, forcément on ne passe pas par l'autre)

Mr Eulaire : Dans une ville touristique passer par touts les ponts une seule fois !!

Chapitre 2: connexité dans un graphe

d. Chemin hamiltonien

Un chemin est dit hamiltonien s'il est élémentaire et visite tout les sommets.

<u>Exemple</u> :

Le chemin x_0 x_1 x_2 x_4 x_3 est un chemin hamiltonien, simple, élémentaire et non eulérien.

<u>Remarque</u> : les définitions des circuits simple, élémentaire, eulérien et hamiltonien est analogue à ceux des chemins.

Chapitre 2: connexité dans un graphe

II. Chaine et cycle (cas d'un graphe non orienté)

Par analogie aux chemins et circuit dans le cas d'un graphe orienté on définit les chaines et cycles en utilisant le vocabulaire suivant :

Graphe orienté	**Graphe non orienté**
Arc	Arête
Chemin	Chaîne
Circuit	Cycle

Remarque : une arête entre deux sommets est remplacée par deux arcs (un dans chaque sens).

Chapitre 2: connexité dans un graphe

III. Connexité (cas d'un graphe non orienté)

1) Définition

On définie la relation binaire de connexité **C** sur l'ensemble des sommets X d'un graphe G par :

$$x \; C \; y \Leftrightarrow \exists \text{ un chemin entre } x \text{ et } y.$$

C est une relation d'équivalence. En effet C est :

- Réflexive : $x \; C \; x$
- Symétrique : $x \; C \; y \Leftrightarrow y \; C \; x$
- Transitive : $\begin{cases} (x \; C \; y) \\ (y \; C \; z) \end{cases} \Leftrightarrow x \; C \; z$

Chapitre 2: connexité dans un graphe

2) Les composantes connexes d'un graphe

Un graphe G est dit connexe si le nombre de ces composantes connexes est égal à 1.

Exemple :

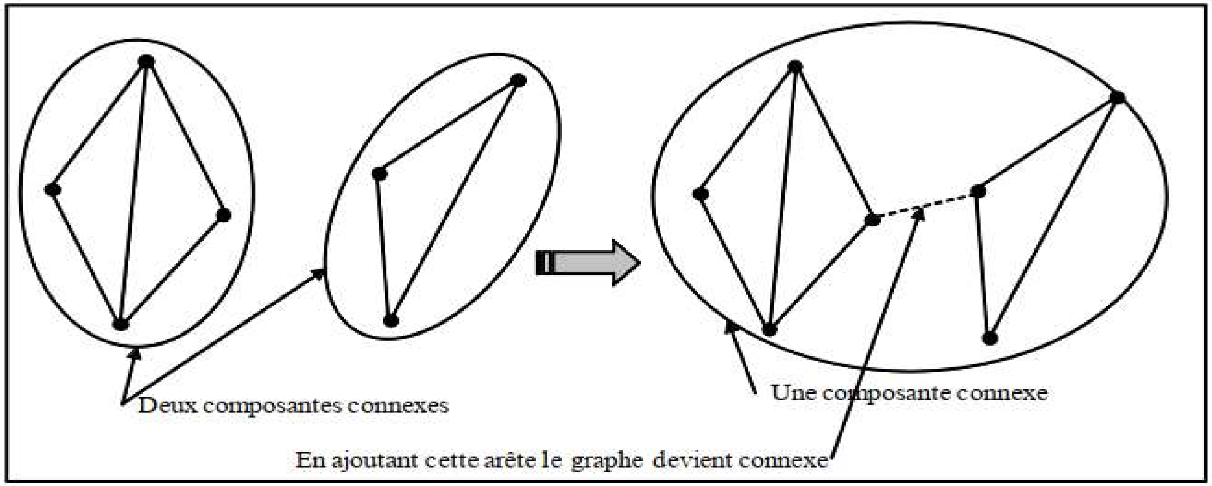


Figure 2 : Graphe G (connexité)

Le graphe G (Figure 2) n'est pas un graphe connexe car il comporte deux composantes connexes. Cependant si on ajoute l'arête ---- le graphe G devient un graphe connexe.

Chapitre 2: connexité dans un graphe

IV. Forte connexité (graphe orienté)

1) Définition

On définie la relation binaire $\hat{C}$ de forte connexité sur l'ensemble des sommets X d'un graphe G (orienté) par :

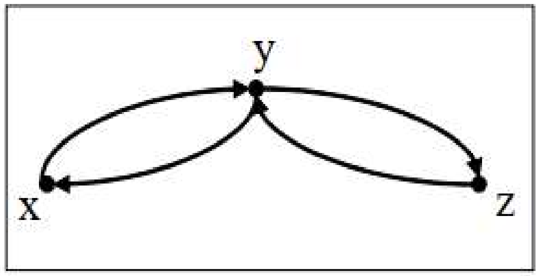
$$\underset{\in X}{x} \; \hat{C} \; \underset{\in X}{y} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \text{il } \exists \text{ un chemin de x à y} \\ \text{et} \\ \text{il } \exists \text{ un chemin de y à x} \end{cases}$$

Chapitre 2: connexité dans un graphe

Cette relation de connexité forte est une relation d'équivalence. En effet $\hat{C}$ est :

- Réflexive : $x \hat{C} x$
- Symétrique : $x \hat{C} y \Leftrightarrow y \hat{C} x$
- Transitive : $\begin{cases} (x \hat{C} y) \\ (y \hat{C} z) \end{cases} \Leftrightarrow x \hat{C} z$

En effet la concaténation de deux chemins x à y et y à z est le chemin de x à z



Chapitre 2: connexité dans un graphe

2) Composantes fortement connexes d'un graphe (CFC)

Les classes d'équivalence de la relation de connexité forte sur l'ensemble X de G s'appellent : les composantes fortement connexes de G.

Un graphe est dit fortement connexe s'il ne possède qu'une composante fortement connexe (une seule classe).

3) Algorithme pour la détermination d'une (CFC) dans un graphe orienté

Soit x $\in$X. l'algorithme suivant permet de déterminer la composante fortement connexe de x : CFC(x).

x est quelconque (on commence par n'importe quel sommet on à tj le même résultat.

Ici on parle de CFC d'un sommet mais on verra plus loin dans l'exemple que si on a
CFC(a) = {a, b, c}
Alors
CFC(a) =CFC(b) = CFC(c)

Chapitre 2: connexité dans un graphe

Algorithme

Etape (0) : Donner à x les marques (+) et (-) ;

Etape (1) : S'il $\exists$ un arc u = (x, y) / x est marqué + et y non marqué +/ aller à (2) ;

Sinon aller à (3) ;

Etape (2) : Donner à y la marque + et aller étape (1) ;

Etape (3) : S'il $\exists$ u =(x, y) / x $\neg$ marqué avec (-) et y marqué avec (-) aller à l'étape (4) ;

Sinon aller à l'étape (5) ;

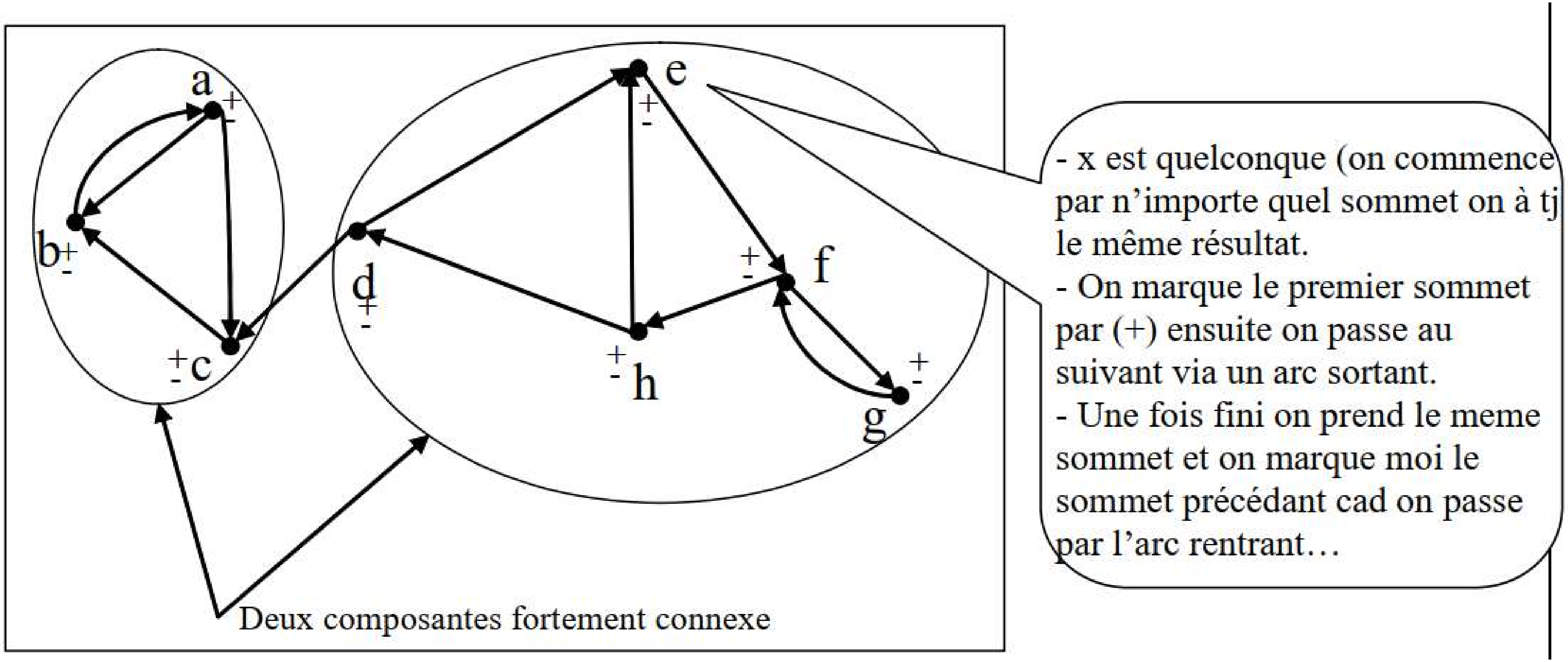
Etape (4) : Donner à x la marque (-) et aller à l'étape (3) ;

Etape (5) : L'ensemble des sommets qui sont marqués à la fois avec (+) et (-) constituent la composante fortement connexe contenant le sommet x.

Chapitre 2: connexité dans un graphe

Exemple1 :

Soit le graphe suivant : appliquer l'algorithme ci-dessus pour déterminer si le graphe est fortement connexe.



Chapitre 2: connexité dans un graphe

➔ Après l'application de l'algorithme on remarque que le graphe comporte deux composantes fortement connexes et par la suite le graphe G n'est pas fortement connexe.

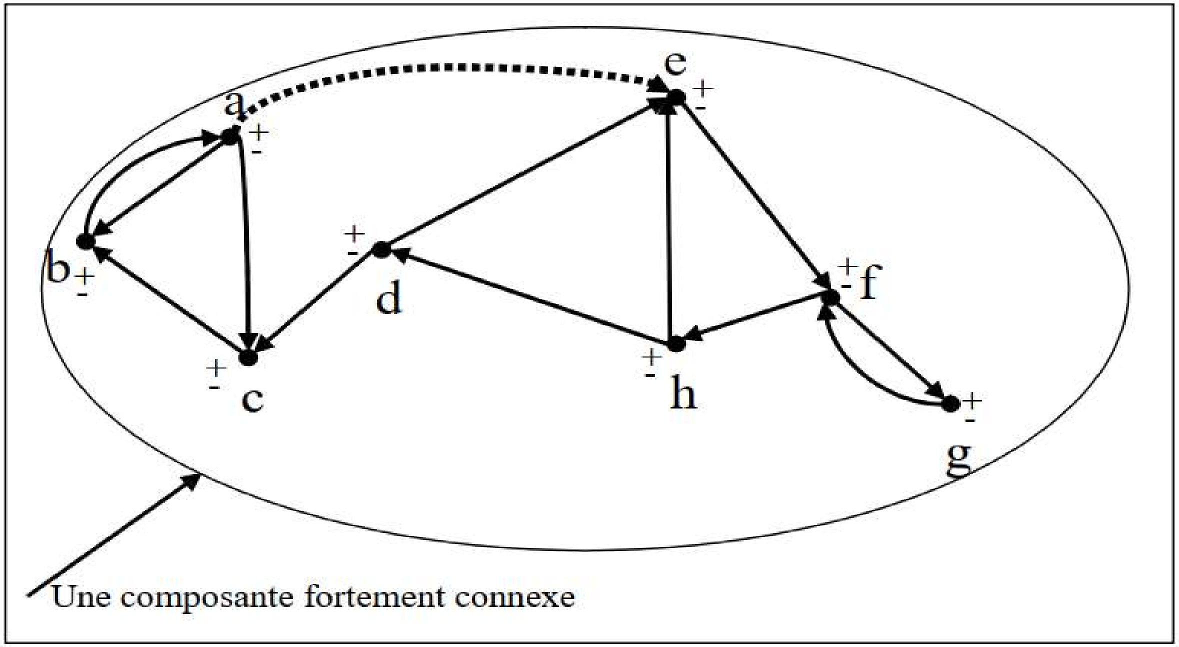
Remarque :

- Si on veut obtenir toutes les composantes fortement connexes d'un graphe G, on commence par prendre un sommet x quelconque et on applique l'algorithme ci-dessus.
- Si G n'est pas fortement connexe, on recommence l'application de l'algorithme à partir d'un sommet x' n'appartenant pas à la composante fortement connexe déjà trouvée.

Chapitre 2: connexité dans un graphe

Exemple2 :

Soit le graphe suivant : appliquer l'algorithme ci-dessus pour déterminer si le graphe est fortement connexe.



➔ Après l'application de l'algorithme on remarque que le graphe comporte une composante fortement connexe et par la suite le graphe G est fortement connexe.