TD 3 - Variables aléatoires continues

**Exercice 1:** Soit $X$ une variable aléatoire de densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $k$ est une constante réelle.

1. Déterminer le réel $k$.
2. Déterminer la fonction de répartition de $X$ définie par $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.
3. Calculer
   (a) la probabilité $\mathbb{P}(0,1 \leq X \leq 0,9)$.
   (b) la probabilité $\mathbb{P}(X \geq 0,5)$.
   (c) la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(X \leq 0,1/X \leq 0,9)$.
4. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et la variance $\mathbb{V}(X)$.
5. Calculer les moments $\mathbb{E}(X^n)$, pour tout entier naturel $n$.

**Exercice 2:** Le temps séparant les pannes d'un certain composant électronique particulier suit une loi exponentielle de moyenne 1200 heures.

1. Quelle est la probabilité qu'un composant fonctionne au moins 2000 heures sans panne?
2. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne entre 500 et 2500 heures ?
3. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne plus de 3000 heures, étant donné qu'il a déjà fonctionné pendant 1000 heures?

**Exercice 3:** La durée de vie $X$ des puces VLSI fabriqués par un fabricant de semiconducteurs peut être modélisée par une variable aléatoire. Les observations montrent que $X$ suit approximativement une loi normale de moyenne $\mu = 5 \times 10^6$ heures et d'écart type $\sigma = 5 \times 10^5$ heures. Un fabricant d'ordinateurs exige qu'au moins 95% de chaque lot accepté doit avoir une durée de vie supérieure à $d_{\min} = 4,5 \times 10^6$ heures.

1. Quelle est la loi et les éléments caractéristiques de la variable aléatoire
$$Z = \frac{X - 5 \times 10^6}{5 \times 10^5}?$$
2. L'affaire sera-t-elle conclut?
3. Le fabricant de semi-conducteurs décide d'améliorer la qualité des puces VLCI en diminuant la valeur de l'écart type de $5 \times 10^5$ à une valeur $\sigma_0$ à déterminer. Quelle est la valeur maximale $\sigma_{\max}$ de $\sigma_0$ pour que l'affaire sera conclut?

**Exercice 4:** TravelByUs est une agence de voyage basée sur Internet dans laquelle les clients peuvent voir les vidéos des villes qu'ils ont l'intention de visiter. Le nombre des visites $X$ par jour sur son site internet est normalement distribué de moyenne $\mu = 1000$ et d'écart type $\sigma = 240$.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir moins de 900 visiteurs?

2. Le site Web de TravelByUs a été mis en place sous la contrainte que le nombre des visites par jour ne dépassera pas une valeur $N_{\max}$ avec une certitude de 99%. Déterminer $N_{\max}$. Nous donnons $\phi(0,99) = 2,325$ où $\phi(z)$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

**Exercice 5:** La taille de stockage $X$ d'une image numérique prise par un appareil photo peut être modélisée par une variable aléatoire d'espérance $\mu = 10$ Mo ( Mega Octets) et d'ecart type, $\sigma = 0.5$Mo.

1. Uniquement dans cette question, nous supposons que la variable aléatoire $X$ suit une loi normale. Soit la variable aléatoire
$$Z = \frac{X - 10}{0.5}$$
   (a) Quelle est la loi et les éléments caractéristiques de la variable $Z$ ?
   (b) Quelle est la probabilité que la taille de l'image
      - dépasse 11.5 Mo?
      - soit moins de 8.5 Mo?
      - soit entre 8.5 et 11.5 Mo?

   Nous voulons stocker 100 images dans un espace de taille 1010 Mo. Soit $T = X_1 + \cdots + X_{100}$. la taille totale des 100 images et
$$\bar{X} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i$$
   la moyenne des tailles des 100 images, où $X_1, \cdots, X_{100}$ représentent les tailles respectifs des 100 images que nous voulons les stockées.

   (a) Exprimer $T$ en fonction de $\bar{X}$.
   (b) Quelle est approximativement la loi et les éléments caractéristiques de la variable aléatoire
$$Z = \frac{\bar{X} - 10}{0.05}?$$
   (c) Déduire que la variable $T$ suit approximtivement une loi normale $\mathcal{N}(1000, 5)$.
   (d) Quelle est approximativement la probabilité que la taille totale des 100 images ne depasse pas les 1010Mo ?

**$\mathscr{B}$on $\mathscr{T}$ravail, $\mathscr{C}$hampion(ne)s** ... ♣♡♠∇ !**