Institut Supérieur d'Informatique
et du Multimédia de Sfax
Enseignant : Abdallah Ben Abdallah

$2^{\text{ème}}$ LFIM et TMW
Octobre 2019

Série 3

Variables aléatoires continues

Exercice 1 :
Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

où k est une constante réelle.

1. **Déterminer le réel k.**
2. **Déterminer la fonction de répartition de X définie par $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. Représenter son graphe.**
3. **Calculer**
   (a) **la probabilité $\mathbb{P}(0,1 \leq X \leq 0,9)$.**
   (b) **la probabilité $\mathbb{P}(X \geq 0,5)$.**
   (c) **la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(X \leq 0,1/X \leq 0,9)$.**
4. **Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et la variance $\mathbb{V}(X)$.**
5. **Calculer les moments $\mathbb{E}(X^n)$, pour tout entier naturel n.**

Exercice 2 :
Soient c un réel et f la fonction définie par :

$$f(x) = c\ln(x),\ \forall x \in]0,1[.$$

1. **Déterminer c pour que $f(.)$ soit la densité d'une variable aléatoire X.**
2. **Tracer la courbe de la fonction $f(.)$.**
3. **Calculer $\mathbb{P}(\frac{1}{3} < X < \frac{1}{2})$.**
4. **Calculer les moments $\mathbb{E}(X^n)$, pour tout entier naturel n. Indication : On pourra utiliser une intégration par partie pour calculer les intégrales.**

Exercice 3 :
La société nationale d'exploitation et de distribution des eaux (SONEDE) a observé que la consommation d'eau en par seconde dans une certaine ville peut être modélisée par une variable aléatoire exponentielle de moyenne $\mu = 3\ m^3/s$ (mètre cube par seconde).

1. **Déterminer la probabilité que la consommation dépassera $6\ m^3/s$.**
2. **Quelle est la capacité minimale $x_{\min}$ de production que SONEDE doit fournir pour que la consommation X le dépassera avec une probabilité inférieure à $p = 0,01$?**

Exercice 4 :
Le temps séparant les pannes d'un certain composant électronique particulier suit une loi exponentielle de moyenne 1200 heures.

1. **Quelle est la probabilité qu'un composant fonctionne au moins 2000 heures sans panne ?**
2. **Quelle est la probabilité qu'il fonctionne entre 500 et 2500 heures ?**
3. **Quelle est la probabilité qu'il fonctionne plus de 3000 heures, étant donné qu'il a déjà fonctionné pendant 1000 heures ?**
4. **Supposons qu'un circuit est construit de deux composants identiques montés en parallèle. Notons que le circuit serait en panne si et seulement si les deux composants seraient en panne. De plus, les pannes des deux composants se produisent de façon indépendante. Quelle est la probabilité que ce circuit va fonctionner pendant au moins 2000 heures sans panne ?**

Exercice 5 :
La durée de vie X des puces VLSI fabriqués par un fabricant de semi-conducteurs peut être modélisée par une variable aléatoire. Les observations montrent que X suit approximativement une loi normale de moyenne $\mu = 5 \times 10^6$ heures et d'écart type $\sigma = 5 \times 10^5$ heures. Un fabricant d'ordinateurs exige qu'au moins 95% de chaque lot accepté doit avoir une durée de vie supérieure à $d_{\min} = 4,5 \times 10^6$ heures.

1. **Quelle est la loi et les éléments caractéristiques de la variable aléatoire**

$$Z = \frac{X - 5 \times 10^6}{5 \times 10^5}?$$

2. **L'affaire sera-t-elle conclut ?**

3. **Le fabricant de semi-conducteurs décide d'améliorer la qualité des puces VLCI en diminuant la valeur de l'écart type de 5×10^5 à une valeur σ_0 à déterminer. Quelle est la valeur maximale $\sigma_{\max}$ de σ_0 pour que l'affaire sera conclut ?**

Exercice 6 : **TravelByUs est une agence de voyage basée sur Internet dans laquelle les clients peuvent voir les vidéos des villes qu'ils ont l'intention de visiter. Le nombre des visites X par jour sur son site internet est normalement distribué de moyenne $\mu = 1000$ et d'écart type $\sigma = 240$.**

1. **Quelle est la probabilité d'obtenir moins de 900 visiteurs ?**
2. **Le site Web de TravelByUs a été mis en place sous la contrainte que le nombre des visites par jour ne dépassera pas une valeur $N_{\max}$ avec une certitude de 99%. Déterminer $N_{\max}$. Nous donnons $\phi(0,99) = 2,325$ où $\phi(z)$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.**

Exercice 7 : La durée en minutes X d'un cours de math suit la loi normale $\mathcal{N}(85,10)$. La durée du cours devrait être de 90 minutes. Donner la probabilité que :

1. **le cours se termine tôt.**
2. **le cours se termine avec un retard de plus de 5 minutes.**
3. **Sachant que le cours va se terminer tard, quelle est la probabilité que le retard dépasse les 5 minutes ?**

Exercice 8 : Les données de l'Institut National de la Météorologie indiquent que les précipitations annuelles à Sfax est une variable aléatoire normale de moyenne $\mu = 236\ mm$ et d'écart type $\sigma = 55\ mm$.

Quelle est la probabilité pour que le total des précipitations au cours des deux années prochaines sera supérieur à $500mm$?

Indication : Vous pouvez utiliser le fait que la somme de deux loi normales indépendantes est une loi normale.

Exercice 9 : un peu de géométrie ! Un point P de coordonnées (X,Y) est choisis au hasard dans le carré unité $[0,1] \times [0,1]$. Soit Z la distance de P au bord du carré le plus proche et T la distance au coin le plus proche.

1. **Déterminer les probabilités $\mathbb{P}(Z < 1/4)$ et $\mathbb{P}(T < 1/4)$.**
2. **Déterminer la fonction de répartition $F(z)$ de la variable aléatoire Z. En déduire la densité de probabilité $f(z)$ de Z.**
3. **Calculer l'espérance $\mathbb{E}(Z)$ et la variance $\mathbb{V}(Z)$.**

Exercice 10 : Un système électronique de surveillance est composé de deux type différents de composants qui fonctionnent ensemble. Soit X_1 et X_2 les durées de vie de chaque composants. On suppose que la loi conjointe du couple (X_1,X_2) est

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} cx_1 e^{-(x_1+x_2)/2} & si \qquad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ 0 & sinon \end{cases}$$

où c est une constante réelle.

1. **Déterminer la constante c.**
2. **Déterminer les densités marginales $f_1(x_1)$ et $f_2(x_2)$.**
3. **X_1 et X_2 sont elles indépendantes ?**
4. **Déterminer $\mathbb{P}(X_1 > 1, X_2 > 1)$.**

Corrigé de série n° 3

Exercice 1 :

1. **le réel k est tel que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Nous obtenons, $k = 3$.**

2. **La fonction de répartition**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0, \\ x^3 & si \quad 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

sa courbe est la suivante

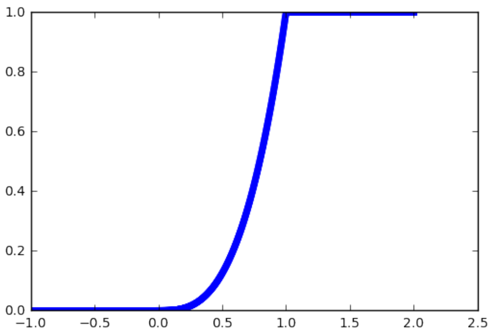

FIGURE 1 – La courbe de la fonction de répartition $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

3. **On a**

   (a) $\mathbb{P}(0.1 \leq X \leq 0.9) = F(0.9) - F(0.1) = 0.9^3 - 0.1^3 = 0.728$

   (b) $\mathbb{P}(X \geq 0.5) = 1 - \mathbb{P}(X < 0.5) = 1 - F(0.5) = 1 - 0.5^5 = 0.875$

   (c) **Nous avons**

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq 0.1/X \leq 0.9) &= \frac{\mathbb{P}\Big((X \leq 0.1) \cap (X \leq 0.9)\Big)}{\mathbb{P}(X \leq 0.9)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X \leq 0.1)}{F(0.9)} \\ &= \frac{0.1^3}{0.9^3} \\ &= 0.0014 \end{aligned}$$

.

4. **Nous avons**

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_0^1 3x^3 dx = \frac{3}{4}$$

et

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^1 3x^4 dx = \frac{3}{5}.$$

Ainsi, la variance de X est obtenue comme suit

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{11}{30}$$

5. **Les moments de X sont données par**

$$\mathbb{E}(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)dx = \int_0^1 3x^{2+n} dx = \frac{3}{n+3}$$

Exercice 2 :

1. **Il faut que la fonction f satisfait les deux conditions**

   — $f(x) \geq 0$, **pour tout** $x \in \mathbb{R}$

   — $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

   A l'aide d'une intégration par partie ($u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = 1$), nous pouvons obte-

nir

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(x)dx &= \Big[x\ln(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x}\times x dx\\ &= 0-\Big[x\Big]_0^1\\ &= -1\end{aligned}$$

Ainsi, nous déduisons que $c=-1$.

(a) La courbe de la densité de probabilité de X est donnée comme dessous

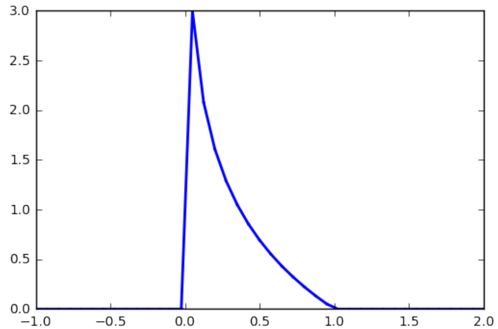

FIGURE 2 – La courbe de la densité de probabilité $f(x) = -\ln(x), x \in]0,1]$.

(b) Nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\frac{1}{3}\leq X\leq\frac{1}{2}\big) &= -\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \ln(x)dx\\ &= -\Big[x\ln(x)\Big]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} dx\\ &= \frac{\ln(3)}{3}-\frac{\ln(2)}{2}+\frac{1}{6}\\ &\simeq 0.1863\end{aligned}$$

(c) Le moment d'ordre n de X est donnée par

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(X^n\big) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)dx\\ &= -\int_0^1 x^n\ln(x)dx\\ &= -\Big[x^{n+1}\ln(x)\Big]_0^1+\int_0^1 x^n dx\\ &= -0+\Big[\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big]_0^1\\ &= \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Exercice 3 :

1. **La variable X suit la loi exponentielle de paramètre λ, avec**

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = 3m^3/s$$

D'où, $\lambda = \frac{1}{3}$ et la fonction de répartition de X est donnée par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x\leq 0,\\ 1-e^{-\frac{x}{3}} & si \quad x\geq 0.\end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X\geq 6) &= 1-\mathbb{P}(X<6)\\ &= 1-F(6)\\ &= 1-e^{-2}\\ &= 0.86\end{aligned}$$

2. **Nous voulons déterminer $x_{\min}$ le plus petit réel x tel que $\mathbb{P}(X\geq x)\leq 0.01$, c'est à dire**

$$1-\mathbb{P}(X\leq x)\leq 0.01$$

ou encore

$$1 - F(x) \leq 0.01$$

Nous obtenons alors,

$$e^{-\frac{x}{3}} \leq 0.01$$

c'est à dire

$$x \leq -3\ln(0.01) = 13.81$$

Nous prenons $x_{\min} = 13.81$.

Exercice 4 : La variable X suit la loi exponentielle de paramètre λ, avec

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = 1200h$$

D'où, $\lambda = \frac{1}{1200}$.

1. **Nous avons**

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 2000) &= 1 - F(2000) \\ &= 1 - (1 - e^{-2000/1200}) \\ &= e^{-5/3} \\ &= 0.189 \end{aligned}$$

2. **Nous avons**

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(500 \leq X \leq 2500) &= F(2500) - F(500) \\ &= (1 - e^{-2000/1200}) - (1 - e^{-500/1200}) \\ &= e^{-5/12} - e^{-25/12} \\ &= 0.535 \end{aligned}$$

3. **Nous avons**

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 3000/X \geq 1000) &= \frac{\mathbb{P}\big((X \geq 3000) \cap (X \geq 1000)\big)}{\mathbb{P}(X \geq 1000)} \\ &= \frac{\mathbb{P}\big(X \geq 3000\big)}{\mathbb{P}(X \geq 1000)} \\ &= \frac{1 - F(3000)}{1 - F(1000)} \\ &= e^{-30/12+10/12} = 0.189 \end{aligned}$$

4. **Soit X_1 et X_2 les temps des premiers pannes des circuits 1 et 2, respectivement. Ces deux variables sont indépendants et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/1200$. Soit A l'événement "le système parallèle tombe en panne pour la première fois après 2000 heures". Alors,**

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\big((X_1 \geq 2000) \cup (X_2 \geq 2000)\big) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \geq 2000) + \mathbb{P}(X_2 \geq 2000) - \mathbb{P}\big((X_1 \geq 2000) \cap (X_2 \geq 2000)\big) \\ &= 2 \times \mathbb{P}(X \geq 2000) - \mathbb{P}(X_1 \geq 2000) \times \mathbb{P}(X_2 \geq 2000) \\ &= 2 \times 0.189 - (0.189)^2 = 0.342 \end{aligned}$$

Nous avons utiliser le fait que

$$\mathbb{P}\big((X_1 \geq 2000) \cap (X_2 \geq 2000)\big) = \mathbb{P}(X_1 \geq 2000) \times \mathbb{P}(X_2 \geq 2000)$$

car les variables X_1 et X_2 sont indépendants. De plus, nous avons utilisé

$$\mathbb{P}(X_1 \geq 2000) = \mathbb{P}(X_2 \geq 2000) = \mathbb{P}(X \geq 2000) = 0.189.$$

Exercice 5 : La variable X représente la durée de vie des puces VLSI. Nous supposons que X suit une loi normale $\mathcal{N}(5 \times 10^6,\ 5 \times 10^5)$, l'unité étant l'heure ($\mu = 5 \times 10^6$, $\sigma = 5 \times 10^5$). Un fabricant d'ordinateurs exige qu'au moins 95% de chaque lot accepté doit avoir une durée de vie supérieure à $d_{\min} = 4,5 \times 10^6$ heures.

1. **La loi de la variable aléatoire**

$$Z = \frac{X - 5\times 10^6}{5\times 10^5} = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

est normale $\mathcal{N}(0,\ 1)$ **car** X **suit une loi normale** $\mathcal{N}(5\times 10^6,\ 5\times 10^5)$**.**

2. **L'affaire sera conclue si et seulement si** $\mathbb{P}(X \geq d_{\min}) \geq 95\%$**. Nous avons**

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq d_{\min}) &= 1 - \mathbb{P}(X < d_{\min}) \\
&= 1 - \mathbb{P}\Big(\frac{X - 5\times 10^6}{5\times 10^5} < \frac{d_{\min} - 5\times 10^6}{5\times 10^5}\Big) \\
&= 1 - P(Z < -1) \\
&= 1 - \phi(-1) \\
&= \phi(1) = 0.841 < 0.95
\end{aligned}$$

Ainsi, l'affaire ne va pas être conclue.

3. **La variable** X **suit maintenant une loi normale** $\mathcal{N}(5\times 10^6,\ \sigma_0)$**, tel que l'affaire sera conclue. C'est à dire**

$$\mathbb{P}(X \geq d_{\min}) \geq 95\%.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq d_{\min}) &= 1 - \mathbb{P}(X < d_{\min}) \\
&= 1 - \mathbb{P}\Big(\frac{X - 5\times 10^6}{\sigma_0} < \frac{d_{\min} - 5\times 10^6}{\sigma_0}\Big) \\
&= 1 - P\Big(Z < -\frac{0.5\times 10^6}{\sigma_0}\Big) \\
&= 1 - \phi\Big(-\frac{0.5\times 10^6}{\sigma_0}\Big) \\
&= \phi\Big(\frac{0.5\times 10^6}{\sigma_0}\Big) \geq 0.95
\end{aligned}$$

si et seulement si

$$\frac{0.5\times 10^6}{\sigma_0} \geq \phi^{-1}(0.95) = 1.645$$

c'est à dire

$$\sigma_0 \leq \frac{0.5\times 10^6}{1.645} = 3.04\times 10^5.$$

Ainsi, $\sigma_{\max} = 3.04\times 10^5$**.**

Exercice 6 : **Le nombre des visites** X **est une variable aléatoire de loi normale** $\mathcal{N}(1000,\ 240)$ **(ou encore** $\mu = 1000$ **et** $\sigma = 240$**).**

1. **Soit** A **l'événement "avoir moins de 900 visiteurs". Alors,**

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(X < 900) \\
&= \mathbb{P}\Big(\frac{X - 1000}{240} < \frac{900 - 1000}{240}\Big) \\
&= \mathbb{P}(Z < -0.4167) \\
&= \phi(-0.4167) \\
&= 1 - \phi(0.4167) = 0.34 = 34\%
\end{aligned}$$

2. **Nous cherchons le plus proche entier** $N_{\max}$ **vérifiant** $\mathbb{P}(X \leq N_{\max}) \simeq 0.99$**. C'est à dire**

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq N_{\max}) &= \mathbb{P}\Big(\frac{X - 1000}{240} < \frac{N_{\max} - 1000}{240}\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(Z < \frac{N_{\max} - 1000}{240}\Big) \\
&= \phi\Big(\frac{N_{\max} - 1000}{240}\Big) \\
&\simeq 0.99 = \phi(2.325).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{N_{\max} - 1000}{240} \simeq \phi(2.326),$$

ou encore $N_{\max} \simeq 1000 + 240\times 2.325 = 1558$**. Ainsi,** $N_{\max} = 1558$**.**

Exercice 7 : La durée en minutes X **d'un cours de math suit la loi normale** $\mathcal{N}(85, 10)$**.**

1. **Si nous notons A l'événement "le cours se termine tôt", alors nous aurons**

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(X<90)\\
&= \mathbb{P}\Big(\frac{X-85}{10}<\frac{90-85}{10}\Big)\\
&= \mathbb{P}(Z<0.5)\\
&= \phi(0.5)\\
&= 0.691 \simeq 69\%
\end{aligned}$$

2. **le cours se termine avec un retard de plus de 5 minutes. Si nous notons B l'événement "le cours se termine avec un retard de plus de 5 minutes", alors nous aurons**

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(X>95)\\
&= \mathbb{P}\Big(\frac{X-85}{10}>\frac{95-85}{10}\Big)\\
&= \mathbb{P}(Z>1)\\
&= 1-\mathbb{P}(Z\leq 1)\\
&= 1-\phi(1)\simeq 0.16
\end{aligned}$$

3. **Nous voulons calculer la probabilité conditionnelle : "le retard dépasse les 5 minutes, sachant que le cours se terminer tard". Alors,**

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X>95/X\geq 90) &= \frac{\mathbb{P}\big((X>95)\cap(X\geq 90)\big)}{\mathbb{P}(X\geq 90)}\\
&= \frac{\mathbb{P}(X>95)}{\mathbb{P}(A)}\\
&= \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}\\
&= \frac{0.16}{0.69}\simeq 0.232
\end{aligned}$$

Exercice 8 : Soit la variable aléatoire X qui représente les précipitations annuelles à Sfax. Alors, X suit une normale $\mathcal{N}(236,55)$ ($\mu = 236\ mm$ et $\sigma = 55\ mm$). Soit respectivement X_1 et X_2 les quantités des précipitations en première et en deuxième année et T est le totale des précipitations pendant les deux années. Puisque X_1 et X_2 sont indépendants, nous déduisons que T suit une loi normale $(236+236,\sqrt{55^2+55^2}) = \mathcal{N}(472,55\sqrt{2})$. Soit l'événement A "le total des précipitations dans les deux années prochaines sera supérieur à $500mm$". Alors,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(T\geq 500)\\
&= \mathbb{P}\Big(\frac{T-472}{55\sqrt{2}}\geq\frac{500-472}{55\sqrt{2}}\Big)\\
&= \mathbb{P}(Z\geq 0.36)\\
&= 1-\mathbb{P}(Z<0.36)\\
&= 1-\phi(0.36)\simeq 0.36 = 36\%.
\end{aligned}$$

Exercice 8 : La variable C représente le cout d'utilisation d'un outils dans une certaine entreprise. Sa moyenne en une journée est de l'ordre de 130 dinars et son écart type est de 64 dinars.

1. **L'inégalité de Tchebytchev nous permet d'écrire que pour tout réel k strictement positif**
$$\mathbb{P}(|C-130|\leq 64k)\geq 1-\frac{1}{k^2}.$$
Ou encore,
$$\mathbb{P}(130-64k\leq C\leq 130+64k)\geq 1-\frac{1}{k^2}.$$
Le but est de chercher, un minorant de $\mathbb{P}(40\leq C\leq 220)$. Nous cherchons alors un k vérifiant $130-k\times 64 = 40$ et $130+k\times 64 = 220$. Cela nous conduit à prendre $k=1.4$, ainsi
$$\mathbb{P}(40\leq C\leq 220)\geq 1-\frac{1}{1.4^2} = 0.49$$

2. **Nous cherchons un majorant de $\mathbb{P}(C\geq 500)$. Pour cela, il suffit de chercher un réel positif k tel que $130+64k = 500$, c'est à dire $k = 370/64 = 5.78125$. Ainsi, en utilisant l'inégalité de Tchebychev, nous obtenons**
$$\mathbb{P}(130-370\leq C\leq 500)\geq 1-\frac{1}{(5.78125)^2} = 0.97$$

D'où, $\mathbb{P}(-240 \leq C \leq 500) \geq 0.97$, ou encore $\mathbb{P}(C \leq 500) \geq 0.97$, puisque le coût est toujours positif. Cela nous amène à conclure que $\mathbb{P}(C \geq 500) \leq 0.03$

Exercice 9 : un peu de géométrie ! Un point P de coordonnées (X,Y) est choisis au hasard dans le carré unité $[0,1]\times[0,1]$. D'où X et Y ont la même loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Soit Z la distance de P au bord du carré le plus proche et T la distance au coin le plus proche. Nous avons alors $Z = \sqrt{X^2+Y^2}$.

1. La probabilité $\mathbb{P}(Z < 1/4)$ se calcule comme suit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z < 1/4) &= \frac{Aire(C_1)}{Aire(C)} \\
&= \frac{1-(1/2)^2}{1} \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

où C_1 est le carré noire et C est le carré $[0,1]\times[0,1]$. De même, nous calculons $\mathbb{P}(T < 1/4)$ comme suit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T < 1/4) &= \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{4} \times Aire\big(C(A_i, \frac{1}{4})\big) \\
&= Aire\big(C(A_1, \frac{1}{4})\big) \\
&= \pi(\frac{1}{4}) \simeq 0.196
\end{aligned}$$

où $A_1 = (1,0)$, $A_2 = (1,1)$, $A_3 = (0,1)$ et $A_4 = (0,0)$ les sommet du carré $[0,1]\times[0,1]$.

2. La fonction de répartition $F(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = 0$ lorsque car Z c'est une distance qui est toujours positif. Si $z \geq 0$, alors si $z \in [0, \frac{1}{2}]$, nous avons

$$\begin{aligned}
F(z) &= \mathbb{P}(Z < z) \\
&= \frac{Aire(C) - Aire(C_z)}{Aire(C)} \\
&= \frac{1-(1-2z)^2}{1} \\
&= 4z - 4z^2
\end{aligned}$$

FIGURE 3 – La probabilité $\mathbb{P}(Z < 1/4)$ est la surface rouge qui est de largeur $\frac{1}{4}$.

où C_z est le carré noire de coté $1-2z$ et C est le carré $[0,1]\times[0,1]$. Si $z \geq 1/2$, alors $F(z) = 1$. La densité de probabilité de Z est

$$f(z) = F'(z) = \begin{cases} 4-8z & si \quad 0 \leq z \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & si \quad z \notin [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

3. L'espérance de Z se calcul comme suit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} z f(z) dz \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} z(4-8z) dz \\
&= \Big[2z^2 - \frac{8}{3}z^3\Big]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

La variance $\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2$. Le calcul de $\mathbb{E}(Z^2)$ peut se faire comme suit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f(z)dz \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} z^2(4-8z)dz \\ &= \left[\frac{4}{3}z^3 - 2z^4\right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{24}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2 = \frac{1}{24} - \frac{1}{36} = \frac{1}{72}.$$

Exercice 10 : Un système électronique de surveillance est composé de deux type différents de composants qui fonctionnent ensemble. Soit X_1 et X_2 les durées de vie de chaque composants. On suppose que la loi conjointe du couple (X_1, X_2) est

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} cx_1 e^{-(x_1+x_2)/2} & si \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ 0 & sinon \end{cases}$$

où c est une constante réelle.

1. **La constante c est choisie tel que**

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1.$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} cx_1 e^{-(x_1+x_2)/2}dx_1dx_2 \\ &= c\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} x_1 e^{-x_1/2}dx_1\right)e^{-x_2/2}dx_2\end{aligned}$$

A l'aide d'une intégration par partie, nous pouvons vérifier que

$$\int_0^{+\infty} x_1 e^{-x_1/2}dx_1 = 4$$

De plus

$$\int_0^{+\infty} e^{-x_2/2}dx_2 = \left[-2e^{-x_2/2}\right]_0^{+\infty} = 2.$$

Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy \quad = \quad 8c = 1,$$

C'est à dire $c = \frac{1}{8}$.

2. **La densité marginale de X_1 est donnée par, pour les x_1 positifs**

$$\begin{aligned}f_1(x_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)dx_2 \\ &= \frac{1}{8}\int_0^{+\infty} x_1 e^{-(x_1+x_2)/2}dx_2 \\ &= \frac{x_1}{8}e^{-x_1/2}\int_0^{+\infty} e^{-x_2/2}dx_2 \\ &= \frac{x_1}{4}e^{-x_1/2}\end{aligned}$$

Pour les x_1 négatifs , $f_1(x_1) = 0$. De même, la densité marginale de X_2 est donnée par, pour les x_2 positifs

$$\begin{aligned}f_2(x_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)dx_1 \\ &= \frac{1}{8}\int_0^{+\infty} x_1 e^{-(x_1+x_2)/2}dx_1 \\ &= \frac{1}{8}e^{-x_2/2}\int_0^{+\infty} x_2 e^{-x_2/2}dx_2 \\ &= \frac{1}{2}e^{-x_2/2}\end{aligned}$$

Pour les x_2 négatifs , $f_2(x_2) = 0$.

3. **Il es claire que**

$$f(x_1,x_2) = f_1(x_1) \times f_2(x_2),$$

pour tout couple $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$.

4. Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 \geq 1, X_2 \geq 1) &= \mathbb{P}(X_1 \geq 1) \times \mathbb{P}(X_2 \geq 1) \\
&= \frac{1}{8} \int_1^{+\infty} x_1 e^{-x_1/2} dx_1 \times \int_1^{+\infty} e^{-x_2/2} dx_2 \\
&= \frac{1}{8} \times 6e^{-1/2} \times 2e^{-1/2} \\
&= \frac{3}{2} e^{-1} \simeq 0.552
\end{aligned}$$