Généralités sur les langages

Mohamed Tmar

3 mars 2019

Institut Supérieur d'Informatique et de Multimédia de Sfax

Définitions

- Un aphabet est un ensemble fini non vide de symboles :

$$X_1 = \{a, b\}, X_2 = \{0, 1\}, X_3 = \{x, y, z\}$$

- Un mot est une succession (vecteur) de symboles :

$$w_1 = (a, b, b, a, b), w_2 = (0, 1, 0, 1, 1, 0), w_3 = (x, y, x)$$

$$w_1 = abbab, w_2 = 010110, w_3 = xyx$$

- Le mot vide est noté $\varepsilon = ()$

Définitions

- Un langage est un ensemble de mots :

  $L_1 = \{abb, ba, aba\}, L_2 = \{010, 00\}, L_3 = \{\varepsilon, xxx, yy, zzxy, xyxy\}$

- Un langage peut etre vide :

$$L = \emptyset,$$

- ou infini :

$$L = \{ab, aabb, aaabbb \dots\}$$

Concaténation de mots

- La concaténation (.) est la loi de composition sur l'ensemble des mots :

$$w_1 = abb, w_2 = babb, w_1.w_2 = w_1w_2 = abb.babb = abbbabb$$

- La concaténation est associative :

$$\forall w_1, w_2, w_3, (w_1.w_2).w_3 = w_1.(w_2.w_3)$$

- La concaténation n'est pas commutative :

$$\exists w_1, w_2, w_1.w_2 \neq w_2.w_1$$

- L'élément neutre de la concaténation est ε :

$$\forall w, w.\varepsilon = \varepsilon.w = w$$

Concaténation de langages

- La concaténation (.) est aussi applicable sur les langages :

$$L_1.L_2 = \{w, \exists w_1 \in L_1, w_2 \in L_2, w = w_1.w_2\}$$

$$\begin{aligned} L_1 &= \{abb, ba, aba\} \\ L_2 &= \{ab, baaab\} \\ L_1.L_2 &= \{abb.ab, abb.baaab, ba.ab, ba.baaab, aba.ab, aba.baaab\} \\ &= \{abbab, abbbaaab, baab, babaaab, abaab, ababaaab\} \end{aligned}$$

Concaténation de langages : Propriétés

- $\forall L_1, L_2, L_3, (L_1.L_2).L_3 = L_1.(L_2.L_3)$
- $\exists L_1, L_2, L_1.L_2 \neq L_2.L_1$
- $\forall L, L.\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}.L = L$
- $\forall L, L.\emptyset = \emptyset.L = \emptyset$
- $\forall L_1, L_2, L_3, L_4, L_1 \subset L_2, L_3 \subset L_4 \Leftrightarrow L_1.L_3 \subset L_2.L_4$

Augmentation

- Soit L un langage, La concaténation (.) est aussi applicable sur les langages :

$$\begin{aligned}
L_1.L_2 &= \{w, \exists w_1 \in L_1, w_2 \in L_2, w = w_1.w_2\} \\
L_1 &= \{abb, ba, aba\} \\
L_2 &= \{ab, baaab\} \\
L_1.L_2 &= \{abb.ab, abb.baaab, ba.ab, ba.baaab, aba.ab, aba.baaab\} \\
&= \{abbab, abbbaaab, baab, babaaab, abaab, ababaaab\}
\end{aligned}$$

Augmentation : Propriétés

- $\forall L_1, L_2, L_3, (L_1.L_2).L_3 = L_1.(L_2.L_3)$
- $\exists L_1, L_2, L_1.L_2 \neq L_2.L_1$
- $\forall L, L.\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}.L = L$
- $\forall L, L.\emptyset = \emptyset.L = \emptyset$
- $\forall L_1, L_2, L_3, L_4, L_1 \subset L_2, L_3 \subset L_4, L_1.L_3 \subset L_2.L_4$
- $\forall L_1, L_2, L_3, (L_1 \cup L_2).L_3 = L_1.L_3 \cup L_2.L_3, L_1.(L_2 \cup L_3) = L_1.L_2 \cup L_1.L_3$

Augmentation

- Soit L un langage, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$L^n = \begin{cases} \{\varepsilon\} & si \;\; n = 0 \\ L.L^{n-1} & sinon \end{cases}$$

- Propriétés :
  - $\forall n, m \in \mathbb{N}, L^{n+m} = L^n.L^m$
  - Si $L^2 = L$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, L^n = L$
  - $L^* = L^0 \cup L^1 \cup \ldots L^{+\infty} = \bigcup_{i=0}^{+\infty} L^i$
  - Soit X un alphabet, X^* est l'ensemble de tous les mots qu'on peut former sur X.

Longueur d'un mot

- Soit $w \in X^*$, la longeur de w est notée $|w|$,
- Propriétés :
  - $|w| = 0 \Leftrightarrow w = \varepsilon$
  - $|w| = 1 \Leftrightarrow w \in X$
  - $\forall u, v \in X^*, |u.v| = |u| + |v|$

- Soit $w \in X^*, x \in X$, le nombre d'occurrences de x dans w est noté $|w|_x$,
- Propriétés :
  - $\forall w \in X^*, |w| = \sum_{x \in X} |w|_x$
  - $\forall u, v \in X^*, x \in X, |u.v|_x = |u|_x + |v|_x$