Automates finis

Mohamed Tmar

5 mai 2019

Institut Supérieur d'Informatique et de Multimédia de Sfax

Un automate fini déterministe est un quintuplet $A = (X, Q, q_0, F, \delta)$ où :

- X : un alphabet,
- Q : un ensemble fini non vide d'états,
- $q_0 \in Q$: l'état initial,
- $F \subset Q$: ensemble d'états finaux,
- δ : fonction de transition :

$$\delta : \begin{array}{ccc} Q \times X & \longrightarrow & Q \\ (q, x) & \longmapsto & q^{'} \in Q \end{array}$$

Exemple

$A = (X, Q, q_0, F, \delta)$ où :

- $X = \{a, b\}$,
- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$,
- $F = \{q_2, q_3\}$,
- $\delta(q_0, a) = q_1$, $\delta(q_0, b) = q_2$, $\delta(q_1, a) = q_2$, $\delta(q_1, b) = q_1$, $\delta(q_2, a) = q_2$, $\delta(q_2, b) = q_0$, $\delta(q_3, a) = q_3$, $\delta(q_3, b) = q_1$.

Fonction de reconnaissance δ^*

$$\delta^* : \begin{array}{ccl} Q \times X^* & \to & Q \\ (q, w) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} q & si\ \ w = \varepsilon \\ \delta^*(\delta(q, x), u) & si\ \exists x \in X, u \in X^*, w = x.u. \end{array} \right. \end{array}$$

Exemple :

- $\delta(q_0, a) = q_1$, $\delta(q_0, b) = q_2$, $\delta(q_1, a) = q_2$, $\delta(q_1, b) = q_1$, $\delta(q_2, a) = q_2$, $\delta(q_2, b) = q_0$, $\delta(q_3, a) = q_3$, $\delta(q_3, b) = q_1$,
- $\delta^*(q_1, abbab)$

$$\begin{array}{lllll} & \delta^*(q_1, abbab) & = & \delta^*(q_1, a.bbab) & = & \delta^*(\delta(q_1, a), bbab) \\ = & \delta^*(q_2, bbab) & = & \delta^*(q_2, b.bab) & = & \delta^*(\delta(q_2, b), bab) \\ = & \delta^*(q_0, bab) & = & \delta^*(\delta(q_0, b), ab) & = & \delta^*(q_2, ab) \\ = & \delta^*(\delta(q_2, a), b) & = & \delta^*(q_2, b) & = & \delta^*(q_2, b.\varepsilon) \\ = & \delta^*(\delta(q_2, b), \varepsilon) & = & \delta^*(q_0, \varepsilon) & = & q_0 \end{array}$$

Propriétés de δ^*

- $\forall q \in Q, u, v \in X^*, \delta^*(q, u.v) = \delta^*(\delta^*(q, u), v)$,
- $\forall x \in X, q \in Q, \delta^*(q, x) = \delta(q, x)$,
- $\forall x \in X, q \in Q, \delta(q, x) = q \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \delta^*(q, x^n) = q$,
- $\forall w \in X^*, q \in Q, \delta^*(q, w) = q \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \delta^*(q, w^n) = q$.

Langage reconnu par un AFD

- Soit $A = (X, Q, q_0, F, \delta)$ un automate fini déterministe, le langage reconnu (ou accepté) par A est :

$$L(A) = \{w \in X^*, \delta^*(q_0, w) \in F\}$$

- Soit $L \subset X^*$, L est régulier si $\exists A = (X, Q, q_0, F, \delta)$ un AFD tel que $L(A) = L$.
- Propriétés :
  - $F = \emptyset \Rightarrow L(A) = \emptyset$,
  - $F = Q \Rightarrow L(A) = X^*$,
  - $q_0 \in F \Leftrightarrow \varepsilon \in L(A)$,
  - Soit $A = (X, Q, q_0, F_A, \delta), B = (X, Q, q_0, F_B, \delta)$ deux AFD :
    - $F_A = Q - F_B \Rightarrow L(A) = X^* - L(B)$,
    - $F_A \subset F_B \Rightarrow L(A) \subset L(B)$,
    - $F_A \cap F_B = \emptyset \Rightarrow L(A) \cap L(B) = \emptyset$.

Propriétés des langages réguliers

- Tout langage fini est régulier,
- Soient L un langage régulier, $X^* - L$, $L^n(\forall n \in \mathbb{N})$, L^* sont réguliers,
- Soient L_1, L_2 deux langages réguliers, $L_1 \cap L_2$, $L_1 \cup L_2$, $L_1.L_2$ sont réguliers.

Automates finis non déterministes

Un automate fini non déterministe est un quintuplet $A = (X, Q, Q_0, F, \delta)$ où :

- X : un alphabet,
- Q : un ensemble fini d'états,
- $Q_0 \subset Q$: ensemble d'état initiaux,
- $F \subset Q$: ensemble d'états finaux,
- δ : fonction de transition :

$$\delta : \begin{array}{ccc} Q \times X & \longrightarrow & 2^Q \\ (q, x) & \longmapsto & Q' \in 2^Q \ (\subset Q) \end{array}$$

Exemple

$A = (X, Q, Q_0, F, \delta)$ où :

- $X = \{a, b\}$,
- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$,
- $Q_0 = \{q_0, q_2\}$,
- $F = \{q_2, q_3\}$,
- $\delta(q_0, a) = \{q_1, q_2\}$, $\delta(q_0, b) = \{q_0, q_2, q_3\}$, $\delta(q_1, a) = \{q_2\}$, $\delta(q_1, b) = \emptyset$, $\delta(q_2, a) = \{q_0\}$, $\delta(q_2, b) = \{q_0, q_1\}$, $\delta(q_3, a) = \{q_3\}$, $\delta(q_3, b) = \emptyset$.

Fonction de reconnaissance δ^*

$$
\delta^* : \begin{array}{rcl} 2^Q \times X^* & \rightarrow & 2^Q \\ (E, w) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} E & si\ \ w = \varepsilon \\ \delta^*(\cup_{q \in E} \delta(q, x), u) & si\ \exists x \in X, \\ & u \in X^*, w = x.u. \end{array} \right. \end{array}
$$

Fonction de reconnaissance δ^* : Exemple

$$\delta(q_0, a) = \{q_1, q_2\}$$
$$\delta(q_0, b) = \{q_0, q_2, q_3\}$$
$$\delta(q_1, a) = \{q_2\}$$
$$\delta(q_1, b) = \emptyset$$
$$\delta(q_2, a) = \{q_0\}$$
$$\delta(q_2, b) = \{q_0, q_1\}$$
$$\delta(q_3, a) = \{q_3\}$$
$$\delta(q_3, b) = \emptyset$$
$$\delta^*(\{q_0, q_1, q_2\}, abb)$$

$$\begin{aligned}
& \delta^*(\{q_0, q_1, q_2\}, abb) \\
= \; & \delta^*(\{q_0, q_1, q_2\}, a.bb) \\
= \; & \delta^*(\cup_{q \in \{q_0, q_1, q_2\}} \delta(q, a), bb) \\
= \; & \delta^*(\delta(q_0, a) \cup \delta(q_1, a) \cup \delta(q_2, a), bb) \\
= \; & \delta^*(\{q_1, q_2\} \cup \{q_2\} \cup \{q_0\}, bb) \\
= \; & \delta^*(\{q_0, q_1, q_2\}, bb) \\
= \; & \delta^*(\{q_0, q_1, q_2\}, b.b) \\
= \; & \delta^*(\cup_{q \in \{q_0, q_1, q_2\}} \delta(q, b), b) \\
= \; & \delta^*(\delta(q_0, b) \cup \delta(q_1, b) \cup \delta(q_2, b), b)
\end{aligned}$$

Fonction de reconnaissance δ^* : Exemple

$$\begin{array}{l|ll}
\delta(q_0, a) = \{q_1, q_2\} & = & \delta^*(\{q_0, q_2, q_3\} \cup \emptyset \cup \{q_0, q_1\}, b) \\
\delta(q_0, b) = \{q_0, q_2, q_3\} & = & \delta^*(\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, b) \\
\delta(q_1, a) = \{q_2\} & = & \delta^*(\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, b.\varepsilon) \\
\delta(q_1, b) = \emptyset & = & \delta^*(\cup_{q \in \{q_0, q_1, q_2, q_3\}} \delta(q, b), \varepsilon) \\
\delta(q_2, a) = \{q_0\} & = & \delta^*(\delta(q_0, b) \cup \delta(q_1, b) \cup \delta(q_2, b) \\
\delta(q_2, b) = \{q_0, q_1\} & & \cup \delta(q_3, b), \varepsilon) \\
\delta(q_3, a) = \{q_3\} & = & \delta^*(\{q_0, q_2, q_3\} \cup \emptyset \cup \{q_0, q_1\} \cup \emptyset, \varepsilon) \\
\delta(q_3, b) = \emptyset & = & \delta^*(\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \varepsilon) \\
\delta^*(\{q_0, q_1, q_2\}, abb) & = & \{q_0, q_1, q_2, q_3\}
\end{array}$$

Propriétés de δ^*

- $\forall E \subset Q, u, v \in X^*, \delta^*(E, u.v) = \delta^*(\delta^*(E, u), v)$,
- $\forall x \in X, q \in Q, \delta^*(\{q\}, x) = \delta(q, x)$,
- $\forall x \in X, q \in Q, \delta(q, x) = \{q\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \delta^*(\{q\}, x^n) = \{q\}$,
- $\forall w \in X^*, E \subset Q, \delta^*(E, w) = E \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \delta^*(E, w^n) = E$,
- $\forall w \in X^*, E_1 \subset E_2 \subset Q, \delta^*(E_1, w) \subset \delta^*(E_2, w)$,
- $\forall w \in X^*, E_1, E_2 \subset Q, \delta^*(E_1 \cup E_2, w) = \delta^*(E_1, w) \cup \delta^*(E_2, w)$,
- $\forall w \in X^*, \delta^*(\emptyset, w) = \emptyset$.

- Soit $A = (X, Q, Q_0, F, \delta)$ un automate fini non déterministe, le langage reconnu (ou accepté) par A est :

$$L(A) = \{w \in X^*, \delta^*(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

- Propriétés :
  - $F = \emptyset \Rightarrow L(A) = \emptyset$,
  - $Q_0 \cap F \neq \emptyset \Leftrightarrow \varepsilon \in L(A)$,
  - Soit $A = (X, Q, Q_0, F_A, \delta)$, $B = (X, Q, Q_0, F_B, \delta)$ deux AFD :
    - $F_A \subset F_B \Rightarrow L(A) \subset L(B)$,

- Soit $A = (X, Q_A, Q_0, F_A, \delta_A)$ un automate fini non déterministe,
- Soit $B = (X, Q_B, q_{Q_0}, F_B, \delta_B)$ un automate fini déterministe tel que :
  - $Q_B = \cup_{E \subset Q_{\boldsymbol{A}}} \{q_E\}$,
  - $F_B = \cup_{E \subset Q, E \cap F_{\boldsymbol{A}} \neq \emptyset} \{q_E\}$,
  - $\forall q_E \in Q_B, x \in X, \delta(q_E, x) = q_{\delta^*_{\boldsymbol{A}}(E,x)}$,
- $L(A) = L(B)$.

Passage AFND $\longrightarrow$ AFD : états inaccessibles

- Si $\exists E \subset Q_A, \forall w \in X^*, \delta_A^*(Q_0, w) \neq E$, alors q_E est un état inutile,
- On initialise Q_B avec l'état initial $(\{q_{Q_0}\})$,
- On rajoute seulement les états accessibles,
  1. $Q_B \leftarrow \{q_{Q_0}\}$,
  2. Répéter,
     Pour chaque $q_E \in Q_B, x \in X, Q_B \leftarrow Q_B \cup \{q_{\delta_A^*(E,x)}\}$,
     Tant que $|Q_B|^{(t+1)} > |Q_B|^{(t)}$.

$A = (X, Q_A, Q_0, F_A, \delta_A)$ où :

- $X = \{a, b\}$,
- $Q_A = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$,
- $Q_0 = \{q_0, q_2\}$,
- $F_A = \{q_2, q_3\}$,
- $\delta_A(q_0, a) = \{q_1, q_2\}$, $\delta_A(q_0, b) = \{q_0, q_2, q_3\}$, $\delta_A(q_1, a) = \{q_2\}$, $\delta_A(q_1, b) = \emptyset$, $\delta_A(q_2, a) = \{q_0\}$, $\delta_A(q_2, b) = \{q_0, q_1\}$, $\delta_A(q_3, a) = \{q_3\}$, $\delta_A(q_3, b) = \emptyset$.

δ_A	a	b
q_0	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_2, q_3\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\emptyset$
q_2	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_3	$\{q_3\}$	$\emptyset$

Exemple

δ_A	a	b
q_0	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_2, q_3\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\emptyset$
q_2	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_3	$\{q_3\}$	$\emptyset$

δ_B	a	b
$q_{\{q_0,q_2\}}$	$q_{\{q_1,q_2\}\cup\{q_0\}}$ $= q_{\{q_0,q_1,q_2\}}$	$q_{\{q_0,q_2,q_3\}\cup\{q_0,q_1\}}$ $q_{\{q_0,q_1,q_2,q_3\}}$

	δ_B	a	b
$\rightarrow \odot$	$q_{\{q_0,q_2\}}$	$q_{\{q_0,q_1,q_2\}}$	$q_{\{q_0,q_1,q_2,q_3\}}$
$\odot$	$q_{\{q_0,q_1,q_2\}}$	$q_{\{q_1,q_2\}\cup\{q_2\}\cup\{q_0\}}$ $= q_{\{q_0,q_1,q_2\}}$	$q_{\{q_0,q_2,q_3\}\cup\emptyset\cup\{q_0,q_1\}}$ $q_{\{q_0,q_1,q_2,q_3\}}$
$\odot$	$q_{\{q_0,q_1,q_2,q_3\}}$	$q_{\{q_1,q_2\}\cup\{q_2\}\cup\{q_0\}\cup\{q_3\}}$ $= q_{\{q_0,q_1,q_2,q_3\}}$	$q_{\{q_0,q_2,q_3\}\cup\emptyset\cup\{q_0,q_1\}\cup\emptyset}$ $= q_{\{q_0,q_1,q_2,q_3\}}$

- Réduire le nombre d'états dans un AFD,
  1. Identifier tous les ensembles d'états équivalents (classes d'équivalence),
  2. Fusionner les états équivalents en un état unique.
- Relation d'équivalence R :

$$\forall q, p \in Q, qRp \Leftrightarrow \forall w \in X^*, \delta^*(q, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(p, w) \in F$$

- R est une relation d'équivalence :
- Symétrique :

$$\begin{array}{rl}\forall q, p \in Q, & qRp, \\ \Leftrightarrow & \forall w \in X^*, \delta^*(q, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(p, w) \in F, \\ \Leftrightarrow & \forall w \in X^*, \delta^*(p, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q, w) \in F, \\ \Leftrightarrow & pRq.\end{array}$$

- Réflexive :

$$\begin{array}{rl}\forall q \in Q, & \forall w \in X^*, \delta^*(q, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q, w) \in F, \\ \Leftrightarrow & qRq.\end{array}$$

Optimisation d'AFD (cont.)

- Transitive :

$$
\begin{array}{rl}
\forall q, p, o \in Q, & qRp, pRo, \\
\Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \forall w \in X^*, \delta^*(q, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(p, w) \in F, \\ \forall w \in X^*, \delta^*(p, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(o, w) \in F. \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow & \forall w \in X^*, \left\{ \begin{array}{l} \delta^*(q, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(p, w) \in F, \\ \delta^*(p, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(o, w) \in F. \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow & \forall w \in X^*, \delta^*(q, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(p, w) \in F \\
& \Leftrightarrow \delta^*(o, w) \in F, \\
\Rightarrow & \forall w \in X^*, \delta^*(q, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(o, w) \in F, \\
\Leftrightarrow & qRo.
\end{array}
$$

Relation d'équivalence R_n

- $\forall n \in \mathbb{N}$, on définit la relation R_n par :

  $$\forall q, p \in Q, qRp, \Leftrightarrow \forall w \in X^*, |w| \leq n, \delta^*(q, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(p, w) \in F.$$

- R_n est une relation d'équivalence,
- $R_{+\infty} = R$,
- $\exists n \in \mathbb{N}, R_n = R_{+\infty} = R$,
- Si $R_n = R_{n+1}$ alors $\forall m \geq n, R_n = R_m$, dans ce cas $R_n = R_{+\infty} = R$.

$$
\begin{array}{rl}
\forall p, q \in Q, & qR_{n+1}p, \\
\Leftrightarrow & \forall w \in X^*, |w| \leq n+1, \delta^*(q,w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(p,w) \in F, \\
\Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \forall w \in X^*, |w| \leq n, \delta^*(q,w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(p,w) \in F, \\ \forall w \in X^*, 0 < |w| \leq n+1, \delta^*(q,w) \in F \\ \Leftrightarrow \delta^*(p,w) \in F, \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} qR_np, \\ \forall x \in X, u \in X^*, |u| \leq n, \delta^*(q,xu) \in F \\ \Leftrightarrow \delta^*(p,xu) \in F, \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} qR_np, \\ \forall x \in X, u \in X^*, |u| \leq n, \delta^*(\delta(q,x),u) \in F \\ \Leftrightarrow \delta^*(\delta(p,x),u) \in F, \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} qR_np, \\ \forall x \in X, \delta(q,x)R_n\delta(p,x). \end{array} \right.
\end{array}
$$

- R_0 :

$$\begin{array}{rl} \forall q, p \in Q & qR_0p, \\ \Leftrightarrow & \forall w \in X^*, |w| \leq 0, \delta^*(q, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(p, w) \in F, \\ \Leftrightarrow & \delta^*(q, \varepsilon) \in F \Leftrightarrow \delta^*(p, \varepsilon) \in F, \\ \Leftrightarrow & q \in F \Leftrightarrow p \in F. \end{array}$$

- 2 classes d'équivalence pour R_0 : F et $Q - F$.
- R_1 :

$$\begin{array}{rl} \forall q, p \in Q, & qR_1p, \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} qR_0p, \\ \forall x \in X, \delta(q, x)R_0\delta(p, x). \end{array} \right. \end{array}$$

Relation entre R_{n+1} et R_n (cont.)

- R_2 :

$$\begin{array}{rl} \forall q, p \in Q, & qR_2p, \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} qR_1p, \\ \forall x \in X, \delta(q,x)R_1\delta(p,x). \end{array} \right. \end{array}$$

- ...
- Jusqu'à $R_n = R_{n-1}$.

AFD optimal

- $A = (X, Q, q_0, F, \delta)$ un AFD,
- $\{C_0, C_1 \dots C_n\}$ les classes d'équivalence de A,
- $A = (X, \{q_{C_0}, q_{C_1} \dots q_{C_n}\}, q_{C_{i, q_0 \in C_i}}, \{q_{C_i}, C_i \subset F\}, \delta_B)$ un AFD tel que :

$$\delta_B(q_{C_i}, x) = q_{C_j} \Leftrightarrow \exists(\forall) q \in C_i, \delta(q, x) \in C_j,$$

- $L(A) = L(B)$.

Exemple

	$\downarrow$ q_1	$\odot$ q_2	$\odot$ q_3	q_4	q_5	$\odot$ q_6	$\odot$ q_7	$\odot$ q_8	q_9	q_{10}	q_{11}	$\odot$ q_{12}	$\odot$ q_{13}
a	q_2	q_4	q_5	q_5	q_4	q_7	q_9	q_9	q_{10}	q_{11}	q_{11}	q_{13}	q_{13}
b	q_3	q_2	q_2	q_6	q_6	q_8	q_7	q_{12}	q_9	q_9	q_{11}	q_{13}	q_{12}
R_0	C_1	C_2	C_2	C_1	C_1	C_2	C_2	C_2	C_1	C_1	C_1	C_2	C_2
a	C_2	C_1	C_1	C_1	C_1	C_2	C_1	C_1	C_1	C_1	C_1	C_2	C_2
b	C_2	C_2	C_2	C_2	C_2	C_2	C_2	C_2	C_1	C_1	C_1	C_2	C_2
R_1	C_1	C_2	C_2	C_3	C_3	C_4	C_2	C_2	C_3	C_3	C_3	C_4	C_4
a	C_2	C_3	C_3	C_3	C_3	C_2	C_3	C_3	C_3	C_3	C_3	C_4	C_4
b	C_2	C_2	C_2	C_4	C_4	C_2	C_2	C_4	C_3	C_3	C_3	C_4	C_4
R_2	C_1	C_2	C_2	C_3	C_3	C_4	C_2	C_3	C_4	C_4	C_4	C_5	C_5
a	C_2	C_3	C_3	C_3	C_3	C_2	C_4	C_4	C_4	C_4	C_4	C_5	C_5
b	C_2	C_2	C_2	C_4	C_4	C_3	C_2	C_5	C_4	C_4	C_4	C_5	C_5
R_3	C_1	C_2	C_2	C_3	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_7	C_7	C_8	C_8
a	C_2	C_3	C_3	C_3	C_3	C_5	C_7	C_7	C_7	C_7	C_7	C_8	C_8
b	C_2	C_2	C_2	C_4	C_4	C_6	C_5	C_8	C_7	C_7	C_7	C_8	C_8
R_4	C_1	C_2	C_2	C_3	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_7	C_7	C_8	C_8

	$\downarrow$ C_1	$\odot$ C_2	C_3	$\odot$ C_4	$\odot$ C_5	$\odot$ C_6	C_7	$\odot$ C_8
a	C_2	C_3	C_3	C_5	C_7	C_7	C_7	C_8
b	C_2	C_2	C_4	C_6	C_5	C_8	C_7	C_8

Théorème de l'étoile (de pompage, de gonflement)

- Soit $A = (X, Q, q_0, F, \delta)$ un AFD,
- Niveau 0 :

$$\begin{array}{l} \forall w \in X^*, |w| \geq |Q|, \\ \exists u, f, v \in X^*, w = ufv, f \neq \varepsilon, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \\ uf^n v \in L(A). \end{array}$$

- Niveau 1 :

$$\begin{array}{l} \forall w \in X^*, |w| \geq |Q|, \\ \forall u, f, v \in X^*, w = ufv, |f| \geq |Q|, \\ \exists \alpha, g, \beta \in X^*, g \neq \varepsilon, f = \alpha g \beta, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \\ u\alpha g^n \beta v \in L(A). \end{array}$$

- Niveau 2 :

$$\begin{array}{l}\forall w \in X^*, |w| \geq |Q|, \\ \forall u, f, v \in X^*, w = ufv, |f| \geq |Q|, \\ \exists \alpha, g, \beta \in X^*, g \neq \varepsilon, |g| < |Q|, f = \alpha g \beta, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \\ u \alpha g^n \beta v \in L(A).\end{array}$$

- Une expression régulière est un motif qui décrit un langage,
- ε est une expression régulière $\{\varepsilon\}$,
- Tout symbole $x \in X$ est une expression régulière $\{x\}$,
- La concaténation de 2 expressions régulières est une expression régulière,
- L'union de 2 expressions régulières est une expression régulière,
- L'augmentatation d'une expression régulière est une expression régulière.
- Exemple :

$$((a \cup b).a.b \cup a.a^*.b.b^*)^* b.b^*$$

- Soit $A = (X, Q, Q_0, F, \delta)$ un AFND,
- Pour tout $q \in Q$, on définit $L(A, q) = L(B)$ où $B = (X, Q, \{q\}, F, \delta)$,
- $\forall q \in Q, x \in X, p \in \delta(q, x), x.L(A, p) \subset L(A, q)$,
- $\forall q \in F, \varepsilon \subset L(A, q)$,
- $L(A) = \cup_{q \in Q_0} L(A, q)$.

Théorème

- $\forall \alpha, \beta, \gamma \subset X^*$,
  - $\alpha = \beta\alpha \cup \gamma \Leftrightarrow \alpha = \beta^*\gamma$,
  - $\alpha = \alpha\beta \cup \gamma \Leftrightarrow \alpha = \gamma\beta^*$.
- Exemple : $L = ab^*L \cup aa \Leftrightarrow L = (ab^*)^*aa$

- Soit $A = (X, Q, Q_0, F, \delta)$ un AFND,
- On redéfinit la fonction δ par :

$$\delta : \begin{array}{rcl} Q \times (X \cup \{\varepsilon\}) & \longrightarrow & 2^Q \\ (q, x) & \longmapsto & Q' \in 2^Q \; (\subset Q) \end{array}$$

- $\delta(q, \varepsilon)$ est appelée εtransition.

Fonction de reconnaissance δ^*

$$\delta^* : \begin{array}{ccl} 2^Q \times X^* & \longrightarrow & 2^Q \\ (E, w) & \longmapsto & \begin{cases} \delta_F(E) & si \;\; w = \varepsilon \\ \delta^*(\delta_F(\cup_{q \in \delta_F(E)} \delta(q, x)), u) & si \;\; \exists x \in X, \\ & u \in X^*, w = x.u. \end{cases} \end{array}$$

où δ_F est définie par :

$$\delta_F : \begin{array}{ccl} 2^Q & \longrightarrow & 2^Q \\ E & \longmapsto & \begin{cases} E & si \; \forall q \in E, \delta(q, \varepsilon) \in E, \\ E \cup \cup_{q \in E} \delta(q, \varepsilon) & sinon. \end{cases} \end{array}$$

Suppression des εtransitions

- Soit M une matrice $|Q| \times |Q|$ où :

$$M(i,j) = \begin{cases} 1 & si\ q_j \in \delta(q_i, \varepsilon)\ ou\ i = j, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

- Calculer $M^{|Q|}$,
- Pour chaque $M^{|Q|}(i,j) \neq 0, x \in X, \delta(q_i, x) \leftarrow \delta(q_i, x) \cup \delta(q_j, x)$,
- Pour chaque $q \in Q, \delta(q, \varepsilon) = \emptyset$.

Suppression des εtransitions

	a	b	ε
q_0	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_2, q_3\}$	$\{q_1\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_0, q_3\}$
q_2	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$
q_3	$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$

$M =$

$\nearrow$	q_0	q_1	q_2	q_3
q_0	1	1	0	0
q_1	1	1	0	1
q_2	0	0	1	0
q_3	0	0	1	1

$M^4 =$

$\nearrow$	q_0	q_1	q_2	q_3
q_0	16	16	11	15
q_1	16	16	15	16
q_2	0	0	1	0
q_3	0	0	5	1

	a	b
q_0	$\{q_1, q_2\} \cup \{q_2\} \cup \{q_0\} \cup \{q_3\}$ $= \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_2, q_3\} \cup \emptyset \cup \{q_0, q_1\} \cup \emptyset$ $= \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
q_1	$\{q_2\} \cup \{q_1, q_2\} \cup \{q_0\} \cup \{q_3\}$ $= \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\emptyset \cup \{q_0, q_2, q_3\} \cup \{q_0, q_1\} \cup \emptyset$ $= \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
q_2	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_3	$\{q_3\} \cup \{q_0\}$ $= \{q_0, q_3\}$	$\emptyset \cup \{q_0, q_1\}$ $= \{q_0, q_1\}$

- Soient $A = (X, Q_A, Q_{0A}, F_A, \delta_A)$ et $B = (X, Q_B, Q_{0B}, F_B, \delta_B)$ 2 AFND où $Q_A \cap Q_B = \emptyset$,
- Soient $C = (X, Q_A \cup Q_B \cup \{q_0\}, \{q_0\}, F_A \cup F_B, \delta)$ où $q_0 \notin Q_A \cup Q_B$ et

$$\delta : \begin{array}{rcl} (Q_A \cup Q_B \cup \{q_0\}) \times \\ (X \cup \{\varepsilon\}) & \rightarrow & 2^{Q_A \cup Q_B \cup \{q_0\}} \\ (q, x) & \mapsto & \begin{cases} \delta_A(q, x) & si\ q \in Q_A, \\ \delta_B(q, x) & si\ q \in Q_B, \\ Q_{0A} \cup Q_{0B} & si\ q = q_0, x = \varepsilon, \\ \emptyset & sinon. \end{cases} \end{array}$$

- $L(C) = L(A) \cup L(B)$.

Concaténation de 2 AFND

- Soient $A = (X, Q_A, Q_{0A}, F_A, \delta_A)$ et $B = (X, Q_B, Q_{0B}, F_B, \delta_B)$ 2 AFND où $Q_A \cap Q_B = \emptyset$,
- Soient $C = (X, Q_A \cup Q_B, Q_{0A}, F_B, \delta)$ où :

$$\delta : \begin{array}{rcl} (Q_A \cup Q_B) \times & & \\ (X \cup \{\varepsilon\}) & \rightarrow & 2^{Q_A \cup Q_B} \\ (q, x) & \mapsto & \begin{cases} \delta_A(q, x) & si\ q \in Q_A - F_A, \\ \delta_A(q, x) \cup Q_{0B} & si\ q \in F_A, \\ \delta_B(q, x) & si\ q \in Q_B. \end{cases} \end{array}$$

- $L(C) = L(A).L(B)$.

Augmention d'un AFND

- Soient $A = (X, Q, Q_0, F, \delta_A)$ un AFND,
- Soient $B = (X, Q \cup \{q_0\}, Q_0 \cup \{q_0\}, F \cup \{q_0\}, \delta)$ où $q_0 \notin Q_0$:

$$\delta : \begin{array}{rcl} Q \cup \{q_0\} \times & & \\ (X \cup \{\varepsilon\}) & \longrightarrow & 2^{Q \cup \{q_0\}} \\ (q, x) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \delta_A(q, x) & si\ q \in Q_A - F_A, \\ \delta_A(q, x) \cup Q_0 & si\ q \in F_A, \\ \emptyset & si\ q = q_0\ et\ x = \varepsilon. \end{array} \right. \end{array}$$

- $L(B) = (L(A))^*$.