Corrigé TD 2

Exercice 1 :

1) Pour démontrer qu'on est en présence d'une loi de probabilité, il faut vérifier :

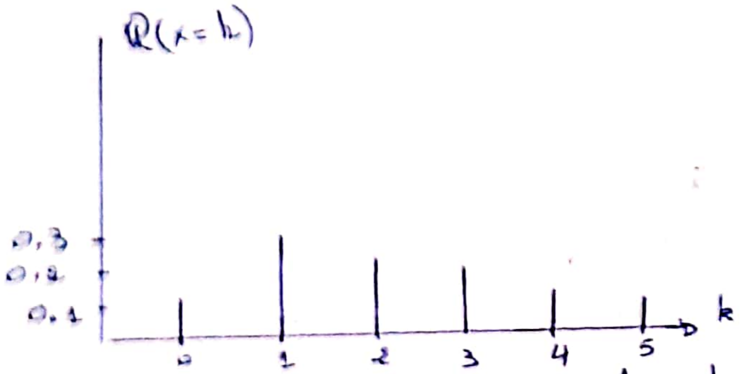
$$\forall\ k \in \{0, \dots 5\},\quad \mathbb{P}(X = k) \geq 0$$

et $$\sum_{k=1}^{5} \mathbb{P}(X = k) = 1$$

La 1ère condition implique que $a \geq 0$.

La 2ème condition est équivalente à $a = 0.2$

2)



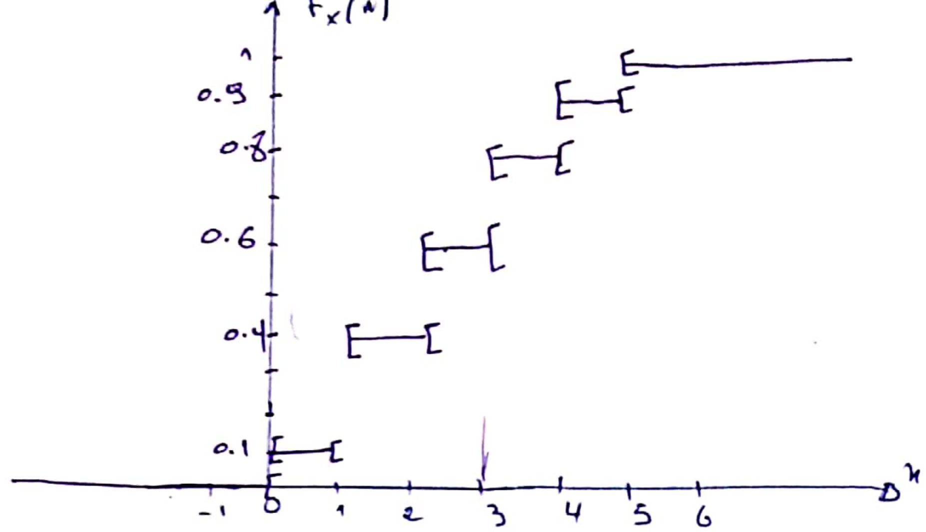
Représentation de la loi de X.
(diagramme en bâton car loi discrète)

3) $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0.1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0.4 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0.6 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0.8 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 0.9 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{5} k\ \mathbb{P}(X = k) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.2 + 4 \times 0.1 + 5 \times 0.1 = 2.2$$

$$\text{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \{\mathbb{E}(X)\}^2$$

$$= \sum_{k=0}^{k} k^2\ \mathbb{P}(X = k) - \{\mathbb{E}(X)\}^2 = 0^2 \times 0.1 + 1^2 \times 0.3 + 2^2 \times 0.2 + 3^2 \times 0.2 + 4^2 \times 0.1 + 5^2 \times 0.1 - (2.2)^2$$



la courbe fonction de répartition

$\mathbb{P}(X \leq 3) = F_X(3) = 0.8$

$\mathbb{P}(X > 2) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2)$

$= 1 - F_X(2)$

$= 1 - 0,6 = 0.4$

$\mathbb{P}(X \geq 4) = 1 - \mathbb{P}(X < 4)$

$= 1 - \mathbb{P}(X \leq 3)$

$= 1 - F_X(3)$

$= 1 - 0.8 = 0,2.$

$\mathbb{P}(0 < X < 3) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2)$

$= 0.5$

Exercice 2:

- $Y(\Omega) = \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$

k	1	4	9	16	25	36
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- La variable Z peut prendre les valeurs

$(1-3)^2 = 4$; $(2-3)^2 = 1$, $(3-3)^2 = 0$; $(4-3)^2 = 1$

$(5-3)^2 = 4$; $(6-3)^2 = 9$.

k	0	1	4	9
$\mathbb{P}(Z = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Exercice 3 :

1) X : " nbre de bits décodés correctement ".

On pose

S : " Un bit décodé correctement "

$\mathbb{P}(S) = 0.9$.

La variable X est le nombre de succès sur les 4 bits, d'où $X \sim \mathcal{B}(4, 0.9)$.

2) $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X < 1)$

$= 1 - \mathbb{P}(X \leq 0)$

$= 1 - C_4^0 (0.9)^0 (0.1)^4$

$= 0.999\ldots$

3) $\mathbb{P}(X = 4) = C_4^4 (0.9)^4 (0.1)^0 = 0.656$

Exercice 4 :

$Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = 2.5$

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$\forall\ k \in \mathbb{N}^*$.

1) $$\mathbb{P}(Y = 4) = \frac{(2.5)^4 e^{-2.5}}{4!}$$

$$\mathbb{P}(Y < 4) = \sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}(Y = k)$$

$$= e^{-2.5} \left\{ \frac{(2.5)^0}{0!} + \frac{(2.5)^1}{1!} + \frac{(2.5)^2}{2!} + \frac{(2.5)^3}{3!} \right\}$$

(3) $= 0.458$

$\mathbb{P}(Y \geq 4) = 1 - \mathbb{P}(Y < 4) = 1 - 0.758 = 0,242$

- $\mathbb{P}(Y \geq 4 \mid Y \geq 2) = \dfrac{\mathbb{P}(Y \geq 4 \cap Y \geq 2)}{\mathbb{P}(Y \geq 2)}$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{\mathbb{P}(Y \geq 4)}{\mathbb{P}(Y \geq 2)}$$

car

$(Y \geq 4) \subset (Y \geq 2)$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{0.242}{1 - e^{-2.5}\left\{\frac{(2.5)^0}{0!} + \frac{(2.5)^1}{1!}\right\}}$$

car

$\mathbb{P}(Y \geq 2)$

$= 1 - \mathbb{P}(Y < 2)$

$$= \frac{0.242}{0.713}$$

$$= 0.339.$$

Exercice 5:

1) X : " Le nombre des cites visités jusqu'à le premier mot clé "

le " premier succés

D'où $X \sim Geo(p)$ avec $p = 0.2$.

la probabilité du succés

ainsi $\mathbb{P}(X = k) = (0.8)^{k-1} \times 0.2$ pour tout $k \geq 2$.

2) $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.2} = 5$

$Var(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{0.8}{0.02} = 20.$

d'où $\sigma(X) = \sqrt{20}$.

3) a) Y : " Le nombre de sites contenant le mot clé ".

Y est le nombre de succès sur les 10 sites

d'où $Y \sim B(10, 0.2)$.

b) $\mathbb{E}(Y) = np = 10 \times 0.2 = 2.$

$Var(Y) = np(1-p) = 1.6.$

d'où $\sigma(Y) = \sqrt{1.6}$.

4) $\mathbb{P}(Y \geq 5) = \sum_{k=5}^{10} \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=5}^{10} C_{10}^{k} (0.2)^k (0.8)^{10-k}$

5) $\mathbb{P}(X \geq 5) = 1 - \mathbb{P}(X < 5)$

$= 1 - \sum_{k=1}^{4} \mathbb{P}(X = k)$

$= 1 - \sum_{k=1}^{4} (0.8)^{k-1} \times (0.2).$

Exercice 6 :

1) a) $X \sim B(5, 0.3)$

$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k (0.3)^k (0.7)^{5-k}.$

$\mathbb{E}(X) = np = 5 \times 0.3 = 1.5$

$Var(X) = np(1-p) = 5 \times 0.3 \times 0.7 = 1.05$

b) $\mathbb{P}(X = 2) = C_5^2 (0.3)^2 (0.7)^3 = 0.309.$

c) $\mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1)$

$= C_5^0 (0.3)^0 (0.7)^5 + C_5^1 (0.3)^1 (0.7)^4$

5

$= 0.528.$

d)

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	0.168	0.360	0.309	0.132	0.028	0.002

La valeur la plus probable est 1 avec $P(X=1)=0.36$

2)a) On a $n = 100 > 50$

$p = 0.05 < 1$

Alors on peut approximer la loi de probabilité de X par la loi de Poisson de paramètre

$$\lambda = np = 100 \times 0.05 = 5$$

b) $P(X=0) = e^{-5} \times \frac{5^0}{0!} = 0.0067$.

c) $P(X=2) = e^{-5} \times \frac{5^2}{2!} = 0.0842$

d) $P(2 \leq X \leq 4) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$

$$= e^{-5} \left\{ \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^4}{4!} \right\}.$$

<u>Exercice 7:</u>

C : " Coût d'utilisation d'un outils dans une entreprise".

$E(X) = 130$

$\sigma(X) = 16$

1) L'inégalité de B.T.

$\forall k > 0,$

$$P(|C - 130| \leq 16k) \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

équivalent à

$$\mathbb{P}\left(130-16k \leq C \leq 130+16k\right) \geq 1-\frac{1}{k^2}. \quad (*)$$

Le but est de trouver un minorant de

$$\mathbb{P}(66 \leq C \leq 194).$$

Cherchons k vérifiant

$$\begin{cases} 130-16k = 66 \\ 130+16k = 194 \end{cases}$$

Il suffit de prendre $k=4$.

Ainsi $\mathbb{P}(66 \leq C \leq 194) \geq \underbrace{1-\frac{1}{4^2}}_{=0.0625}.$

2) but est de trouver un majorant de

$$\mathbb{P}(C \geq 500)$$

Cherchons k vérifiant $130+16k=300$.
Il suffit de prendre $k=10,625$

On utilisant $(*)$, on aura:

$$\mathbb{P}\left(-10 \leq C \leq 500\right) \geq \underbrace{1-\frac{1}{(10,625)^2}}_{0.9911.}$$

d'où $\mathbb{P}(C \leq 500) = 0.9911.$

car le coût est positif.

Finalement $\mathbb{P}(C \geq 500) \leq 0.0088.$

7