TIPE

Propagation des épidémies dans la ville

Khalil BENKHALI

numéro de candidat 15025

Sommaire

Introduction

Un peu d'histoire:

- L'épidémiologie daterait du Ve siècle avant J.C
- Hippocrate (460 av. J.-C,377 av. J.-C) serait le premier épidémiologue
- Les mathématiques n'avaient pas leur place en épidémiologie
- Ce n'est qu'au XVIII e siècle avec les travaux de Daniel Bernoulli (1700-1782) que l'on commence à comprendre leur importance.

Définition et facteurs influençant:

Le R_0, ou taux de reproduction de base, représente la moyenne du nombre de nouveaux cas générés par une seule personne infectée dans une population sans immunité. Il est principalement influencé par :

- ➩ la durée de la contagiosité après l'infection.
- ➩ la probabilité d'infection suite à un contact entre une personne infectée et une personne susceptible.
- ➩ la fréquence des contacts humains.

Analyse:

En 2003 , les épidémiologistes mathématiques estimaient que R_0 était de l'ordre de 2,2 à 3,6 pour le virus SARS – une estimation bien supérieure à 1.
Malgré cette estimation et une susceptibilité quasi universelle, le SARS n'est pas devenu une pandémie mondiale.

Problématique:

Comment peut-on expliquer ce désaccord ?

Origine de ce désaccord:

- Négligence de la configuration des réseaux de contact.
- Erreur : risque d'infection égal pour toutes les personnes sensibles.
- SARS se propage vite dans immeubles résidentiels et hôpitaux en raison de contacts étroits élevés par rapport à la population générale.

Présentation de la théorie de percolation

Présentation de la théorie de percolation

Inspirée à l'origine par des questions de physique, la théorie de percolation permet d'étudier certaines propriétés des réseaux. Elle aide notamment à comprendre la propagation des épidémies, à concevoir des réseaux de communication décentraliser ou à caractériser la diffusion des informations au sein d'un réseau social. Afin d'étudier le modèle de percolation, il est important de rappeler quelques notions sur la théorie des graphes.

Définition:

Un graphe (non orienté) est un couple $G = (S,A)$ où S est l'ensemble des sommets de G, et A est un ensemble de paires d'éléments distincts de S, les arrêtes de G.

Définition:

Soit s = {x,y} une arrête du graphe G.
Les sommets de x et y sont appelés les extrémités de l'arrête s.
Deux sommets qui sont les extrémités d'une même arrête sont dits **voisins** ou **adjacents**.

Definition:

Soit G = (S,A) un graphe.
Un **chemin** de longueur $n \geq 0$ du sommet x au sommet y est une suite P = (x_0 = x,x_1,...,x_n = y) de sommets de G telle que pour tout $k \in [0, n-1]$, $\{x_k, x_{k+1}\} \in A$. On dit que les sommets x et y sont reliés par le chemin P.

Définition:

Un graphe dans lequel tous les sommets sont reliés par au moins un chemin est dit **connexe**.

Définition:

Soit $d \geq 1$.
On définit la distance de **Manhattan** entre deux points x et y appartenants à $\mathbb{Z}^d$ comme :

$$\boxed{\delta(x, y) = \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|}$$

Présentation de la théorie de percolation

La théorie de la percolation repose alors sur l'étude du graphe $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$.
Où $\mathbb{E}^d = \{\{x, y\} \in \mathbb{Z}^{2d}, \delta(x, y) = 1\}$ est l'ensemble des arrêtes de ce graphe.

Il y a deux types de percolation. La percolation par lien (bond percolation) et la percolation par site (site percolation). Soit G un graphe non orienté, la percolation par lien est l'étude des phénomènes de percolation sur les arêtes de G. La percolation par site, quant à elle, est l'étude des phénomènes de percolation sur les sommets de G. Ces deux formes de percolation bien que différentes possèdent des propriétés similaires.
Nous allons étudier ces propriétés sur l'espace $\mathbb{L}^d$.

Soit $\mathcal{T} = (\Omega, \mathcal{F})$, avec $\Omega = \{0, 1\}^{|\mathbb{E}^d|}$ et $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.
$\mathcal{T}$ est un espace mesurable.

Définition:

Soient $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, $\omega \in \Omega$ une configuration.
On dit qu'une arête $e \in \mathbb{E}^d$ est ouverte avec une probabilité p lorsque ω(e) $= 1$ et qu'elle est fermée avec une probabilité 1 - p si ω(e) $= 0$ pour $0 \leq p \leq 1$. La même terminologie est utilisée pour les sommets de $\mathbb{Z}^d$.

On munit $\mathcal{T}$ de la mesure μ_e dite mesure de Bernoulli.

Définition:

$\mu_e(\omega(e) = 0) = 1 - p$ $\qquad$ $\mu_e(\omega(e) = 1) = p$

On définit alors la mesure produit comme :

Définition:

$$\mathbb{P}_p = \prod_{e \in \mathbb{E}^d} \mu_e$$

Posons $\mathrm{K} = \{e \in \mathbb{E}^d \mid \omega(e) = 1\}$. K est alors un sous-ensemble de $\mathbb{E}^d$ et on obtient ainsi des sous-graphes de $\mathbb{L}^d$.

Dans le cadre général, pour un graphe G = (V, E), un cluster ou un amas est un ensemble C de composantes connexes de G.

Définition:

Soit $G = (\mathbb{Z}^d, K)$ un sous-graphe de $\mathbb{L}^d$ contenant tous ses sommets et les arêtes ouvertes.
Chaque composante connexe de G est appelée cluster ouvert.
On pose $C(x) = \{y \in \mathbb{Z}^d \mid$ y est connecté à x par un chemin ouvert$\}$.
C(x) est le cluster contenant x.

Présentation de la théorie de percolation

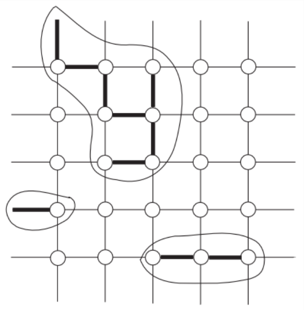


Figure 1: Mise en évidence des clusters pour une percolation par lien.

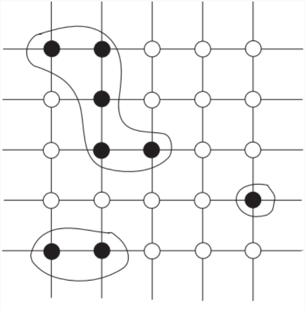


Figure 2: Mise en évidence des clusters pour une percolation par sites.

On cherche la probabilité p permettant d'obtenir des clusters de taille infinie. On dira qu'il y a percolation si notre graphe possède un cluster de taille infinie (i.e si $|C| = \infty$). On introduit :

Définition:

La fonction croissante $\theta(p)$: $\begin{cases} [0,1] \to [0,1] \\ p \mapsto \mathbb{P}_p\{|C(0)| = \infty\} \end{cases}$.

Présentation de la théorie de percolation

On remarque que pour des valeurs de p inférieur à un certain seuil, on a $\theta(\mathrm{p}) = 0$: il y a un phénomène de transition de phase. On définit alors la probabilité critique ou seuil de percolation comme :

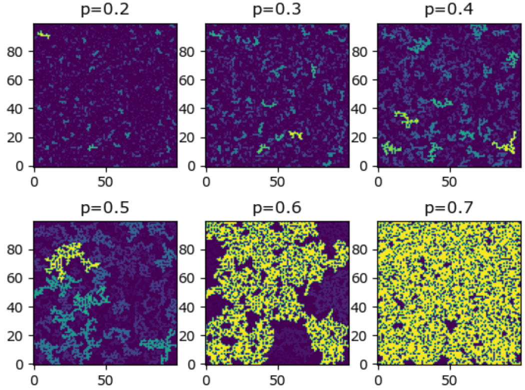
Définition:

$$p_c(d) = sup\{p \mid \theta(p) = 0\}$$

On remarque que p_c dépend de d le degré du graphe $\mathbb{L}^d$ qu'on étudie, dans le cadre de l'étude des feux de forêts on s'intéresse à $\mathbb{L}^2$.

Modélisation numérique des épidémies

Nous avons pu tout d'abord observer expérimentalement l'existence du seuil de percolation :



On modélise notre ville par une matrice carré représentant un réseau carré fini, où chaque carré est un sommet contenant un entier compris entre 0 et 9 représente un état de la ville ou des habitants:

```
colors = [(48, 48, 48), (0, 128, 0), (0,70,0), (167,108,69), (255, 48, 29) ,
(250,48,29), (218,48,29), (139, 0, 0), (95,0,0), (105,105,105)]
#0 Vide 1- Personne saine hautement contagieuse 2- personne saine peu contagieuse 3- personne saine moyennement contagieuse
#4 Personne fortement contagieux susceptible de transmettre la maladie 5- Personne moyennement contagieux susceptible de transmettre la
#maladie 6- Personne moin contagieux susceptible de transmettre la maladie 7- Patient fortement contagieux dans un état avancé
#8-Patient moin contagieux dans un état avancé 9-Patient moyennement contagieux dans un état avancé
# A -> la matrice reprÃ©sentant la ville
# R -> la liste des zones de la ville qui contient des personnes susceptibles de transmettre la maladie
```

On commence par créer une matrice vide

```
def carre_vide (n):
 A = zeros ((n, n), int)
 return A
```

Puis on peuple notre ville d'habitants :

```
def peuplement (A, p):
 n = A.shape[0]
 for i in range (1, n - 1):
  for j in range (1, n - 1):
      if (random () < p ):
            A[i,j] = 1
```

Ensuite on infecte un côté de notre ville :

```
def Contamination_front_nord (A):
 n = A.shape[0]
 R= []
 for i in range (1 ,n - 1):
  if A[1,i] == 1:
     A[1,i] = 4
     R.append ([1,i])
 return R
```

De la même manière, on écrit une fonction Contamination_front_ouest.

À l'aide des fonctions définies en annexe et du module PIL, on obtient les images de la ville avant et après l'épidémie :

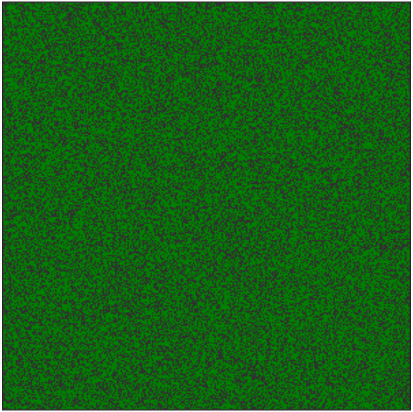


Figure 3: Ville de 500 pixels avec p = 0.6

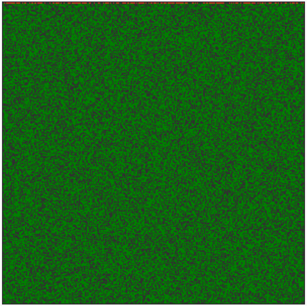


Figure 4: Début de l'épidémie sur le côté nord.

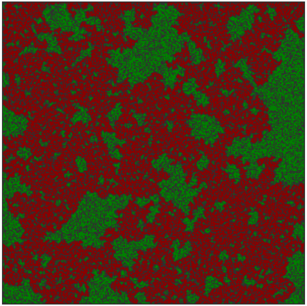


Figure 5: État de la ville après l'épidémie.

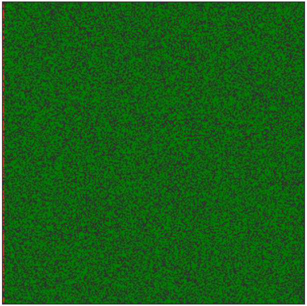


Figure 6: Début de l'épidémie sur le côté ouest.

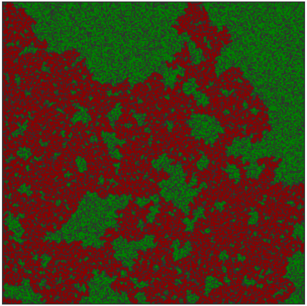


Figure 7: État de la ville après l'épidémie.

On introduit ensuite la fonction test_percolation, prenant pour argument p et n et renvoyant si le réseau est en percolation:

```
def test_percolation(n, p):
    A = carre_vide(n)
    peuplement (A, p)
    B = epidemie_front_nord (A)
    for j in range(n):
        if B[n-2][j] == 7 :
            return True
    B = epidemie_front_ouest (A)
    for j in range(n):
        if  B[j][n-2] == 7 :
            return True
    return False
```

On peut ainsi implémenter la fonction θ sur python:

```
def theta(p, k, n):
    s = 0
    for i in range(k):
        if test_percolation(n, p):
            s += 1
    return s/k
```

Ainsi à l'aide d'une dichotomie on peut approximer le seuil de percolation p_c:

```python
def p_c(eps, k, n):
    x, y = 0, 1
    while y - x > eps:
        p = (x + y) / 2
        prob = theta(p,k, n)
        if prob < 0.5:
            x = p
        elif prob > 0.6:
            y = p
    return (x + y) / 2
```

Dans nos différentes simulations on a pu trouvé p_c (e*10-4, 500, 500) = 0.5927 ce qui correspond bien à une valeur approchée de p_c.

Nous avons ensuite implémenté à travers les fonctions dans l'annexe une ville comprenant trois types d'habitants selon leurs systèmes immunitaires:

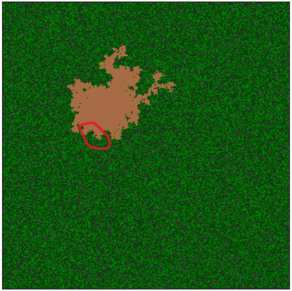


Figure 8: Ville de 25000 pixels dont 7500 font parties de la population 2 avec p $= 0{,}7$.

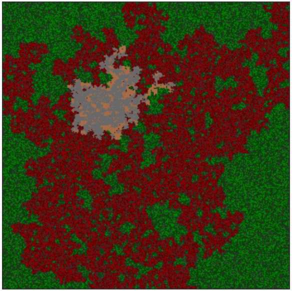


Figure 9: État de la ville après l'épidémie avec $p_{a1} = 0{,}9$, $p_{a2} = 0{,}7$ et $p_h = 0{,}5$.

On établit ensuite pour les mêmes paramètres que précédemment, à l'aide de la fonction pourcentage détaillée en annexe le pourcentage de la population 1 (P_1), de la population 2 (P_2) et de la population 3 (P_3) infectés pour différentes valeurs de p.

p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
P_1(%)	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
P_2(%)	0.22	0.45	0.16	0.14	0.25
P_3(%)	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02

p	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$P_1(\%)$	0.05	16.00	88.28	95.97	98.12
$(P_2\%)$	0.63	14.37	71.99	79.95	82.57
$P_3(\%)$	0.05	17.47	92.58	98.17	99.07

On remarque que la population est pas ou quasiment pas infectée pour $p < 0.6$, on observe encore une fois un phénomène critique caractéristique à une transition de phase. En réajustant les fonctions utilisées pour déterminer p_c précédemment on trouve un nouveau seuil de percolation dépendant des probabilités d'inflammations valant dans ce cas à peu près à 0,6334.

Réseaux de contacts:

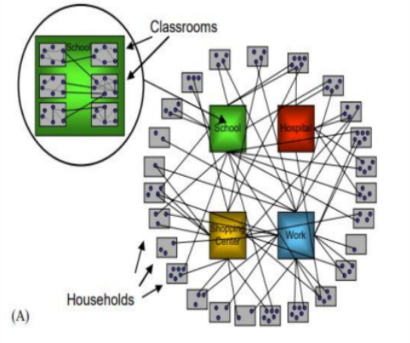


Figure 10: Les points représentent les individus et les lignes entre les points représentent les contacts entre les individus qui pourraient potentiellement conduire à la transmission de la maladie

Sommets des réseaux de contact :

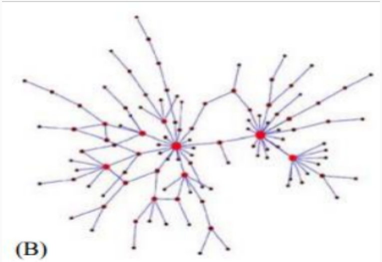


Figure 11: Réseaux de la loi de puissance

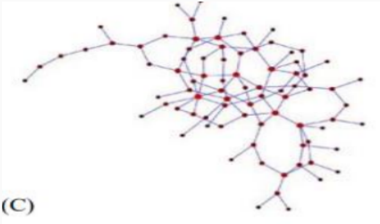
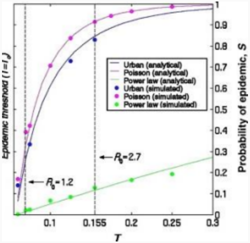


Figure 12: Réseau de Poisson

Interprétation des résultats des simulations:

Réseaux de la loi de puissance : Diminution du nombres de supers-propagateurs impliquant une diminution de probabilité de propagation de l'épidémie



Réseau de Poisson: Foyers au-dessus du seuil impliquant une propagation du virus.

Conclusion

Conclusion

- Percolation modèle simple permettant de retranscrire certains phénomènes complexes comme la propagation des épidémies.
- Mise en évidence de l'importance de la géométrie et de la densité de la population dans la propagation des épidémies.
- Toutefois ce modèle est incomplet dans sa description du phénomène réel et peut être complété comme nous l'avons proposé.
- Nécessité alors d'étudier la contagibilité des personnes constituants notre population.
- Mise en évidence de l'impossibilité d'un modèle général: singularité du modèle.

Merci pour votre attention !!!