Université de la Manouba
Institut Supérieur des Arts Multimédias

Série N°2

A.U 2024-2025 **1 Ing.**

Exercice 1 :
Trouver le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\begin{array}{ll}
\sum a_n z^n,\ \lim_{n\to+\infty} a_n = l \neq 0 & \sum \dfrac{n}{n!} z^n \\
\sum a_n z^n = \sum \dfrac{1.4.7\ldots(3n-2)}{n!} z^n & \sum \dfrac{z^n}{\sqrt{n}} \\
\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{n(n+1)} & \sum (2^n - n) z^n \\
\sum 3^n z^n & \sum (n^2 + e^{-n}) z^n \\
\sum \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 n^n} z^n & \sum 3^n z^{2n+5} \\
\sum_{n\geqslant 0} n^2 z^n & \sum_{n\geqslant 2} \dfrac{n}{n^2-1} z^n
\end{array}$$

Exercice 2 :
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer les rayons de convergence des séries :

$$\sum a_n^2 z^n, \quad \sum \frac{a_n}{n!} z^n$$

Exercice 3 :
Calculer la somme des séries entières suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n t^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^2 t^n$$

Exercice 4 :
Développer en série entière les fonctions suivantes :
$\ln(x^2 - 5x + 6)$
$\dfrac{x-1}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

Exercice 5 :
Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

1. Déterminer le rayon de convergence, R, de cette série.
2. Étudier la convergence de f pour $x = \pm R$.
3. Déterminer $\lim_{x\to R^-} f(x)$.

Exercice 6 :
Soit la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ définie par les relations :

$$U_0 = 1;\ U_1 = 1\ ; 2U_{n-2} - 5U_{n-1} + 2U_n = 0$$

On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 0} U_n \dfrac{x^n}{n!}$

1. Monter que cette série entière vérifie une équation différentielle du second ordre.
2. En déduire l'expression de $\sum_{n\geqslant 0} U_n \dfrac{x^n}{n!}$.
3. Déterminer l'expression de U_n.