2 Traitement du signal analogique

Chapitre
2

2.1 Série de Fourier

2.1.1 Définition

La décomposition en **série de Fourier** permet de décomposer un signal en somme de sinusoïdes. On utilise principalement les séries de Fourier dans le cas des signaux périodiques. Elles permettent ainsi de passer facilement du domaine temporel au domaine fréquentiel. Pour pouvoir être décomposable, un signal doit être à variations bornées (Dirichlet).

Pour tout signal <u>s(t) réel où s(t) = s(t+T_0)</u>, on peut écrire :

$$\boxed{s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t)\right]} \qquad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}\right)$$

avec

$$\boxed{\begin{aligned} S_0 &= \frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} s(t)\,dt \\ A_n &= \frac{2}{T_0}\int_{(t_0)} s(t)\cos(n\,\omega_0\,t)\,dt \\ B_n &= \frac{2}{T_0}\int_{(T_0)} s(t)\sin(n\,\omega_0\,t)\,dt \end{aligned}}$$

<u>Remarques :</u>
On appelle le signal de pulsation ω_0 le <u>*fondamental*</u>.
On appelle les signaux de pulsation n.ω_0 les <u>*harmoniques de rang n*</u>.
La valeur de S_0 représente la *valeur moyenne* de s(t).

<u>**Autre expression :**</u>
L'écriture précédentes des séries de Fourier présente en fait peu d'intérêt physique, en effet si la fonction f(t) subit une simple translation suivant l'axe des temps alors les coefficients A_n et B_n seront modifiés. En conséquence, on cherche donc une nouvelle écriture des séries de Fourier dans laquelle la puissance est conservée après une translation suivant l'axe des temps et où cette translation apparaîtra sous la forme d'un déphasage.

Cette nouvelle écriture s'obtient en posant :

$$\begin{cases} A_n = C_n \sin\Phi_n \\ B_n = C_n \cos\Phi_n \end{cases}$$

ainsi, en remplaçant A_n et B_n dans :

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t)\right]$$

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\left[\sin\Phi_n \cos(n\omega_0 t) + \cos\Phi_n \sin(n\omega_0 t)\right]$$

$$\boxed{s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(n\omega_0 t + \Phi_n\right)}$$

avec

$$\boxed{\begin{cases} \Phi_n = \arctan \dfrac{A_n}{B_n} \\ C_n^{\ 2} = A_n^{\ 2} + B_n^{\ 2} \end{cases}}$$

<u>!! Attention !!</u>
Si l'on intervertit la place des paramètres B_n et A_n (A_n devant *sin* et B_n devant *cos*) dans la décomposition en série de Fourier, il ne faut pas oublier de les intervertir dans la définition de ϕ_n aussi.

2.1.2 Développement en termes complexes

En introduisant la notation complexe de $\cos(n\omega_0 t)$ et $\sin(n\omega_0 t)$, il est possible d'obtenir une écriture complexe de la série de Fourier.

On pose $\cos\left(n\,\omega_0\, t\right) = \dfrac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}$ et $\sin\left(n\,\omega_0\, t\right) = \dfrac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2\,j}$

On obtient alors :

$$\boxed{s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} S_n\, e^{jn\omega_0 t}}$$

avec

$$\boxed{S_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt}$$

Les coefficients complexes S_n sont reliés aux coefficients A_n et B_n par les relations suivantes :

$$\begin{cases} S_n = \dfrac{A_n - jB_n}{2} \\ S_{-n} = \dfrac{A_n + jB_n}{2} \end{cases} \quad \forall n > 0$$

<u>Remarques :</u>
Dans les deux formes précédentes, chaque composante de fréquence était représentée par deux coefficients. L'écriture complexe ne fait apparaître qu'un seul coefficient S_n complexe mais qui comprend bien entendu un module et une phase.

2.1.3 Propriétés

Si s(t) est paire $\longrightarrow$ $B_n = 0$ et $S_n = S_{-n}$
Si s(t) est impaire $\longrightarrow$ $A_n = 0$ et $S_n = -S_{-n}$

2.2 Transformée de Fourier

C'est une généralisation de la décomposition de série de Fourier à tous les signaux déterministes. Elle permet d'obtenir une représentation en fréquence (représentation *spectrale*) de ces signaux. Elle exprime la répartition fréquentielle de l'amplitude, de la phase et de l'énergie (ou de la puissance) des signaux considérés.

2.2.1 Définition

Soit s(t) un signal déterministe. Sa transformée de Fourier est un fonction, généralement complexe, de la variable *f* et définie par :

$$\boxed{S(f) = TF\left[s(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt}$$

Si cette transformée existe, la transformée de Fourier inverse est donnée par :

$$\boxed{s(t) = TF^{-1}\left[S(f)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\, e^{j2\pi f t}\, df}$$

Remarque :
On appelle **spectre** de *s* le module de la transformée de Fourier de *s*.

2.2.2 Propriétés

	s(t)	S(F)
Linéarité	$\alpha.s(t) + \beta.r(t)$	$\alpha.S(f) + \beta.R(f)$
Translation	$s(t\text{-}t_0)$	$e^{-2j\pi f t_0} S(f)$
	$e^{2j\pi f_0 t} s(t)$	$S(f\text{-}f_0)$
Conjugaison	$s^*(t)$	$S^*(-f)$
Dérivation	$\frac{d^n s(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n S(f)$
Dilatation	$s(at)$ avec $a \neq 0$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} S(\frac{f}{a})$
Convolution	$s(t) * r(t)$	$S(f) \bullet R(f)$
	$s(t) \bullet r(t)$	$S(f) * R(f)$
Dualité	S(t)	s(-f)

Transformée de Fourier de Dirac :

$s(t) \xrightarrow{TF} S(f)$

$\delta(t) \longrightarrow 1$

$\delta(t\text{-}\tau) \longrightarrow e^{-2j\pi f\tau}$

$e^{-2j\pi f_0 t} \longrightarrow \delta(f+f_0)$

Egalité de Parceval :
Pour un signal d'énergie finie, l'énergie du signal est identique dans les domaines temporel et fréquentiel.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert s(t)\rvert^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert S(f)\rvert^2 df}$$

2.2.3 Exemple

Calculons la transformée de Fourier d'un signal sinusoïdale : $s(t) = S\cos\omega_0 t$

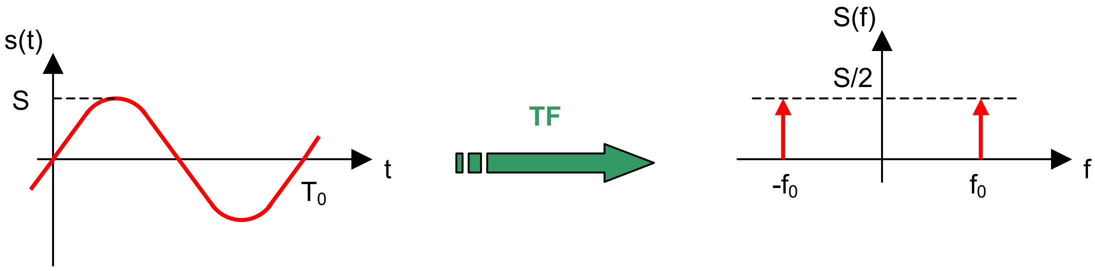
$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j2\pi ft}\,dt = S\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(2\pi f_0 t\right)e^{-j2\pi ft}\,dt \;\text{ avec }\; \cos\left(2\pi f_0\, t\right) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-2\pi f_0 t}}{2}$$

$$S(f) = S\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-2\pi f_0 t}}{2}e^{-j2\pi ft}\,dt = \frac{S}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 t}\bullet e^{-j2\pi ft}\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f_0 t}\bullet e^{-j2\pi ft}\,dt\right]$$

$$S(f) = \frac{S}{2}\left(TF\left[e^{j2\pi f_0 t}\right] + TF\left[e^{-j2\pi f_0 t}\right]\right)$$

d'où

$$\boxed{TF\left[S\cos 2\pi f_0 t\right] = \frac{S}{2}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]}$$



Remarques :

❶ La transformée de Fourier d'une fonction sinusoïdale de fréquence f_0 est représentée par deux impulsions de Dirac centrée sur les fréquences $-f_0$ et $+f_0$. Bien entendu, l'impulsion centrée sur f_0 n'a pas d'existence physique.

❷ Le spectre d'une décomposition en série de Fourier sera donc un spectre discontinu de raies aux fréquences des sinusoïdes présentes dans la décomposition.

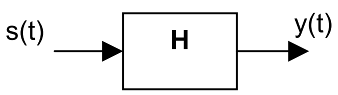
2.3 Convolution

2.3.1 Définition

Le produit de convolution d'un signal s(t) par un autre h(t) est donné par :

$$\boxed{s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(k)\,h(t-k)\,dk}$$

Remarque :



Le signal de sortie d'un système linéaire causal invariant dans le temps est donné par le produit de convolution du signal d'entrée et d'une fonction h(t) appelée ***réponse impulsionnelle***.

La valeur du signal de sortie à l'instant t est ainsi obtenue par la sommation des valeurs passées du signal d'excitation, pondérées par la réponse du système.