UNIVERSITÉ DE MANOUBA
Institut Supérieur des Arts Multimédia
Mathématiques pour l'ingénieur
TD 1 : Séries Numériques

Exercice 1

Étudier la convergence des séries suivantes :

$$\sum \frac{3^n}{n}; \quad \sum ne^{\frac{1}{n}} - n; \quad \sum (1-\frac{1}{n})^n; \quad \sum (e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+a}})\ a > 0$$

$$\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}; \quad \sum \frac{1}{n\cos^2 n}; \quad \sum \frac{1}{(\ln n)^n}; \quad \sum \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right); \quad \sum \frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}};$$

$$\sum \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}\ a \in \mathbb{R}_+^*; \quad \sum \frac{n+\cos(n)}{e^n+\sin(n)}; \quad \sum \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}; \quad \sum \frac{n^2}{(1+\delta)^n},\ |\delta| < \frac{1}{2}$$

$$\sum (\cos(n)+\sin(n))\, e^{-n}; \quad \sum e^{1/n} - (\cos(1/n)+\sin(1/n)); \quad \sum 3^{1/n} - 2^{1/n}; \quad \sum \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$

Exercice 2 (principale 2024)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = n! \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{a}{k}\right), \quad a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{n\pi, \ \ n \in \mathbb{N}\}.$$

1. On suppose que $a \neq 1$. En étudiant la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ préciser :
   (a) La nature de la série $\sum u_n$.
   (b) la nature de la suite u_n.
2. Si $a_n = \ln\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. Quelle est la nature de la série $\sum a_n$.
3. Plaçons nous dans le cas où $a = 1$. Donner alors la nature de la suite $\ln(u_n)$, et en déduire la nature de la suite (u_n).

Exercice 2 (Rattrapage 2023)

1. Étudier la convergence de la série numérique suivante : $\sum \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.
2. (a) En utilisant la technique de comparaison à une intégrale trouver un encadrement de la série numérique $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2+n^2}, a > 0$.

(b) trouver la limite $\lim\limits_{a \longrightarrow +\infty} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a}{a^2+n^2}$.

Exercice 3

On donne la somme : $\sum \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$. Calculer les sommes suivantes $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$, et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 4

En utilisant le critère de comparaison avec une intégrale la série :

$$\sum \frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}, \quad \text{avec } \beta \in \mathbb{R}.$$