

二. (12分) 某网站负责某项职业考试的网上报名工作, 该项考试共有A、B、C三门课程, 考生中报考这三门课程的考生所占的比例分别为35%、40%和25%, 而三门考试的报名费分别为30元、30元和50元. 设考生按速率为 λ 的泊松过程到该网站报名, 其中 $\lambda = 10$ 人/天, 若以 $X(t)$ 表示到第 t 天为止该网站收到的报名费总额, 试求 $X(t)$ 的期望 $EX(t)$ 、方差 $Var(X(t))$ 和矩母函数 $g_{X(t)}(\mu) = Ee^{\mu X(t)}$.

三. (15分) 市场上有 a 种牌号的牙膏, 记为 $\{1, 2, \dots, a\}$. 假定消费者相继使用的牙膏牌号构成马氏链, 选用第 i 种牌号牙膏的消费者继续使用第 i 种牌号牙膏的概率为 $p_{i,i}$, ($0 < p_{i,i} < 1, i = 1, 2, \dots, a$). 若他对原来使用的牙膏不满意, 就在其它 $a-1$ 种牙膏中任选一种, 即有: $p_{i,j} = \frac{1-p_{i,i}}{a-1}, (j \neq i)$,

(1) 试写出该马氏链的转移概率矩阵 P 并对马氏链作状态分类;

(2) 试求长时间后第 i 种牌号牙膏的市场占有率 $\pi_i, (i = 1, 2, \dots, a)$.

四. (15分) 设一质点在正整数点上做随机游动, 质点处于正整数点 i 时, 以概率 p_i 往右走一格, 概率 $1-p_i$ 退回到点1, $p_i = e^{-\frac{1}{i}}, i = 1, 2, \dots$. 记 X_n 表示时刻 n 质点所处的位置,

(1) 写出过程的状态空间, 说明该过程为Markov链.

(2) 讨论该各状态的周期性和常返性.

五. (16分) 设 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 是均值为0的平稳过程, 令 $Y(t) = X(t) \cos(\omega_0 t + \Theta)$, $-\infty < t < +\infty$, 其中 ω_0 是实常数, $\Theta \sim U[0, 2\pi]$, 且 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 与 Θ 相互独立, $R_X(\tau)$ 和 $S_X(\omega)$ 分别是 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 的协方差函数和功率谱密度. 试证:

(1) $\{Y(t), -\infty < t < +\infty\}$ 是平稳过程, 且协方差函数

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{2} R_X(\tau) \cos \omega_0 \tau.$$

(2) $\{Y(t), -\infty < t < +\infty\}$ 的功率谱密度为

$$S_Y(\omega) = \frac{1}{4} [S_X(\omega - \omega_0) + S_X(\omega + \omega_0)].$$

六. (12分) 已知平稳过程 $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 的均值函数为0, 谱密度函数为

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 + 7\omega^2 + 12}, -\infty < \omega < \infty$$

(1) 求 $X(t)$ 的协方差函数 $R(\tau)$;

(2) $X(t)$ 是否有均值遍历性? 为什么?