第三章 马尔可夫链

- 马尔可夫链的概念及转移概率
- 马尔可夫链的状态分类
- 状态空间的分解
- 遍历性与平稳分布

马尔可夫过程的四种类型

- 马尔可夫链
  - 时间、状态都离散
- 马尔可夫序列
  - 时间离散、状态连续
- 纯不连续马尔可夫过程
  - 时间连续、状态离散
- 连续马尔可夫过程（或扩散过程）
  - 时间、状态都连续

1 马尔可夫链的概念及转移概率

[定义] 设有随机过程 $\{X_n, n \in T\}$， 若对于任意的整数 $n \in T$ 和任意的 $i_0, i_1, \ldots, i_{n+1} \in I$， 条件概率满足

$$P\{X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n\}$$
$$= P\{X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n\}$$

则称 $\{X_n, n \in T\}$ 为马尔可夫链，简称马氏链。

马氏性（无后效性）

$$P\{X_{n+1}=i_{n+1}\mid X_0=i_0, X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n\}$$
$$=P\{X_{n+1}=i_{n+1}\mid X_n=i_n\}$$

马尔可夫链的 ***n*+1** 维联合概率分布：

$$P\{X_0=i_0, X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n\}$$
$$=P\{X_n=i_n\mid X_0=i_0, X_1=i_1,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1}\}$$
$$\cdot P\{X_0=i_0, X_1=i_1,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1}\}$$
$$=P\{X_n=i_n\mid X_{n-1}=i_{n-1}\}\cdot P\{X_0=i_0, X_1=i_1,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1}\}$$
$$\vdots$$
$$=P\{X_n=i_n\mid X_{n-1}=i_{n-1}\}\cdot P\{X_{n-1}=i_{n-1}\mid X_{n-2}=i_{n-2}\}\cdots$$
$$\cdot P\{X_1=i_1\mid X_0=i_0\}\cdot P\{X_0=i_0\}$$

马尔可夫链的统计特性由以下条件概率所决定：

$$P\{X_{n+1}=i_{n+1}\mid X_n=i_n\}$$

转移概率

[定义] 称条件概率

$$p_{ij}(n)=P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i\}$$

为马尔可夫链 $\{X_n, n \in T\}$ 在时刻 n 的一步转移概率，其中 $i, j \in I$，简称为转移概率。

- *$p_{ij}(n)$ 不仅与状态 i, j 有关，而且与时刻 n 有关。*
- *当 $p_{ij}(n)$ 与时刻 n 无关时，表示马尔可夫链具有平稳转移概率。*

齐次马尔可夫链

[定义] 若对任意的 $i, j \in I$，马尔可夫链 $\{X_n, n \in T\}$ 的转移概率 $p_{ij}(n)$ 与时刻 n 无关，则称马尔可夫链是齐次的，并记为 $p_{ij}(n)$ 为 p_{ij}。

一步转移概率矩阵

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

性质：

(1) $p_{ij} \geq 0,\ i,j \in I$

（随机矩阵）

(2) $\sum_{j\in I} p_{ij} = 1,\ i \in I$

n 步转移概率

[定义] 称条件概率

$$p_{ij}^{(n)} = P\{X_{m+n} = j \mid X_m = i\}, \quad (i, j \in I,\ m \geq 0,\ n \geq 1)$$

为马尔可夫链 $\{X_n, n \in T\}$ 的 n 步转移概率，并称

$$\mathbf{P}^{(n)} = \left(p_{ij}^{(n)}\right)$$

为马尔可夫链的 n 步转移矩阵。

规定：

$$p_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

n 步转移概率 $p_{ij}^{(n)}$ 的性质

[定理] 设 $\{X_n, n \in T\}$ 为马尔可夫链，则对于任意整数 $n \geq 0$，$0 \leq l < n$ 和 $i, j \in I$，n 步转移概率 $p_{ij}^{(n)}$ 具有下列性质：

$$\boxed{(1)\quad p_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(l)} p_{kj}^{(n-l)}} \longrightarrow \textit{C-K方程}$$

$$(2)\quad p_{ij}^{(n)} = \sum_{k_1 \in I} \cdots \sum_{k_{n-1} \in I} p_{ik_1} p_{k_1 k_2} \cdots p_{k_{n-1} j}$$

$$(3)\quad \mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{(n-1)}$$

$$(4)\quad \mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{n}$$

初始概率和绝对概率

初始概率：

$$p_j = P\{X_0 = j\}, \quad (j \in I)$$

绝对概率：

$$p_j(n) = P\{X_n = j\}, \quad (j \in I)$$

初始分布：

$$\{p_j\} = \{p_j\,,\; j \in I\}$$

绝对分布：

$$\{p_j(n)\} = \{p_j(n)\,,\; j \in I\}$$

初始概率向量：

$$\mathbf{P}^T(0) = \left(p_1, p_2, \cdots\right)$$

绝对概率向量：

$$\mathbf{P}^T(n) = \left(p_1(n), p_2(n), \cdots\right), \quad (n > 0)$$

绝对概率 $p_j(n)$ 的性质

[定理] 设 $\{X_n, n \in T\}$ 为马尔可夫链，则对于任意整数 $n \geq 1$ 和 $j \in I$，绝对概率 $p_j(n)$ 具有下列性质：

(1) $p_j(n) = \sum_{i \in I} p_i p_{ij}^{(n)}$

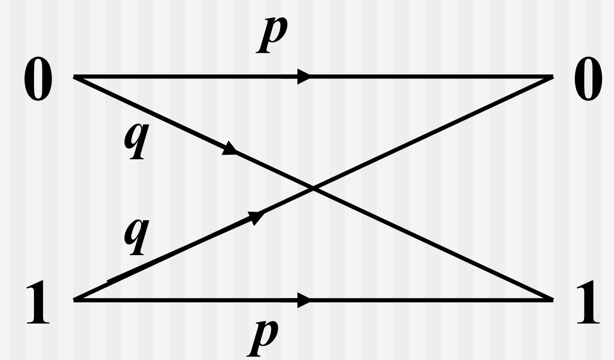
(2) $p_j(n) = \sum_{i \in I} p_i(n-1) \cdot p_{ij}$

(3) $\mathbf{P}^T(n) = \mathbf{P}^T(0) \cdot \mathbf{P}^{(n)}$

(3) $\mathbf{P}^T(n) = \mathbf{P}^T(n-1) \cdot \mathbf{P}$

马尔可夫链的几个简单例子

[例1] 二进制对称信道模型——是常用于表征通信系统的错误产生机制的离散无记忆信道模型。假设某级信道输入0，1数字信号后，其输出正确的概率为p，产生错误的概率为q，则该级信道输入状态和输出状态构成一个两状态的齐次马尔可夫链。



$$p_{ij}=\begin{cases} p, & i=j \\ q, & i\neq j \end{cases}$$

$$(i,j=0,1)$$

一步转移概率矩阵：

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}$$

二步转移概率矩阵：

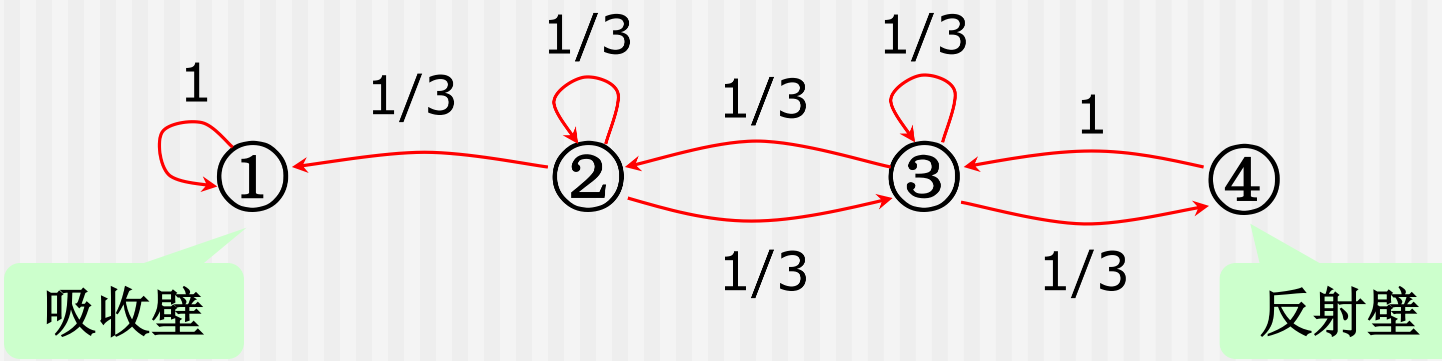
$$\mathbf{P}^{(2)}=\mathbf{P}^2=\begin{bmatrix} p^2+q^2 & 2pq \\ 2pq & p^2+q^2 \end{bmatrix}$$

[例2] 具有吸收壁和反射壁的随机游动

设质点在线段[1,4]上作随机游动。假设它只能在时刻 $n \in T$ 发生移动，且只能停留在1,2,3,4点上。当质点转移到2,3点时，它以1/3的概率向左或向右移动一格，或停留在原处。当质点移动到点1时，它以概率1停留在原处。当质点移动到点4时，它以概率1移动到点3。若以X_n表示质点在时刻 n 所处的位置，则$\{X_n, n \in T\}$是一个齐次马尔可夫链。

描述马氏链的三种方式

（1）状态转移图



（2）转移概率矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

（3）函数表达式 $\boldsymbol{p_{ij} = f(i, j)}$

[例3] 设 $\{ X_n , n\in T \}$ 是一个马尔可夫链，其状态空间 $I = \{a, b, c\}$，转移矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 3/5 & 2/5 & 0 \end{bmatrix}$$

求： (1) $P\{X_1 = b, X_2 = c, X_3 = a, X_4 = c | X_0 = c\}$;

(2) $P\{X_{n+2} = c | X_n = b\}$

解：

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 3/5 & 2/5 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) $P\{X_1 = b, X_2 = c, X_3 = a, X_4 = c | X_0 = c\}$

$= P\{X_0 = c, X_1 = b, X_2 = c, X_3 = a, X_4 = c\} / P\{X_0 = c\}$

$= P\{X_4 = c | X_3 = a\} \cdot P\{X_3 = a | X_2 = c\} \cdot P\{X_2 = c | X_1 = b\}$

$\cdot P\{X_1 = b | X_0 = c\} \cdot P\{X_0 = c\} / P\{X_0 = c\}$

$= P_{ac} \cdot P_{ca} \cdot P_{bc} \cdot P_{cb}$

$= \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{50}$

(2) $P\{X_{n+2} = c | X_n = b\}$

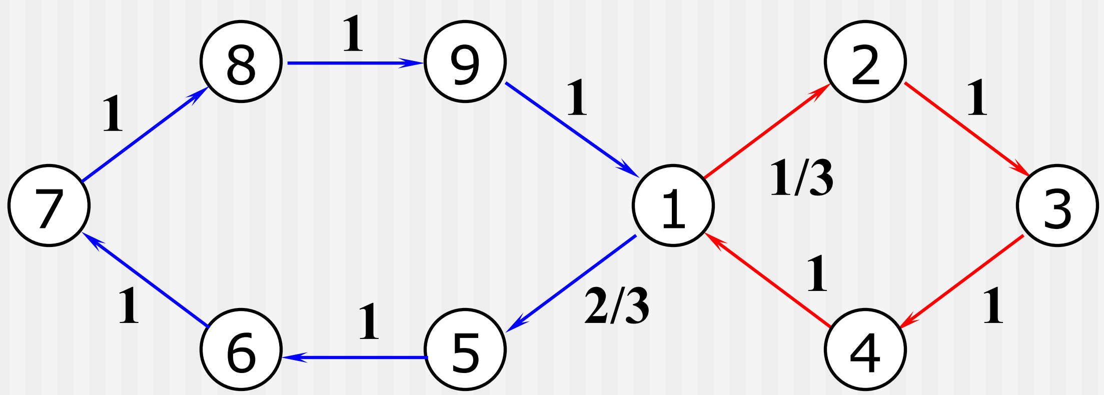
$= P_{bc}^{(2)} = \frac{1}{6}$

二步转移概率矩阵：

$$P^{(2)} = P^2 = \begin{bmatrix} \frac{17}{30} & \frac{9}{40} & \frac{5}{24} \\ \frac{8}{15} & \frac{3}{10} & \frac{1}{6} \\ \frac{17}{30} & \frac{3}{20} & \frac{17}{90} \end{bmatrix}$$

2 马尔可夫链的状态分类

设 $\{X_n, n>0\}$ 是齐次马尔可夫链，其状态空间 $I=\{0, 1, 2, \ldots\}$，转移概率是 p_{ij}， $i,j\in I$，初始分布为 $\{P_j, j\in I\}$。



（1）可达关系与互达关系

[定义] （1）若存在 $n>0$, 使得 $p_{ij}^{(n)}>0$，则称自状态 i 可达状态 j，并记为 $i\to j$。

（2）若 $i\to j$，且 $j\to i$，则称状态 i 与状态 j 互达，并记为 $i\leftrightarrow j$。

[定理1] 若 $i\to j$，且 $j\to k$，则 $i\to k$。

若 $i\leftrightarrow j$，且 $j\leftrightarrow k$，则 $i\leftrightarrow k$。

传递性

[定理2] 若 $i\leftrightarrow j$，则

（1）i 与 j 同为常返或非常返；

（2）i 与 j 同为正常返或零常返；

（3）i 与 j 有相同的周期。

互达关系的状态是同一类型

3 状态空间的分解

[定义] 状态空间 I 的子集 C，若对于任意 $i \in C$ 及 $k \notin C$ 都有 $p_{ik} = 0$，则称子集 C 为（随机）闭集。

若闭集 C 的状态互达，则称 C 为不可约的。

若马氏链$\{X_n\}$的状态空间是不可约的，则称该马氏链为不可约。

闭集的充要条件

[定理] C 是闭集的充要条件是:

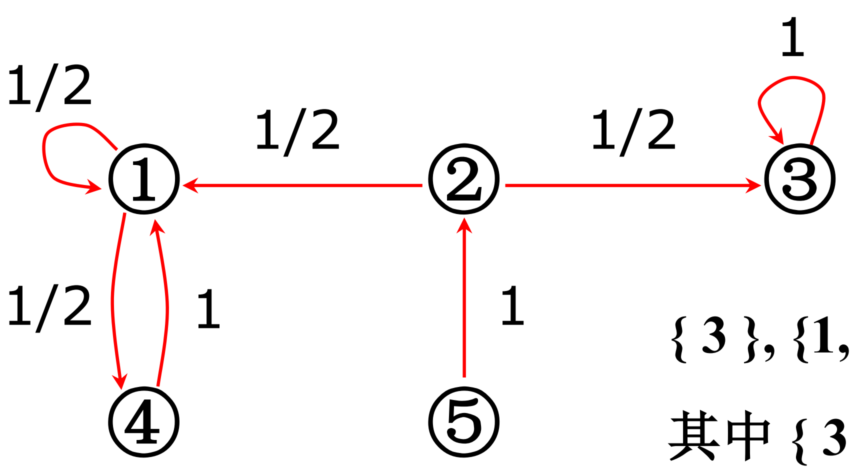
对于任意 $i \in C$ 及 $k \notin C$ 都有 $p_{ik}^{(n)} = 0$，$n \geq 1$。

状态 i 为吸收态（$p_{ii} = 1$）$\Leftrightarrow$ 单点集 $\{i\}$ 是闭集。

[例4] 设马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间 $I=\{1,2,3,4,5\}$，转移矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

试分析其闭集及不可约性。



$\{3\}, \{1,4\}, \{1,4,3\}, \{1,4,2,3\}$ 都是闭集；

其中 $\{3\}$ 和 $\{1,4\}$ 是不可约闭集；

（2）状态的周期性

[定义] 如集合 $\{ n : n \geq 1, p_{ii}^{(n)} > 0 \}$ 非空，则称该集合的最大公约数 $d = d(i) = \mathrm{G.C.D}\{ n : p_{ii}^{(n)} > 0 \}$ 为状态 i 的周期。

如 $d > 1$ 就称 i 为周期的；如 $d = 1$ 就称 i 为非周期的。

[定理] 如果状态 i 的周期为 d，则存在正整数 M，对一切 $n \geq M$，有 $p_{ii}^{(nd)} > 0$ 。

（3）状态的常返性

首达概率——状态 i 经 n 步首次到达状态 j 的概率：

$$f_{ij}^{(n)} = P\{X_{m+n} = j,\ X_{m+v} \neq j, 1 \leq v \leq n-1 \,|\, X_m = i\},\quad n \geq 1$$

$$f_{ij}^{(0)} = 0$$

系统从状态 i 出发，经有限步迟早会（首次）到达状态 j 的概率：

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \qquad 0 \leq f_{ij}^{(n)} \leq f_{ij} \leq 1$$

常返性的定义

1) 若 $f_{ii}=1$，则称状态 i 是常返的；若 $f_{ii}<1$，则称状态 i 是非常返的（或瞬过的）。

2) 称期望值 $\mu_i=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot f_{ii}^{(n)}$ 为状态 i 的平均返回时间。

3) 若 $\mu_i<\infty$，则称常返态 i 是正常返的；
若 $\mu_i=\infty$，则称常返态 i 是零常返的。

4) 非周期的正常返态称为遍历态。

$p_{ij}^{(n)}$ 与 $f_{ij}^{(n)}$ 的关系

[定理] 对任意状态 $i, j \in I$ 及 $1 \le n < \infty$，有

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(n-k)} p_{jj}^{(k)}$$

上式可用来求从状态 i 经 n 步首次到达状态 j 的概率：

$$f_{ij}^{(n)} = p_{ij}^{(n)} - \sum_{k=1}^{n-1} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$$

常返性的判别（根据$p_{ij}^{(n)}$）

[定理]（1）状态 i 常返的充要条件为 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$

状态 i 非常返的充要条件为 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}} < \infty$

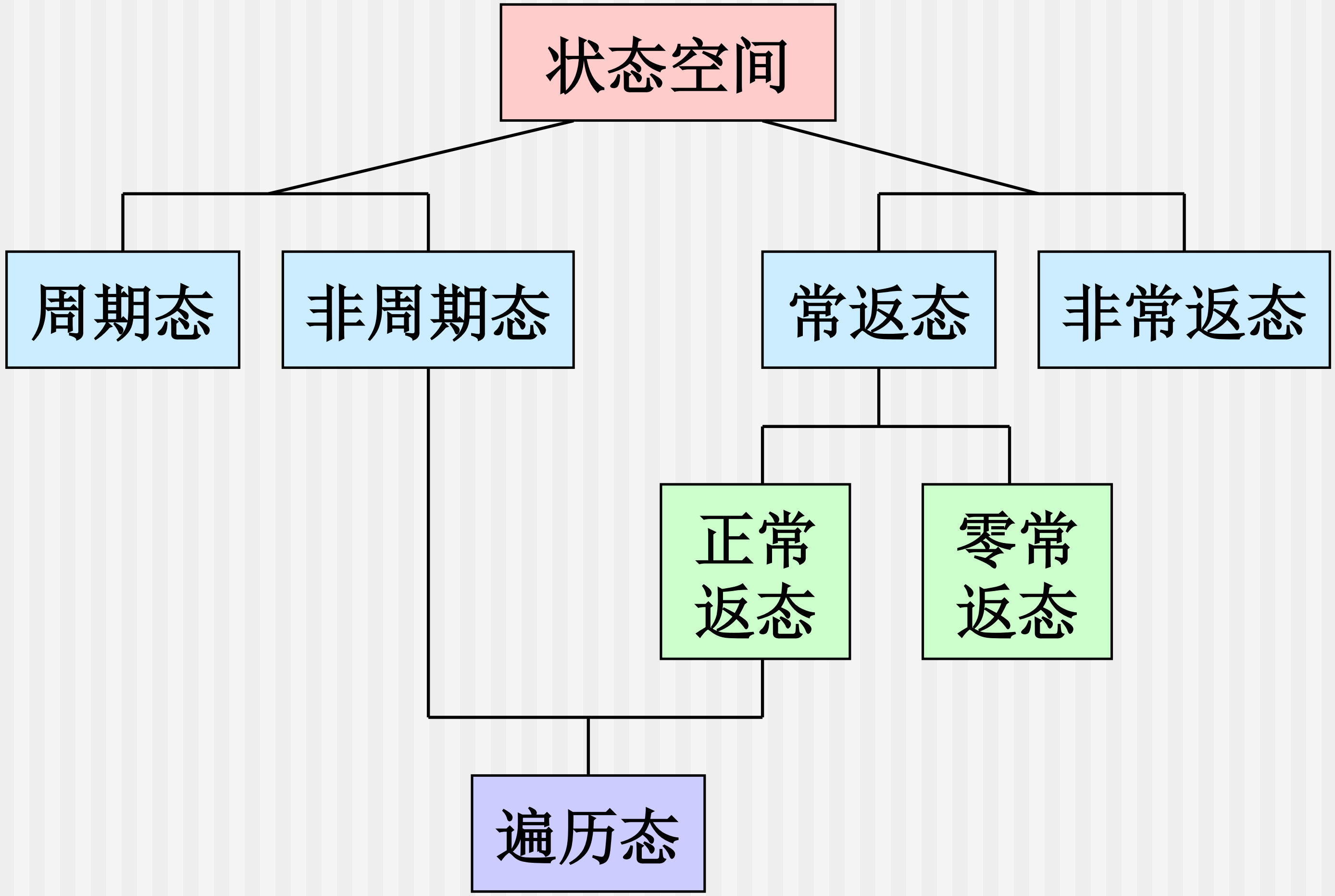
（2）若状态 i 是常返态，则 i 是零常返 $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$

i 是遍历态 $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 1/\mu_i > 0$

（3）若 i 是周期为 d 的常返态，则 $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_i}$

若 i 是非常返态，则 $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$

马氏链状态分类图



状态分类的判别

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="2">常返态</td><td rowspan="2">非常返态</td></tr>
<tr><td>零常返态</td><td>正常返态</td></tr>
<tr><td rowspan="2">转移概率
$p_{ij}^{(n)}$</td><td colspan="2">$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$</td><td rowspan="2">$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$</td></tr>
<tr><td>$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$</td><td>$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} > 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">首达概率
$f_{ij}^{(n)}$</td><td colspan="2">$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = f_{ii} = 1$</td><td rowspan="2">$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = f_{ii} < 1$</td></tr>
<tr><td>$\sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} = \mu_i = \infty$</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} = \mu_i < \infty$</td></tr>
</table>

状态空间的分解

[定理] 任一马氏链的状态空间 I，可唯一地分解成若干个互不相交的子集 $D, C_1, C_2, \dots$ 之和，

使得 $$I = D \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots$$

(1) D 由全体非常返态组成；

(2) 每个 C_n 是常返态组成的不可约闭集；

(3) C_n 中的状态同类（全为正常返或零常返），它们有相同的周期，且 $f_{jk} = 1$，$j, k \in C_n$. ($j \leftrightarrow k$)

称 C_n 是基本常返闭集

[例5] 设马尔可夫链的状态空间 $I = \{0, 1, 2, \ldots\}$，其转移概率为

$$p_{00} = \frac{1}{2},\ p_{i,i+1} = \frac{1}{2},\ p_{i0} = \frac{1}{2},\ i \in I$$

分析各状态的类型。

解： (根据$p_{ij}^{(n)}$来判断)　　先考查状态0，

$$p_{00}^{(0)} = 1,\quad p_{00}^{(1)} = \frac{1}{2},\quad p_{00}^{(2)} = \frac{1}{2},$$ 由归纳法可知，$p_{00}^{(n)} = \frac{1}{2}$，

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)} = 1 + \frac{n}{2} = \infty,$$ ⇨ 状态0为常返态

$$\lim_{n\to\infty} p_{00}^{(n)} = \frac{1}{2} > 0$$ ⇨ 状态0为正常返态

可见状态0是非周期的，因而状态0也是遍历的。

因为 其它$i \leftrightarrow 0$，故所有 i 也是遍历的。

几个结论

- 若马氏链有一个零常返态，则必有无限多个零常返态。
- 有限状态的马氏链，不可能含有零常返态，也不可能全是非常返态。
- 不可约的有限状态马氏链必为正常返态。

4 遍历性与平稳分布

$p_{ij}^{(n)}$ 的极限：

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 0, & j\text{为非常返或零常返} \\ 1/\mu_j, & j\text{为遍历态} \\ \text{不确定}, & j\text{为周期正常返} \end{cases}$$

遍历性

[定义] 设齐次马氏链$\{X_n, n \geq 0\}$的状态空间为 I，若对于一切 $i, j \in I$，存在不依赖于 i 的极限，

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = p_j\,(>0) = \frac{1}{\mu_j}$$

则称该马氏链具有遍历性，并称 p_j 为状态 j 的稳态概率。

$\Updownarrow$

不可约、非周期、正常返

平稳分布

[定义] 称绝对概率分布 $\{\pi_j, j \in I\}$ 为马氏链的平稳分布，

若它满足

$$\begin{cases} \pi_j = \sum_{i \in I} \pi_i p_{ij} \\ \sum_{i \in I} \pi_i = 1, \ \pi_j \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \pi_j = \sum_{i \in I} \pi_i p_{ij}^{(n)}$$

π_j 与时间推移 n 无关。

在任意时刻，系统处于同一状态的概率是相同的。

$$\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}} = (\pi_1, \pi_2, \cdots), \quad \mathbf{P} = (p_{ij}),$$

$$\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{P}$$

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\pi}$$

平稳分布的判别

[定理] 不可约、非周期马氏链是正常返的充要条件：

存在平稳分布 $\{\pi_j, j \in I\}$，且此平稳分布就是极限分布 $\{1/\mu_j,\ j \in I\}$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j} = \pi_j$$

遍历性 ⇨ 平稳分布

[推论1] 不可约、非周期、有限状态的马氏链必存在平稳分布。

[推论2] 若不可约马氏链的所有状态是非常返或零常返的，则不存在平稳分布。

[推论3] 若 $\{\pi_j, j \in I\}$ 是不可约非周期马氏链的平稳分布，则

$$\lim_{n\to\infty} p_j(n) = \frac{1}{\mu_j} = \pi_j$$

[例6] 设马尔可夫链的转移概率矩阵为**P**，求马氏链的平稳分布及各状态的平均返回时间。

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.05 & 0.05 & 0.9 \end{bmatrix}$$

解：因为该马氏链是不可约的非周期有限状态，所以存在平稳分布。

$$\begin{cases} \pi_1 = 0.7\pi_1 + 0.1\pi_2 + 0.05\pi_3 \\ \pi_2 = 0.1\pi_1 + 0.8\pi_2 + 0.05\pi_3 \\ \pi_3 = 0.2\pi_1 + 0.1\pi_2 + 0.9\pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

平稳分布为： $\pi_1 = 0.1765,\ \pi_2 = 0.2353,\ \pi_3 = 0.5882$

各状态的平均返回时间分别为：

$$\mu_1 = \frac{1}{\pi_1} = 5.67,\ \mu_2 = \frac{1}{\pi_2} = 4.25,\ \mu_3 = \frac{1}{\pi_3} = 1.70$$

7. 应用的例子

例 1. 市场预测

某地区有 1600 户居民，只有甲、乙、丙三个工厂的某产品在该地区销售。据调查，

8 月份购买甲、乙、丙三个工厂产品的户数分别为 480 、 320 、 800 ，

9 月份调查发现，原购买

原购买甲产品的有 48 户转买乙产品，

有 96 户转买丙产品；

原购买乙产品的有 32 户转买甲产品，

有 64 户转买丙产品；

原购买丙产品的有 64 户转买甲产品，

有 32 户转买乙产品。

频数转移矩阵为

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 336 & 48 & 96 \\ 32 & 224 & 64 \\ 64 & 32 & 704 \end{pmatrix}$$

分别用 1、 2、 3 表示甲、乙、丙三个工厂的某产品。

用频率估计概率，得转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & .2 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.08 & 0.04 & 0.88 \end{pmatrix}$$

初始概率分布 (初始市场占有率) 为

$$\mathbf{p}_0 = (p_0(1), p_0(2), p_0(3)) = (\frac{480}{1600}, \frac{320}{1600}, \frac{800}{1600})$$

$$\mathbf{p}_0 = (p_0(1), p_0(2), p_0(3)) = (0.3, 0.2, 0.5)$$

9 月份市场占有率为

$$\mathbf{p}_1 = (p_1(1), p_1(2), p_1(3))$$

$$= \mathbf{p}_0\mathbf{P}$$

$$= (0.3, 0.2, 0.5)\begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & .2 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.08 & 0.04 & 0.88 \end{pmatrix}$$

$$= (0.27, 0.19, 0.54)$$

12 月份市场占有率为

$$\mathbf{p}_4 = (p_4(1), p_4(2), p_4(3))$$

$$= \mathbf{p}_0 \mathbf{P}^4$$

$$= (0.3, 0.2, 0.5) \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & .2 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.08 & 0.04 & 0.88 \end{pmatrix}^4$$

$$= (0.2319, 0.1698, 0.5983)$$

思考：一个重要的问题

齐次马尔可夫链是否存在平稳分布？

如果存在，是否唯一？

如何计算？

按照以下情况分别讨论

- 不可约的遍历链
- 不可约的正常返的马氏链
- 一般的齐次马氏链

➤齐次马尔可夫链是不可约的遍历链

设X=$\{X_n, n=0,1,\cdots\}$是不可约的遍历链，则X存在唯一的极限分布$\{\pi_j = \frac{1}{\mu_{jj}}, j \in S\}$.

且此时的极限分布就是平稳分布.

平稳分布可通过求解下列方程组得到

$$\begin{cases} \pi_j = \sum_{k \in S} \pi_k p_{kj}, \quad j \in S \\ \sum_{k \in S} \pi_k = 1 \end{cases}$$

例 1 设状态空间为S={0,1,2,}的马尔可夫链，其一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

试分析它的极限分布，平稳分布是否存在？并计算

例2 设齐次马尔可夫链的状态空间S={0,1,2,3,4},其一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

分析平稳分布存在？并计算

➢齐次马尔可夫链是不可约的正常返链

定理6.4.4 设 $X=\{X_n, n=0,1,\cdots\}$是不可约齐次马氏链其状态空间S中的每个状态都是正常返状态.

则X有唯一的平稳分布：$\{\pi_j=\frac{1}{\mu_{jj}}, j\in S\}$.

平稳分布通过求解方程组

$$\begin{cases} \pi_j=\sum_{k\in S}\pi_k p_{kj}, \quad j\in S \\ \sum_{k\in S}\pi_k=1 \end{cases}$$

➢一般齐次马尔可夫链X

定理6.4.5 设X的状态空间$S = D \cup C_0 \cup C_1 \cup \cdots$ 其中D是非常返状态集，C_0是零常返状态集，$\boldsymbol{C_m (m = 1, 2, \cdots)}$ 是正常返状态的不可约闭集,记$\boldsymbol{H = \bigcup_{k \geq 1} C_k}$，则

（1）X不存在平稳分布的充要条件是H=Φ

（2）X存在唯一平稳分布的重要条件是只有一个正常返的不可约闭集。

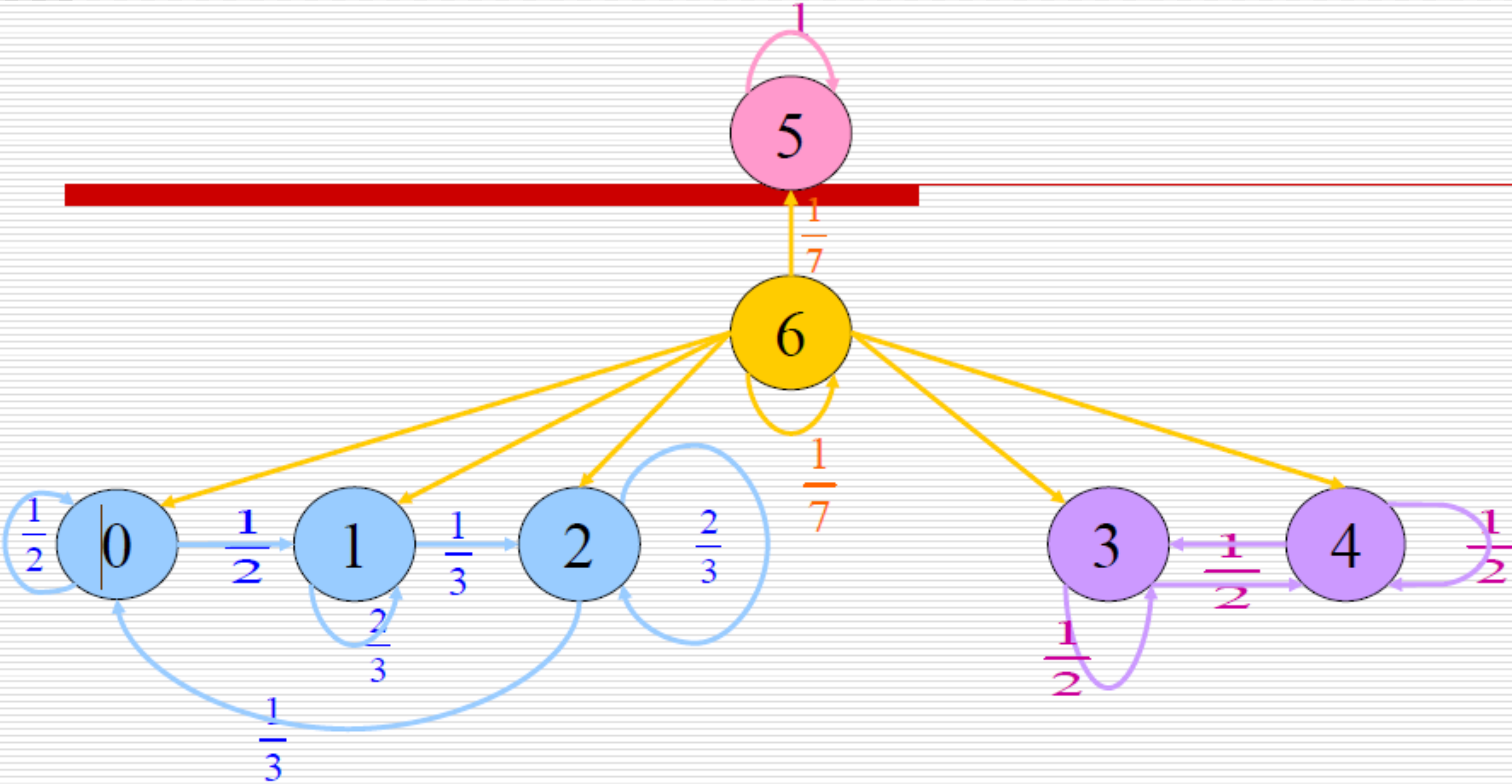
（3）X存在无穷多个平稳分布充要条件是至少存在两个以上正常返的不可约闭集。

例3 设有状态空间S={0,1,2,3,4,5,6}的齐次马尔可夫链，其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

(1)试对S进行分类，并说明各状态类型

(2) 求平稳分布，其平稳分布是否唯一？为什么？



(1) $S = D \cup C_1^+ \cup C_2^+ \cup C_3^+$

$$= \{6\} \cup \{0,1,2\} \cup \{3,4\} \cup \{5\}$$

由(1)知,该链有三个不同的正常返不可约闭集

所以平稳分布不唯一

三个闭集对应的转移概率矩阵分别为

$$P_1=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \quad P_2=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad P_3=(1)$$

解方程组

$$\begin{cases} \pi^{(1)}=\pi^{(1)}P_1 \\ \pi_1^{(1)}+\pi_2^{(1)}+\pi_3^{(1)}=1 \end{cases} \quad \begin{cases} \pi^{(2)}=\pi^{(2)}P_2 \\ \pi_1^{(2)}+\pi_2^{(2)}=1 \end{cases} \quad \begin{cases} \pi^{(3)}=\pi^{(3)}P_3 \\ \pi_1^{(3)}=1 \end{cases}$$

$$\pi^{(1)}=\{\frac{2}{8},\frac{3}{8},\frac{3}{8}\} \quad \pi^{(2)}=\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\} \quad \pi^{(3)}=\{1\}$$

平稳分布为 $\pi=\{\frac{2\lambda_1}{8},\frac{3\lambda_1}{8},\frac{3\lambda_1}{8},\frac{\lambda_2}{2},\frac{\lambda_2}{2},\lambda_3,0\}$