随机过程

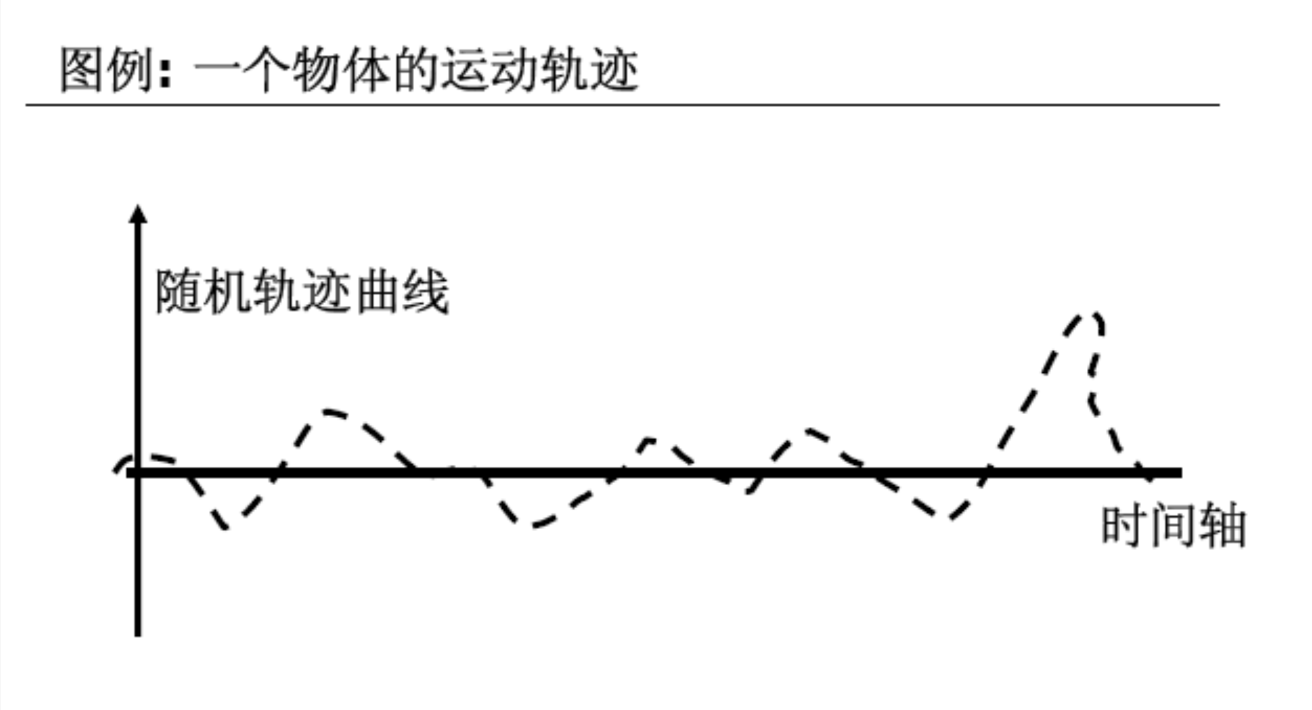
所用教材：

随机过程(第三版) 方兆本,缪柏其 科学出版社

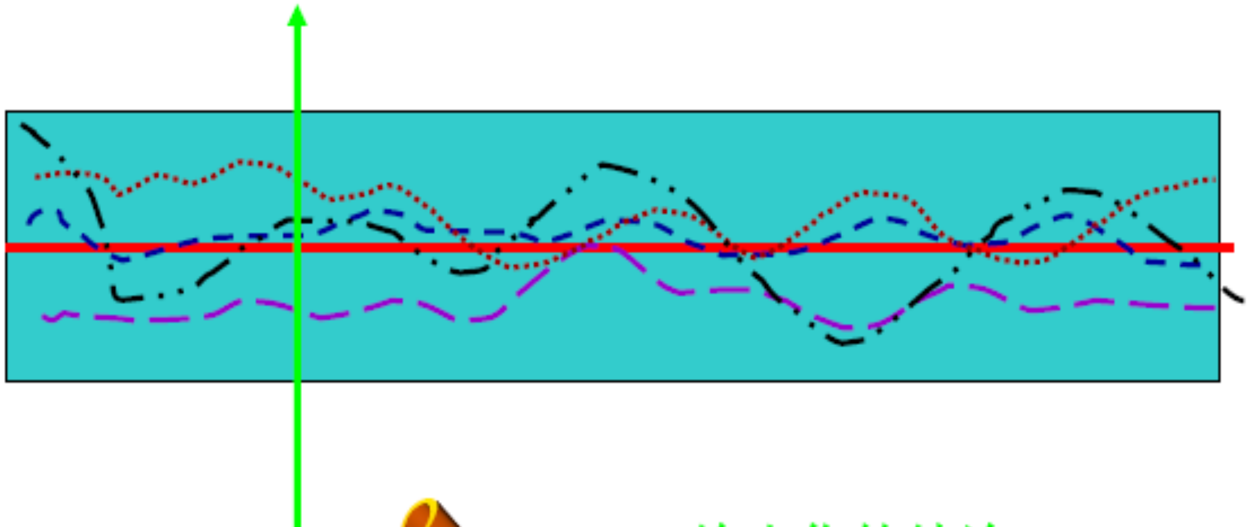
考核方式：

期末考试70%+平时作业30%

第一章 引论



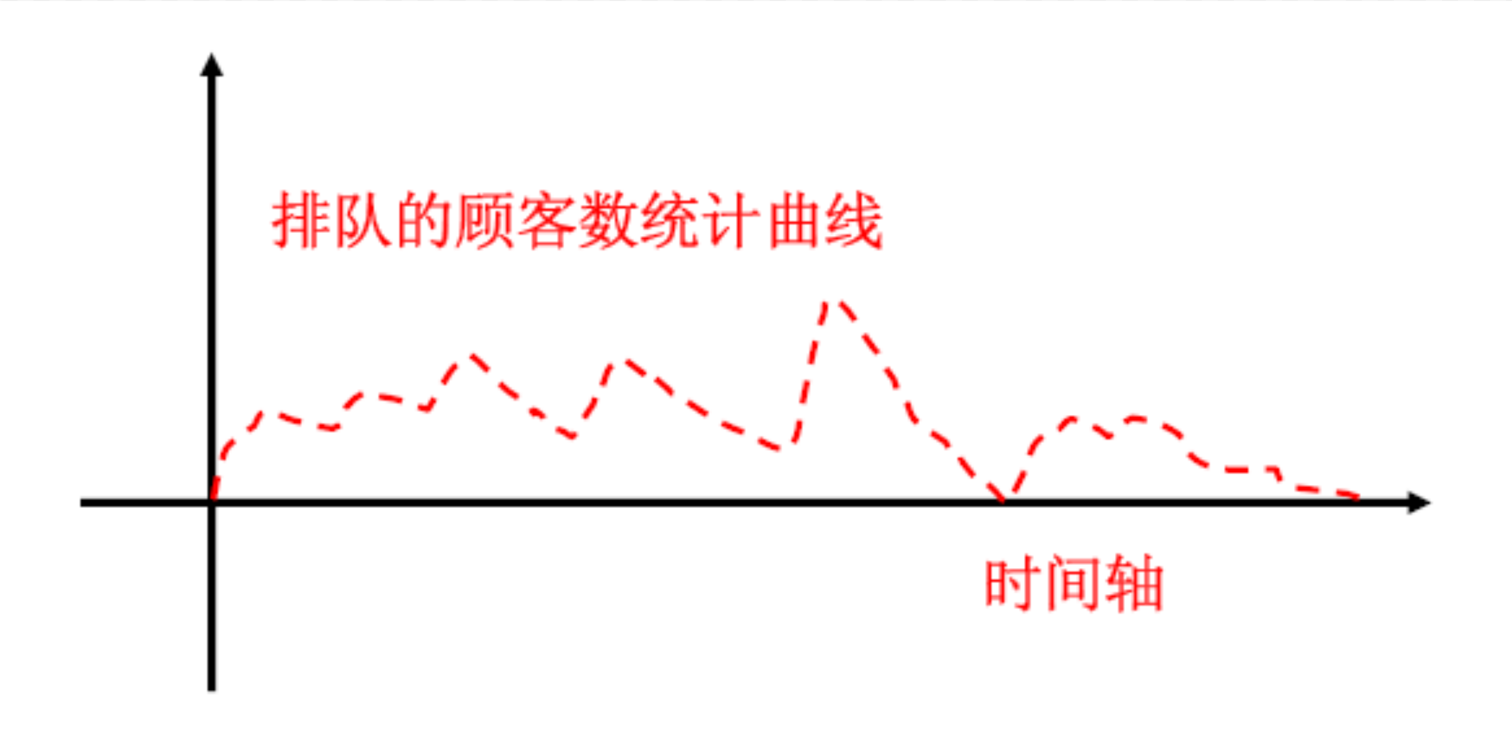
随机运动轨迹



观察到什么

给出你的结论

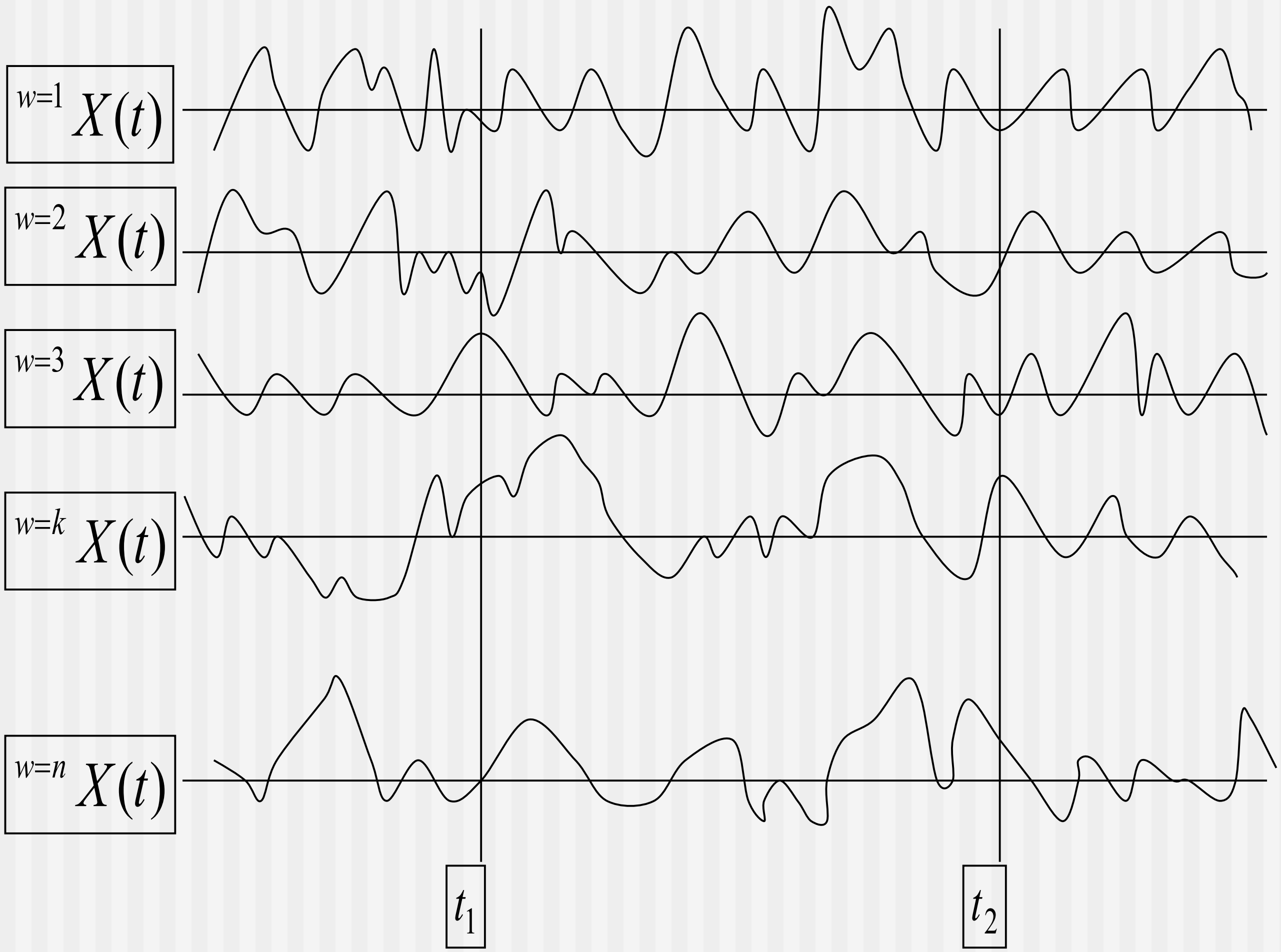
超市排队问题



随机过程的基本特点

随机变量：某一变量以一定的概率取一确定的值，通常这种变量称为随机变量。

随机过程：在随机过程的定义中引入了空间的概念。如果空间取为时间域，那么它在每一个时刻都呈现为一个随机变量；如果从时间域上看，它是时间t的一个函数，反映了随时间的变化过程。



w=1 X(t)
w=2 X(t)
w=3 X(t)
w=k X(t)
w=n X(t)
t1
t2

一、随机过程的定义

定义1： 设E是一随机实验，样本空间为$\Omega=\{\omega\}$，参数$T\subset(-\infty,+\infty)$，如果对每个$\omega\in\Omega$，总有一个确定的时间函数$X(\omega,t)$与之对应，这样对于所有的$\omega\in\Omega$，就得到一族时间t的函数，我们称此族时间t的函数为随机过程，而族中每一个函数称为这个随机过程的样本函数。

定义2： 设E是一随机实验，样本空间为$\Omega=\{\omega\}$，参数$T\subset(-\infty,+\infty)$，如果对任意$t\in T$，有一定义在$\Omega$上的随机变量$X(\omega,t)$与之对应，则称$\{X(\omega,t),\ t\in T\}$为随机过程，简记为$\{X(t), t\in T\}$或$\{X(t)\}$，也可记为$X(t)$.

注释： (1) 随机过程$\{X(t),t\in T\}$是定义在$\Omega\times T$上的二元函数，因此可以从两个角度去理解，因而有如上的两个定义. 在理论分析往往用随机变量族的描述方式，在实际测量和处理中往往采用样本函数族的描述方式.

(2)通常将随机过程$\{X(t),\ t\in T\}$解释为一个物理系统，$X(t)$表示系统在时刻t所处的状态，$X(t)$的所有可能状态所构成的集合称为状态空间，记为I. 对于给定的$t_0\in T$, 及$x\in I$, $X(t_0)=x$ 表示：在时刻t_0系统处于状态 x.

(3)从定义2的角度上看，随机过程是有限维随机变量的推广.

例1.1 英国植物学家Brown注意到漂浮在液面上的微小粒子不断进行不规则的运动,这种运动叫做**Brown运动**.它是一个随机过程.

Brown运动是分子大量随机碰撞的结果. 若记(x_t,y_t)为粒子t时刻在平面坐标上的位置,则它是平面上的Brown运动.

例1.2 若某人在一个直线格子点上，从原点出发进行行走，规则如下：掷一枚硬币，若正面向上则前进一个格子；若反面向上则后退一个格子．以X(t)表示他在t时刻所在的位置，则X(t)就是一种直线上的**随机游动．**

例1.3 到达总机交换台的呼叫次数为**Poisson过程**.每次呼叫是相互独立的,而间隔时间服从指数分布.交换台在同一时间只能接通K个呼叫.人们常要了解在某一时刻的排队长度以及呼叫的平均等待时间.这是一种**排队模型**. 该模型可以应用于对超市、公交车站的管理或服务研究。

例1.4 流行病学的研究中有如下模型：在时刻0时易感人群大小为X(0), Y(0)是已受传染的人数.假定易感人群被传染的概率为p, 则经过一段传染周期后(记为单位时间)X(0)中有X(1)没有染上病而Y(1)却受到传染.传染过程一直蔓延到再没有人会染上这种流行病时停止.于是

$$X(t+1)=X(t)-Y(t+1)$$

且当时$j \le i$有

$$P\{Y(t+1)=j \mid X(t)=i\}=C_i^{i-j}p^j(1-p)^{i-j}$$

{X(t), t=1,2,⋯}就是以上式为状态转移概率的Markov过程.

例1.5 记$X(t)$为时刻t的商品价格.若$X(t)$适合线性模型

$$X(t)+\alpha_1 X(t-1)+\alpha_2 X(t-2)+\cdots+\alpha_p X(t-p)$$
$$=Z(t)+\beta_1 Z(t-1)+\cdots+\beta_q Z(t-q)$$

其中α_k, β_k为实参数, $Z(t)$为独立同分布的不可观测的随机变量,则$X(t)$服从ARMA模型——**自回归滑动平均模型**. 这是在经济预测中十分有用的时间序列模型.

例1.6 (热噪声电压) 电子元件或器件由于内部微观粒子(如电子)的随机热骚动所引起的端电压称为热噪声电压，在无线电通讯技术中，接收机在接收信号时，机内的热噪声电压要对信号产生持续的干扰，为要消除这种干扰(假设没有其他干扰因素)，就必须考虑热噪声电压随时间变化的过程，现以电阻的热噪声电压为例说明这种变化过程的描述方法，我们通过某种装置对电阻两端的热噪声电压进行长时间的测量，并把结果记录下来，作为一次试验结果，便得到一个电压-时间函数(即电压关于时间t的函数) $V_1(t)$,如图.

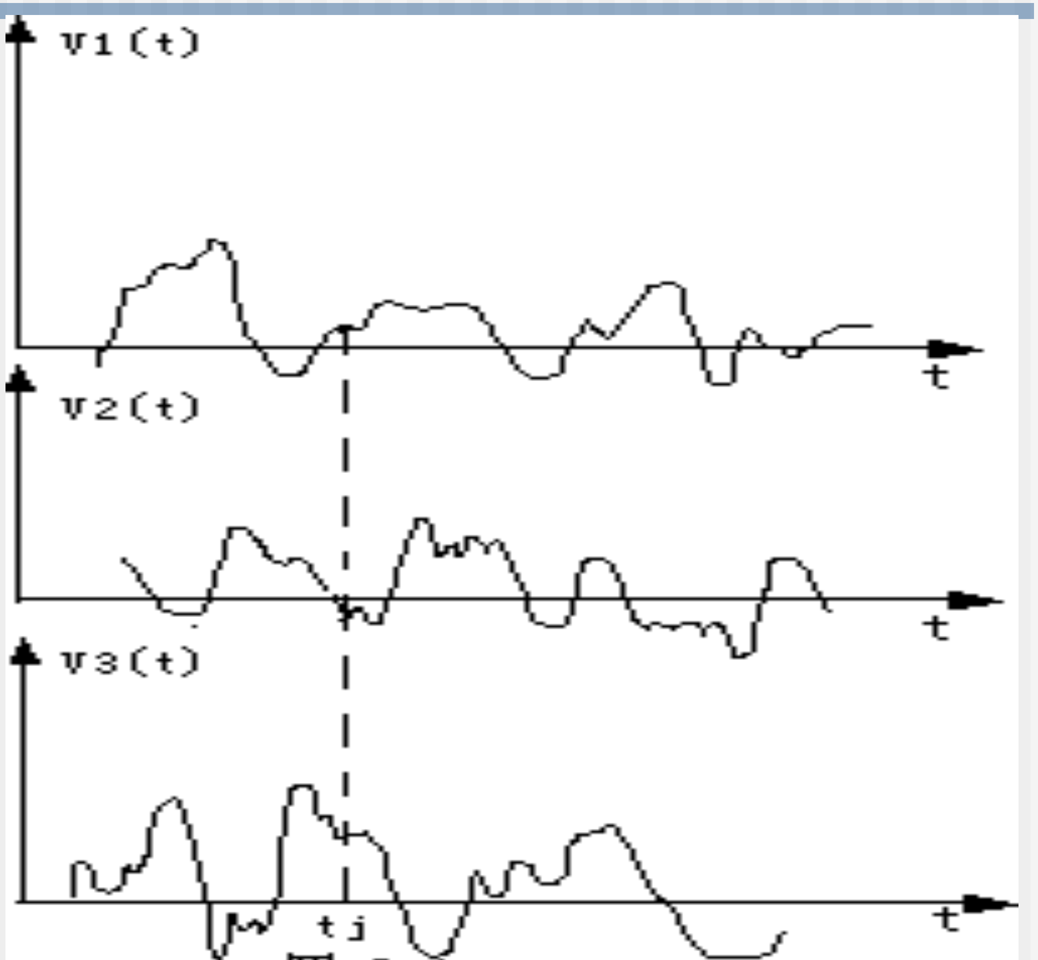


图 6-1

二、随机过程的分类

1、按状态空间I和时间是可列集还是连续集分类：

(1) 连续型随机过程：T是连续集，且$\forall t\in T$，$X(t)$ 是连续型随机变量，则称过程$\{X(t), t\in T\}$为连续型随机过程.

(2) 离散型随机过程：T是连续集，且$\forall t\in T$，$X(t)$是离散型随机变量，则称过程$\{X(t), t\in T\}$为离散型随机过程.

(3) 连续型随机序列：T是可列集，且$\forall t\in T$，$X(t)$是连续型随机变量，则称过程$\{X(t), t\in T\}$为连续型随机序列.

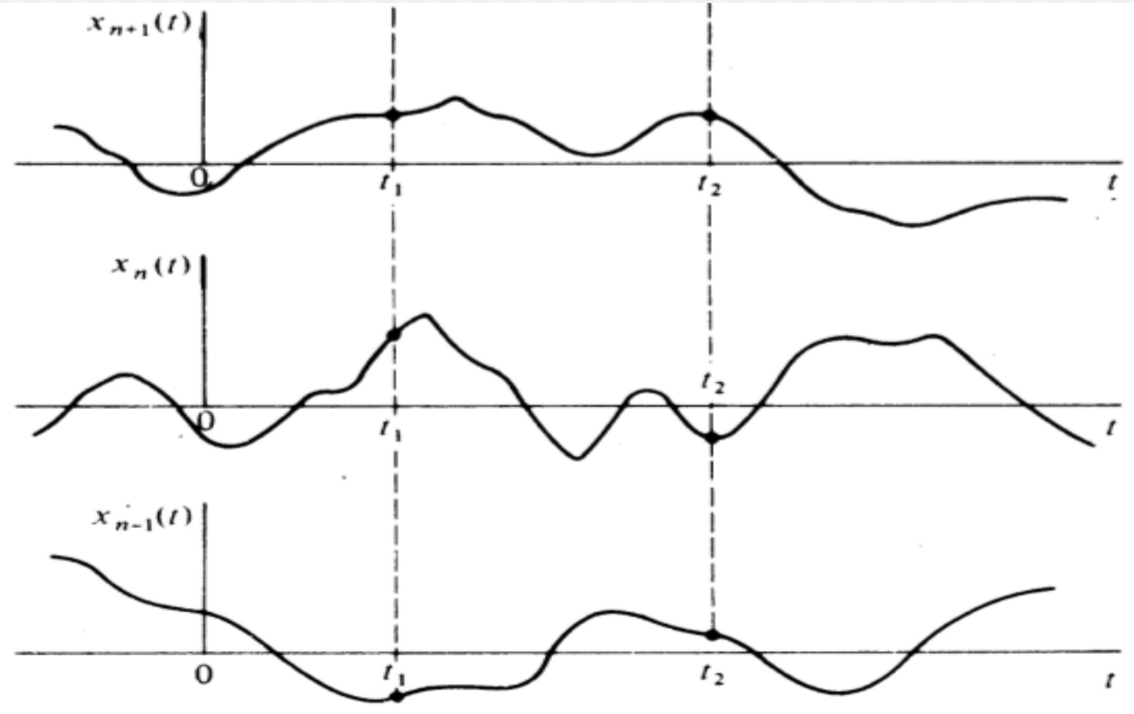
(4) 离散型随机序列：T是可列集，且$\forall t \in T$，$X(t)$为离散型随机变量，则称过程$\{X(t),\ t \in T\}$为离散型随机序列.通常T取为$T=\{0,1,2\cdots\}$或$T=\{0,\pm 1,\pm 2\cdots\}$，此时随机序列常记成$\{X_n, n=0,1,\cdots\}$或$\{X_n, n\geq 0\}$.

2、按分布特性分类：

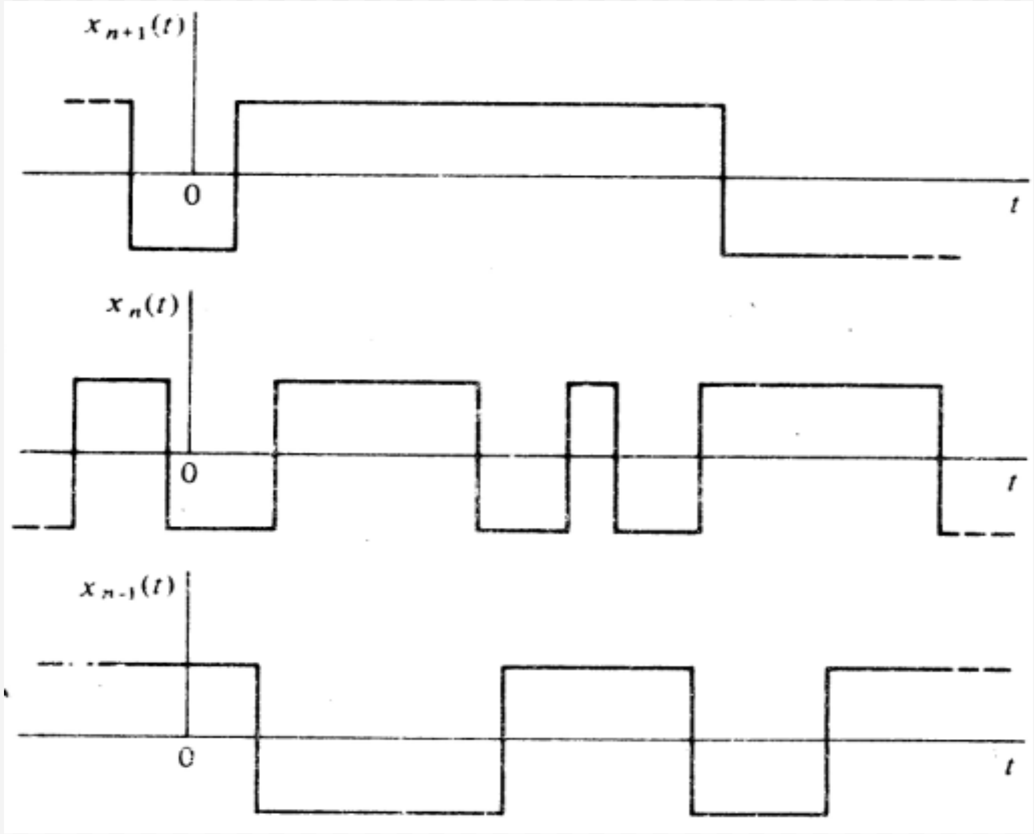
依照过程在不同时刻状态的统计依赖关系分类：独立增量过程，马尔可夫过程，平稳过程等.

通常我们可以根据随机变量X(t)在时间和状态上的类型区分随机过程的类型。

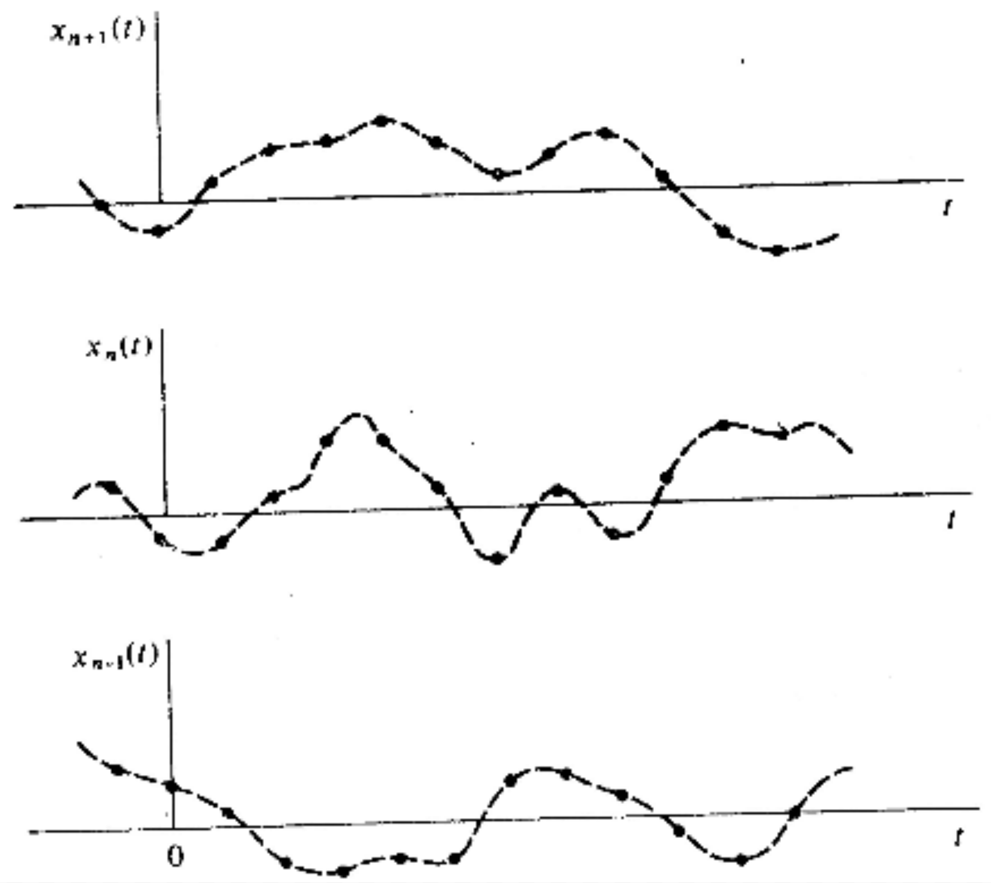
在时间和状态上都连续 ⟹ 连续型随机过程



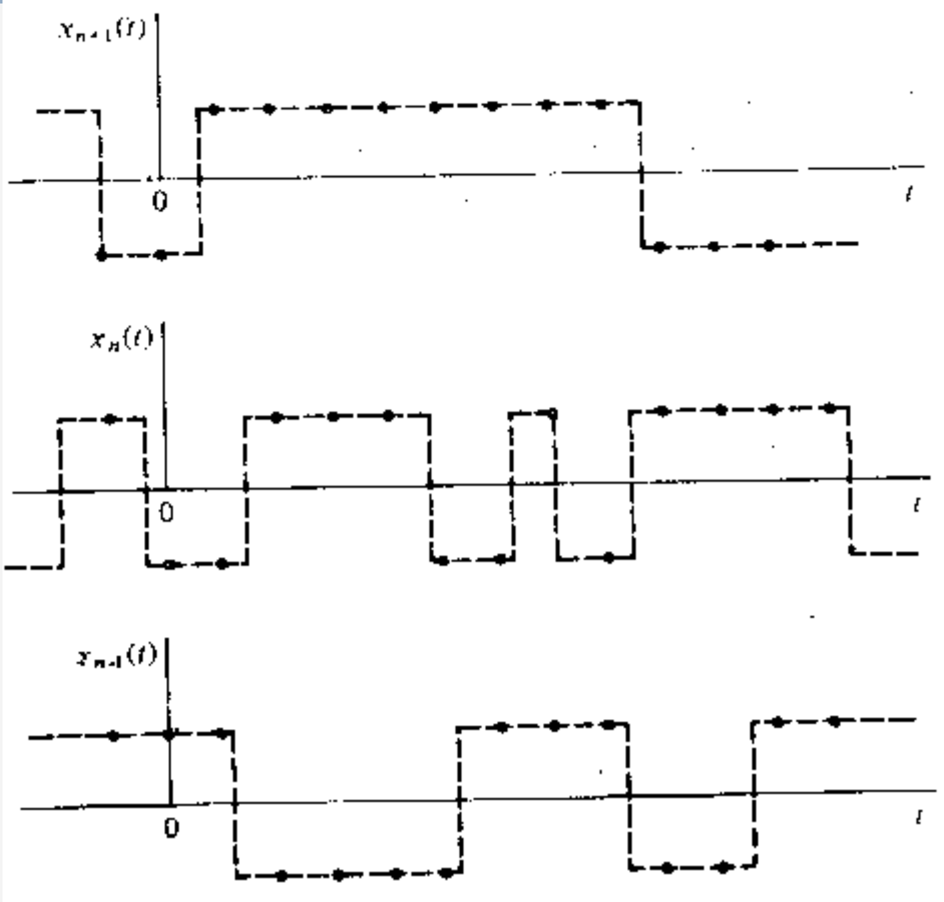
时间上连续，状态上离散 ⟶ 离散型随机过程



时间上离散，状态上连续 ⟹ 连续型随机序列



时间上离散，状态上离散 ⟹ 离散型随机序列



三、随机过程的概率分布

- 有限维分布和数字特征

对于随机过程$\{X(t), t \in T\}$，过程的一维分布为

$$F_t(x) = P\{X(t) \le x\}$$

过程的一维均值函数为

$$\mu_X(t) = E[X(t)]$$

过程的方差函数为

$$\sigma_X^2(t) = Var[X(t)]$$

对于随机过程$\{X(t), t \in T\}$，其中随机变量$X(t_1)$与$X(t_2)$的关系有$X(t_1)$与$X(t_2)$的联合分布为

$$F_{t_1,t_2}(x_1,x_2) = P\{X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2\}$$

即过程在t_1，t_2两个不同时刻值的**联合二维分布**.

过程的**自相关函数**为

$$r_X(t_1,t_2) = E(X(t_1)X(t_2))$$

过程的**协方差函数**为

$$\begin{aligned} R_X(t_1,t_2) &\equiv Cov(X(t_1), X(t_2)) \\ &= E(X(t_1)-\mu_X(t_1))(X(t_2)-\mu_X(t_2)) \end{aligned}$$

自相关函数和协方差函数性质:

1. **对称性** 即对任何s, t有

$$r_X(s,t)=r_X(t,s)$$

$$R_X(s,t)=R_X(t,s)$$

2. **非负定性** 即对任何$t_1, t_2,\cdots,t_n\in T$及任意系数$b_1, b_2,\cdots,b_n$有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_ib_jr_X(t_i,t_j)\geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_ib_jR_X(t_i,t_j)\geq 0$$

对于随机过程$\{X(t), t\in T\}$，其**有限维分布族**为

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=P\{X(t_1)\le x_1, X(t_2)\le x_2,\cdots,X(t_n)\le x_n\}$$

有限维分布的性质:

1. **对称性**

$$F_{t_{i_1},t_{i_2},\cdots,t_{i_n}}(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n})=F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

2. **相容性**

$$F_{t_1,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_m,+\infty,\cdots,+\infty)=F_{t_1,t_2,\cdots,t_m}(x_1,x_2,\cdots,x_m)$$

例1.7 记X_n为第n次独立地扔一枚骰子的结果,则$\{X_n, n\geq 1\}$为一随机过程.参数集T为$\{1,2,\cdots\}$,而状态空间为$\{1,2,3,4,5,6\}$.

均值函数为: $E[X_n]=E[X_1]=3.5$

协方差函数为: $R_X(m,n)=\begin{cases}\dfrac{35}{12}, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases}$

任何有限维分布:

$$F_{n_1,n_2,\cdots,n_k}(x_1,x_2,\cdots,x_k)=F(x_1)F(x_2)\cdots F(x_k)$$

其中F(x)为X_1的分布函数.

四、平稳过程和独立增量过程

如果一个随机向量 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 与另一个随机向量 $Y=(Y_1,\cdots,Y_n)$ 有相同的联合分布函数,则称这两个随机向量是同分布的,记为 $X\overset{d}{=}Y$.

定义4.1 如果随机过程X(t)对任意的$t_1,\cdots,t_n\in T$ 和任何h 有

$$(X(t_1+h),\cdots,X(t_n+h))\overset{d}{=}(X(t_1),\cdots,X(t_n))$$

则称X(t)为严格平稳的.

与时间无关

方差

定义4.2 如果随机过程 $X(t)$ 的所有二阶矩存在，并且 $E[X(t)]=m$ 及协方差函数 $R_X(t,s)$ 只与时间差 $t-s$ 有关，则称 $X(t)$ 为**宽平稳的**或**二阶矩平稳的**.

$E((X(t)-m)(X(s)-m))$

❖ 对于宽平稳过程，由于对 $-\infty<s,\ t<+\infty$,

$$R_X(t,s)=R_X(0,t-s)$$

所以可以记之为 $R_X(t-s)$. 显然对所有 t, $R_X(t)=R_X(-t)$, 即为偶函数.

定义4.3 对任意的$t_1<t_2<\cdots<t_n$且$t_1,\cdots,t_n\in T$,如果随机变量$X(t_2)-X(t_1)$, $X(t_3)-X(t_2)$, $\cdots$, $X(t_n)-X(t_{n-1})$, 是相互独立的,则称$X(t)$为**独立增量过程**.

如果进一步有对任意的t_1, t_2,

$$X(t_1+h)-X(t_1)\overset{d}{=}X(t_2+h)-X(t_2)$$

则称$X(t)$为**平稳独立增量过程**.

例1.8 设Z_i, i=0,1,2,$\cdots$, 是一串独立同分布的随机变量，定义

$$X_n = \sum_{i=0}^{n} Z_i$$

则$\{X_n,\ n\geq 0\}$就是独立增量过程.一般称X_n为**独立和.**

$EY\cos\omega t + EZ\sin\omega t$

例1.9 设随机过程 $X(t)=Y\cos\omega t+Z\sin\omega t, t\geqslant 0$，其中Y,Z是相互独立的随机变量，且$E(Y)=E(Z)=0$，$D(Y)=D(Z)=\sigma^2$，求$\{X(t), t\geqslant 0\}$均值函数$\mu_X(t)$和自相关函数$R_X(s,t)$。

解：

$$\mu_X(t)=E[X(t)]=E[Y\cos\varpi t+Z\sin\varpi t]$$

$$=\cos\varpi t\, EY+\sin\varpi t EZ=0,$$

$R_X(s,t)=E($

因为Y与Z相互独立，于是

$$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]$$

$$=E\{[Y\cos\omega s+Z\sin\omega s][Y\cos\omega t+Z\sin\omega t]\}$$

$$=\cos\omega s\cdot\cos\omega t\cdot E(Y^2)+\sin\omega s\cdot\sin\omega t\cdot E(Z^2)$$

$$=\sigma^2\cos\omega(t-s)$$

例1.10: 考虑随机过程 X(t)=acos(ωt+Θ), t∈(-∞,+∞)，其中a和ω是常数，Θ是在（0，2π）上服从均匀分布的随机变量，通常称此随机过程为随机相位正弦波，求随机相位正弦波的均值函数，方差函数和自相关函数.

解：Θ的概率密度为 $f(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi} & \theta\in(0,2\pi)\\ 0 & \theta\notin(0,2\pi)\end{cases}$

于是 $\mu_X(t)=E[X(t)]=E[a\cos(\omega t+\Theta)]$

$$=\int_0^{2\pi}a\cos(\omega t+\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta=0$$

$$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]=E\left\{a^2\cos(\omega s+\Theta)\cos(\omega t+\Theta)\right\}$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\cos\left(\omega s+\theta\right)\cdot\cos\left(\omega t+\theta\right)\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\cos\omega\left(t-s\right)$$

$$\sigma_X^2(t)=R_X(t,t)-\mu_X^2(t)=\frac{a^2}{2}.$$

例1.11：设随机过程$X(t)=Y+Zt$，$t\in T=(-\infty,+\infty)$，其中Y和Z是相互独立的服从$N(0,1)$的随机变量，求$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$的一、二维概率密度。

$P(X(t)<x)$

解：$\forall t\in T$，由正态分布的性质知$X(t)$服从正态分布：

$$E[X(t)]=E(Y)+tE(Z)=0,$$

$Y=$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$D[X(t)]=D(Y)+t^2=1+t^2$$

$D(Y)$

$0+0$

所以一维概率密度为

$$f(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1+t^2)}}e^{-\frac{x^2}{2(1+t^2)}}$$

又由正态分布的性质知，对于任意 $s,t\in T$，$(X(s),X(t))$ 服从二维正态分布而 $E[X(s)]=E[X(t)]=0$；$D[X(s)]=1+s^2$，$D[X(t)]=1+t^2$

$$C_X(s,t)=R_X(s,t)=E\left[(Y+Zs)(Y+Zt)\right]=1+st$$

$$\rho_X(s,t)=\frac{1+st}{\sqrt{(1+s^2)(1+t^2)}}$$

所以二维概率密度为

$$f(x_1,x_2;t_1,t_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{(1+t_1^2)+(1+t_2^2)}\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\exp\left(\frac{-1}{2(1-t_1^2)}\left[\frac{x_1^2}{1+t_1^2}-2\rho\frac{x_1x_2}{\sqrt{(1+t_1^2)(1+t_2^2)}}+\frac{x_2^2}{1+t_2^2}\right]\right)$$

其中$\rho=\rho_x(t_1,t_2)$.

五、条件期望和矩母函数

对于离散型随机变量X和Y.一般,对所有使P{Y=y}>0的y,定义给定Y=y时X取x的条件概率为

$$P\{X=x \mid Y=y\}=\frac{P\{X=x, Y=y\}}{P\{Y=y\}}$$

而给定Y=y, X的条件分布函数为

$$F(x \mid y)=P\{X \leq x \mid Y=y\}$$

给定Y=y, X的条件期望为

$$E(X \mid Y=y)=\sum_{x} x P\{X=x \mid Y=y\}$$

对于一般的连续型随机变量Y.由于$P\{Y=y\}$往往为0,则给定$Y=y$时X的条件概率定义为:

①若对任何包含y的小区间Δy总有$P(Y\in\Delta y)=0$,则定义为

$$P(X\in A|Y=y)=0;$$

②若$P(Y\in\Delta y)>0$,则定义为

$$P\{X\in A|Y=y\}=\lim_{\Delta y\downarrow 0}P\{X\in A|Y\in\Delta y\}$$

这里$\Delta y\downarrow 0$的意思是使包含y的小区间的长度缩小为0.除了个别例外的y值这一极限总是存在的.

而给定$Y=y$, X的**条件分布函数**为

$$F(x \mid y) = P(X \leq x \mid Y = y)$$

$$\stackrel{d}{=} \lim_{\Delta y \downarrow 0} P\{X \leq x \mid Y \in \Delta y\}$$

如果存在一非负函数$f(x|y)$使得对任何集合A恒有

$$P(X \in A \mid Y = y) = \int_A f(x \mid y)dx \quad 且 \quad \int f(x \mid y)dx = 1$$

则$f(x|y)$称为在给定$Y=y$时X的**条件密度**.

显然有

$$F(x \mid y) = \int_{-\infty}^{x} f(s \mid y)ds$$

$$E(X \mid Y = y) = \int x f(x \mid y)dx$$

条件期望通常统一记为

$$E(X\mid Y=y)=\int x\,dF(x\mid y)$$

注: E(X|Y=y) 表示一个数值;

E(X|Y) 表示随机变量.

例1.12 袋子中有3个相同的球,分别标号为1, 2, 3. 现从中随机地取出一个球, 记下标号(假设标号为k)后放回, 同时从袋子中去掉标号为1,…, k-1的球. 然后再随机地取一球记下标号. 分别用X和Y表示两次取球记下的标号,则

Y \ X	1	2	3	$p_{\cdot j}$
1	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{5}{18}$
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{18}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

$$E(Y\mid X=1)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3}=2$$

$$E(Y\mid X=2)=2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{2}=2.5$$

$$E(Y\mid X=3)=3\times 1=3$$

$$P(Y=1\mid X=1)=\frac{1}{3}$$

$$P(Y=2\mid X=1)=\frac{1}{3}$$

$$P(Y=3\mid X=1)=\frac{1}{3}$$

E(Y|X)	2	2.5	3
Pr	1/3	1/3	1/3

例1.13 掷一硬币出现正面的概率为p,独立地做投币试验. 记S为n次试验中出现正面的次数,并设首次出现正面是在第T次试验.求给定n次试验中仅出现了一次正面时变量T的条件概率分布,也即P(T=k|S=1).

$$\frac{p^{n-1}}{C_n^1\, p\, (\cancel{1-p})\, (1-p)^{n-1}}$$

解:

$$P(S=1, T=k) = p(1-p)^{n-1}$$

$$P(S=1) = C_n^1 p(1-p)^{n-1}$$

所以
$$P(T=k \mid S=1) = \frac{P\{S=1, T=k\}}{P(S=1)} = \frac{1}{n}$$

命题1.1 ① 若X与Y独立,则 E(X|Y=y)=E(X);

② 条件期望的平滑性

$$E[E(X|Y)]=\int E(X|Y=y)dF_Y(y)=E(X)$$

③ 对随机变量X, Y的函数φ(X,Y), 有

$$E[\phi(X,Y)|Y=y]=E[\phi(X,y)|Y=y]$$

证明: ③假设(X,Y)为离散型随机变量,则

$$\begin{aligned}E[\phi(X,Y)|Y=y]&=\sum_i\sum_j\phi(x_i,y_j)P(X=x_i,Y=y_j|Y=y)\\&=\sum_i\phi(x_i,y)P(X=x_i,Y=y|Y=y)\\&=\sum_i\phi(x_i,y)P(X=x_i|Y=y)\\&=E[\phi(X,y)|Y=y]\end{aligned}$$

命题1.2 X,Y为r.v., EX, EY, $Eg(Y)$存在，则

(1) X, Y独立，有$E(Y|X)=EY$；

(2) $E(g(X)Y|X)=g(X)E(Y|X)$；

(3) $E(c|X)=c$；

(4) $E(g(X)|X)=g(X)$；

(5) $E\{Y-E(Y|X)\}^2\le E\{Y-g(X)\}^2$

例：$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$求$E(X\,|\,Y=y),E(Y\,|\,X=x)$

解：

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2-2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}+(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2]\}$$

由于

$$\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2-2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}+(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2]$$

$$=\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}-\rho\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})]^2+\frac{(y-\mu_2)}{2\sigma_2^2}$$

$$p_{X/Y}(x/y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}[x-\mu_1-\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)]^2\}$$

则

$$E(X/Y=y)=\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)$$

$$E(Y/X=x)=\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)$$

条件方差

1、$E\{[Y-E(Y|X)]^2|X\}$ 存在，称之为随机变量X条件下随机变量Y的条件方差，记为$D(Y|X)$

2、条件方差的性质

$$D(Y|X)=E(Y^2|X)-\left[E(Y|X)\right]^2$$

$$D(X|Y)=E(X^2|Y)-\left[E(X|Y)\right]^2$$

命题 $D(Y)=E[D(Y|X)]+D\left[E(Y|X)\right]$

证明：

$$E[D(Y|X)]=E_X\left\{E(Y^2|X)-\left[E(Y|X)\right]^2\right\}$$

$$=EY^2-E_X\left[E(Y|X)\right]^2$$

$$D\left[E(Y|X)\right]=E_X\left\{[E(Y|X)]^2\right\}-(EY)^2$$

$$D(Y)=E[D(Y|X)]+D\left[E(Y|X)\right]$$

矩母函数及生成函数

定义1 随机变量X的**矩母函数**定义为随机变量

exp{tX}的期望,记作g(t), 即:

$$g(t)=E[e^{tX}]$$

矩母函数的性质:

① 当矩母函数存在时它唯一地确定了X的分布;

② $E[X^n]=g^{(n)}(0),\ n\geq 1$;

③ 对于相互独立的随机变量X与Y, 则

$$g_{X+Y}(t)=g_X(t)g_Y(t).$$

注: 由于随机变量的矩母函数不一定存在, 因此现在常用特征函数$E[e^{itX}]$代替矩母函数.

常见分布的矩母函数:

分布名称	概率分布或密度	矩母函数
二项分布 B(n,p)	$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n$	$(pe^t+q)^n$
Poisson分布 P(λ)	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots$	$e^{\lambda(e^t-1)}$
正态分布 N(μ,σ²)	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$
指数分布 Exp(λ)	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$	$(1-\dfrac{t}{\lambda})^{-1}$
均匀分布 U[a,b]	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$	$\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}$

例1.13 (随机和的矩母函数) 记X_1, X_2, …为一串独立同分布的随机变量, N为取值为非负整数的随机变量, 且N与X序列相互独立.

$$Y=\sum_{k=1}^{N}X_k$$

求Y的矩母函数.

解: 先算条件期望

$$E[e^{tY}\mid N=n]=E[\exp\left\{t\sum_{k=1}^{N}X_k\right\}\Big|N=n]$$

$$=E[\exp\left\{t\sum_{k=1}^{n}X_k\right\}\Big|N=n]$$

$$=E[\exp\left\{t\sum_{k=1}^{n}X_k\right\}]=[g_X(t)]^n$$

于是有

$$g_Y(t) = E[e^{tY}] = E\{E[e^{tY} \mid N]\} = E[(g_X(t))^N]$$

进一步，

$$g_Y'(t) = E[N(g_X(t))^{N-1} g_X'(t)]$$

$$g_Y''(t) = E[N(N-1)(g_X(t))^{N-2}(g_X'(t))^2 + N(g_X(t))^{N-1} g_X''(t)]$$

因此，

$$EY = g_Y'(0) = E[Ng_X'(0)] = E[NE(X)] = EN \cdot EX$$

$$EY^2 = g_Y''(0) = EN \cdot Var(X) + EN^2 \cdot E^2 X$$

注意： g(0)=1

* 定义2 若X为离散随机变量，则期望$E(s^X)$为其概率生成函数，记作$\phi_X(s)$，即：

$$\phi_X(s)=E[s^X]$$

生成函数的性质：

① 生成函数与离散随机变量是一一对应的；

② $E[X(X-1)\cdots(X-r+1)]=\frac{d^r}{ds^r}\phi_X(s)\Big|_{s=1}$

③ 对于相互独立的随机变量X与Y，则

$$\phi_{X+Y}(s)=\phi_X(s)\phi_Y(s).$$

性质：若离散随机变量分布为

$$P(X=k)=p_k,\quad k=0,1,2,\cdots$$

则

$$p_k=\frac{1}{k!}\cdot\frac{d^k}{ds^k}\phi_X(s)\bigg|_{s=0},\qquad k=0,1,2,\cdots$$

证明：事实上，

$$\phi_X(s)=\sum_{k=0}^{+\infty}p_k s^k.$$

收敛性

定义3 设$\{X_n, n\geq 1\}$是一列随机变量,若存在随机变量X,使对$\forall\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X|\geq\varepsilon)=0$$

则称随机变量序列$\{X_n, n\geq 1\}$**依概率收敛**于X,

记为 $X_n \xrightarrow{p} X$

如果$\{\omega: \lim_{n\to\infty}(X_n(\omega)-X(\omega))=0\}$的概率为1, 即:

$$P(\lim_{n\to\infty}(X_n - X)=0)=1$$

则称随机变量序列$\{X_n, n\geq 1\}$**几乎必然收敛**于X,

记为 $X_n \to X,\ a.s.$

定义4 设随机变量X和X_n, $n\ge1$, 都有有限的二阶矩，如果

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n - X)^2 = 0$$

则称随机变量序列$\{X_n, n\ge1\}$**均方收敛**于X, 记为

$$X_n \xrightarrow{L_2} X$$

三种收敛的关系：

① 几乎必然收敛 $\Longrightarrow$ 依概率收敛

② 均方收敛 $\Longrightarrow$ 依概率收敛

③ 几乎必然收敛 $\not\longleftrightarrow$ 均方收敛

例1.11 在Bernoulli试验中，设每次试验成功的概率为p，若以S_n表示n次试验中成功的次数，则

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} p$$

证： 由于$S_n \sim B(n,p)$，由Chebyshev不等式，$\forall \varepsilon > 0$有

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = P(|S_n - np| \geq n\varepsilon) \leq \frac{E(S_n - np)^2}{n^2\varepsilon^2}$$

$$= \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

进一步，

$$E\left(\frac{S_n}{n} - p\right)^2 = \frac{p(1-p)}{n}, \qquad \text{故 } X_n \xrightarrow{L_2} X.$$