随机过程习题解析（未完成版）

@Author: jkadbear

@Repo: https://github.com/jkadbear/Stochastic_Process

2018–01–09

1.1 令 $X(t)$ 为二阶矩存在的随机过程. 试证它是宽平稳的当且仅当 $\mathrm{E}X(t)$ 与 $\mathrm{E}X(t)X(s+t)$ 都不依赖 s.

证：

充分性：若 $\mathrm{E}X(s)$ 与 $\mathrm{E}X(s)X(s+t)$ 都不依赖 s

则 $\mathrm{E}X(s) =$ 常数 m, $\mathrm{E}X(s)X(s+t) = f(t)$

令 $s' = s+t$,

$$\therefore \mathrm{E}X(s)X(s') = f(s'-s)$$

$$\begin{aligned}\therefore R_X(s,s') &= \mathrm{E}X(s)X(s') - \mathrm{E}X(s)\mathrm{E}X(s') \\ &= f(s'-s) - m^2\end{aligned}$$

$\therefore X(t)$ 是宽平稳的

必要性：若 $X(t)$ 宽平稳则 $\mathrm{E}X(S)$ 为常数 m，即 $\mathrm{E}X(S)$ 与 s 无关

则

$$\begin{aligned}R_X(s,s') &= \mathrm{E}X(s)X(s') - \mathrm{E}X(s)\mathrm{E}X(s') \\ &= g(s'-s)\end{aligned}$$

令 $s' = s+t$

则 $\mathrm{E}X(s)X(s+t) = m^2 + g(t)$ 与 s 无关

1.2 记 $U_1, \cdots, U_n$ 为在 $(0,1)$ 中均匀分布的独立随机变量. 对 $0 < t, x < 1$ 定义

$$I(t,x) = \begin{cases} 1, & x \leqslant t, \\ 0, & x > t, \end{cases}$$

并记 $X(t) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} I(t,U_k), 0 \leqslant t \leqslant 1$, 这是 $U_1, \cdots, U_n$ 的经验分布函数. 试求过程 $X(t)$ 的均值和协方差函数.

解：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}X(t) &= \mathrm{E}[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I(t,U_k)] \\ &= \mathrm{E}I(t,U_1) \\ &= \int_0^t 1\,dx = t\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R_x(s,t) &= \mathrm{E}[X(s)X(t)] - \mathrm{E}X(s)\mathrm{E}X(t) \\
&= \mathrm{E}[\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} I(s,U_i)\cdot\sum_{j=1}^{n} I(s,U_j)] - st \\
&= \frac{1}{n^2}[(n^2-n)\mathrm{E}(I(s,U_1)\cdot I(t,U_2)) + n\mathrm{E}(I(s,U_1)\cdot I(t,U_1)] - st \\
&= \frac{1}{n^2}[(n^2-n)st + n\cdot\min(s,t)] - st \\
&= \frac{1}{n}[\min(s,t) - st]
\end{aligned}
$$

1.3 令 Z_1, Z_2 为独立的正态随机变量, 均值为 0, 方差为 σ^2, λ 为实数. 定义过程 $X(t) = Z_1\cos\lambda t + Z_2\sin\lambda t$. 试求 $X(t)$ 的均值函数和协方差函数. 它是宽平稳的吗?

解：

$$
\mathrm{E}X(t) = \cos\lambda t\mathrm{E}Z_1 + \sin\lambda t\mathrm{E}Z_2 = 0
$$

$$
\begin{aligned}
R_X(s,t) &= Cov(Z_1\cos\lambda s + Z_2\sin\lambda s, Z_z\cos\lambda t + Z_2\sin\lambda t) \\
&= \cos\lambda s\cos\lambda t Cov(Z_1,Z_1) + \sin\lambda s\sin\lambda t Cov(Z_2,Z_2) \\
&= \sigma^2\cos\lambda(s-t)
\end{aligned}
$$

只与 $s-t$ 有关, $\therefore$ 是宽平稳的

1.4 Poisson 过程 $X(t), t \geqslant 0$ 满足 (i) $X(t) = 0$; (ii) 对 $t > s$, $X(t) - X(s)$ 服从均值为 $\lambda(t-s)$ 的 Possion 分布; (iii) 过程是有独立增量的. 试求其均值函数和协方差函数. 它是宽平稳的吗?

解：

$$
\mathrm{E}X(t) = \mathrm{E}[X(t) - X(0)] = \lambda t
$$

$$
\begin{aligned}
R_X(s,t) &= Cov(X(t), X(s)) \\
&= Cov(X(s) - X(t) + X(t) - X(0), X(t) - X(0)) \\
&= Cov(X(t) - X(0), X(t) - X(0)) \qquad \text{（独立增量）} \\
&= \lambda t \qquad (s \geqslant t)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 非宽平稳

1.5 $X(t)$ 为第 4 题中的 Possion 过程. 记 $Y(t) = X(t+1) - X(t)$, 试求过程 $Y(t)$ 的均值函数和协方差函数, 并研究其平稳性.

解：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}Y(t) &= \mathrm{E}X(t+1)-\mathrm{E}X(t)=\lambda \\
R_X(s,t) &= Cov(X(s+1)-X(s),X(t+1)-X(t)) \\
&= Cov(X(s+1),X(t+1))+Cov(X(s),X(t)) \\
&\quad -Cov(X(s),X(t+1))-Cov(X(s+1),X(t)) \\
&= \lambda[\min(s+1,t+1)+\min(s,t)-\min(s,t+1)-\min(s+1,t)]
\end{aligned}
$$

令 $\beta=s-t$, 当 $\beta>1$ 或 $\beta<-1$ 时, $R_Y(s,t)=0$

当 $0<\beta\leqslant 1$ 时, $R_Y(s,t)=\lambda(t+1+t-s-t)=\lambda(t-s+1)$

当 $-1\leqslant\beta\leqslant 0$ 时, $R_Y(s,t)=\lambda(s+1+s-s-t)=\lambda(s-t+1)$

$\therefore$ 宽平稳

1.6 令 Z_1 和 Z_2 是独立同分布的随机变量. $P(Z_1=-1)=P(Z_1=1)=\frac{1}{2}$. 记 $X(t)=Z_1\cos\lambda t+Z_2\sin\lambda t$, $t\in R$. 试证 $X(t)$ 是宽平稳的, 它是严平稳的吗?

解：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}Z_1 &= \mathrm{E}Z_2=0 \\
\mathrm{E}X(t) &= \cos\lambda t\mathrm{E}Z_1+\sin\lambda t\mathrm{E}Z_2=0 \\
R_X(s,t) &= Cov(Z_1\cos\lambda s+Z_2\sin\lambda s, Z_1\cos\lambda t+Z_2\sin\lambda t) \\
&= \cos\lambda s\cos\lambda t Cov(Z_1,Z_1)+\sin\lambda s\sin\lambda t Cov(Z_2,Z_2) \\
&= 2\cos\lambda(s-t)VarZ_1 \\
&= 2\cos\lambda(s-t)\left(\mathrm{E}(Z_1^2)-\mathrm{E}^2(Z_1)\right) \\
&= \cos\lambda(s-t)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 是宽平稳

$F_t(x)=P(Z_1\cos\lambda t+Z_2\sin\lambda t\leqslant x)$

考虑 $F_t(0)=P(Z_1\cos\lambda t+Z_2\sin\lambda t\leqslant 0)$

当 $t=0$ 时 $F_t(0)=P(Z_1\leqslant 0)=\frac{1}{2}$

当 $t=\frac{\pi}{4\lambda}$ 时 $F_t(0)=P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(Z_1+Z_2)\leqslant 0\right)=\frac{3}{4}$

$\therefore F_t(x)$ 与 t 有关, 故 $X(t)$ 不是严平稳过程

1.7. 试证：若 $Z_0,Z_1,\cdots$ 为独立同分布随机变量, 定义 $X_n=Z_0+Z_1+\cdots+Z_n$, 则 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 是独立增量过程.

证：对 $\forall n$ 及 $\forall t_1,\cdots,t_n\in\{0,1,2,\cdots\},t_1<t_2<\cdots<t_n$, 有

$$\begin{cases} X(t_2)-X(t_1)=Z_{t_1+1}+\cdots+Z_{t_2}, \\ X(t_3)-X(t_2)=Z_{t_2+1}+\cdots+Z_{t_3}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ X(t_n)-X(t_{n-1})=Z_{t_{n-1}+1}+\cdots+Z_{t_n}. \end{cases}$$

由题知 $Z_{t_1+1},\cdots,Z_{t_n}$ 互相独立,

$\therefore (Z_{t_1+1},\cdots,Z_{t_2}),(Z_{t_2+1},\cdots,Z_{t_3}),\cdots,(Z_{t_{n-1}+1},\cdots,Z_{t_n})$ 互相独立,

$\therefore \{X_n,n\geqslant 0\}$ 为独立增量过程.

1.8 若 $X_1,X_2,\cdots$ 为独立随机变量, 还要添加什么条件才能确保它是严平稳的随机过程?

解：

若 $\{X_1,X_2,\cdots\}$ 严平稳, 则对任意正整数 m 和 n , X_m 和 X_n 的分布都相同, 从而 $X_1,X_2,\cdots$ 是一列同分布的随机变量. 而当 $X_1,X_2,\cdots$ 是一列独立同分布的随机变量时. 对任意正整数 k 及 $n_1,\cdots,n_k,k$ 维随机向量 $(X_{n_1},\cdots,X_{n_k})$ 的分布函数为 (记 $X_1,X_2,\cdots$ 的共同分布函数为 $F(x)$)

$$\begin{aligned} F_{(X_{n_1},\cdots,X_{n_k})}(x_1,\cdots,x_k) &= F_{X_{n_1}}(x_1)\cdots F_{X_{n_k}}(x_n) \\ &= F(x_1)\cdots F(x_k). \quad -\infty<x_1,\cdots,x_k<+\infty. \end{aligned}$$

这说明了 $(X_{n_1},\cdots,X_{n_k})$ 的分布函数与 $n_1,\cdots,n_k$ 无关, 故 $\{X_1,X_2,\cdots\}$ 严平稳.

1.9 令 X 和 Y 是从单位圆内的均匀分布中随机选取一点所得的横坐标和纵坐标. 试计算条件概率

$$P\left(X^2+Y^2\geqslant\frac{3}{4}\middle|X>Y\right).$$

解：易见答案为 $\frac{1}{4}$.

1.12 气体分子的速度 V 有三个垂直分量 V_x,V_y,V_z, 它们的联合分布密度依 $Maxwell-Boltzman$ 定律为

$$f_{V_x,V_y,V_z}(v_1,v_2,v_3)=\frac{1}{(2\pi kT)^{3/2}}\exp\left\{-\left(\frac{v_1^2+v_2^2+v_3^2}{2kT}\right)\right\},$$

其中 k 是 Boltzman 常数, T 为绝对温度, 给定分子的总动能为 e. 试求 x 方向的动量的绝对值的期望值.

解：由题中所给分布律知分子质量为单位质量, 即有 $e=\frac{1}{2}\left(V_x^2+V_y^2+V_z^2\right)$.

则所求为

$$\mathrm{E}\left[|V_x|\Big|\frac{1}{2}\left(V_x^2+V_y^2+V_z^2\right)=e\right]$$

作 $\left(V_x,V_y,V_z\right)$ 的球坐标变换

$$\begin{aligned}
V_x &= R\cos\Phi\\
V_y &= R\cos\Theta\sin\Phi\\
V_z &= R\sin\Theta\sin\Phi,
\end{aligned}$$

则 (R,Θ,Φ) 的联合概率密度为

$$\begin{aligned}
f_{R,\Theta,\Phi}(r,\theta,\phi) &= f_{V_x,V_y,V_z}(r\cos\phi, r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi)\cdot r^2\sin\phi\\
&= \frac{\sqrt{2}r^2}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}}e^{-r^2/2kT}\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\sin\phi\\
&= f_R(r)f_\Theta(\theta)f_\Phi(\phi)
\end{aligned}$$

由此可知 R,Θ,Φ 相互独立.

$$\begin{aligned}
\therefore\quad & \mathrm{E}\left[|V_x|\Big|\frac{1}{2}\left(V_x^2+V_y^2+V_z^2\right)=e\right]\\
&= \mathrm{E}\left[R|\cos\Phi|\Big|\frac{1}{2}R^2=e\right]\\
&= \mathrm{E}\left[R|\cos\Phi|\Big|R=\sqrt{2e}\right]\\
&= \sqrt{2e}\mathrm{E}\left[R|\cos\Phi|\right]\\
&= \sqrt{2e}\int_0^\pi\frac{1}{2}\sin\phi|\cos\phi|d\phi\\
&= \sqrt{\frac{e}{2}}
\end{aligned}$$

1.13 若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布. 它们服从参数为 λ 的指数分布. 试证 $\sum\limits_{i=1}^n X_i$ 是参数为 (n,λ) 的 Γ 分布, 其密度为

$$f(t)=\lambda\exp\{-\lambda t\}(\lambda t)^{n-1}/(n-1)!\ ,\quad t\geqslant 0.$$

证：

令 $Y=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$
$g_Y(t)=g_X^n(t)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n$
$\therefore Y$ 服从参数为 (n,λ) 的 Γ 分布, 其密度函数如题所述

1.14 设 X_1 和 X_2 为相互独立的均值为 λ_1 和 λ_2 的 Possion 随机变量. 试求 X_1+X_2 的分布, 并计算给定 $X_1+X_2=n$ 时 X_1 的条件分布.
解：令 $Y=X_1+X_2$

$$\begin{aligned}g_Y(t)&=g_{X_1}(t)g_{X_2}(t)\\&=e^{\lambda_1(e^t-1)}e^{\lambda_2(e^t-1)}\\&=e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)}\end{aligned}$$

$\therefore Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$
$\therefore$ 给定 $X_1+X_2=n$ 时 X_1 服从参数为 $p=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2},n=n$ 的二项分布
1.15 若 $X_1,X_2,\cdots$ 独立且有相同的以 λ 为参数的指数分布, N 服从几何分布, 即

$$P(N=n)=\beta(1-\beta)^{n-1},n=1,2,\cdots,0<\beta<1.$$

试求随机和 $Y=\sum\limits_{i=1}^{N}X_i$ 的分布.
解：

$$E(e^{tY}|N=n)=g_X^n(t)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n\triangleq\alpha^n$$

$$\therefore g_Y(t)=E[E(e^{tY}|N)]=E(\alpha^N)=\sum_{n=1}^{+\infty}\beta(1-\beta)^{n-1}\alpha^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha\beta(\alpha-\alpha\beta)^{n-1}$$

当 $|\alpha-\alpha\beta|<1$ 时 $g_Y(t)=\frac{\alpha\beta}{1-\alpha(1-\beta)}=\frac{\lambda\beta}{\lambda\beta-t}$
$\therefore Y$ 服从参数为 $\lambda\beta$ 的指数分布
1.16 若 $X_1,X_2,\cdots$ 独立同分布, $P(X_i=\pm1)=\frac{1}{2}$. N 与 X_i, $i\geqslant1$ 独立且服从参数为 β 的几何分布, $0<\beta<1$. 试求随机和 $Y=\sum\limits_{i=1}^{N}X_i$ 的均值, 方差和三、四阶矩.
解：

$$E(e^{tY}|N=n)=g_X^n(t)=E^n(e^{tY})=\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^n$$
$$\therefore g_Y(t)=E\left[E(e^{tY}|N)\right]=E\left[\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^N\right]=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^n\beta(1-\beta)^{n-1}$$

$$\therefore EY = g_Y'(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^{n-1} \beta(1-\beta)^{n-1}\frac{e^t - e^{-t}}{2}\bigg|_{t=0} = 0$$

$$\begin{aligned}
EY^2 &= g_Y''(0) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\Bigg[n(n-1)\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^{n-2}\beta(1-\beta)^{n-1}\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2 + \\
&\qquad n\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^{n}\beta(1-\beta)^{n-1}\Bigg]\Bigg|_{t=0} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n\beta(1-\beta)^{n-1} \\
&= \frac{1}{\beta}
\end{aligned}$$

$$VarY = EY^2 - (EY)^2 = \frac{1}{\beta^2}$$

$$\begin{aligned}
EY^3 &= g_Y^{(3)}(0) \\
&= \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{n\beta(1-\beta)^{n-1}\left[(n-1)\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^{n-2}\frac{e^t-e^{-t\,2}}{2} + \left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^{n}\right]\right\}\right)'\Bigg|_{t=0} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\Bigg\{n\beta(1-\beta)^{n-1}\Bigg[(n-1)(n-2)\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^{3} + \\
&\qquad (n-1)\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^{n-2}\cdot 2\cdot\frac{e^t-e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^t+e^{-t}}{2} + n\cdot\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{e^t-e^{-t}}{2}\Bigg]\Bigg\}\Bigg|_{t=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
EY^4 &= g_Y^{(4)}(0) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left\{n\beta(1-\beta)^{n-1}\left[(n-1)\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^{n-1}(e^t+e^{-t}) + n\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^{n}\right]\right\}\Bigg|_{t=0} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}(3n^2-2n)\beta(1-\beta)^{n-1} \\
&= 3\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\beta(1-\beta)^{n-1} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} n\beta(1-\beta)^{n-1} \\
&= 3\left(\frac{1-\beta}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^2}\right) - 2\frac{1}{\beta^2} \\
&= \frac{6-5\beta}{\beta^2}
\end{aligned}$$

1.17 随机变量 N 服从参数为 λ 的 Possion 分布. 给定 $N=n$, 随机变量 M 服从以 n 和 p 为参数的二项分布. 试求 M 的无条件概率分布.

解：

$$\mathrm{E}\left(e^{tM}|N=n\right)=\left(pe^t+(1-p)\right)^n\overset{\Delta}{=}a^n$$

$$g_M(t)=\mathrm{E}(a^N)=\sum_{n=0}^{+\infty}a^n\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}=e^{\lambda p(e^t-1)}$$

$$\therefore M\sim P(\lambda p)$$

2.1 $N(t)$ 为一 Possion 过程, 对 $s<t$ 试求条件概率 $P\{N(s)=k|N(t)=n\}$.
解：

$$\begin{aligned}P\{N(s)=k|N(t)=n\} &= P(N(s)=k,N(t)=n)/P(N(t)=n)\\ &= P(N(s)-N(0)=k,N(t)-N(s)=n-k)/P(N(t)=n)\\ &= \left[\frac{(\lambda s)^k e^{-\lambda s}}{k!}\cdot\frac{(\lambda(t-s))^{n-k}e^{-\lambda(t-s)}}{(n-k)!}\right]\Big/\left[\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}\right]\\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}\end{aligned}$$

2.2 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 为一强度是 λ 的 Possion 过程. 对 $s>0$ 试计算 $E[N(t)\cdot N(t+s)]$.
解：

$$\begin{aligned}\text{原式} &= E\left[N(t)\left(N(t+s)-N(t)+N(t)\right)\right]\\ &= E\left(N(t)\right)E\left(N(t+s)-N(t)\right)+E\left(N^2(t)\right)\\ &= \lambda t\cdot\lambda s+VarN(t)+E^2N(t)\\ &= \lambda^2 ts+\lambda t+(\lambda t)^2\\ &= \lambda^2 t(s+t)+\lambda t\end{aligned}$$

2.3 电报依平均速率为每小时 3 个的 Possion 过程到达电报局, 试问:
(i) 从早上八时到中午没收到电报的概率;
(ii) 下午第一份电报到达时间的分布是什么?
解:
(i) 令 t 的计时单位为小时, 并以早上 8:00 为起始时刻
所求事件即 $\{\mathrm{N}(4)=0\}$
其概率为 $\frac{e^{-12}\cdot 12^0}{0!}\approx 6.1\times 10^{-6}$
(ii) 取中午 12:00 为起始时刻, T 表示下午第一份电报到达时间 $F(t)=P(T\leqslant t)=P\left(N(t)\geqslant 1\right)=1-e^{-3t}$
$\therefore f(t)=3e^{-3t}$, 即 T 服从参数为 3 的指数分布

2.4 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 为一 $\lambda=2$ 的 Possion 过程, 试求：
(i)$P\{N(1)\leqslant 2\}$;
(ii)$P\{N(1)=1\text{且}N(2)=3\}$;

(iii)$P\{N(1)\geqslant 2|N(1)\geqslant 1\}$.

解：

(i)

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= P\{N(1)-N(0)=0\}+P\{N(1)-N(0)=1\}+P\{N(1)-N(0)=2\} \\
&= e^{-2}+\frac{2e^{-2}}{1!}+\frac{2^2e^{-2}}{2!} \\
&= 5e^{-2}
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= P\{N(1)-N(0)=1\text{且}N(2)-N(1)=2\} \\
&= P\{N(1)-N(0)=1\}\cdot P\{N(2)-N(1)=2\} \\
&= 2e^{-2}\cdot 2e^{-2} \\
&= 4e^{-4}
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{P\{N(1)\geqslant 2\}\text{且}N(1)\geqslant 1}{P\{N(1)\geqslant 1\}} \\
&= \frac{P\{N(1)\geqslant 2\}}{P\{N(1)\geqslant 1\}} \\
&= \frac{1-P\{N(1)-N(0)\leqslant 1\}}{1-P\{N(1)-N(0)=0\}} \\
&= \frac{1-3e^{-2}}{1-e^{-2}}
\end{aligned}$$

2.6 一部 600 页的著作总共有 240 个印刷错误, 试利用 Possion 过程近似求出某连续三页无错误的概率.

解：设 $N(t)$——到第 t 页为止的印刷错误数, 则 $N(t)$ 为一 Possion 过程

观点一：该 Possion 过程的参数 λ 未知

则所求概率为

$$
\begin{aligned}
& P\{N(t+3)-N(t)=0|N(600)-N(0)=240\} \\
= & P\{N(t+3)-N(t)=0;N(600)-N(0)=240\}/P\{N(600)-N(0)=240\} \\
= & P\{N(3)-N(0)=0\}\cdot P\{N(600)-N(3)=240\}/P\{N(600)-N(0)=240\} \\
= & e^{-3\lambda}\cdot\frac{(597\lambda)^{240}}{240!}e^{-597\lambda}\Bigg/\left[\frac{(600\lambda)^{240}}{240!}\cdot e^{-600\lambda}\right] \\
= & \left(\frac{597}{600}\right)^{240}\approx 0.3003\approx 0.3
\end{aligned}
$$

观点二：该 Possion 过程的参数 λ 已知, $\lambda=240/600=0.4$,

则所求概率为 $P\{N(3)=0\}=e^{-0.4\times 3}\approx 0.3012\approx 0.3$

2.7 $N(t)$ 是强度为 λ 的 Possion 过程. 给定 $N(t)=n$, 试求第 r 个事件 $(r\leqslant n)$ 发生的时刻 W_r 的条件概率密度 $f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n)$.

解：

$$
\begin{aligned}
& f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n)\cdot\Delta w_r \\
= & P\{N(w_r)-N(0)=r-1,N(w_r+\Delta w_r)-N(w_r)=1|N(t)=n\} \\
= & P\{N(w_r)-N(0)=r-1\}\cdot P\{N(w_r+\Delta w_r)-N(w_r)=1\} \\
& \cdot P\{N(t)-N(w_r+\Delta w_r)=n-r\}/P\{N(t)=n\} \\
= & \frac{(\lambda w_r)^{r-1}}{(r-1)!}e^{-\lambda w_r}\cdot(\lambda\Delta w_r+o(\Delta w_r))\cdot\frac{(\lambda(t-w_r-\Delta w_r))^{n-r}}{(n-r)!}e^{-\lambda(t-w_r-\Delta w_r)}\Bigg/\left[\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{\lambda t}\right]
\end{aligned}
$$

两边除以 Δw_r 并令 $\Delta w_r\to 0$ 得

$f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n)=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\frac{(w_r)^{r-1}(t-w_r)^{n-r}}{t^n}$

2.8 令 $\{N_i(t),t\geqslant 0\},i=1,2,\cdots,n$ 为 n 个独立的有相同强度参数 λ 的 Possion 过程. 记 T 为在全部 n 个过程中至少发生了一件事的时刻, 试求 T 的分布.

解：

$$
\begin{aligned}
F_T(t) = P\{T \leqslant t\} &= 1 - P(T < t) \\
&= 1 - P(N_i(t) = 0, i = 1, 2, \cdots, n) \\
&= 1 - \left(e^{-\lambda t}\right)^n
\end{aligned}
$$

$\therefore f_T(t) = F_T'(t) = n\lambda e^{-n\lambda t}$

即 T 服从参数为 $n\lambda$ 的指数分布.

2.10 到达某加油站的公路上的卡车服从参数为 λ_1 的 Possion 过程 $N_1(t)$, 而到达的小汽车服从参数为 λ_2 的 Possion 过程 $N_2(t)$, 且过程 $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 独立. 试问随机过程 $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ 是什么过程? 并计算在总车流数 $N(t)$ 中卡车首先到达的概率.

解：

$$
\begin{aligned}
g_{N(t)}(v) &= g_{N_1 t}(v) \cdot g_{N_2 t}(v) \\
&= e^{\lambda_1 v(e^t - 1)} e^{\lambda_2 v(e^t - 1)} \\
&= e^{(\lambda_1 + \lambda_2) v(e^t - 1)}
\end{aligned}
$$

$\therefore N(t)$ 是强度为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的 Possion 过程

记 W_1, W_2 分别为卡车、小汽车的第一次到达时间, 则 W_1 服从参数为 λ_1 的指数分布, W_1 服从参数为 λ_1 的指数分布.

$$
\begin{aligned}
\therefore P(W_1 < W_2) &= \iint_{0 \leqslant W_1 < W_2 \leqslant +\infty} f_{W_1, W_2}(w_1, w_2)\, dw_1 dw_2 \\
&= \int_0^{+\infty} dw_1 \int_{w_1}^{+\infty} \lambda_1 \lambda_2 e^{-w_1 \lambda_1 - w_2 \lambda_2}\, dw_2 \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}
\end{aligned}
$$

2.11 冲击模型 (Shock Model) 记 $N(t)$ 为某系统到某时刻 t 受到的冲击次数, 它是参数为 λ 的 Possion 过程. 设第 k 次冲击对系统的损害大小 Y_k 服从参数为 μ 的指数分布, $Y_k, k = 1, 2, \cdots$, 独立同分布. 记 $X(t)$ 为系统所受到的总损害. 当损害超过一定的极限 α 时系统不能运行, 寿命终止, 记 T 为系统寿命. 试求该系统的平均寿命 ET, 并对所得结果作出直观解释.

提示：对非负随机变量 $\mathrm{E}T = \int_0^\infty P(T > t)\, dt$

解：令 $W_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$

法一：

$$
\begin{aligned}
P(T>t) &= P\{X(t)\leqslant \alpha\} \\
&= P\{\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \leqslant \alpha\} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P\left\{\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \leqslant \alpha | N(t)=n\right\}\cdot P\{N(t)=n\} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P\left\{\sum_{k=1}^{n} Y_k \leqslant \alpha | N(t)=n\right\}\cdot P\{N(t)=n\} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P\{W_n \leqslant \alpha\}\cdot P\{N(t)=n\}
\end{aligned}
$$

求和式中当 $n=0$ 时认为 $P\{W_n\leqslant\alpha|N(t)=n\}=1$

$\because Y_k\sim\exp(\mu),\ \ \therefore W_n=\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k\sim\Gamma(n,\mu)$

$$
\begin{aligned}
\therefore P(W_n\leqslant\alpha) &= \frac{\mu^n}{(n-1)!}\int_0^\alpha s^{n-1}e^{-\mu s}\,ds \qquad (n\geqslant 1) \\
P\{N(t)=n\} &= \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore P(T>t)=e^{-\lambda t}+e^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\lambda\mu t)^n}{n!(n-1)!}\int_0^\alpha s^{n-1}e^{-\mu s}\,ds
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \mathrm{E}T &= \int_0^{+\infty} P(T>t)\,dt \\
&= \frac{1}{\lambda}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\lambda\mu)^n}{n!(n-1)!}\int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t}\,dt\int_0^\alpha s^{n-1}e^{-\mu s}\,ds \\
&= \frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mu^n\Gamma(n+1)}{n!(n-1)!}\int_0^\alpha s^{n-1}e^{-\mu s}\,ds \\
&= \frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\int_0^\alpha\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\mu s)^{n-1}e^{-\mu s}}{(n-1)!}\right]d(\mu s) \\
&= \frac{1+\mu\alpha}{\lambda}
\end{aligned}
$$

从结果看, 若 λ 越大 (系统所受冲击越频繁), μ 越小 (每次冲击所造成的平均损害越大), α 越小 (系统所能承受的的损害极限越小), 则系统平均寿命越短, 且当 α 等于 0 时系统的平均寿命即为第一次冲击到来的平均时间, 符合常识.

法二：

$$\begin{aligned}
\because G_n(\alpha) &= P\{Y_1+\cdots+Y_k \leqslant \alpha\} \\
&= P\{W_n \leqslant \alpha\} \\
&= P\{N_1(\alpha) \geqslant n\} \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(\mu\alpha)^n}{k!} e^{-\mu\alpha}
\end{aligned}$$

其中 $N_1(t)$ 是强度为 μ 的 Possion 过程

$$\begin{aligned}
\therefore P(T>t) &= P\{X(t) \leqslant \alpha\} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} G_n(\alpha) \quad \text{(例2.4)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \frac{(\mu\alpha)^n}{k!} e^{-\mu\alpha} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mu\alpha)^n}{k!} e^{-\mu\alpha} \sum_{n=0}^{k} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \mathrm{E}T &= \int_0^{+\infty} P(T>t)\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mu\alpha)^k}{k!} e^{-\mu\alpha} \sum_{n=0}^{k} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mu\alpha)^k}{k!} e^{-\mu\alpha} \frac{(k+1)\Gamma(n+1)}{n!\lambda} \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mu\alpha)^k}{k!} e^{-\mu\alpha} + \frac{\mu\alpha}{\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\mu\alpha)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu\alpha} \\
&= \frac{1+\mu\alpha}{\lambda}
\end{aligned}$$

2.12 令 $N(t)$ 是强度函数为 $\lambda(t)$ 的非齐次 Possion 过程, $X_1, X_2, \cdots$ 为事件间的时间间隔. (i)X_i 是否独立;

(ii)X_i 是否同分布;

(iii) 试求 X_1 与 X_2 的分布.

解：记 $m(t) = \int_0^t \lambda(u)\,du$

法一：等待时间 W_1, W_2 的联合分布函数为

$$
\begin{aligned}
F_{W_1,W_2}(t_1,t_2) &= P(W_1 \leqslant t_1, W_2 \leqslant t_2), \quad 0 \leqslant t_1 < t_2 \\
&= P(N(t_1) \geqslant 1, N(t_2) \geqslant 2) \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^{k} P(N(t_1) = \ell, N(t_2) = k) \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^{k} P(N(t_1) = \ell, N(t_2) - N(t_1) = k - \ell) \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^{k} P(N(t_1) = \ell) P(N(t_2) - N(t_1) = k - \ell) \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^{k} \frac{(m(t_1)^{\ell})}{\ell!} e^{-m(t_1)} \cdot \frac{[m(t_2) - m(t_1)]^{k-\ell}}{(k-\ell)!} e^{-[m(t_2) - m(t_1)]} \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^{k} \frac{(m(t_1))^{\ell} [m(t_2) - m(t_1)]^{k-\ell}}{\ell!(k-\ell)!} e^{-m(t_2)} \\
&= e^{-m(t_2)} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\ell=1}^{k} C_k^{\ell} (m(t_1))^{\ell} [m(t_2) - m(t_1)]^{k-\ell} \\
&= e^{-m(t_2)} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left\{ \sum_{\ell=0}^{k} C_k^{\ell} (m(t_1))^{\ell} [m(t_2) - m(t_1)]^{k-\ell} - [m(t_2) - m(t_1)]^{k} \right\} \\
&= e^{-m(t_2)} \left\{ e^{m(t_2)} - e^{m(t_2) - m(t_1)} - m(t_1) \right\} \\
&= 1 - e^{-m(t_1)} - m(t_1) e^{-m(t_2)}
\end{aligned}
$$

$$\therefore f_{W_1,W_2}(t_1,t_2) = \frac{\partial^2 F_{W_1,W_2}(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \lambda(t_1)\lambda(t_2) e^{-m(t_2)}$$

$$\because \begin{cases} W_1 = X_1 \\ W_2 = X_1 + X_2 \end{cases}$$

$$\therefore f_{X_2,X_2}(t_1,t_2) = \lambda(t_1)\lambda(t_1+t_2) e^{-m(t_1+t_2)}\text{不能写为}g_1(t_1)g_2(t_2)\text{形式}$$

$\therefore X_1, X_2$ 不独立

$$
\begin{aligned}
\text{又有}f_{X_1}(t_1) &= \lambda(t_1) \int_0^{+\infty} \lambda(t_1+t_2) e^{-m(t_1+t_2)}\, dt_2 \\
&= \lambda(t_1) \left[e^{-m(t_1)} - e^{-m(+\infty)} \right], \quad t_1 > 0
\end{aligned}
$$

下面确定 $e^{-m(\infty)}$:

$$1 = \int_0^{+\infty} f_{X_1}(t_1)\, dt_1 = \int_0^{+\infty} \lambda(t_1) \left[e^{-m(t_1)} - e^{-m(+\infty)} \right] dt_1 = 1 - [m(+\infty)+1] e^{-m(+\infty)}$$

$\therefore e^{-m(+\infty)} = 0$

$$\therefore f_{X_1}(t_1) = \lambda(t_1)e^{-m(t_1)} \quad (t_1 > 0)$$
$$f_{X_2}(t_2) = \int_0^{+\infty} \lambda(t_1)\lambda(t_1+t_2)e^{-m(t_1+t_2)}\,dt_1 \quad (t_2 > 0)$$

$\therefore X_1, X_2$ 不同分布且其概率密度函数如上.

法二：

$$\begin{aligned} P\{X_2 > t|X_1 = s\} &= \lim_{s'\to s} P\big\{N(s+t) - N(s) = 0|N(s') = 0, N(s) - N(s') = 1\big\} \\ &= P\big\{N(s+t) - N(s) = 0\big\} \\ &= e^{m(s)-m(s+t)} \end{aligned}$$

与 s 有关, 故 X_1, X_2 不独立.

$$P\{X_1 > t\} = P\{N(t) = 0\} = e^{-m(t)}$$
$$\begin{aligned} P\{X_2 > t\} &= \int_0^{+\infty} P\{X_2 > t|X_1 = s\} f_{X_1}(s)\,ds \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-m(s+t)}\lambda(s)\,ds \\ &= e^{-m(t)} \int_0^{+\infty} e^{m(t)-m(s+t)}\lambda(s)\,ds \\ &= P\{X_1 > t\} \int_0^{+\infty} e^{m(t)-m(s+t)}\lambda(s)\,ds \\ &\not\equiv P\{X_1 > t\} \end{aligned}$$

$\therefore X_1, X_2$ 不同分布 ($P\{X_1 > t$和$P\{X_2 > t\}$ 给出 X_1和X_2 的分布).

2.13 考虑对所有 t, 强度函数 $\lambda(t)$ 均大于 0 的非齐次 Possion 过程 $\{N(t), t \geqslant 0\}$. 令 $m(t) = \int_0^t \lambda(u)\,du, m(t)$ 的反函数为 $\ell(t)$, 记 $N_1(t) \equiv N(\ell(t))$. 试证 $N_1(t)$ 是通常的 Possion 过程, 试求 $N_1(t)$ 的强度参数 λ.

解：

(i)$N_1(0) = N(\ell(0)) = N(0) = 0$

(ii)$\because m(\ell)$ 单增, $\therefore \ell(t)$ 单增

$\therefore$ 对任意 $0 \leqslant t_1 < t_2 \cdots < t_n$, 有 $0 \leqslant \ell(t_1) < \ell(t_2) < \cdots < \ell(t_n)$

$$
\begin{aligned}
\therefore \text{有} N_1(t_2)-N_1(t_1) &= N(\ell(t_2))-N(\ell(t_1)) \\
N_1(t_3)-N_1(t_2) &= N(\ell(t_3))-N(\ell(t_2)) \\
&\vdots \\
N_1(t_n)-N_1(t_{n-1}) &= N(\ell(t_n))-N(\ell(t_{n-1}))
\end{aligned}
$$

$\because N(t)$ 是独立增量过程

$\therefore N_1(t)$ 也是独立增量过程

(iii)$\forall 0 \leqslant s < t$, 有

$$
\begin{aligned}
P(N_1(t)-N_1(s)=k) &= P\{N(\ell(t))-N(\ell(s))=k\} \\
&= \frac{[m(\ell(t))-m(\ell(s))]^k}{k!}e^{-[m(\ell(t))-m(\ell(s))]} \\
&= \frac{(t-s)^k}{k!}e^{-(t-s)} \qquad k=0,1,\cdots
\end{aligned}
$$

$\therefore N_1(t)$ 是强度为 1 的 Possion 过程

2.14 设 $N(t)$ 为更新过程, 试判断下述命题的真伪：

(i)$\{N(t)<k\} \Longleftrightarrow \{W_k>t\}$;

(ii)$\{N(t)\leqslant k\} \Longleftrightarrow \{W_k \geqslant t\}$;

(iii)$\{N(t)>k\} \Longleftrightarrow \{W_k<t\}$;

其中 $W-k$ 为第 k 个事件的等待时间.

解：

(i)

$$
\begin{aligned}
\{N(t)<k\} &= \overline{\{N(t)\geqslant k\}} \\
&= \overline{\{W_k \leqslant t\}} \\
&= \{W_k>t\}
\end{aligned}
$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\{N(t) \leqslant k\} &= \{N(t) < k+1\} \\
&= \overline{\{N(t) \geqslant k+1\}} \\
&= \overline{\{W_{k+1} \leqslant t\}} \\
&= \{W_{k+1} > t\} \\
&\neq \{W_k \geqslant t\}
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\{N(t) > k\} &= \{N(t) \geqslant k+1\} \\
&= \{W_{k+1} \leqslant t\} \\
&\neq \{W_k < t\}
\end{aligned}$$

2.(14.5) 设 $X_1(t)$ 与 $X_2(t)$ 为两个独立的 Possion 过程, 速率分别为 λ_1 和 λ_2

(a) 试证 $X_1(t)+X_2(t)$ 为速率 $\lambda_1+\lambda_2$ 的 Possion 过程

(b) $X_1(t)-X_2(t)$ 是 Possion 过程吗？为什么？

(c) 试求在过程 $X_1(t)$ 的任意两个相邻事件时间间隔之内, 过程 $X_2(t)$ 恰好发生 k 个事件的概率 $P_k(k \geqslant 0)$

解：

(a)

$$\begin{aligned}
g_{X_1(t)+X_2(t)}(v) &= g_{X_1(t)}(v) \cdot g_{X_2(t)}(v) \\
&= \exp\left\{\lambda_1 t(e^v-1)\right\} \cdot \exp\left\{\lambda_2 t(e^v-1)\right\} \\
&= \exp\left\{(\lambda_1+\lambda_2) t(e^v-1)\right\}
\end{aligned}$$

$\therefore X_1(t)+X_2(t)$ 是强度为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的 Possion 过程.

(b)

$$\begin{aligned}
g_{X_1(t)-X_2(t)}(v) &= g_{X_1(t)}(v) \cdot g_{X_2(t)}(v) \\
&= \exp\left\{\lambda_1 t(e^v-1)\right\} \mathrm{E}\left(e^{-vX_2(t)}\right) \\
&= \exp\left\{\lambda_1 t(e^v-1)\right\} \cdot \exp\left\{\lambda_2 t(e^{-v}-1)\right\}
\end{aligned}$$

不能化为 Possion 过程的矩母函数形式,

$\therefore X_1(t)-X_2(t)$ 不是 Possion 过程.

(c)$X_1(t)$ 的相邻两个事件时间间隔 τ 服从参数为 λ_1 的指数分布, 其概率密度函数为 $f(\tau)=\lambda_1 e^{-\lambda_1\tau}$

$$
\begin{aligned}
\therefore P_k &= \int_0^{+\infty} f(\tau) P\Big\{X_2(t+\tau)-X_2(t)=k\Big\}\,d\tau \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1\tau}\cdot\frac{(\lambda_2\tau)^k}{k!}e^{-\lambda_2\tau}\,d\tau \\
&= \frac{\lambda_1\lambda_2^k}{(\lambda_1+\lambda_2)^{k+1}k!}\cdot\int_0^{+\infty}\big((\lambda_1+\lambda_2)\tau\big)^k e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\tau}\,d(\lambda_1+\lambda_2)\tau \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k
\end{aligned}
$$

3.1 对 Markov 链 $X_n, n \geqslant 0$, 试证条件

$$P\{X_{n+1}=j|X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i\}=P\{X_{n+1}=j|X_n=i\}$$

等价于对所有时刻 n,m 及所有状态 $i_0,\cdots,i_n,j_1,\cdots,j_m$ 有

$$\begin{aligned}&P\{X_{n+1}=j_1,\cdots,X_{n+m}=j_m|X_0=i_0,\cdots,X_n=i\}\\=&P\{X_{n+1}=j_1,\cdots,X_{n+m}=j_m|X_n=i_n\}.\end{aligned}$$

证：$\Leftarrow$ 只需令 $m=1$

$\Rightarrow$ 由 $P_{27}(3.4)$ 可知

$$\begin{aligned}&P\{X_{n+1}=j_1,\cdots,X_{n+m}=j_m|X_0=i_0,\cdots,X_n=i_n\}\\=&P\{X_{n+1}=j_1,\cdots,X_{n+m}=j_m,X_0=i_0,\cdots,X_n=i_n\}/P\{X_0=i_0,\cdots,X_n=i_n\}\\=&P\{X_0=i_0\}\cdot P_{j_1j_2}\cdots P_{j_{m-1}j_m}P_{i_0i_1}\cdots P_{i_1j_1}/[P\{X_0=i_0\}\cdot P_{i_0i_1}\cdots P_{i_{n-1}i_n}\\=&P\{X_n=i\}\cdot P_{j_1j_2}\cdots P_{j_{m-1}j_m}P_{i_nj_1}/P\{X_n=i_n\}\\=&P\{X_{n+1}=j_1,\cdots,X_{n+m}=j_m|X_n=i_n\}\end{aligned}$$

3.2 考虑状态 $0,1,2$ 上的一个 Markov 链 $X_n, n\geqslant 0$, 它有转移概率矩阵

$$P=\begin{pmatrix}0.1&0.2&0.7\\0.9&0.1&0\\0.1&0.8&0.1\end{pmatrix},$$

初始分布为 $p_0=0.3, p_1=0.4, p_2=0.3$, 试求概率 $P\{X_0=0,X_1=1,X_2=2\}$.

解：

$$P\{X_0=0,X_1=1,X_2=2\}=p_0P_{01}P_{12}=0.3\times 0.1\times 0=0$$

3.3 信号传送问题. 信号只有 0,1 两种, 分为多个阶段传输. 在每一步上出错的概率为 α . $X_0=0$ 是送出的信号, 而 X_n 是在第 n 步接收到的信号. 假定 X_n 为一 Markov 链, 它有转移概率矩阵 $P_{00}=P_{11}=1-\alpha, P_{01}=P_{10}=\alpha, 0<\alpha<1$. 试求

(a) 两步均不出错的概率 $P\{X_0=0,X_1=0,X_2=0\}$;

(b) 两步传送后收到正确信号的概率;

(c) 五步之后传送无误的概率 $P\{X_5=0|X_0=0\}$.

解：(a) $P\{X_0=0,X_1=0,X_2=0\}=p_0P_{00}P_{00}=1\cdot(1-\alpha)\cdot(1-\alpha)=(1-\alpha)^2$;

(b) $P=p_0P_{00}P_{00}+p_0P_{01}P_{10}=(1-\alpha)^2+\alpha^2=2\alpha^2-2\alpha+1$

(c) 转移概率矩阵 $P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \therefore P^{(5)} &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-2\alpha)^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1+(1-2\alpha)^5}{2} & \frac{1-(1-2\alpha)^5}{2} \\ \frac{1-(1-2\alpha)^5}{2} & \frac{1+(1-2\alpha)^5}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\therefore P\{X_5 = 0 | X_0 = 0\} = p_0 \cdot \frac{1+(1-2\alpha)^5}{2} = \frac{1+(1-2\alpha)^5}{2}$

3.4 A,B 两罐总共装各 N 个球. 作如下实验：在时刻 n 先 n 个球中等概率地任取一球. 然后从 A,B 两罐中任选一个, 选中 A 的概率为 p, 选中 B 的概率为 q. 之后再将选出的球放入选好的罐中. 设 X_n 为每次试验时 A 罐中的球数. 试求此 Markov 过程的转移概率矩阵.

解：

$$P_{ij} = \begin{cases} p \cdot \frac{i}{N} + q \cdot \frac{N-i}{N} & ,j = i \\ q \cdot \frac{i}{N} & ,j = i-1 (i = 1,2,\cdots,N) \\ p \cdot \frac{N-i}{N} & ,j = i+1 (i = 0,1,\cdots,N-1) \\ 0 & ,\text{其他} \end{cases}$$

其转移概率矩阵为

$$P = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} qN & pN & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & q(N-1)+p & p(N-1) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2q & q(N-2)+2p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2q+p(N-2) & 2p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q(N-1) & q+p(N-1) & p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & qN & pN \end{pmatrix}$$

3.5 重复掷币一直到连续出现两次正面为止. 假定钱币是均匀的, 试引入以连续出现次数为状态空间的 Markov 链, 并求出平均需要掷多少次试验才可以结束.

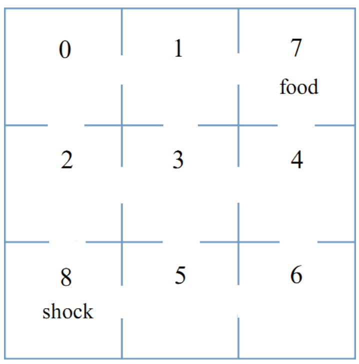
解：记 X_n 为第 n 次掷币后连续出现的正面次数, 则 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 为一 $M.C.$

其转移概率矩阵为 $P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad & E(T|X_0=0) \\
&= \sum_{k=0}^{2} E(T|X_0=0, X_1=k)\cdot P(X_1=k|X_0=0) \\
&= \sum_{k=0}^{2} E(T|X_1=k)\cdot P(X_1=k|X_0=0) \\
&= (1+v)\cdot\frac{1}{2} + E(T|X_1=1)\cdot\frac{1}{2} \\
\text{及}\quad & E(T|X_1=1) \\
&= \sum_{k=0}^{2} E(T|X_1=1, X_2=k)\cdot P(X_2=k|X_1=1) \\
&= \sum_{k=0}^{2} E(T|X_2=k)\cdot P(X_2=k|X_1=1) \\
&= (2+v)\cdot\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}\times 2
\end{aligned}
$$

解得 $E(T|X_0=0)=6$, 平均需掷 6 次.

3.6 迷宫问题. 将小家鼠放入迷宫内作动物的学习试验, 如下图所示. 在迷宫的第 7 号小格内放有美味食物而第 8 号小格内则是电击捕鼠装置. 假定当家鼠位于某格时有 k 个出口可以离去, 则它总是随机地选择一个, 概率为 $1/k$. 并假定每一次家鼠只能跑到相邻的小格去. 令过程 X_n 为家鼠在时刻 n 时所在小格的号码, 试写出这一 Markov 过程的转移概率阵, 并求出家鼠在遭到电击前能找到食物的概率.



解：

$$P=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} & \begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\
\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

设 u_k 为家鼠从 k 出发在遭到电击前能找到食物的概率, 显然 $u_7=1, u_8=0$,
设 T 为进入吸收态时刻, 则当 $0 \leqslant k \leqslant 6$ 时,

$$\begin{aligned}
u_k &= P\{X_T=7|X_0=k\} \\
&= \sum_{i=0}^{8} P\{X_T=7, X_1=i|X_0=k\} \\
&= \sum_{i=0}^{8} P\{X_T=7, X_1=i\}P\{X_1=i|X_0=k\}
\end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases}
u_0=\frac{1}{2}(u_1+u_2) \\
u_1=\frac{1}{3}(u_0+u_3+u_7) \\
u_2=\frac{1}{3}(u_0+u_3+u_8) \\
u_3=\frac{1}{4}(u_1+u_2+u_4+u_5) \\
u_4=\frac{1}{3}(u_3+u_6+u_7) \\
u_5=\frac{1}{3}(u_3+u_6+u_8) \\
u_6=\frac{1}{2}(u_4+u_5) \\
u_7=1 \\
u_8=0
\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}
u_0=\frac{1}{2} \\
u_1=\frac{2}{3} \\
u_2=\frac{1}{3} \\
u_3=\frac{1}{2} \\
u_4=\frac{2}{3} \\
u_5=\frac{1}{3} \\
u_6=\frac{1}{2} \\
u_7=1 \\
u_8=0
\end{cases}$$

3.7 记 $Z_i, i=1,2,\cdots$ 为一串独立同分布的离散随机变量. $P\{Z_1=k\}=p_k \geqslant 0, k=$

$0,1,2,\cdots,\sum\limits_{k=0}^{\infty}=1$. 记 $X_n=Z_n, n=1,2,\cdots$. 试求过程 X_n 的转移概率矩阵.

解：$\because P\{X_{n+1}=i_{n+1}|X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n\}=P\{X_{n+1}=i_{n+1}\}$

$P\{X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n\}=P\{X_{n+1}=i_{n+1}\}$

$\therefore P\{X_{n+1}=i_{n+1}|X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n\}=P\{X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n\}$

$\therefore \{X_n\}$ 是一 $M.C.$ 其转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

3.8 对第 7 题中的 Z_i, 令 $X_n=\max\{Z_1,\cdots,Z_n\}, n=1,2,\cdots$, 并约定 $X_0=0$. X_n 是否为 Markov 链? 如果是, 其转移概率阵是什么?

解：

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \max\{Z_1,\cdots,Z_n,Z_{n+1}\} \\ &= \max\{\max\{Z_1,\cdots,Z_n\},Z_{n+1}\} \\ &= \max\{X_n,Z_{n+1}\} \end{aligned}$$

$\therefore \{X_n\}$ 是 $M.C.$

$$P_{ij}=\begin{cases} 0 & ,j<i \\ p_j & ,j>i \\ \sum\limits_{k=0}^{i} p_k & ,j=i \\ 0 & ,\text{其他} \end{cases}$$

其转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & p_0+p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0+p_1+p_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

3.9 设 $f_{ij}^{(n)}$ 表示从 i 出发在 n 步转移时首次到达 j 的概率, 试证明

$$P_{ij}^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}.$$

证：设 $T_j=\min\{n:n\geqslant 0且X_n=j\}$

$$\begin{aligned}\therefore P_{ij}^{(n)}&=P\{X_n=j|X_0=i\}\\&=\sum_{k=0}^{n}P\{X_n=j,T_j=k|X_0=i\}\\&=\sum_{k=0}^{n}P\{T_j=k|X_0=i\}P_{jj}^{(n-k)}\\&=\sum_{k=0}^{n}P\{X_k=j,X_s\neq j(s=0,1,\cdots,k-1)|X_0=i\}P_{jj}^{(n-k)}\\&=\sum_{k=0}^{n}f_{ij}^{(k)}P_{jj}^{(n-k)}\end{aligned}$$

3.10 对第 7 题中的 Z_i, 若定义 $X_n=\sum\limits_{i=1}^{n}Z_i,n=1,2,\cdots,X_0=0$, 试证 X_n 为 Markov 链. 并求其转移概率矩阵.

证：对 $n\geqslant 0$ 有

$$\begin{aligned}&P\{X_{n+1}=i_{n+1}|X_0=i_0,\cdots,X_n=i_n\}\quad (i_0=0)\\&=P\{Z_{n+1}=i_{n+1}-i_n|X_0=i_0,\cdots,X_n=i_n\}\\&=P\{Z_{n+1}=i_{n+1}-i_n\}\\&=\begin{cases}P_{i_{n+1}-i_n} & ,i_{n+1}-i_n=0,1,2,\cdots\\0 & ,ow\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P\{X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n\}\\&=P\{X_n+Z_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n\}\\&=P\{Z_{n+1}=i_{n+1}-i_n\}\end{aligned}$$

$\therefore X_n$ 是 $M.C.$

$$P=\begin{pmatrix}p_0&p_1&p_2&\cdots\\0&p_0&p_1&\cdots\\0&0&p_0&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}$$

3.11 一 Markov 链有状态 $0,1,2,3$ 和转移概率矩阵

$$P=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

试求 $f_{00}^{(n)},n=1,2,3,4,5,\cdots$, 其中 $f_{00}^{(n)}$ 由

$$P\{X_n=i,X_k\neq i,k=1,\cdots,n-1|X_0=i\}$$

定义.

解：$f_{00}^{(1)}=P_{00}=0,f_{00}^{(2)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T=\frac{1}{4}$

对 $n\geqslant 2$ 有

$$f_{00}^{(n)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{n-2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

当 $n=3$ 时, $f_{00}^{(3)}=\frac{1}{8}$

当 $n\geqslant 4$ 时,

$$f_{00}^{(n)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2^{n-2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^{n-1}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^{n-1}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+2}}$$

3.12 在成败型的重复试验中, 每次试验结果为成功（S）或失败（F）. 同一结果相继出现称为一个游程（run）, 比如一结果 $FSSFFFSF$ 中共有两个成功游程, 三个失败游程. 设成功概率为 p, 失败概率为 $q=1-p$. 记 X_n 为第 n 次试验后成功游程的长度（若第 n 次试验, 则 $X_n=0$）. 试证 $\{X_n,n=1,2,\cdots\}$ 为一 Markov 链, 并确定其转移概率阵. 记 T 为返回状态 0 的时间, 试求 T 的分布及均值. 并由此对这一 Markov 链的状态进行分类.

证：$X_{n+1}=\begin{cases} X_{n+1} & ,\text{第 n+1 次试验成功} \\ 0 & ,\text{第 n+1 次试验失败} \end{cases}$

$\therefore\{X_n\}$ 是 $M.C.$

$$P(X_{n+1}=j|X_n=i)=\begin{cases} p & ,j=i+1 \\ q & ,j=0 \end{cases}$$

$$P=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array} \\ \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & \cdots \\ q & 0 & 0 & p & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

$$T=\min\{n:X_n=0,X_s\neq 0(s=1,2,\cdots,n-1)\}$$

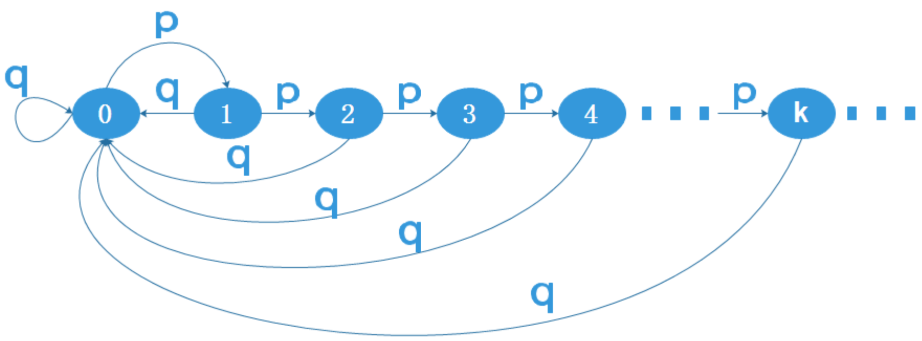
$$P(T=k)=p^{k-1}q \quad k=1,2,\cdots$$

$$\mathrm{E}T=\sum_{k=1}^{+\infty}p^{k-1}qk$$

$$\therefore p\mathrm{E}T=\sum_{k=1}^{+\infty}p^kqk$$

$$\therefore (1-p)\mathrm{E}T=q\mathrm{E}T=q+pq+p^2q+\cdots=\frac{q}{1-p}=1$$

$$\therefore \mathrm{E}T=\frac{1}{q}$$



所有状态互通，为一类

3.13 试证各方向游动的概率相等的对称随机游动在二维时是常返的

证：为使 n 步游动后回到原位置，向左移动的步数应等于向右移动的步数，向上移动的步数应等于向下移动的步数，$\therefore P_{00}^{(2k+1)}=0,k=0,1,2,\cdots$

再考虑 2k 步的情况，

$$
\begin{aligned}
P_{00}^{(2k)} &= \sum_{k_1=0}^{k} C_{2k-2k_1}^{k-k_1} C_{2k_1}^{k_1} C_{2k}^{2k_1} \left(\frac{1}{4}\right)^{2k} \\
&= \sum_{k_1=0}^{k} \frac{(2k)!}{(k!)^2} \left(C_k^{k_1}\right)^2 \left(\frac{1}{2^{2k}}\right)^2 \\
&= \frac{(2k)!}{(k!)^2} \left(\frac{1}{2^{2k}}\right)^2 \sum_{k_1=0}^{k} C_k^{k_1} C_k^{k-k_1} \\
&= \frac{(2k)!}{(k!)^2} \left(\frac{1}{2^{2k}}\right)^2 C_{2k}^{k} \\
&= \left(\frac{(2k)!}{(k!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2k}}\right)^2
\end{aligned}
$$

当 n 充分大时, 由 Stiring 公式

$$
P_{00}^{(2k)} \sim \left(\frac{(2k)^{2k+\frac{1}{2}} e^{-2k} \sqrt{2\pi}}{(k^{k+\frac{1}{2}} e^{-k} \sqrt{2\pi})^2} \cdot \frac{1}{2^{2k}}\right)^2 = \frac{1}{\pi k}
$$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P_{ii}^{(n)} = +\infty$ (i 代表任一格点)

$\therefore$ 二维对称随机游动是常返的

3.14 某厂对该厂生产的同类产品的三种型号调查顾客的消费习惯. 并把它们归结为 Markov 链模型. 记顾客消费习惯在 A,B,C 三种型号间的转移概率矩阵分别为下列四种. 请依这些转移阵所提供的信息对厂家提出关于 A,B 两种型号的咨询意见.

$$
(1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad
(2)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
(3)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad
(4)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

解：

(1) 不是概率转移矩阵, 第三行行和不为 1.

(2)

$$
P^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
$$

$\therefore A,B,C$ 三状态互通, 所有状态可遍历.

设 (π_A,π_B,π_C) 为经过长时间后三个产品的市场占有额, 则

$$\begin{cases}(\pi_A,\pi_B,\pi_C)\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}=(\pi_A,\pi_B,\pi_C)\\\pi_A+\pi_B+\pi_C=1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\pi_A=\pi_B=\pi_C=1$$

$\therefore$ 三个品牌竞争力差不多, 可以都生产.

(3) 由归纳法可知

$$P^n=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)&\frac{1}{3^n}&\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

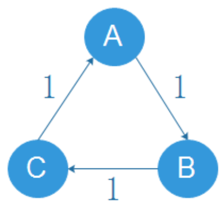
可见

$$\pi_B=\lim_{n\to}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0,$$

$$\begin{cases}(\pi_A,\pi_C)\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=(\pi_A,\pi_C)\\\pi_A+\pi_C=1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\pi_A=\pi_C=\frac{1}{2}$$

$\therefore B$ 将逐渐淡出市场, 建议停止生产 B, 扩大对 A 的生产.

(4)



$\therefore A,B,C$ 三状态互通, 所有状态可遍历.

$$\begin{cases}(\pi_A,\pi_B,\pi_C)\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=(\pi_A,\pi_B,\pi_C)\\\pi_A+\pi_B+\pi_C=1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\pi_A=\pi_B=\pi_C=\frac{1}{3}$$

$\therefore A,B,C$ 市场占有率相同, 可维持现状.

3.15 考虑一有限状态的 Markov 链. 试证明

(a) 至少有一个状态是常返的,

(b) 任何常返状态必定是正常返的.

证：(a) 反设所有状态均为瞬过或零常返 (加强结论), 则对 $\forall i \in S$, 有

$$\lim_{n\to+\infty} P_{ii}^{(n)} = 0 \qquad (*)$$

考虑 $P_{ij}^{(n)} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}$, 则有

$$\sum_{k=1}^{\ell} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)} \leqslant P_{ij}^{(n)} \leqslant \sum_{k=1}^{\ell} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=l}^{+\infty} f_{ij}^{(k)} \qquad (**)$$

固定 ℓ, 令 $n \to +\infty$, 则由 $(*)$ 得

$$0 \leqslant \lim_{n\to+\infty} P_{ij}^{(n)} \leqslant 0 + \sum_{k=\ell}^{+\infty} f_{ij}^{(k)} \qquad (***)$$

在 $(***)$ 中令 $\ell \to +\infty$, 由于 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_{ij}^{(k)} \leqslant 1$ 收敛

$$\therefore \lim_{n\to+\infty} P_{ij}^{(n)} = 0 \qquad (*4)$$

若此有限状态 $M.C.$ 有 N 个状态, 则

$$\sum_{j=1}^{N} P_{ij}^{(n)} = 1 \qquad (*5)$$

$(*5)$ 中令 $n \to +\infty$, 由 $(*4)$ 得 $0=1$, 矛盾

$\therefore$ 至少有一个状态是 (正) 常返的

(b) 若存在零常返状态 i, 可构造 $C(i) = \{j | i \leftrightarrow j\}$, 则 $C(i)$ 为原 $M.C.$ 的一不可约子 $M.C.$(有限状态), 于是 $C(i)$ 中所有状态均为零常返, 与有限状态 $M.C.$ 至少有一个正常返状态矛盾, $\therefore$ 任何常返状态均为正常返

3.16 考虑一生长与灾害模型. 这类 Markov 链有状态 $0,1,2,\cdots$, 当过程处于状态 i 时它既可能以概率 p_i 转移到 $i+1$(生长) 也能以概率 $q_i = 1-p_i$ 落回到状态 0(灾害). 而从状态“0”又必然“无中”生有. 即 $P_{01} \equiv 1$.

(a) 试证所有状态为常返的条件是

$$\lim_{n\to\infty} (p_1 p_2 p_3 \cdots p_n) = 0.$$

(b) 若此链为常返, 试求其为零常返的条件.

证：

(a) 其概率转移阵为

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & \\ q_2 & 0 & 0 & p_2 & \\ q_3 & 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

易知此 M.C. 是不可约的, $\therefore$ 只需证状态 0 常返 $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to+\infty} p_1p_2\cdots p_n = 0$

显然 $f_{00}^{(0)} = f_{00}^{(1)} = 0, f_{00}^{(2)} = q_1$

$$\begin{aligned} f_{00}^{(n)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & p_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \\ &= AB^{n-2}C^T, \quad (n \geqslant 3) \end{aligned}$$

易知

$$B^{n-2} = \begin{pmatrix} \underbrace{0 \ \cdots \ 0}_{n-2\text{个}} & p_1\cdots p_{n-2} & 0 & \cdots \\ \underbrace{0 \ \cdots \ 0}_{n-2\text{个}} & 0 & p_2\cdots p_{n-2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\therefore f_{00}^{(n)} = (\overbrace{0 \ \cdots \ 0}^{n-2\text{个}} \ \ p_1\cdots p_{n-2} \ \ 0 \ \ 0 \ \ \cdots)(q_1 \ \ q_2 \ \ \cdots)^T = p_1\cdots p_{n-2}q_{n-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore f_{00} &= q_1 + \sum_{n=3}^{+\infty} p_1\cdots p_{n-2}q_{n-1} \\ &= 1 - p_1 + \sum_{n=3}^{+\infty}(p_1\cdots p_{n-2} - p_1\cdots p_{n-2}p_{n-1}) \\ &= 1 - \lim_{n\to+\infty} p_1p_2\cdots p_n \end{aligned}$$

而状态 0 常返 $\Leftrightarrow f_{00} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} p_1p_2\cdots p_n = 0.$

(b) 只需考虑状态 0,

$$\begin{aligned}\mu_0 &= \sum_{n=0}^{+\infty} n f_{00}^{(n)} \\ &= 2(1-p_1) + \sum_{n=3}^{+\infty} n(p_1\cdots p_{n-2} - p_1\cdots p_{n-1}) \\ &= 2 + p_1 + p_1p_2 + p_1p_2p_3 + \cdots\end{aligned}$$

若为零常返, 则 $\mu_0 = +\infty \Leftrightarrow$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_1\cdots p_n$ 发散 (且通项趋于 0)

3.17 试计算转移概率阵

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

的极限分布.

解；设 π 为该 $M.C.$ 的平稳分布, $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$

$$\begin{cases} \pi \geqslant 0 \\ \sum\limits_{i=0}^{2} \pi_i = 1 \\ \pi P = \pi \end{cases} \Rightarrow \pi = (\frac{5}{14}, \frac{6}{14}, \frac{3}{14})$$

易知该 $M.C.$ 不可约且遍历

$\therefore$ 极限分布为 $\begin{pmatrix} \frac{5}{14} & \frac{6}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{5}{14} & \frac{6}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{5}{14} & \frac{6}{14} & \frac{3}{14} \end{pmatrix}$

3.18 假定在逐日的天气变化模型中, 每天的阴晴与前两天的状况关系很大. 于是可考虑 4 状态的 Markov 链：接连两晴天, 一晴一阴, 一阴一晴, 以及接连两阴天, 分别记为 $(S,S),(S,C),(C,S),(C,C)$. 该链的转移概率阵为

$$P = \begin{array}{c} \\ (S,S) \\ (S,C) \\ (C,S) \\ (C,C) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (S,S) & (S,C) & (C,S) & (C,C) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \end{array}$$

试求这一 Markov 链的平稳分布. 并求出长期平均的晴朗天数.

解：设其平稳分布为 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$

$$\begin{cases}\pi \geqslant 0 \\ \sum\limits_{i=0}^{3} \pi_i = 1 \\ \pi P = \pi\end{cases} \Rightarrow \pi = (\frac{3}{11}, \frac{1}{11}, \frac{1}{11}, \frac{6}{11})$$

π 反映了 $M.C.$ 中各状态在长期中所占的平均比例

$\therefore$ 一年中晴朗的天数 $= \frac{365}{2} \times \left(\frac{3}{11} \times 2 + \frac{1}{11} + \frac{1}{11}\right) = 132.7$(天)

3.19 某人有 M 把伞并在办公室和家之间往返. 如某天他在家时 (办公室时) 下雨了而且家中 (办公室) 有伞他就带一把伞去上班 (回家), 不下雨时他从不带伞. 如果每天与以往独立地早上 (或晚上) 下雨的概率为 p, 试定义一 $M+1$ 状态的 Markov 链以研究他被雨淋湿的机会.

解：

定义 X_n：第 n 天早晨家中雨伞数, $\therefore \{X_n, n \geqslant 0\}$ 为一 $M.C.$

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & & & \\ p(1-p) & (1-p)^2+p^2 & p(1-p) & & & \\ 0 & p(1-p) & (1-p)^2+p^2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & p(1-p) & (1-p)^2+p^2 & p(1-p) \\ & & & 0 & p(1-p) & 1-p(1-p) \end{pmatrix}$$

设 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_M)$ 为其平稳分布

$$\begin{cases}\pi \geqslant 0 \\ \sum\limits_{i=0}^{M} \pi_i = 1 \\ \pi P = \pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\pi_0 = \frac{1-p}{M+1-p} \\ \pi_i = \frac{1}{M+1-p} (i = 1, 2, \cdots, M)\end{cases}$$

易知此 $M.C.$ 遍历,

$\therefore \pi$ 又是其极限分布, 其被雨淋湿的概率为

$$P_{淋} = p\pi_0 + p(1-p)\pi_M = 2p\frac{1-p}{M+1-p}$$

3.(19.5) 袋中有 N 个球, 为白色或黑色, 每次从袋中随机取一球然后放回一个不同颜色的球, 若袋中有 k 个白球, 则称系统为状态 k. 试用 M.C. 描述此模型, 且

(1) 求 P, 作状态分类.

(2) 问该 M.C. 是否存在平稳分布, 有则求出.

(3) 问极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} P_{ij}^{(n)}$ 是否存在? 为什么?

解：

(1) 转移概率

$$P_{ij}=\begin{cases}\frac{N-i}{N} & ,j=i+1\\ \frac{i}{N} & ,j=i-1\\ 0 & ,ow\end{cases}$$

转移概率矩阵为

$$P=\begin{array}{c}\\ 0\\ 1\\ 2\\ 3\\ \vdots\\ \vdots\\ N\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix}0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & N\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ \frac{1}{N} & 0 & \frac{N-1}{N} & 0 & & & \\ 0 & \frac{2}{N} & 0 & \frac{N-2}{N} & & & \\ 0 & 0 & \frac{3}{N} & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots & \frac{1}{N}\\ & & & & & 1 & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

显然任两状态可互达, 所以不可约.

(2) 设有平稳分布 $\pi=(\pi_0,\pi_1,\cdots,\pi_N)$

$$\begin{cases}\pi\geqslant 0\\ \sum\limits_{i=0}^{N}\pi_i=1\\ \pi P=\pi\end{cases}\Rightarrow\pi_i=\frac{C_N^i}{2^N}\quad(i=0,1,\cdots,N)$$

(3).$\because$M.C. 为有限状态的不可约链, 故所有状态均为正常返,

$\therefore\mu_j<+\infty$ $(\forall j\in S)$, 易知其周期为 $d=2$.

引入

$$f_{ij}(r)=\sum_{m=0}^{+\infty}f_{ij}^{(md+r)}\ (0\leqslant r\leqslant d-1),$$

表示从状态 i 出发, 在时刻 $n\equiv r\pmod d$ 首次到达状态 j 的概率.

断言: 若 j 为正常返状态且周期为 d, 则对 $\forall i$及$0\leqslant r\leqslant d-1$, 有

$$\lim_{n\to+\infty}P_{ij}^{(nd+r)}=f_{ij}(r)\frac{d}{\mu_j}.$$

则当 $i-j$ 为偶数时, 易知在此 M.C. 中

$$f_{ij}(1)=0,\ f_{ij}(0)>0,$$

$$\therefore \lim_{n\to+\infty} P_{ij}^{(2n)} = f_{ij}(0)\frac{2}{\mu_j}>0,\ \lim_{n\to+\infty} P_{ij}^{(2n+1)} = f_{ij}(1)\frac{2}{\mu_j}=0$$

即当 $i-j$ 为偶数时 $\lim\limits_{n\to+\infty} P_{ij}^{(n)}$ 不存在.
当 $i-j$ 为奇数时,

$$f_{ij}(1)=0,\ f_{ij}(0)>0,$$

同理知不存在, $\therefore \lim\limits_{n\to+\infty} P_{ij}^{(n)}$ 不存在.
断言的证明:

$$\because 当 n\neq kd 时, P_{jj}^{(n)}=0$$

$$\therefore P_{ij}^{(nd+r)} = \sum_{k=0}^{nd+r} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(nd+r-k)} = \sum_{m=0}^{n} f_{ij}^{(nd+r)} P_{jj}^{(n-m)d}$$

$\therefore$ 对 $1\leqslant N<n$, 有

$$\sum_{m=0}^{N} f_{ij}^{(md+r)} P_j^{(n-m)d} j \leqslant P_{ij}^{(nd+r)} \leqslant \sum_{m=0}^{N} f_{ij}^{(md+r)} P_j^{(n-m)d} j + \sum_{m=N+1}^{+\infty} f_{ij}^{(md+r)}$$

先令 $n\to+\infty$ 再令 $N\to+\infty$, 由 M.C. 基本极限定理得 (注意到 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_{ii}^{(N)}$ 收敛)

$$f_{ij}(r)\frac{d}{\mu_j} \leqslant \lim_{n\to+\infty} P_{ij}^{(nd+r)} \leqslant f_{ij}(r)\frac{d}{\mu_j}$$

3.23 一连续时间 Markov 链有 0 和 1 两个状态, 在状态 0 和 1 的逗留时间服从参数为 $\lambda>0$ 及 $\mu>0$ 的指数分布. 试求在时刻 0 从状态 0 起始, t 时刻后过程处于状态 0 的概率 $P_{00}(t)$

解：

$$\begin{aligned} P_{00}(t+h) &= \sum_{k\geqslant 0} P_{0k}(t)P_{k0}(h) \\ &= P_{00}(t)P_{00}(h)+P_{01}(t)P_{10}(h) \\ &= P_{00}(1-\lambda h+o(h))+(1-P_{00}(t))(\mu h+o(h)) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{P_{00}(t+h)-P_{00}(t)}{h} = -(\lambda+\mu)P_{00}(t)+\mu+\frac{o(h)}{h}$$

令 $h \to 0$, 则 $P'_{00}(t) = -(\lambda+\mu)P_{00}(t)+\mu$

而 $P_{00}(0)=1$, 解微分方程得

$$P_{00}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

3.24 在第 23 题中如果 $\lambda=\mu$. 定义 $N(t)$ 为过程在 $[0,t]$ 中改变的次数, 试求 $N(t)$ 的概率分布.

解：设 $f(t)$ 为状态 0(或 1) 逗留时间的概率密度函数, $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$

记 $P_k(t) = P\left(N(t)=k|N(0)=0\right), k=0,1,2,\cdots$

$$\begin{aligned}
P_0(t) &= P(\text{在状态 0(或 1) 逗留时间 } t_s > t) \\
&= 1 - P(t_s \leqslant t) \\
&= 1 - \int_0^t \lambda e^{\lambda t_s} dt_s \\
&= e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

猜想 $P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$

设到 $k-1$ 为止猜想成立, 则

$$\begin{aligned}
P_k(t) &= \int_0^t f(t_s)P_{k-1}(t-t_s)dt_s \\
&= \int_0^t \lambda e^{-\lambda t_s}\frac{(\lambda(t-t_s))^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda(t-t_s)}dt_s \\
&= \frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda t}\int_0^t (t-t_s)^{k-1}dt_s \\
&= \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

综上, 当 $\lambda=\mu$ 时 $N(t)$ 服从参数为 λt 的 Possion 分布

以下如果没有指明变量 t 的取值范围, 一般视为 $t \in R$, 平稳过程是指宽平稳过程.

4.1 设 $X(t) = \sin Ut$, 这里 U 为 $(0, 2\pi)$ 上的均匀分布.

(a) 若 $t = 1, 2, \cdots$, 证明 $\{X(t), t = 1, 2, \cdots\}$ 是宽平稳但不是严平稳过程,

(b) 设 $t \in [0, +\infty)$, 证明 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 既不是严平稳也不是宽平稳过程.

证：(a)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X(t)) &= \mathrm{E}\sin Ut \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \sin UtdU \\ &= 0 \quad (t = 1, 2, \cdots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X(t), X(s)) &= \mathrm{E}(\sin Ut \cdot \sin Us) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{E}\left(\cos(t-s)U - \cos(t+s)U\right) \\ &= \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{t-s}\sin(t-s)U\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{t+s}\sin(t+s)U\Big|_0^{2\pi}\right\} \\ &= 0 \quad (t \neq s) \end{aligned}$$

当 $t = s$ 时 $\mathrm{Cov}(X(t), X(s)) = \mathrm{E}\sin^2 Ut = \frac{1}{2}$

$\therefore$ 是宽平稳

考虑 $F_t(x) = P(\sin Ut \leqslant x)$, 显然 $F_{t+h} = P\left(\sin U(t+h) \leqslant x\right)$ 与其不一定相同

$\therefore$ 不是严平稳

(b)

$$EX(t) = \frac{1}{2\pi t}(1 - \cos 2\pi t)$$

$$DX(t) = \mathrm{E}\left(\sin Ut - \frac{1}{2\pi t}(1 - \cos 2\pi t)\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sin 4\pi t}{8\pi t} - \left(\frac{1 - \cos 2\pi t}{2\pi t}\right)^2$$

都与 t 相关

$\therefore$ 不是宽平稳

若其严平稳, 则因二阶矩存在, 应为宽平稳, 矛盾.

$\therefore$ 不是严平稳.

4.2 设 $\{X_n, n = 0, 1, 2\cdots\}$ 是平稳序列, 定义 $\{X_n^{(i)}, n = 1, 2, \cdots\}, i = 1, 2, \cdots$, 为

$$X_n^{(1)} = X_n - X_{n-1},$$

$$X_n^{(2)} = X_n^{(1)} - X_{n-1}^{(1)}, \cdots\cdots$$

证明这些序列仍是平稳序列.

证：

$1^\circ \ell = 0$ 时

$\mathrm{E}X_n$ 依定义为常数 C_0

$\mathrm{Cov}(X_n, X_m)$ 依定义为 $n-m$ 的函数 $f_0(n-m)$

成立

2° 设当 $\ell \leqslant k$ 时成立, 则当 $\ell = k+1$ 时

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}X_n^{(\ell)} &= \mathrm{E}(X_n^{(k)} - X_{n-1}^{(k)}) = C_k - C_k = 0 \\
\mathrm{Cov}(X^{(k+1)}, X_m^{(k+1)}) &= \mathrm{E}(X_n^{(k+1)} X_m^{(k+1)}) \\
&= \mathrm{E}\left[(X_n^{(k)} - X_{n-1}^{(k)})(X_m^{(k)} - X_{m-1}^{(k)})\right] \\
&= \mathrm{E}(X_n^{(k)} X_m^{(k)}) - \mathrm{E}(X_{n-1}^{(k)} X_m^{(k)}) - \mathrm{E}(X_n^{(k)} X_{m-1}^{(k)}) + \mathrm{E}(X_{n-1}^{(k)} X_{m-1}^{(k)}) \\
&= f_k(n-m) - f_k(n-1-m) - f_k(n-m+1) + f_k(n-m) \\
&= f_\ell(n-m)
\end{aligned}
$$

只与 $n-m$ 有关

$\therefore$ 是平稳的

4.3 设 $X_n = \sum\limits_{k=1}^{N} \sigma_k \sqrt{2} \cos(a_k n - U_k)$, 这里 σ_k 和 a_k 为正常数, $k = 1, \cdots, N; U_1, \cdots, U_n$ 是 $(0, 2\pi)$ 上独立均匀分布随机变量, 证明 $\{X_n, n = 0, \pm 1, \cdots\}$ 是平稳过程.

证：$EX_n = \sum\limits_{k=1}^{N} \sigma_k \sqrt{2}(\cos a_k n E \cos U_k + \sin a_k n E \sin U_k) = 0$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_n, X_m) &= \mathrm{E}(X_n, X_m) \\
&= \mathrm{E}\left[\sum_{k=1}^{N} \sigma_k \sqrt{2} \cos a_k n - U_k \sum_{j=1}^{N} \sigma_j \sqrt{2} \cos(a_j m - U_j)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{N} 2\sigma_k^2 \mathrm{E}\left[\cos(a_k n - U_k)\cos(a_k m - U_k)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^2 \mathrm{E}\left[\cos a_k(n-m) + \cos(a_k n + a_k m - 2U_k)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^2 \cos a_k(n-m)
\end{aligned}
$$

只与 $n-m$ 有关

$\therefore$ 宽平稳.

4.4 设 $A_k, k=1,2,\cdots,n$ 是 n 个实随机变量; $\omega_k, k=1,2,\cdots,n$, 是 n 个实数. 试问 A_k 以及 A_k 之间应满足怎样的条件才能使

$$Z(t)=\sum_{k=1}^{n}A_k e^{j\omega_k t}$$

是一个复的平稳过程.

解：要求

$$\mathrm{E}Z(t)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}A_k e^{j\omega_k t}=const$$

$\therefore \mathrm{E}A_k=0$

要求

$$\mathrm{Cov}(Z(t),Z(s))=\mathrm{E}(Z(t)\bar{Z(s)})=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{\ell=1}^{+\infty}\mathrm{E}(A_kA_\ell)\cdot e^{j\omega_k t-j\omega_\ell s}$$

只与 $t-s$ 有关

$\therefore \mathrm{E}(A_kA_l)=0 \quad (k\neq\ell\text{且}\omega_k\neq\omega_\ell)$

4.6 设 $\{X(t)\}$ 是一个平稳过程, 对每个 $t\in\mathbf{R}$, $X'(t)$ 存在. 证明对每个给定的 t, $X(t)$ 与 $X'(t)$ 不相关, 其中 $X'(t)=\frac{dX(t)}{dt}$.

证明：以下假定求导数和求期望可交换

设 $\mathrm{E}(X(t))=m, D(X(t))=\sigma^2$

$$\begin{aligned}
&\therefore \mathrm{E}(X(t+\Delta t))=m\\
&\because X'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}\\
&\therefore \mathrm{E}(X'(t))=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \mathrm{Cov}(X(t),X'(t))&=\mathrm{E}(X(t)X'(t))\\
&=\frac{1}{2}\mathrm{E}\left[\left(X^2(t)\right)'\right]\\
&=\frac{1}{2}\left(EX^2(t)\right)'\\
&=\frac{1}{2}(\sigma^2+m^2)'\\
&=0
\end{aligned}$$

$\therefore$ 不相关

4.7 设 $\{X(t)\}$ 是高斯过程, 均值为 0, 协方差函数 $R(\tau)=4\exp-2|\tau|$. 令

$$Z(t)=X(t+1), W(t)=X(t-1),$$

(i) 求 $E(Z(t)W(t))$ 和 $E(Z(t)+W(t))^2$;

(ii) 求 $Z(t)$ 的密度函数 $f_Z(z)$ 及 $P(Z(t)<1)$;

(iii) 求 $Z(t),W(t)$ 的联合密度 $f_{Z,W}(z,w)$.

解：

(i)

$$\begin{aligned}E(Z(t)W(t)) &= E(X(t+1)X(t-1)) \\ &= R(2) \\ &= 4e^{-4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(Z(t)W(t))^2 &= E\big(X^2(t+1)+2X(t+1)X(t-1)+X^2(t-1)\big) \\ &= 2EX^2(t)+2R(2) \\ &= 2\big[DX(t)-E^2X(t)\big]+4e^{-4} \\ &= 2R(0)+4e^{-4} \\ &= 4(1+e^{-4})\end{aligned}$$

(ii)$Z(t)=X(t+1)\sim N(0,2^2)$

$\therefore f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 2^2}}e^{-\frac{z^2}{2\cdot 2^2}}=\frac{1}{\sqrt{8\pi}}e^{-\frac{z^2}{8}}$

$\therefore P(Z(t)<1)=\int_{-\infty}^{1}f_Z(z)\,dz=\frac{1}{\sqrt{8\pi}}\int_{-\infty}^{1}e^{-\frac{z^2}{8}}\,dz$

(iii) 显然 $f_{Z,W}(z,w)$ 为二维正态分布概率密度函数

协方差矩阵

$$C=\begin{pmatrix}4 & 4e^{-4}\\ 4e^{-4} & 4\end{pmatrix}$$

其逆矩阵

$$C^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4(1-e^{-}8)} & -\frac{e^{-4}}{41-e^{-}8}\\ -\frac{e^{-4}}{41-e^{-}8} & \frac{1}{4(1-e^{-}8)}\end{pmatrix}$$

其行列式 $|C|=16(1-e^{-8})$

期望向量 $\bar{\mu}=(0,0)$

$$\begin{aligned}\therefore f_{Z,W}(z,w) &= \frac{1}{2\pi\,|C|}\exp\left\{-\frac{1}{2}\Big((z,w)-\bar{\mu}\Big)C^{-1}\Big((z,w)-\bar{\mu}\Big)^T\right\} \\ &= \frac{1}{8\pi\sqrt{1-e^{-8}}}\exp\left\{-\frac{z^2+w^2-2e^{-4}wz}{8(1-e^{-8})}\right\}\end{aligned}$$

4.8 设 $\{X(t), t \in \mathbf{R}\}$ 是一个严平稳过程, ε 为只取有限个值的随机变量. 证明 $\{Y(t) = X(t-\varepsilon), t \in \mathbf{R}\}$ 仍是一个严平稳过程.

提示：对 ε 用全概率公式.

证：设 ε 可取 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$

$$
\begin{aligned}
\text{则}\quad & P\left\{Y(t_1+h) \leqslant y_1, \cdots, Y(t_k+h) \leqslant y_k\right\} \\
&= P\left\{X(t_1-\varepsilon+h) \leqslant y_1, \cdots, X(t_k-\varepsilon+h) \leqslant y_k\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(\varepsilon=\varepsilon_i) P\left\{X(t_1-\varepsilon_i+h) \leqslant y_1, \cdots, X(t_k-\varepsilon_i+h) \leqslant y_k | \varepsilon=\varepsilon_i\right\}
\end{aligned}
$$

$\because X(t)$ 严平稳

$$
\begin{aligned}
\therefore \text{上式} &= \sum_{i=1}^{n} P(\varepsilon=\varepsilon_i) P\left\{X(t_1-\varepsilon_i) \leqslant y_1, \cdots, X(t_k-\varepsilon) \leqslant y_k | \varepsilon=\varepsilon_i\right\} \\
&= P\left\{X(t_1-\varepsilon) \leqslant y_1, \cdots, X(t_k-\varepsilon) \leqslant y_k\right\} \\
&= P\left\{Y(t_1) \leqslant y_1, \cdots, Y(t_k) \leqslant y_k\right\}
\end{aligned}
$$

$\therefore Y(t)$ 为严平稳.

4.10 设 $\{X(t)\}$ 是一个复值平稳过程, 证明

$$
E|X(t+\tau)-X(t)|^2 = 2\Re e(R(0)-R(\tau)).
$$

证：记 $m = EX(t)$

$$
\begin{aligned}
\text{则} E\left|X(t+\tau)-X(t)\right|^2 &= E\left|(X(t+\tau)-m)-(X(t)-m)\right|^2 \\
&= E\left|X(t+\tau)-m\right|^2 + E\left|X(t)-m\right|^2 - E\left[(X(t+\tau)-m)\overline{(X(t)-m)}\right] \\
&\quad - E\left[(X(t)-m)\overline{(X(t+\tau)-m)}\right] \\
&= 2R(0) - R(-\tau) - R(\tau)
\end{aligned}
$$

又 $\because R(-\tau) = \overline{R(\tau)}$

$\therefore$ 上式 $= 2\Re e(R(0)-R(\tau))$

4.11 设 $\{X(t)\}$ 是零均值的平稳高斯过程, 协方差函数为 $R(\tau)$, 证明

$$
P(X'(t) \leqslant a) = \phi\left(\frac{a}{\sqrt{-R''(0)}}\right),
$$

其中 $\phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数.

证：注意到 $X'(t)$ 服从正态分布

而 $EX'(t)=\left[EX(t)\right]'=0$

$VarX'(t)=\mathrm{Cov}(X'(t),X'(t+0))=-R''(0)$

$\therefore X'(t)\sim N(0,-R''(0))$

$$\therefore P\big(X'(t)\leqslant a\big)=P\left(\frac{X'(t)}{\sqrt{-R''(0)}}\leqslant\frac{a}{\sqrt{-R''(0)}}\right)=\phi\left(\frac{a}{\sqrt{-R''(0)}}\right)$$

4.12 设 $\{X(t)\}$ 为连续宽平稳过程, 均值 m 未知, 协方差函数为 $R(\tau)=ae^{-b|\tau|},\tau\in R,a>0,b>0$. 对固定的 $T>0$, 令 $\overline{X}=T^{-1}\int_0^T X(s)\,ds$. 证明 $E\overline{X}=m$(即 $\overline{X}$ 是 m 的无偏估计) 以及

$$Var(\overline{X})=2a[(bT)^{-1}-(bT)^{-2}(1-e^{-bT})].$$

提示：在上述条件下, 期望号与积分号可以交换.

证：

$$\begin{aligned}E\overline{X}&=E\big[\frac{1}{T}\int_0^T X(s)\,ds\big]\\&=\frac{1}{T}\int_0^T EX(s)\,ds\\&=\frac{mT}{T}\\&=m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Var(\overline{X})&=E\left[\frac{1}{T^2}\left(\int_0^T X(t)\,dt-m\right)\left(\int_0^T X(s)\,ds-m\right)\right]\\&=\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T E\big[(X(t)-m)(X(s)-m)\big]\,dsdt\\&=\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T R(t-s)\,dsdt\\&=\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T ae^{-b|t-s|}\,dsdt\\&=\frac{2a}{T^2}\int_0^T dt\int_0^T e^{-b(t-s|}\,ds\\&=\frac{2a}{T^2}\int_0^T\frac{1}{b}\big(1-e^{-bt}\big)\,dt\\&=2a\big[(bT)^{-1}-(bT)^{-2}(1-e^{-bT})\big].\end{aligned}$$

4.13 设 $\{X(t)\}$ 为平稳过程, 设 $\{X(t)\}$ 的 n 阶导数 $X^{(n)}(t)$ 存在, 证明 $\{X^{(n)}(t)\}$ 是平稳过程.

提示：利用协方差函数性质 4.

证：$EX^{(n)}(t)=\left[EX(t)\right]^{(n)}=0$

$\mathrm{Cov}\big(X^{(n)}(t),X^{(n)}(t+\tau)\big)=(-1)^nR^{(2n)}(\tau)$

$\therefore \{X^{(n)}(t)\}$ 是平稳过程.

4.14 证明定理 4.1 中关于平稳序列均值的遍历性定理.

提示：用 Schwarz 不等式

证：

充分性：

$$
\begin{aligned}
&E\left|\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}X(k)-m\right|^2 \qquad (m=E(X_n))\\
=&\frac{1}{(2N+1)^2}E\left(\sum_{k=-N}^{N}X(k)-m\right)^2\\
=&\frac{1}{(2N+1)^2}E\left(\sum_{k=-N}^{N}X(k)-m\right)\left(\sum_{\ell=-N}^{N}X(\ell)-m\right)\\
=&\frac{1}{(2N+1)^2}\sum_{k=-N}^{N}\sum_{\ell=-N}^{N}R(k-\ell)\\
=&\frac{1}{(2N+1)^2}\left[\sum_{\tau=0}^{N}R(\tau)\cdot 2(2N+1-\tau)-(2N+1)R(0)\right]\\
\leqslant&\left|\frac{2}{2N+1}\sum_{\tau=0}^{N}R(\tau)\right|+\left|\frac{1}{2N+1}R(0)\right|
\end{aligned}
$$

$$
\because \lim_{N\to+\infty}\frac{2}{2N+1}\sum_{\tau=0}^{N}R(\tau)=\lim_{N\to+\infty}\frac{2}{2N-1}\sum_{\tau=0}^{N-1}R(\tau)=\lim_{N\to+\infty}\frac{2N}{2N-1}\cdot\frac{1}{N}\sum_{\tau=0}^{N-1}R(\tau)=0,
$$

$$
\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2N+1}R(0)=0,
$$

$$
\therefore \lim_{N\to+\infty}E\left|\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}X(k)-m\right|^2=0.
$$

必要性：记 $\overline{X}_N=\frac{1}{2N+1}\sum\limits_{-N}^{N}X_k$, 则有

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{2N+1}\sum_{\tau=0}^{2N}R(\tau)\right]^2\\
&=\left[\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}\mathrm{Cov}(X_{-N},X_k)\right]^2\\
&=\left[\mathrm{Cov}(X_{-N},\overline{X}_N)\right]^2\\
&\leqslant Var(X_{-N})Var(\overline{X}_N) \qquad \text{(Schwarz 不等式)}\\
&=R(0)E(\overline{X}_N-m)^2\to 0 \quad (N\to+\infty)
\end{aligned}
$$

从而有

$$
\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{\tau=0}^{2N}R(\tau)=0,
$$

由上易得

$$
\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{\tau=0}^{N-1}R(\tau)=0.
$$

4.15 如果 (X_1,X_2,X_3,X_4) 是均值为 0 的联合正态随机向量, 则

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}X_1X_2X_3X_4 =&\mathrm{Cov}(X_1,X_2)\mathrm{Cov}(X_3,X_4)+\mathrm{Cov}(X_1,X_3)\mathrm{Cov}(X_2,X_4)\\
&+\mathrm{Cov}(X_1,X_4)\mathrm{Cov}(X_2,X_3).
\end{aligned}
$$

利用这个事实证明定理 4.3

证：

取固定的 $\tau\in\mathbb{Z}$, 记 $X_{n+\tau}X_n\triangleq Y_n$, 则

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}Y_n &= R_X(\tau)(const)\\
\mathrm{Cov}(Y_{n+\tau_1},Y_n) &= \mathrm{E}Y_{n+\tau_1}Y_n - R_X^2(\tau)\\
&= \mathrm{E}X_{n+\tau_1+\tau}X_{n+\tau_1}X_{n+\tau}X_n - R_X^2(\tau)\\
&= R_X^2(\tau)+R_X^2(\tau_1)+R_X(\tau_1+\tau)R_X(\tau_1-\tau)-R_X^2(\tau)\\
&= R_X^2(\tau_1)+R_X(\tau_1+\tau)R_X(\tau_1-\tau)\\
&= R_Y(\tau_1)
\end{aligned}
$$

$\therefore \{Y_n\}$ 是平稳过程.

又易见 $X=\{X_n,n\in\mathbb{Z}\}$ 的协方差函数遍历性成立的充要条件是 $Y=\{Y_n,n\in\mathbb{Z}\}$ 的均值遍历性成立.

而我们有

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{N}\sum_{\tau_1=0}^{N-1}R_Y(\tau_1)\right| &\leqslant \frac{1}{N}\sum_{\tau_1=0}^{N-1}\left|R_Y(\tau_1)\right| \\
&\leqslant \frac{1}{N}\sum_{\tau_1=0}^{N-1}\left[R_X^2(\tau_1)+\Big(R_X^2(\tau_1+\tau)+R_X^2(\tau_1-\tau)\Big)/2\right] \to 0,(N\to+\infty)
\end{aligned}
$$

由均值遍历性定理 (i) 可知, $Y=\{Y_n,n\in\mathbb{Z}\}$ 的均值遍历性成立, 即 $X=\{X_n,n\in\mathbb{Z}\}$ 的协方差函数遍历性成立.

4.16 设 X_0 为随机变量, 其概率密度函数为

$$
f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}
$$

设 X_{n+1} 在给定 $X_0,X_1,\cdots,X_n$ 下是 $(1-X_n,1]$ 上的均匀分布, $n=0,1,2,\cdots$, 证明 $\{X_n,n=0,1,\cdots\}$ 的均值有遍历性.

证：

$$
\mathrm{E}X_0=\int_0^1 2x^2\,dx=\frac{2}{3}
$$

$$
\mathrm{E}X_0^2=\int_0^1 2x^3\,dx=\frac{1}{2}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}X_{n+1} &= \mathrm{E}[\mathrm{E}(X_{n+1}|X_N)] \\
&= \mathrm{E}\left[\int_{1-x_n}^1 \frac{x_{n+1}}{x_n}\,dx_{n+1}\right] \\
&= \mathrm{E}(1-\frac{1}{2}X_n) \\
&= 1-\frac{1}{2}\mathrm{E}X_n
\end{aligned}
$$

$$
\because \mathrm{E}X_0=\frac{2}{3} \qquad \therefore \mathrm{E}X_n\equiv\frac{1}{2}
$$

又有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}X_{n+1}^2 &= \mathrm{E}\Big[\mathrm{E}(X_{n+1}^2|X_n)\Big] \\
&= \mathrm{E}\left[\int_{1-x_n}^1 \frac{x_{n+1}^2}{x_n}\,dx_{n+1}\right] \\
&= 1-\mathrm{E}X_n+\frac{1}{3}\mathrm{E}X_n^2
\end{aligned}
$$

$$
\because \mathrm{E}X_0^2=\frac{1}{2} \qquad \therefore \mathrm{E}X_n^2\equiv\frac{1}{2}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_nX_{n+m}) &= \mathrm{E}\Big[\mathrm{E}(X_nX_{n+m}|X_n)\Big] \\
&= \mathrm{E}\Big[X_n\mathrm{E}(X_{n+m}|X_n)\Big] \\
&= \mathrm{E}\Big[X_n\big(1-\frac{1}{2}\mathrm{E}(X_{n+m-1}|X_n)\big)\Big] \\
&= \mathrm{E}X_n - \frac{1}{2}\mathrm{E}\Big[\mathrm{E}(X_nX_{n+m-1}|X_n)\Big] \\
&= \frac{2}{3}-\frac{1}{2}\mathrm{E}(X_nX_{n+m-1})
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \mathrm{E}(X_nX_{n+m})-\frac{4}{9} = -\frac{1}{2}\Big(\mathrm{E}(X_nX_{n+m})-\frac{4}{9}\Big) = \cdots = \Big(-\frac{1}{2}\Big)^m\Big(\mathrm{E}X_n^2-\frac{4}{9}\Big) = \frac{1}{18}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^m
$$

$$
\therefore R_X(n,n+m) = \mathrm{E}\big(X_n-\frac{2}{3}\big)\big(X_{n+m}-\frac{2}{3}\big) = \mathrm{E}(X_nX_{n+m})-\frac{4}{9} = \frac{1}{18}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^m = R(m)
$$

$\therefore \{X_n\}$ 是平稳序列

又 $\because \lim_{m\to+\infty} R(m)=0$

$\therefore$ 是均值遍历的

4.17 设 $\{\varepsilon_n, n=0,\pm1,\cdots\}$ 为白噪声序列, 令

$$
X_n = \alpha X_{n-1}+\varepsilon, |\alpha|<1, n=\cdots,-1,0,1,\cdots,
$$

则 $X_n=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha^k\varepsilon_{n-k}$, 从而证明 $\{X_n, n=\cdots,-1,0,1,\cdots\}$ 为平稳序列. 求出该序列的协方差函数. 此序列是否具有遍历性?

解：

$$
\mathrm{E}X_n = \sum_{k=0}^{+\infty}\alpha^k\mathrm{E}\varepsilon_{n-k}=0
$$

$$
\begin{aligned}
R_X(n,n+m) &= \mathrm{Cov}(X_n,X_{n+m}) \\
&= \mathrm{E}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha^k\varepsilon_{n-k}\Big)\Big(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\alpha^\ell\varepsilon_{m+n-\ell}\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\alpha^{k+\ell}\mathrm{E}\varepsilon_{n-k}\varepsilon_{m+n-\ell} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\alpha^{2k+m}\mathrm{E}\varepsilon_{n-k}^2 \\
&= \alpha^m\frac{\sigma^2}{1-\alpha^2} \\
&= R(m)
\end{aligned}
$$

$\therefore \{X_n\}$ 为平稳序列

又 $\lim\limits_{m\to+\infty} R(m)=0$, $\therefore$ 是均值遍历的

以下没有特殊声明, 所涉及的过程均假定均值函数为 0

4.20 设 $\{X(t)\}$ 为平稳过程, 令 $Y(t)=X(t+a)-X(t-a)$. 分别以 R_X, S_X 和 R_Y, S_Y 记随机过程 X 和 Y 的协方差函数和功率谱密度, 证明

$$\begin{aligned}&R_Y(\tau)=2R_X(\tau)-R_X(\tau+2a)-R_X(\tau-2a),\\&S_Y(\omega)=4S_X(\omega)\sin^2 a\omega.\end{aligned}$$

证：

$$\begin{aligned}R(\tau)&=\mathrm{E}\Big[X(t+a)-X(t-a)\Big]\Big[X(t-\tau+a)-X(t-\tau-a)\Big]\\&=\mathrm{E}\Big[X(t+a)X(t-\tau-a)\Big]-\mathrm{E}\Big[X(t+a)-X(t-\tau-a)\Big]\\&\quad-\mathrm{E}\Big[X(t-a)X(t-\tau-a)\Big]+\mathrm{E}\Big[X(t-a)-X(t-\tau-a)\Big]\\&=R_X(\tau)-R_X(\tau+2a)-R_X(\tau-2a)+R_X(\tau)\\&=2R_X(\tau)-R_X(\tau+2a)-R_X(\tau-2a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_Y(\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}R_Y(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau\\&=2\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau-\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau+2a)e^{-i\omega\tau}\,d\tau\\&\quad-\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau-2a)e^{-i\omega\tau}\,d\tau\\&=S_X(\omega)\big(2-e^{2a\omega i}-e^{-2a\omega i}\big)\\&=S_X(\omega)\big(2-2\cos 2a\omega\big)\\&=4S_X(\omega)\sin^2 a\omega\end{aligned}$$

4.21 设平稳过程 X 的协方差函数 $R(\tau)=\sigma^2e^{-\tau^2}$, 试研究其功率谱密度函数的性质.

解：

$$\begin{aligned}S(\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma^2e^{-\tau^2}e^{-i\omega\tau}\,d\tau\\&=\sigma^2e^{-\frac{\omega^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(\tau^2+i\omega\tau-\frac{\omega^2}{4})}\,d\tau\\&=\sigma^2e^{-\frac{\omega^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(\tau+\frac{i\omega}{2})^2}{2\times\frac{1}{2}}}\,d\tau\\&=\sigma^2\sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}}.\end{aligned}$$

$S(\omega)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的实的、偶的、非负且可积的函数.