O、预备知识

1.$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$ 2.$(a+b)^n=\Sigma C_n^k a^{(n-k)}b^k$ 3.**均匀分布** $X\sim U(a,b)$，期望是$\frac{(a+b)}{2}$，方差是$\frac{(b-a)^2}{12}$，概率密度$\frac{1}{b-a}$ 4.**指数分布**：设随机变量X具有如下形式的密度函数$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}},x>0\\0,x\leq 0\end{cases}$$(\theta>0)$则称X服从参数为$\theta$的指数分布，记为$X\sim EXP(\theta)$。期望$\theta$,方差$\theta^2$。 5.**泊松分布** 设随机变量X所有可能取的值为0,1,2,…,而取各个值得概率为$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},k=0,1,2,\cdots$,其中λ>0是常数，则称X服从参数为λ的泊松分布，记为$X\sim\pi(\lambda)$，$E(X)=D(X)=\lambda$ 6.均值=$\int_a^b g(x)f(x)dx$，g(x)是函数，f(x)是概率密度函数。对于只说服从某函数就可以认为g(x)=x。7.$cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$8.方差=$R_X(0)$；$\operatorname{Var}(Y)=\operatorname{Var}(X_t-X_s)=\operatorname{Var}(X_t)+\operatorname{Var}(X_s)-2\operatorname{Cov}(X_t,X_s)$9.若$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right),Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$ 9.二项分布$X\sim B(n,p),P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

1.随机过程的分类：

1)连续型随机过程：T是连续集，且$\forall t\in T$，X(t) 是连续型随机变量，则称过程$\{X(t),t\in T\}$为连续型随机过程。2)离散型随机过程：T是连续集，且$\forall t\in\mathcal{T},X(t)$是离散型随机变量，则称过程$\{X(t),t\in T\}$为离散型随机过程。3)连续型随机序列：T是可列集，且$\forall t\in\mathcal{T},X(t)$是连续型随机变量，则称过程$\{X(t),t\in\mathbb{T}\}$为连续型随机序列。4)离散型随机序列：T是可列集，且$\forall t\in\mathcal{T}$是离散型随机变量，则称过程$\{X(t),t\in T\}$为离散型随机序列.通常T取为T $=\{0,1,2\cdots\}$或$T=\{0,\pm1,\pm2\cdots\}$，此时随机序列常记成$\{Xn,n=0,1,\cdots\}$或$\{Xn,n\geq 0\}$.

对任意的t1<t2<…<tn且t1,…,tn∈T,如果随机变量X(t2)-X(t1)，X(t3)-X(t2)，…，X(tn)-X(tn-1)，是相互独立的,则称X(t)为独立增量过程.如果进一步有对任意的t1，t2,$X(t_1+h)-X(t_1)\overset{d}{=}X(t_2+h)-X(t_2)$则称为平稳独立增量过程。

2.严平稳

宽平稳基础上更加严格要求更高阶的矩也是平稳的，如果随机过程$X(t)$对任意的$t_1,\cdots,t_n\in\mathcal{T}$和任何h 有

$$(X(t_1+h),\cdots,X(t_n+h))\overset{d}{=}(X(t_1),\cdots,X(t_n))$$

3.宽平稳

如果随机过程$X(t)$的所有二阶矩存在，并且$\mathbb{E}[X(t)]=$ m及协方差函数$\mathbb{R}_X(t,s)$只与时间差$t-s$ 有关，则称X(t)为宽平稳的或二阶矩平稳的。（一、二阶矩也即均值方差不变，协方差至于时间差有关）

4.有$X(t_1)$与$X(t_2)$的联合分布为

$F_{t_1,t_2}(x_1,x_2)=P\{X(t_1)\leq x_1,X(t_2)\leq x_2\}$ 过程在t_1,t_2两个不同时刻值的联合二维分布；过程的**自相关函数**为$r_X(t_1,t_2)=E(X(t_1)X(t_2))$ ；过程的**协方差函数**为$R_X(t_1,t_2)\equiv Co\boldsymbol{v}(X(t_1),X(t_2))=E(X(t_1)-\mu_X(t_1))(X(t_2)-\mu_X(t_2))$；过程的**方差函数**为就是协方差$X(t_1)=X(t_2)$的时候。$E((X(t)-\mu)^2)$；**矩母函数**$g(t)=E[e^{tX}]$矩母函数存在时它唯一地确定了$X$的分布；$E[X_n]=g^{(n)}(0),n\geq 1$；对于相互独立的随机变量$X$与$Y$，则$g_{X+Y}(t)=g_X(t)g_Y(t)$

一、Poisson

Q1 定义：

(1)$X(0)=0$. (2)X是独立增量过程，即 $\forall t_1<t_2\leq t_3<t_4,X(t_2)-X(t_1)$与 $X(t_4)-X(t_3)$是相互独立的.

(3)在任一长度为t的区间中，事件A发生的次数服从服从均值为λt的泊松分布,即$\forall s,t\geq 0$,有$P\{X(t+s)-X(s)=n\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$,则称X是具有参数为的泊松过程。

$E[X(t)]=\lambda t;\lambda=\frac{E[X(t)]}{t}$表示单位时间内事件A发生的平均个数，因此也称λ为此过程的速度或强度。

定义2：如果对于一个计数过程满足条件：

(1) $X(0)=0$；(2) X是独立、平稳增量过程；(3) $P\{X(t+h)-X(t)=1\}=2\lambda h+o(h)$, $\mathrm{h}>0$；(4) $P\{X(t+h)-X(t)\geq 2\}=o(h)$，则称X是参数为$\lambda>0$的泊松过程。

Q2 泊松过程的数字特征

(1)均值$m_X(t)=E[X(t)]=E[X(t)]-X(0)]=\lambda t$

(2)方差$D[X(t)]=E[X(t)]=\lambda t,D(X)=E((X-E(X))^2)=E(X^2)-E^2(X)$

(3)相关函数$R_X(s,t)=E(X(s)X(t))=\lambda s(\lambda t+1)$

(4)协方差函数$B_X(s,t)=R_X(s,t)-m_X(s)m_X(t)=\lambda s$

(5)特征函数$g_X(u)=E[e^{iuX(t)}]=\exp\{\lambda t\left(e^{iu}-1\right)\}$

Q3.时间间隔与等待时间分布

(1)设$\{X(t),t\geq 0\}$是具有参数λ泊松过程，$\{T_n(n\geq 1)\}$是对应的的时间间隔序列，则随机变量$T_n(n=1,2,\cdots)$是独立分布的均值为$\frac{1}{\lambda}$的指数分布（跟n没关系）。$\mathrm{P}\{\mathrm{T}_1>\mathrm{t}\}=\mathrm{P}\{\mathrm{X}(\mathrm{t})=0\}=\mathrm{e}^{-\lambda t}$

(2)设$W_n(n\geq 1)$是与泊松过程$\{X(t),t\geq 0\}$对应的一个等待时间序列，则W_n服从参数为n与λ的Γ**分布**（又称**爱尔兰分布**），其概率密度为：期望$\frac{n}{\lambda}$，方差$\frac{n}{\lambda^2}$

$$\mathrm{f_{W_n}(t)} = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda\, t\frac{(\lambda\, t)^{n-1}}{(n-1)!}}, & t\geq 0, \\ 0 & \quad\quad t<0. \end{cases}$$

Q4.到达时间的条件分布

在$[0,t]$内事件A已经发生一次的条件下，这一事件到达时间W_1的分布服从均匀分布。

对于$s<t$，有：$P\{W_1\leq s\mid X(t)=1\}=\frac{s}{t}$

分布函数：

$$F_{W_1|X(t)=1}(s)=\begin{cases}0, & s<0,\\ s/t, & 0\leq s<t,\\ 1, & s\geq t,\end{cases}$$

分布密度：

$$f_{W_1|X(t)=1}(s)=\begin{cases}1/t, & 0\leq s<t,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

推广到一般情况：

设 $X(t),t\geq 0$是泊松过程，已知在$[0,t]$内事件A发生n次，则这n次到达时间$W_1,W_2,\ldots,W_n$与相应于n个$[0,t]$上均匀分布的独立随机变量的顺序统计量有相同的分布。$E\{\sum_{i=1}^{n}W_i|N(t)=n\}=\frac{nt}{2}$

Q5.剩余寿命与年龄的分布

设X(t)为在$(0,t]$内事件A发生的个数，W_n表示第n个事件发生的时刻，$W_{X(t)}$ 表示在 t 时刻前最后一个事件发生的时刻，$W_{X(t)+1}$表示在t时刻后首次事件发生的时刻，令：

$$\begin{cases}S\,(t){=}W_{X(t)+1}-t\\ \\ V\,(t){=}t{-}W_{X(t)}\end{cases}$$

称$S(t)$为剩余寿命或剩余时间，$V(t)$为年龄。

由定义可知,$\forall t\geq 0,S\,(t)\geq 0,0\leq V\,(t)\leq t$

(1)设$X(t),t\geq 0$是具有参数λ泊松过程,$S(t)$与$T_n,n\geq 1$同分布,
即$\mathrm{P}\,\{\mathrm{S}\,(\mathrm{t})\leq\mathrm{x}\}=1-\mathrm{e}^{-\lambda x},x\geq 0$

(2)$V(t)$的分布为“截尾”的指数分布，$\mathrm{P}\,\{\mathrm{V}(t)\leq x\}=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & 0\leq x<t\\ \\ 1, & t\leq x\end{cases}$

Q6.$P(N(s)=k\mid N(t)=n)=\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}$

Q7 联合概率密度分布题型，谁先到？$P(W_1<W_2)=\int\int_{0<W_1<W_2<+\infty}=\int_0^\infty\int_{W_1}^\infty$

Q8 第一次到达时间T1分布$P(T_1\leq t)=1-P(T_1>t)=1-P(X(t)<1)=1-P(X(t)=0)$

Q9 连续3页无错概率、连续三天无人$P(N(t+3)-N(t)=0)$

Q10 n个泊松过程$N_i,i=1\rightarrow n$，至少一个事件发生的时刻分布$P(T_1\leq t)=1-P(T_1>t)=1-P(N_i(t)=0)$

Q11 求t时刻到X(t)+1时刻的概率密度→t时刻到X(t)+1时刻时间间隔S的概率密度
$\rightarrow P(S\leq s)=1-P(S>s)=1-P(X(t+s)-X(t)=0)$

Q12 总人数服从什么分布$P\{X(t)+Y(t)=n\}=\sum_{k=0}^{n}P\{X(t)=k,Y(t)=n-k\}$

Q13 t时刻火车出发，等待时间总和的期望值：条件分布
$E(S|N(t)=n)=\mathrm{E}\{\sum_{i=1}^{N(t)}(t{-}S_i)\mid\mathrm{N(t)=n}\}=nt-\mathrm{E}\left\{\sum_{i=1}^{n}S_i\mid\mathrm{N(t)=n}\right\}$,均匀分布Q4,
$\mathrm{E\{S(t)\}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(P\{\,\mathrm{N(t)=n}\}\mathrm{E}\left\{\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)\mid\mathrm{N(t)=n}\right\}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}P\{N(t)=n\}*$
$E(S|N(t)=n)=E(N(t))\frac{E(S|N(t)=n)}{n}$

二、Markov

Q1 定义 设有随机过程$\{X_n,n\in T\}$，若对于任意整数$n\in T$，$i_0,i_1,\ldots,i_{n+1}\in I$，条件概率满足以下条件，则称该随机过程为马尔可夫链，$P\{X_{n+1}=i_{n+1}|X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n\}=P\{X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n\}$

Q2 马尔可夫链的$n+1$维联合概率分布:
$P\{X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n\}=P\{X_n=i_n|X_{n-1}=i_{n-1}\}\cdot P\{X_{n-1}=i_{n-1}|X_{n-2}=i_{n-2}\}\cdots P\{X_1=i_1|X_0=i_0\}\cdot P\{X_0=i_0\}$
Q3 马氏链在时刻n的一步转移概率，i，$j\in I$，$p_{ij}(n)=P\{X_{n+1}=j|X_n=i\}$，要注意这个$n$不是上标位置的，要与$n$步转移概率矩阵相区分。该概率不仅与状态$i,j$有关，而且与时刻$n$有关；当与时刻$n$无关时，表示马尔可夫链具有平稳转移概率。

Q4 齐次马尔科夫链：若对任意的 $i,j\in I$ ，马尔可夫链 $\{X_n,n\in T\}$ 的转移概率 $p_{ij}(n)$ 与时刻 n 无关，则称马尔可夫链是齐次的。

Q5 转移概率矩阵

(1)性质：每行之和等于1；

(2)n步转移概率：$p_{ij}^{(n)}=P\{X_{m+n}=j|X_m=i\},\quad(i,j\in I,\ m\geq 0,\ n\geq 1)$ 为马尔可夫链 $\{X_n,n\in T\}$ 的 n 步转移概率，并称$\mathbf{P}^{(n)}=\left(p_{ij}^{(n)}\right)$为马尔可夫链的$n$步转移矩阵。规定:$p_{ij}^{(0)}=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$

(3)n步转移概率的性质：1.$p_{ij}^{(n)}=\sum_{k\in I}p_{ik}^{(l)}p_{kj}^{(n-l)}$　2.$p_{ij}^{(n)}=\sum_{k_1\in I}\cdots\sum_{k_{n-1}\in I}p_{ik_1}p_{k_1k_2}\cdots p_{k_{n-1}j}$　3.$P^{(n)}=P\cdot P^{(n-1)}$　4.$P^{(n)}=P^n$

(4)初始概率和绝对概率

初始概率：$p_j=P\{X_0=j\},\quad(j\in I)$　初始概率分布：$\{p_i\}=\{p_i,\ j\in I\}$　初始概率向量：$\mathbf{P}^T(0)=(p_1,p_2,\cdots)$　绝对概率：$p_j(n)=P\{X_n=j\},\ (j\in I)$　绝对概率分布：$\{p_j(n)\}=\{p_j(n),\ j\in I\}$

1.$p_j(n)=\sum_{i\in I}p_ip_{ij}^{(n)}$　2.　$p_j(n)=\sum_{i\in I}p_i(n-1)\cdot p_{ij}$　3.　$\mathbf{P}^T(n)=\mathbf{P}^T(0)\cdot\mathbf{P}^{(n)}$　4.　$\mathbf{P}^T(n)=\mathbf{P}^T(n-1)\cdot\mathbf{P}$

Q6 可达：若存在 $n>0$,使得$p_{ij}^{(n)}>0$ ，则称自状态 i 可达状态j ，并记为$i\to j$；若 $i\to j$,且 $j\to i$,则称状态 i 与状态 j 互达，并记为 $i\leftrightarrow j$；互达状态**同常返同周期**。

Q7 闭集与可约：状态空间 I 的子集 C，若对于任意 $i\in C$ 及$k\notin C$，都有 $p_{ik}=0$,则称子集C为(随机)闭集。**等价类**：内部状态互达

若闭集C的状态互达，则称C为不可约的。若马氏链$\{X_n\}$的状态空间是不可约的，则称该马氏链为不可约的。

Q8 状态的**周期性**：状态 i 的周期，满足$p_{ii}^{(n)}>0$的所有 n 的最大公约数 d ，如果 $d=1$ 称状态i是非周期的，否则d就是状态 i 的周期。看他几步能回来，这些步数的最大公因数。如果不能回来，周期就是无穷。

Q9 状态的**常返性**：

a.首达概率：状态i经n步首次到达状态 j 的概率：　$f_{ij}^{(n)}=P\{X_{m+n}=j,\ X_{m+\nu}\neq j,1\leq\nu\leq n-1|X_m=i\},\ n\geq 1$ ，$f_{ij}^{(0)}=0$

系统从状态i出发，经有限步会(首次)到达状态j的概率：$f_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}$，$0\leq f_{ij}^{(n)}\leq f_{ij}\leq 1$

b.定义：

1）若 $f_{ii}=1$，则称状态 i 是常返的；　若 $f_{ii}<1$，则称状态 i 是非常返的/瞬过的。

2）称期望值 $\mu_i=\sum n\cdot f_{ii}^{(n)}$ 为状态 i 的**平均返回时间**。

3）若 $\mu_i<\infty$，则称常返态 i 是正常返的；若$\mu_i=\infty$,则称常返态i是零常返的。

4）非周期的正常返态称为**遍历态**。

5）平均首达时间 $\mu_{ij}:\mu_{ij}=E\left(T_{ij}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{ij}^{(n)}$ ；

c.常返性的判定：

根据$p_{ij}^{(n)}$：

1）常返性的判断：看$\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}$。　$\Sigma_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}=\infty\Leftrightarrow$常返；$\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}=\frac{1}{1-f_{ii}}<\infty\Leftrightarrow$非常返/瞬过。

2）零常返的判断：看$\lim_{n\to\infty}p_{ii}^{(n)}$。$\lim_{n\to\infty}P_{ii}^{(n)}=0\Leftrightarrow$零常返；$\lim_{n\to\infty}P_{ii}^{(n)}=\frac{1}{\mu_i}>0\Leftrightarrow$正常返。

Q10 遍历性和平稳分布

a.设齐次马氏链$\{X_n,n\geq 0\}$的状态空间为I,若对于一切$i,j\in I$,存在不依赖于 i 的极限$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=p_j\,(>0)=\frac{1}{\mu_j}$，则称该**马氏链具有遍历性**（**不可约、非周期、正常返**），并称 p_j 为状态 j 的稳态概率。

b.**平稳分布**：（只有遍历态才有）

设$X(n)$具有平稳分布，如果我们想要求出平稳分布，需要求解下列具有约束条件的线性方程组($\pi P=\pi/\pi(0)P=\pi(0)$)：

$$\begin{cases}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}}\pi_{\mathrm{i}}\,\mathrm{p_{ij}}=\pi_{\mathrm{j}}\quad,\quad \mathrm{j}=1,2,\cdots,\mathrm{N},\\ \sum_{\mathrm{i}=1}\pi_{\mathrm{i}}=1,\\ \pi_{\mathrm{i}}\geq 0,\quad \mathrm{i}=1,2,\cdots,\mathrm{N}.\end{cases}$$

还可能继续求各状态的平均返回时间。$\mu_i=\frac{i}{\pi_i}$

c.**极限分布**

$\lim_{n\to\infty}\pi_0\mathbf{P}^n=\pi$，那么$\pi$就是极限分布。

d.1.令C^+ 为马尔可夫链中全体正常返状态构成的集合，则有平稳分布不存在的充要条件为 $C^+=\varnothing$。2.平稳分布唯一存在的充要条件为只有一个基本正常返闭集$C_a=C^+$ 。3.有限状态马尔可夫链的平稳分布总存在。4.有限不可约非周期马尔可夫链存在唯一的平稳分布，不可约遍历链有唯一的平稳分布$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\frac{1}{\mu_j}=\pi_j$，也是极限分布。

Q11 对所有的 $n>0$，计算状态1经n步首达状态3的概率 $f_{13}^{(n)}$；Q12 状态6出发首次到达状态5需要的平均步数。=做出转移概率矩阵，和老鼠那题一样去列方程。Q13 证明马氏链的遍历性。不可约、非周期(有状态非周期)、正常返（有状态正常返）Q14 证明Markov链=定义Q15 等价类/对马氏链状态进行分类=互达的是一类，瞬过、常返、正常返…Q16 最终趋于什么状态=求平稳分布。Q17 非周期只要证明出来一个状态非周期

三、谱密度、平稳性、遍历性

Q1 维纳-辛钦公式

$S_X(\omega)$和自相关函数 $R(\tau)$是一对傅里叶变换

$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$
$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_X(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$$

Q2 $S_X(\omega)$和$R(\tau)$ 都是偶函数，所以维纳一辛钦公式还可以写成如下的形式：$S_X(\omega)=2\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\tau$，$R_X(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_X(\tau)\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\tau$.

Q3 δ函数：$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau)e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau=1\leftrightarrow\delta(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot e^{i\omega\tau}\mathrm{d}\omega$

Q4判断下列关于τ的函数$R(\tau)$**是否为平稳过程的协方差函数**。判断是否是平稳过程的谱密度函数$S(\omega)$

A4平稳随机过程自相关函数的五个主要性质

a.$R(0)=E[X^2(t)]$ 表示$R(0)$为$X(t)$的均方值的平均功率。b.对偶性：$R(\tau)=R(-\tau)$，表示自相关函数$R(\tau)$是τ的偶函数。如果是复数则加上一个共轭条件。c.有界性：$|R(\tau)|\le R(0)$，表示$R(\tau)$的上界。即自相关函数$R(\tau)$在$\tau=0$时取最大值。d.$R(\infty)=E^2[X(t)]$ ，表示$R(\infty)$是$X(t)$的直流功率。e.$R(0)-R(\infty)=\sigma^2$，σ^2是方差，表示平稳过程$X(t)$的交流功率，当均值为0时有$R(0)=\sigma^2$。$S(\omega)$实、非负、偶

Q5 过程平稳性的判断 **A5 宽平稳的三个条件**：1.$E[X(t)]=m_X$是常数；2.协方差函数$R_X(\tau)=E(X(t)X(t+\tau))$只与时间差$\tau$有关；3.二阶矩$R_X(0)=E[X^2(t)]$存在$<\infty$。**严平稳要证明同分布。**

A5例，设Z_1与Z_2独立，都服从均匀分布$U(-1,1)$，定义$X(t)=Z_1\cos\lambda t+Z_2\sin\lambda t\quad(t\in\mathbf{R},\lambda\ne0)$

(1) 证明：$\{X(t)\}$ 为宽平稳的；(2) $\{X(t)\}$ 是严平稳的吗?为什么?(3) 证明：$\{X(t)\}$ 的均值遍历性成立。

Q6 均值遍历性的证明 ：平稳过程是否有均值遍历性?

A6 满足条件$\int_{-\infty}^{\infty}|R_X(\tau)|d\tau<\infty$即可。要是想严格证的话可以和下面一样，

(均值遍历性定理) (i) 设 $X=\{X_n,n=0,\pm1,\cdots\}$ 为平稳序列，其协方差函数为 $R(\tau)$,则 X 有遍历性的充分必要条件是 $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\tau=0}^{N-1}R(\tau)=0.$ (ii) 若$X=\{X(t),-\infty<t<\infty\}$ 为平稳过程，则X有遍历性的充分必要条件是 $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})R(\tau)d\tau=0$。

Q7 留数定理求积分

A7 1.m 级零点：$\begin{cases}f^{(m)}(z_0)\ne0\\ f^{(n)}(z_0)=0\,,\end{cases}$ 2.z_0 是$f(z)$的m级零点$\Rightarrow$ z_0是$\frac{1}{f(z)}$的m 级极点

3.z_0 是$f(z)$的m 级零点，$g(z)$ 的n 级零点$\Rightarrow$ z_0是$\frac{g(z)}{f(z)}$的$m-n$ 级极点 4.若 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$则 $Res[f(z),z_0]=c_{-1}$ 5.规则 I: z_0 为 $f(z)$的一级极点，则 $Res[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$

6.规则 II:z_0 是 $f(z)$ 的m 级极点，则$Res[f(z),z_0]=\dfrac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-z_0)^mf(z)\}$

7.$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)e^{aix}dx=2\pi i\sum Res\left[R(z)e^{aiz},z_k\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\cos ax dx+i\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\sin axdx$

Q8 已知谱密度函数，求平稳过程 $X(t)$的自相关函数/协方差函数和均方值/平均功率

已知谱密度 $S_X(\omega)=\frac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9}$,求平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数和均方值.

A8 维纳辛钦公式，自相关函数$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega$

用留数定理的：求$S_X(\omega)$的留数$Res[S_X(\omega)e^{i\omega\tau},\omega_k]$，一般都是只看左半部分的$S_X(\omega)$，$S_X(\omega)=\frac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9}=\frac{\omega^2+4}{(\omega^2+1)(\omega^2+9)}$，有$-i,i,-3i,3i$四个一级极点。把这些极点对应的留数求出来，求和，得到的就是所求积分。**均方值/平均功率**：$\Psi_X^2=R_X(0)=\frac{7}{24}$.

Q9 设 $\{X(t)\}$ 为Gauss平稳过程，均值为零，功率谱密度 $S(\omega)=\frac{1}{1+\omega^2}$。求$X(t)$ 落在区间 [0.5,1] 中的概率

A9 $X(t)$遵循均值为0，方差为如下的正态分布，由谱密度求协方差函数$\to\tau=0$算方差$\to$开根号算标准差$\frac{1}{\sqrt2}\to[0.5,1]$左右同除标准差$\to\Phi(\sqrt2)-\Phi(\frac{1}{\sqrt2})$

Q11 已知协方差函数，求谱密度函数。 $R(\tau)=\alpha\cos\varpi_0\tau$ 谱密度$S_X(\omega)=a\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$

C1平稳过程一定是平稳增量过程，但平稳增量过程不一定是平稳过程。C2平稳独立增量过程是Markov过程，Markov过程不一定是平稳独立增量过程C3对于齐次Poisson过程，它具有独立增量性质和平稳增量性质，这是齐次Poisson过程的定义特点。对于非齐次Poisson过程，它具有独立增量性质，但不具有平稳增量性质。C4要成为某个平稳过程的谱密度函数，一个函数必须满足以下条件：

非负性：谱密度函数在所有频率上必须是非负的。

对称性：由于涉及实数时间序列，谱密度函数必须在负频率和正频率上是对称的。

可积性：谱密度函数在整个频率范围内必须是可积的，以确保总能量有限。

要成为某个平稳过程的谱密度函数，一个函数必须满足以下条件：实、偶、非负

C5若有无穷个状态且不可约，则所有状态不可能都是常返的。（×）

反例：一维随机游动全是零常返。

正常返：说明总会返回原状态。但是返回该状态的步平均数有限。

零常返：说明总会返回原状态。但是返回该状态的步平均数无限。C6Markov链的状态周期性，周期为d的状态i，也就表明了i走d（的倍数）步有概率能到达原状态。C7Markov链中，周期为无穷大的状态一定是非常返的。C8如果一个Markov链以其平稳分布为初始分布，那么从宽平稳的角度看，它可以被视为是平稳的。C9有独立增量的随机序列是Markov链。C10Poisson过程是Markov过程，但不是Markov链。Poisson过程平稳，Markov不平稳。C11协方差函数是均值为0的自相关函数。C12有限状态的不可约马氏链都是正常返的C13齐次Markov链是不可约的遍历链。此时极限分布就是平稳分布。