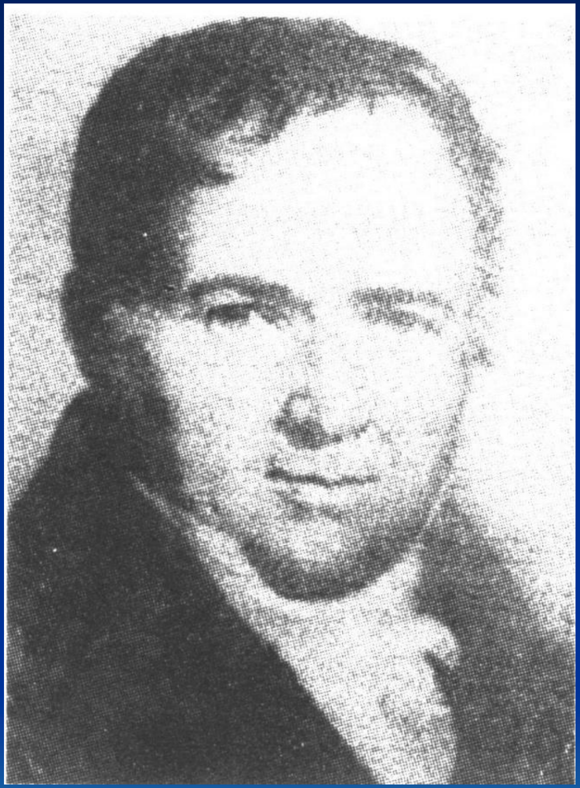
第2章 泊松过程

- **2.1 引言**
- **2.2 相关概念及泊松过程的定义**
- **2.3 泊松过程的基本性质**

泊松简介



泊松，法国著名数学家。1781 年6月21日生于法国卢瓦雷省的皮蒂维耶，1840年4月25日卒于法国索镇。

泊松生平：

1798年入巴黎综合工科学校深造。

毕业时，因优秀的研究论文而被指定为讲师。

受到P.-S.拉普拉斯、J.-L.拉格朗日的赏识。

1800年毕业后留校任教

1802年任副教授

1806年接替J.-B.-J.傅里叶任该校教授。

1808年任法国经度局天文学家

1809年任巴黎理学院力学教授。

1812年当选为巴黎科学院院士。

泊松贡献：

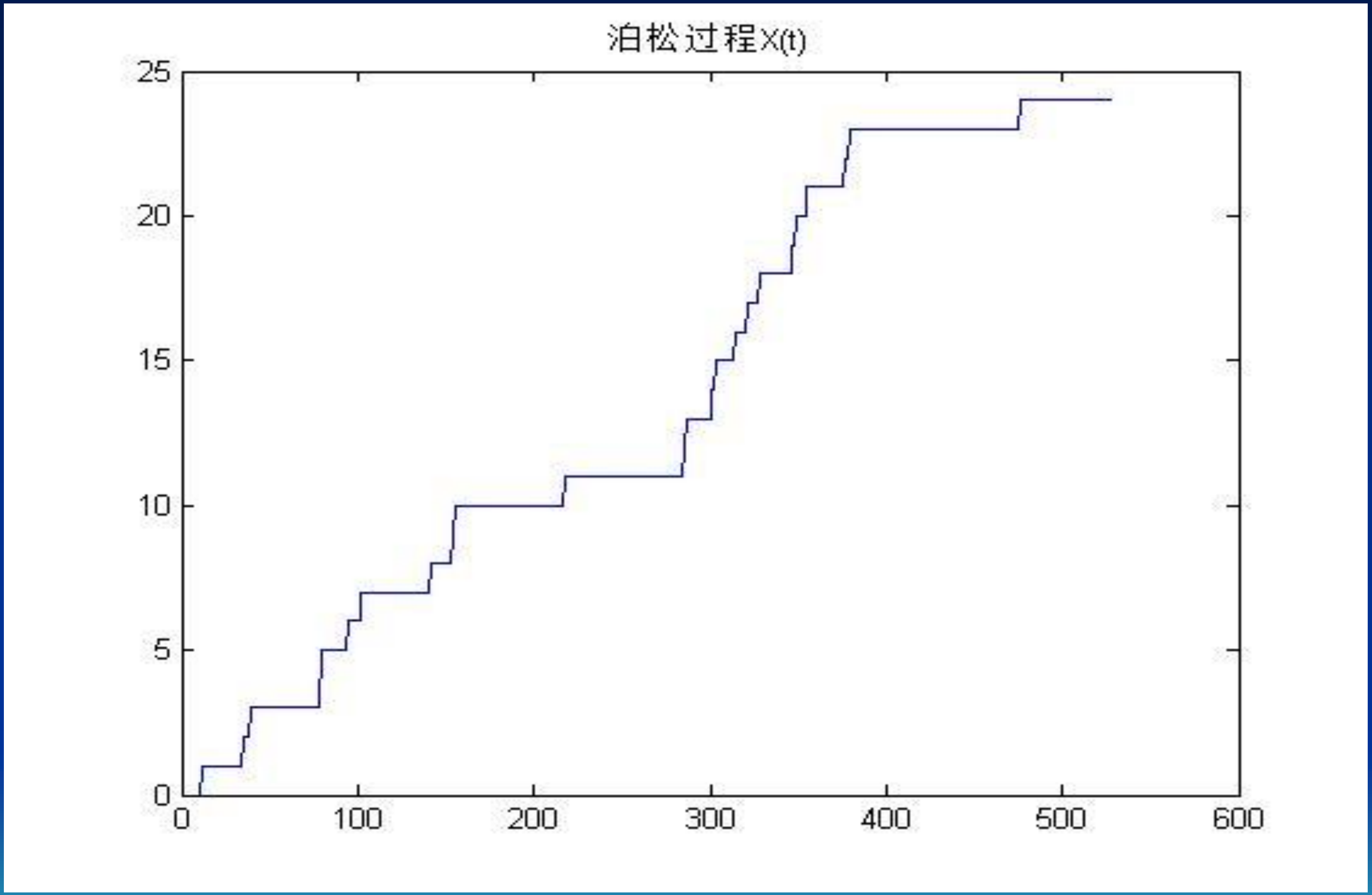
泊松的科学生涯开始于研究微分方程及其在摆的运动和声学理论中的应用。他工作的特色是应用数学方法研究各类力学和物理问题，并由此得到数学上的发现。他对积分理论、行星运动理论、热物理、弹性理论、电磁理论、位势理论和概率论都有重要贡献。

几个简单的泊松过程例子

例1 考虑某一电话交换台在某段时间接到的呼叫。令 $X(t)$表示电话交换台在［0, t］时间内收到的呼叫次数，则｛ $X(t)$，$t \geq 0$ ｝是一个泊松过程。

例2　考虑来到某火车站售票窗口购买车票的旅客。若记X(t) 为时间 [0, t] 内到达售票窗口的旅客数，则{ X(t), t ≥0 } 是一个泊松过程。

例3 考虑机器在 $(t, t+h]$ 内发生故障这一事件。若机器发生故障，立即修理后继续工作，则在 $(t, t+h]$ 内机器发生故障而停止工作的事件数构成一个随机点过程，它可以用泊松过程来描述。


泊松过程X(t)
25
20
15
10
5
0
0
100
200
300
400
500
600

2.1泊松分布和泊松定理

泊松分布：

设随机变量X所有可能取的值为0,1,2, …, 而取各个值得概率为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k=0,1,2,\cdots,$$

其中λ>0是常数，则称X服从参数为λ的泊松分布，记为X～π（λ）

$$E(X)=\lambda \qquad D(X)=\lambda$$

泊松定理：

设λ>0是一个常数，n是任意正整数，设，则对于任一固定的非负整数k，有

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p_n^{k}(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^{k}e^{-\lambda}}{k!}.$$

2.2 相关概念及泊松过程的定义

- **2.2.1 相关概念**
- **2.2.2 泊松过程定义**
- **2.2.3.几个简单的泊松过程例子**

2.2.1 相关概念

计数过程： 设X(t)表示直到t时刻为止,某事件A所出现的次数，如果X(t)是取非负整数的随机变量，则称 $X=\{X(t), t\geq 0\}$是**计数过程**.

易知，任一计数过程X满足如下条件

(1) $X(t)\geq 0$；

(2)X(t)取非负整数值；

(3)若s＜t，则 $X(s)\leq X(t)$；

(4)若s＜t，则 $X(t)-X(s)$表示在时间区间[s，t]内某事件A出现的次数.

独立增量过程:

如果计数过程X（t）在不相重叠的时间间隔内，事件A发生的次数是相互独立的，即若$t_1 < t_2 \le t_3 < t_4$，则在（t_1, t_2]内事件A发生的次数$X(t_2) - X(t_1)$与在（t_3, t_4]内事件A发生的次数$X(t_4) - X(t_3)$相互独立，此时计数过程X（t）称为独立增量过程.

平稳增量过程：

如果计数过程在任一区间内发生的事件个数只依赖于时间区间的长度，即计数过程 $X(t)$ 在 $(t,t+s]$（$s>0$）内，事件A发生的次数 $X(t+s)-X(s)$ 仅与时间差 s 有关，而与 t 无关，则计数过程 $X(t)$ 称为平稳增量过程。

2.2.2 泊松过程定义

定义1 如果对于一个计数过程$X=\{X(t),t\geq 0\}$满足条件：

(1) X(0)＝0.

(2) X是独立增量过程，即 $\forall t_1<t_2\leq t_3<t_4$,

$X(t_2)-X(t_1)$与 $X(t_4)-X(t_3)$是相互独立的.

(3) 在任一长度为t的区间中，事件A发生的次数服从服从均值为λt的泊松分布

即 $\forall s,t\geq 0$,有

$$P\{X(t+s)-X(s)=n\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!},n=0,1,\cdots \quad (3.1)$$

则称X是具有参数为λ>0的泊松（Poisson）过程.

由 $E[X(t)]=\lambda t$ 可知，$\lambda=\dfrac{E[X(t)]}{t}$ 表示单位时间内事件A发生的平均个数，因此也称 λ为此过程的**速度或强度**。

由定义1可知，为了确定一个任意的计数过程实际上是一个泊松过程，必须证明它同时满足定义中的（1）、（2）、（3）三个条件，其中条件（1）只是说明事件的计数过程是从时刻t=0开始的，条件（2）根据我们对计数过程了解的情况直接验证，而对于条件（3）我们全然不知道如何去满足。

因此，给出另一个泊松过程的定义是就显得很有必要，接下来介绍泊松过程的另一个定义：

在此之前，首先熟悉**一个函数f是o(h)的概念**（高阶无穷小）

即：若对于一个函数f，满足：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=0$$

则称函数**f是o(h)**.

定义2 如果对于一个计数过程 $X=\{X(t),t\geq 0\}$ 满足条件：

(1) X(0)＝0

(2) X是独立、平稳增量过程

(3) $P\{X(t+h)-X(t)=1\}=\lambda h+o(h),\quad h>0 \qquad (3.2)$

(4) $P\{X(t+h)-X(t)\geq 2\}=o(h) \qquad (3.3)$

则称X是参数为λ>0的泊松过程。

分析定义2可知，其中条件(3),(4)说明，在充分小的时间间隔内，最多有一个事件发生，而不能有两个或两个以上事件同时发生。这种假设对于很多物理现象较容易得到满足。

定理1 证明定义1和定义2是等价的。

定理1证明

1. 定义1⇒定义2

由条件（3）知平稳性，又当h充分小的，有

$$P\left\{N(t+h)-N(t)=1\right\}=P\left\{N(h)-N(0)=1\right\}$$

$$=e^{-\lambda h}\frac{\lambda h}{1!}=\lambda h\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda h)^n}{n!}$$

$$=\lambda h[1-\lambda h+o(h)]$$

$$=\lambda h+o(h)$$

$$P\{N(t+h)-N(t)\geq 2\}=P\{N(h)-N(0)\geq 2\}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}P\{N(h)-N(0)=n\}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}e^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)^n}{n!}$$

$$=o(h)$$

定义1⇒定义2，得证

2.定义2⇒定义1

令$P_n(t)=P\{N(t)=n\}=P\{N(t)-N(0)=n\}$,则

（1） 当$n=0$时

$$P_0(t+h)=P\{N(t+h)=0\}$$
$$=P\{N(t+h)-N(0)=0\}$$
$$=P\{N(t)-N(0)=0,N(t+h)-N(t)=0\}$$
$$=P\{N(t)-N(0)=0\}P\{N(t+h)-N(t)=0\}$$
$$=P_0(t)[1-\lambda h+o(h)]$$

故$\dfrac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h}=-\lambda P_0(t)+\dfrac{o(h)}{h}$,

当$h\to 0$时有$P_0'(t)=-\lambda P_0(t)$或$\dfrac{P_0'(t)}{P_0(t)}=-\lambda$

从而$P_0(t)=ke^{-\lambda t}$

由于$P_0(0)=P\{\mathrm{N}(0)=0\}=1$

于是有$P_0(t)=e^{-\lambda t}$

(2)对n≥1，建立递推公式

$$P_n(t+h)=P\left\{N(t+h)=n\right\}$$

$$=P\left\{N(t+h)-N(0)=n\right\}$$

$$=P\left\{[N(t+h)-N(t)]+[N(t)-N(0)]=n\right\}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}P\left\{[N(t+h)-N(t)]+[N(t)-N(0)]=n \mid N(t+h)-N(t)=j\right\}P\left\{N(t+h)-N(t)=j\right\}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}P\left\{[N(t)-N(0)]=n-j \mid N(t+h)-N(t)=j\right\}\cdot P\left\{N(t+h)-N(t)=j\right\}$$

$$=\sum_{j=0}^{n} P\left\{[N(t)-N(0)]=n-j\right\} P\left\{N(t+h)-N(t)=j\right\}$$

$$=\sum_{j=0}^{n} P_{n-j}(t) P_j(h)$$

$$=P_n(t)P_0(h)+P_{n-1}(t)P_1(h)+\sum_{j=2}^{n} P_{n-j}(t)P_j(h)$$

$$=P_n(t)P_0(h)+P_{n-1}(t)P_1(h)+o(h)$$

$$=(1-\lambda h)P_n(t)+\lambda h P_{n-1}(t)+o(h)$$

$$\left(\begin{array}{l} \sum_{j=2}^{n} P_{n-j}(t) P_j(h) \le \sum_{j=2}^{n} P_j(h) \le \\ \sum_{j=2}^{\infty} P_j(h) = P(N(h) - N(0) \ge 2) = o(h) \end{array} \right)$$

$$\frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h}$$

$$h \to 0 \quad P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

$$e^{\lambda t}\left[P_n'(t) + \lambda P_n(t)\right] = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\lambda t} P_n(t)\right] = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t)$$

（3）当n=1时，

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\lambda t}P_1(t)\right] = \lambda e^{\lambda t}P_0(t) = \lambda e^{\lambda t}e^{-\lambda t} = \lambda$$

$$P_1(t) = (\lambda t + C)e^{-\lambda t}$$

由于$P_1(0) = P\left\{N(0) = 1\right\} = 0$

所以$C = 0$，$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$

(4)用数学归纳法证明

$$P_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

n=0,n=1时，结论已成立

假设n-1时(n≥1)，结论成立，由递推公式

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\lambda t}P_n(t)\right] = \lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t)$$

$$= \lambda e^{\lambda t}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

积分得$e^{\lambda t}P_n(t)=\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}+C$

由于$P_n(0)=P\{N(0)=n\}=0$

从而$P_n(t)=e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}$

所以$P\{N(t+s)-N(s)=n\}=e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^n}{n!},\quad (n=0,1,2\cdots)$

定义2⇒定义1，得证

2.3 泊松过程的基本性质

- 2.3.1 泊松过程的数字特征
- 2.3.2 时间间隔与等待时间分布
- 2.3.3 到达时间的条件分布
- 2.3.4 剩余寿命与年龄的分布

3.3.1 泊松过程的数字特征

知识点回顾： 设$X_T=\{X(t), t\in T\}$是随机过程，如果对任意$t\in T$，$EX(t)$存在则有：

1.随机过程的均值函数　定义$m_X(t)=EX(t)$为X_T的均值函数

2.协方差函数　定义$B_X(s，t)=E[\{X(s)- m_X(t)\}\{X(t)-m_X(t)\}]$为$X_T$的协方差函数, $s,t\in T$

3.方差函数　令$s=t$,即得$D_X(t)= B_X(s，t)=E[X(t)- m_X(t)]^2$, $t\in T$，即为X_T的方差函数

4.相关函数　定义$Rx(s,t)=E[X(s)X(t)]$, $s,t\in T$为X_T的相关函数

泊松过程的数字特征:

设$\{X(t), t \geq 0\}$是泊松过程，对$\forall s, t \geq 0$

且对s<t,有:

$$E[X(t)-X(s)] = \lambda(t-s)$$

由X(0)=0，故:

均值:

$$m_X(t) = E[X(t)] = E[X(t)-X(0)] = \lambda t \quad (3.4)$$

方差:

$$D[X(t)] = E[X(t)] = \lambda t \quad (3.5)$$

相关函数：

$$R_X(s,t) == \lambda s(\lambda t+1)$$

推导：

对于一个随机变量，它的方差等于变量平方的期望与期望平方之差

$$R_X(s,t) = E[X(s)X(t)]$$

$$= E\{X(s)[X(t)-X(s)+X(s)]\}$$

$$= E[X(s)-X(0)][X(t)-X(s)]+E[X(s)]^2$$

$$= E[X(s)-X(0)]E[X(t)-X(s)]+D[X(s)]+\{E[X(s)]\}^2$$

$$= \lambda s\lambda(t-s)+\lambda s+(\lambda s)^2$$

$$= \lambda^2 st+\lambda s$$

$$= \lambda s(\lambda t+1),$$

协方差函数：

$$B_X(s,t) = R_X(s,t) - m_X(s)m_X(t) = \lambda s$$

一般地可表示为：

$$B_X(s,t) = \lambda \min(s,t) \qquad (3.6)$$

特征函数：

$$g_X(u) = E[e^{iuX(t)}] = \exp\{\lambda t(e^{iu} - 1)\} \quad (3.7)$$

特征函数推导:

$$g_X(u) = E\left[e^{iuX(t)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{iun} P\left\{X(t)=n\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{iun} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t e^{iu})^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t e^{iu}} = e^{\lambda t e^{iu} - \lambda t}$$

$$= e^{\lambda t (e^{iu} - 1)}$$

即 $g_X(u) = \exp\left\{\lambda t (e^{iu} - 1)\right\}$

2.3.2 时间间隔与等待时间分布

设 $\{X(t), t \geq 0\}$是参数为λ泊松过程，令X（t）表示t时刻事件A发生的次数，W_1，W_2，…分别表示第一次，第二次，…事件A发生的事件，T_n（$n \geq 1$）表示从第（n-1）次事件A发生到第n次事件A发生的时间间隔。通常称为第n次事件A出现的时刻或第n次事件A发生的等待时间，是第n个时间间隔，它们都是随机变量。

定理2 设$\{X(t), t \geq 0\}$是具有参数λ泊松分布，$\{T_n(n \geq 1)\}$是对应的的时间间隔序列,则随机变量$T_n(n=1,2,\cdots)$是独立分布的均值为 $1/\lambda$ 的指数分布。

推导： 要确定 T_n 的分布,首先我们注意到事件$\{T_1 > t\}$发生当且仅当泊松过程在$[0, t]$区间内没有事件发生，因而:

$$P\{T_1 > t\} = P\{X(t) = 0\} = e^{-\lambda t}$$

因此 T_1 具有均值为 $1/\lambda$ 的指数分布。

接下来再求已知条件下的分布

由

$$P\{T_2 > t \mid T_1 = s\} = P\{在(s, s+t)内没有事件 \mid T_1 = s\}$$

$$= P\{在(s, s+t)内没有事件\}$$（由独立增量可知）

$$= e^{-\lambda t}$$（由平稳增量可知）

可得出 T_2 也是一个具有均值 $1/\lambda$ 的指数随机变量，且 T_2 独立于 T_1，重复推导，可得到定理1.

注：平稳独立增量的假定等价于说在概率意义上过程在任何时刻都重新开始，即从任何时刻其过程独立于先前已发生的一切（由独立增量），且有与原过程完全一样的分布（由平稳增量），即过程无记忆，因此指数间隔是意料之中的。

定理3 设 $\{W_n (n \geq 1)\}$ 是与泊松过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 对应的一个等待时间序列，则 W_n 服从参数为n与λ的 Γ分布（又称**爱尔兰分布**），其概率密度为:

$$f_{W_n}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, & t \geq 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases} \qquad (3.8)$$

推导：由到第n个事件在时刻t或之前发生当且仅当事件t已发生的事件数目至少是n，即：

$$X(t) \geqslant n \Leftrightarrow W_n \leq t$$

因此：

$$P\{W_n \leq t\} = P\{X(t) \geqslant n\}$$

$$= \sum_{j=n}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

对上式求导，可得 的密度函数是：

$$f(t) = -\sum_{j=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!} + \sum_{j=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} = \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

例3.4 已知仪器在[0 , t] 内发生振动的次数 $X(t)$ 是具有参数λ的泊松过程。若仪器振动k ($k \geq 1$)次就会出现故障，求仪器在时刻t_0正常工作的概率。

解:故障时刻就是仪器发生第k振动的时刻 W_k，服从Γ分布:

$$f_{W_k}(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

故仪器在时刻t_0正常工作的概率为:

$$P = P(W_k > t_0)$$

$$= \int_{t_0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \mathrm{d}t$$

$$= P[X(t_0) < k]$$

$$= \sum_{n=0}^{k-1} \lambda e^{-\lambda t_0} \frac{(\lambda t_0)^n}{n!}$$

例3.5 设$\{X_1(t), t \geq 0\}$和$\{X_2(t), t \geq 0\}$是两个相互独立的泊松过程，它们在单位时间内平均出现的事件数分别为λ_1和 λ_2，记 $w_k^{(1)}$为过程$X_1(t)$的第k次事件到达时间, $w_1^{(2)}$为过程$X_2(t)$的第1次事件到达时间，求$P\{W_k^{(1)} < W_1^{(2)}\}$,即第一个泊松过程的第k次事件发生比第二个泊松过程第1次事件发生早的概率。

解： 设$W_k^{(1)}$ 的取值为x， $W_1^{(2)}$的取值为y，由（3.8）式可得：

$$f_{W_k^{(1)}}(x)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\dfrac{(\lambda_1 x)^{k-1}}{(k-1)\,!}, & x\geqslant 0,\\ 0 & x<0.\end{cases}$$

$$f_{W_1^{(2)}}(y)=\begin{cases}\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}, & x\geqslant 0,\\ 0 & x<0.\end{cases}$$

则：

$$P\{W_k^{(1)}<W_1^{(2)}\}=\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

其中D为由 y=x与y轴所围区域，f(x,y)为 $W_k^{(1)}$与$W_1^{(2)}$的联合概率密度，故:

$$f(x,y) = f_{W_k^{(1)}}(y) f_{W_1^{(2)}}(y)$$

所以:

$$P\{W_k^{(1)} < W_1^{(2)}\}$$

$$= \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \frac{(\lambda_1 x)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dydx$$

$$= \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k$$

3.3.3 到达时间的条件分布

假设在[0,t]内事件A已经发生一次，我们要确定这一事件到达到达时间W_1的分布。因为泊松过程有平稳独立增量，故有理由认为 [0,t]内长度相等的区间包含这个事件的概率应该相同，即这个事件的到达时间应在[0,t]上服从均匀分布。

对于$s<t$，有：

$$
\begin{aligned}
P\{W_1 \le s \mid X(t)=1\} &= \frac{P\{W_1 \le s,\, X(t)=1\}}{P\{X(t)=1\}} \\
&= \frac{P\{X(s)=1,\, X(t)-X(s)=0\}}{P\{X(t)=1\}} \\
&= \frac{P\{X(s)=1\}P\{X(t)-X(s)=0\}}{P\{X(t)=1\}} \\
&= \frac{\lambda s e^{-\lambda t} e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} \\
&= \frac{s}{t},
\end{aligned}
$$

分布函数为：

$$F_{W_1|X(t)=1}(s)=\begin{cases}0, & s<0,\\ s/t, & 0\le s<t,\\ 1, & s\ge t,\end{cases}$$

分布密度为：

$$f_{W_1|X(t)=1}(s)=\begin{cases}1/t, & 0\le s<t,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

将此结果推广到一般情况即：

定理4 设 {X(t), t≥0} 是泊松过程，已知在[0,t]内事件A发生n次，则这n次到达时间 $W_1, W_2, \cdots, W_n$ 与相应于n个[0,t]上均匀分布的独立随机变量的顺序统计量有相同的分布。

此时 $W_1, W_2, \cdots, W_n$ 在已知X(t)=n的条件下的条件概率密度为：

$$f(t_1, t_2, \cdots, t_n) = \begin{cases} \dfrac{n!}{t^n}, 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t \\ 0\,,\ \text{其他} \end{cases}$$

例3.6 设在$[0, t]$内事件A已经发生n次，且$0 < s < t$，对于$0 < k < n$，求在$[0, s]$内事件A发生k次的概率。

解：
$$P\{X(s)=k \mid X(t)=n\}$$

$$=\frac{P\{X(s)=k, X(t)=n\}}{P\{X(t)=n\}}$$

$$=\frac{P\{X(s)=k, X(t)-X(s)=n-k\}}{P\{X(t)=n\}}$$

$$= \frac{\dfrac{(\lambda s)^k e^{-\lambda s}}{k!} \cdot \dfrac{[\lambda(t-s)]^{n-k} e^{-\lambda(t-s)}}{(n-k)!}}{\dfrac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{s^k (t-s)^{n-k}}{t^n}$$

$$= C_n^k \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}$$

例3.7 设在[0 , t] 内事件A已经发生n 次，求第k次($k<n$) 事件A发生的时间W_k的条件概率密度函数。

解：

$$P\{s < W_k \le s+h \mid X(t)=n\}$$

$$= \frac{P\{s < W_k \le s+h, X(t)=n\}}{P\{X(t)=n\}}$$

$$= \frac{P\{s < W_k \le s+h, X(t)-X(s+h)=n-k\}}{P\{X(t)=n\}}$$

$$= \frac{P\{s < W_k \le s+h\} \cdot P\{X(t)-X(s+h)=n-k\}}{P\{X(t)=n\}}$$

$$f_{W_k|X(t)}(s \mid n) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\frac{s^{k-1}}{t^k}\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{P\{s < W_k \le s+h \mid X(t)=n\}}{h}$$

$$= \frac{f_{W_k}(s)\cdot P\{X(t)-X(s)=n-k\}}{P\{X(t)=n\}}$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\frac{s^{k-1}}{t^k}(1-\frac{s}{t})^{n-k}$$

注，$f_{Wk}(s)$可由定理3得出。

例3.8 仪器受到振动而引起损伤。若振动是按强度为λ的泊松过程发生，第k次振动引起的损伤为D_k，$D_1,D_2,\cdots$，是独立同分布随机变量序列，且和 $\{N(t),t\geq 0\}$ 独立，其中$N(t)$表示 $[0,t]$ 时间段仪器受到震动次数。又假设仪器受到震动而引起的损伤随时间按指数减少，即如果震动的初始损伤为D，则震动之后经过时间t后减小为$De^{-\alpha t}$ $(\alpha>0)$。假设损伤是可叠加的，

即在时刻t的损伤可表示为 $D(t)=\sum_{k=1}^{N(t)} D_k e^{-\alpha(t-\tau_k)}$，

其中 τ_k 为仪器受到第k次震动的时刻，

求 $E[D(t)]$。

解：分析题目可知:

$$E[D(t)]=E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} D_k e^{-\alpha(t-\tau_k)}\right]$$

$$=E\left\{E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} D_k e^{-\alpha(t-\tau_k)}\middle|N(t)\right]\right\}$$

由于，

$$E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} D_k \mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau_k)} \middle| N(t)=n\right]$$

$$= E\left[\sum_{k=1}^{n} D_k \mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau_k)} \middle| N(t)=n\right]$$

$$= e^{-\alpha t} E(D_1) E\left[\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\alpha\tau_k} \middle| N(t)=n\right]$$

再由**定理4**知:

在N(t)=n的条件下 $\tau_k, k = 1, 2, \cdots, n$ 是 [0,t]上相互独立的均匀随机变量的顺序统计量，故：

$$E\left[\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\alpha\tau_k} \middle| N(t)=n\right] = E\left[\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\alpha U(k)}\right] = E\left[\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\alpha U_k}\right]$$

$$= n[E\mathrm{e}^{\alpha U_1}] = n\int_0^t \mathrm{e}^{\alpha x}\frac{1}{t}dx = \frac{n}{\alpha t}(\mathrm{e}^{\alpha t} - 1)$$

3.3.3 剩余寿命与年龄的分布

设X(t)为在(0,t]内事件A发生的个数，Wn表示第n个事件发生的时刻, $W_{X(t)}$ 表示在t时刻前最后一个事件发生的时刻, $W_{X(t)+1}$表示在t时刻后首次事件发生的时刻, 令：

$$\begin{cases} S(t)=W_{X(t)+1}-t \\ V(t)=t-W_{X(t)} \end{cases}$$

称S(t)为剩余寿命或剩余时间，V(t)为年龄。

由定义可知： $\forall t \geq 0, S(t) \geq 0, 0 \leq V(t) \leq t$

定理5 设{X(t),t≥0}是具有参数λ泊松过程，则有：

（1）S(t) 与 {Tn,n≥1}同分布 ,即

$$P\{S(t)\le x\}=1-e^{-\lambda x}\quad,\quad x\ge 0$$

（2）V(t)的分布为“截尾”的指数分布，即

$$P\{V(t)\le x\}=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}\ , & 0\le x<t\\ 1\ , & t\le x\end{cases}$$

证明：注意到，

$$\{S(t) > x\} = \{X(t+x) - X(t) = 0\}$$

则，

$$P\{S(t) \le x\} = 1 - P\{S(t) > x\}$$

$$= 1 - P\{X(t+x) - X(t) = 0\}$$

$$= 1 - e^{-\lambda x} \qquad (x \ge 0)$$

由：

$$\{V(t)>x\}=\begin{cases}\{X(t)-X(t-x)=0\}, & t>x\\ \varnothing, & t\le x\end{cases}$$

t>x时：

$$P\{V(t)>x\}=1-P\{V(t)\le x\}$$
$$=1-P\{X(t)-X(t-x)=0\}$$
$$=1-e^{-\lambda x}$$

t≤x时：

$$P\{V(t)>x\}=1$$

即

$$P\{V(t)\le x\}=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & 0\le x<t\\ 1, & t\le x\end{cases}$$

λ

例3.9 设到达火车站的顾客流遵循参数λ为的泊松流 {N(t), t≥0} ,火车t时刻离开车站，求在到达车站的顾客等待时间总和的期望值。

解：设第i个顾客到达火车站的时刻为Si，则[0,t]内到达车站的顾客等待时间总和为：

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} (t - S_i)$$

由，

$$E\{S(t) \mid N(t) = n\} = E\{\sum_{i=1}^{N(t)} (t - S_i) \mid N(t) = n\}$$

$$= E\{\sum_{i=1}^{n} (t - S_i) \mid N(t) = n\}$$

$$= nt - E\{\sum_{i=1}^{n} S_i \mid N(t) = n\}$$

$$= nt - \frac{nt}{2} = \frac{nt}{2}$$

因此

$$E\{S(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(P\{N(t)=n\}E\{\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)|N(t)=n\}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{N(t) = n\} \cdot \frac{nt}{2}$$

$$= \frac{t}{2} E\{N(t)\}$$

$$= \frac{\lambda}{2} t^{2}$$

1. 设某个中子计数器对到达计数器的粒子只是没个一个记录一次，假设粒子是按平均率为每分钟四个的poisson过程到达，令T是两个相继被记录的粒子之间的时间间隔（以分钟为单位），试求

（1）T的概率密度函数；

（2）P{T≥1}.

解　设X_1，X_2 ⋯为被记录的粒子之间的时间间隔，则它们是相互独立且同分布的。只要求出X1的分布，即为T的分布。

由于{X1>t}等价于在时间[0,t]内至多到达一个粒子，故有

$$
\begin{aligned}
P\{X1>t\} &= P\{N(t) \le 1\} \\
&= P\{N(t)=0\}+P\{N(t)=1\} \\
&= e^{-4t}+4te^{-4t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{X1}(t) &= P\{X_1 \le t\} \\
&= 1-P\{X_1>t\} \\
&= 1-e^{-4t}-4te^{-4t}, t>0
\end{aligned}
$$

$f_T(t)=f_{x1}(t)=16te^{-4t}, \quad t>0$

$$P\{T\geq 1\} = \int_1^\infty f_T(t)\,dt$$

$$= \int_1^\infty 16te^{-4t}\,dt$$

$$= 5e^{-4}$$

2.设电话总机在（0，t]内接到电话呼叫次数X(t)是具有强度（每分钟）为λ的泊松过程，求

（1）两分钟内接到3次呼叫的概率；

（2）“第二分钟收到第三次呼叫”的概率。

（3）若λ=2，求t时刻到X(t)+1时刻的概率密度。

解

（1）根据定义2

$$P\{X(t+s)-X(s)\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!},\quad n=0,1,\cdots$$

$$P\{X(2)\text{-}x(0)=3\}=e^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^3}{3!}$$

(2)错误答案：

P=P{X(2)-X(1) ≥1|X(2)-X(0)=3}

=P{X(2)-X(0)=3}-P{X(2)-X(1)=0|X(2)-X(0)=3}

$$= P\{X(2)-X(0)=3\} - \frac{P\{X(2)-X(1)=0, X(2)-X(0)=3\}}{P\{X(2)-X(0)=3\}}$$

$$= P\{X(2)-X(0)=3\} - \frac{P\{X(1)-X(0)=3\}}{P\{X(2)-X(0)=3\}}$$

$$= e^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^3}{3!} - \frac{e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^3}{3!}}{e^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^3}{3!}}$$

$$= e^{-\lambda}\frac{\lambda^3}{3!}$$

（2）正确答案：

$$P=\sum_{k=0}^{2}P\{X(1)-X(0)=k,X(2)-X(1)\geq 3-k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{2}P\{X(1)-X(0)=k\}\cdot P\{X(2)-X(1)\geq 3-k\}$$

$$=e^{-\lambda}[(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2})-e^{-\lambda}(1+2\lambda+2\lambda^2)]$$

（3）设W（t）是t时刻到X(t)+1时刻的时间间隔

{W（t）>x}等价于{[t,t+x)时间段内未接到电话}

因此

$$P\{W(t)>x\}=P\{X(t+x)-X(t)=0\}$$

$$=e^{-2x}$$

所以

$$F_{W(t)}(x)=1-e^{-2x}$$

$$f_{W(t)}(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

3.某商场为了调查顾客到来的客源情况，考察男女顾客来商场的人数。假设男女顾客到达商场的人数分别独立的服从每分钟1人与每分钟2人的poisson过程，求

（1）到达商场的顾客的总人数应该服从什么分布？

（2）已知t时刻已有50人到达的条件下，问其中有20位女性顾客的概率有多大？平均多少位女性顾客？

解 （1）令X(t),Y(t)分别表示（0，t]时间段内到达商场的男女顾客人数，由题设条件有

$$P\{X(t)=k\}=\frac{t^k e^{-t}}{k!}, k=0,1,2,\cdots,$$

$$P\{Y(t)=j\}=\frac{t^j e^{-2j}}{k!}, j=0,1,2,\cdots,$$

于是（0，t]时间段内到达商场的总人数X(t)+Y(t)的分布为

$$P\{X(t)+Y(t)=n\}=\sum_{k=0}^{n}P\{X(t)=\mathrm{k},Y(t)=n-k\}$$

$$\underline{\underline{独立性}}\sum_{k=0}^{n}P\{X(t)=\mathrm{k}\}P\{Y(t)=n-k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{t^{k}}{k!}e^{-t}\frac{(2t)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-2t}$$

$$=\frac{t^{n}}{n!}e^{-3t}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}2^{n-k}$$

$$=\frac{t^{n}}{n!}e^{-3t}(1+2)^{n}=\frac{(3t)^{n}}{n!}e^{-3t}$$

即（0，t]时间段内到达商场的总人数X(t)+Y(t)服从参数为3t的Poisson分布

（2）先求总人数X（t）+Y（t）一定时，女顾客人数Y（t）的条件分布

$$P\{Y(t)=j\mid X(t)+Y(t)=n\}=\frac{P\{Y(t)=j,X(t)+Y(t)=n\}}{P\{X(t)+Y(t)=n\}}$$

$$=\frac{P\{Y(t)=n-j,Y(t)=j\}}{P\{X(t)+Y(t)=n\}}$$

$$=\frac{\dfrac{t^{n-j}}{(n-j)!}e^{-t}\cdot\dfrac{(2t)^j}{j!}e^{-2t}}{\dfrac{(3t)^n}{n!}\cdot e^{-3t}}=C_n^j(\frac{2}{3})^j(\frac{1}{3})^{n-j},j=0,1,\cdots,n$$

故在X（t）+Y（t）已知时， Y（t）服从二项分布B(n,2/3)。

因此，已知t时刻有n=50人到达的条件下，其中恰好有j=20位女顾客的概率为

$$C_{50}^{20}(\frac{2}{3})^{20}(\frac{1}{3})^{30}.$$

而女顾客的平均数为：

$$E\{Y(t)\mid X(t)+Y(t)=n\}$$

$$=\sum_{j=0}^{n} jP\{Y(t)=j\mid X(t)+Y(t)=n\}$$

$$=\sum_{j=0}^{n} j\cdot C_n^j(\frac{2}{3})^j(\frac{1}{3})^{n-j}$$

$$=\frac{2}{3}n.$$

因此，已知t时刻有n=50人到达的条件下，女顾客平均有(2/3)×50=33.3位。

结束语

1.研究什么是泊松过程？

2.它有什么特点或者性质？

3.它能干什么或是说能解决什么问题？