Neurónové siete
vypracované otázky ku skúške 2012

Zdroje:
1. Igor Farkaša – http://ii.fmph.uniba.sk/~farkas/Courses/ns.html
2. Wikipedia

(poznámka: červeným zvýraznené časti otázok nie sú vypracované)

1. Stručná história konekcionizmu, základné časti biologických neurónov a ich vlastnosti, klasický konekcionizmus, model s prahovou logikou, implementácia Booleových funkcií.

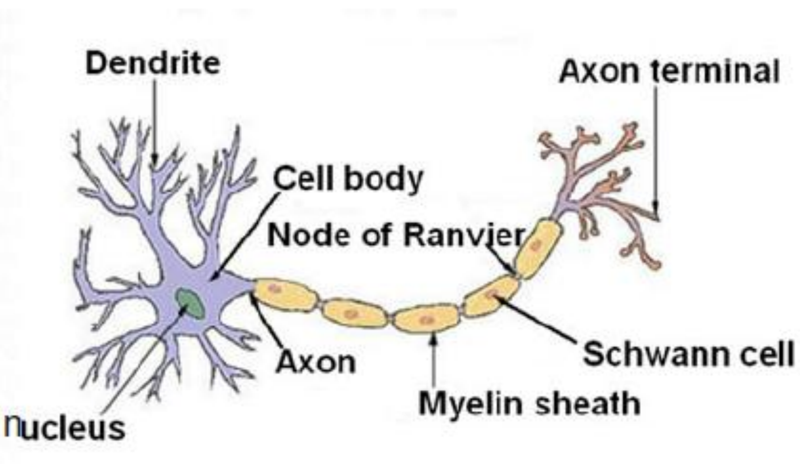
Konekcionizmus je inšpirovaný biológiou - mozgom. Je založený na umelých neurónových sieťach. Modeluje mentálne procesy, aplikácie v praktických problémoch. Mozog má 10^11 neurónov a 10^14 synáps.

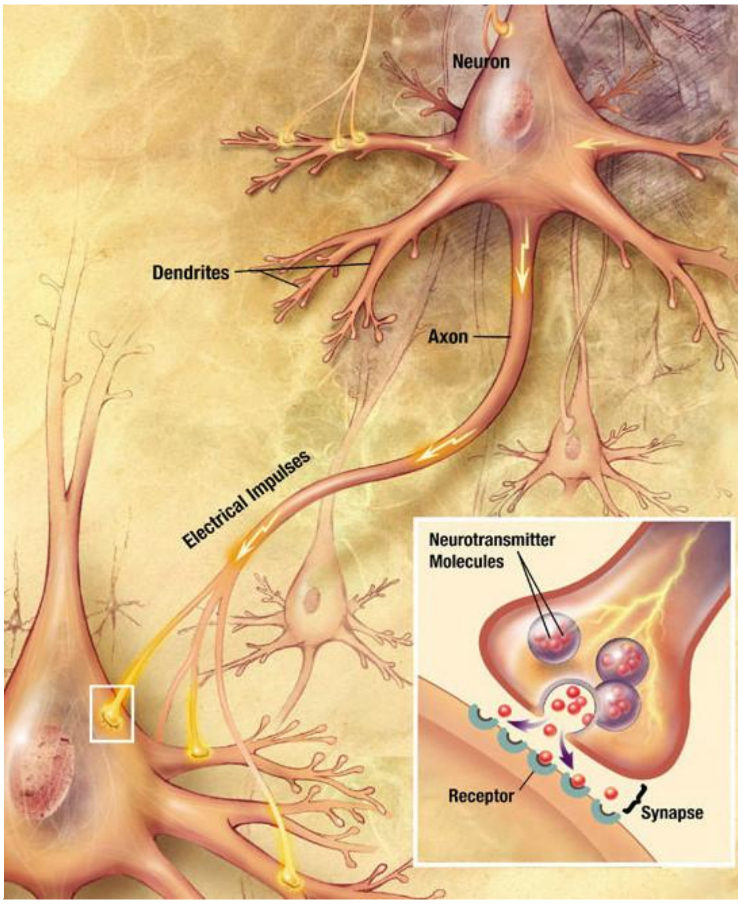
História:

- do 40-tych rokov – klasický – filozofia, psychológia,
- do 70-tych rokov – starý – začiatok počítačov, umelých NN, spája sa s kognitívnou vedou,
- od 1986 – nový – paralelné distribuované subsymbolové, multi-layer, rekurentné,
- od konca 90-tych rokov – pravdepodobnostné metódy.

Neurónové siete - najpoužívanejší konekcionistický model v súčasnosti. Vychádzajú z nasledovných princípov:

- každý mentálny stav možno reprezentovať n-dimenzionálnym vektorom aktivačných hodnôt,
- pamäť sa tvorí modifikáciou sily prepojení medzi neurónmi.

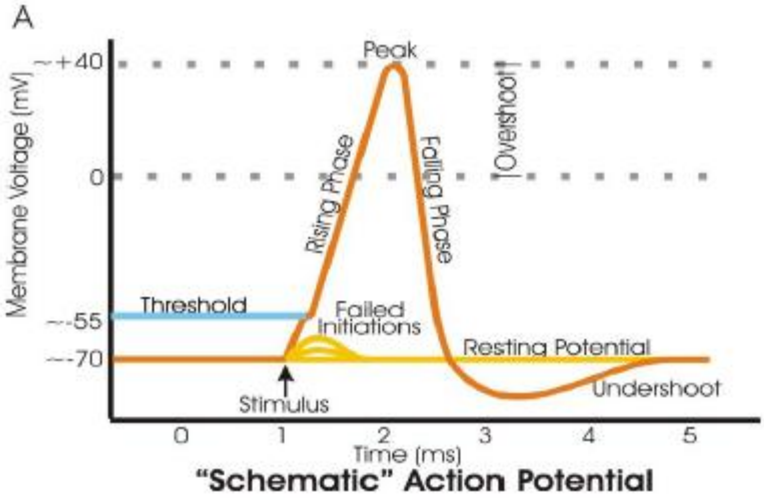




Model s prahovou logikou:

Neurón páli (vysiela signál) ak signál, ktorý dostane cez axóny je dostatočne silný (tzn. že presiahne prah). To zvyčajne znamená jednu z nasledujúcich situácii:

- *časová sumácia* – v (krátkom) čase prídu viaceré impulzy po tej istej synapse
- *priestorová sumácia* – naraz prídu impulzy po viacerých synapsách.



Typický model umelého neurónu:

1. prijme signál z ostatných neurónov,
2. spracuje prijatý signál,
3. pošle spracovaný signál ostatným neurónom.

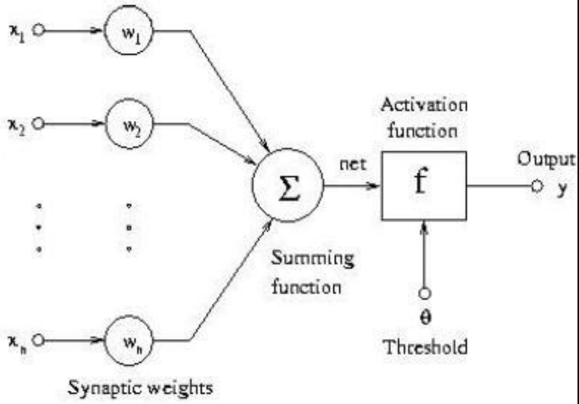
Discrete perceptron

(Rosenblatt, 1962)

- Inputs ***x***, weights ***w***, output *y*
- Activation:

$$y = f(\Sigma^{n}_{j=1} w_j x_j - \theta)$$

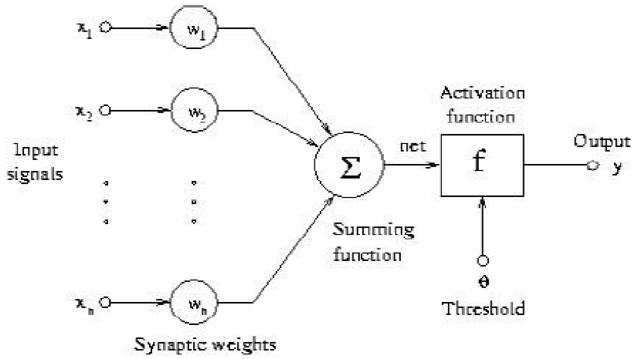
$$y = f\left(\sum_{j=1}^{n+1} w_j x_j\right) \quad x_{n+1} = -1$$



- *f* = threshold function: unipolar {0,1} or bipolar {-1,+1}
- Supervised learning – uses teacher signal *d*
- Learning rule: $w_j(t+1) = w_j(t) + \alpha\,(d - y)\,x_j$

Deterministic model

$$y = f(\Sigma_i w_i x_i - \theta)$$



Stochastic model $P(s=+1) = 1/(1+\exp(-\Sigma_i w_i x_i + \theta))$

Implementácia Booleových funkcií

Neurón vie simulovať každú lineárne separovateľnú booleovskú funkciu. Na ostatné treba dvojvrstvovú sieť.

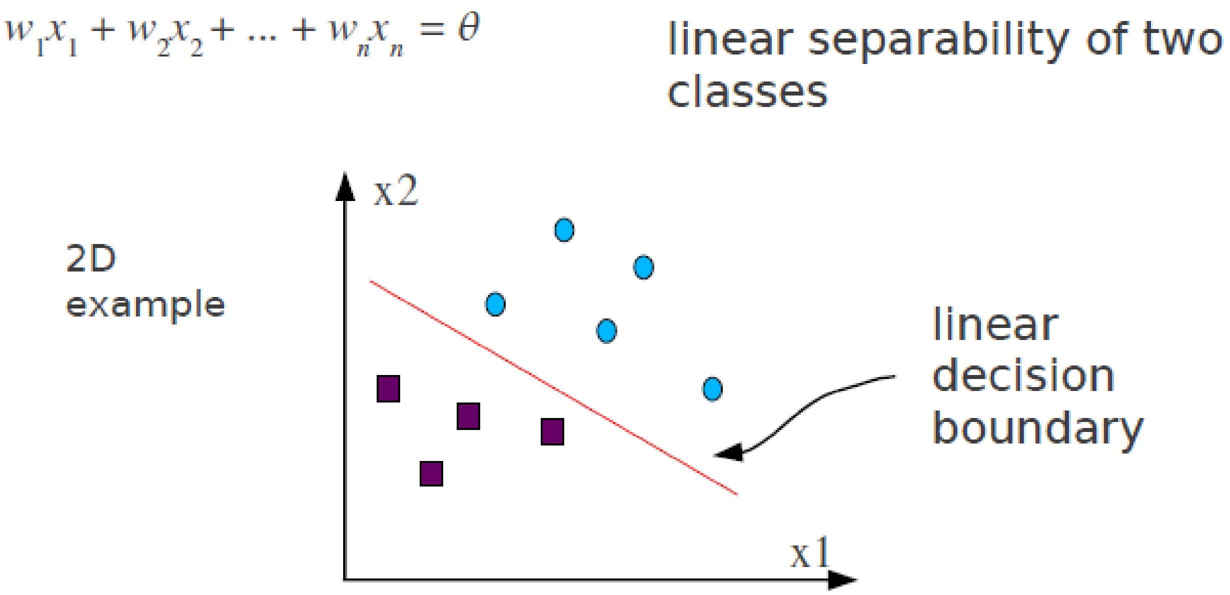
Každá Boolovksa funkcia $\{0,1\}^n$->{0,1} pomocou dvojvrstvovej NS

klasický konekcionizmus

- Aristoteles – predstavil koncept pamäte a konekcionizmu
- Spencer(1855) – separoval psychológiu od filozofie, zaviedol že nervový stav ovplivňuje psychycký stav, vedomosti sú v spojeniach
- James(1890) – model asociatívnej pamäte, zákon správania sa neurónov
- Thorndike(1932) – rozlíšil sub-symbolický pohľad na nervové zoskupenia, sformuloval zákony „zákon o efekte“ a „zakon o trénovaní“
- McCulloch a Pitts(1943) – neurónové siete s prahovými zložkami

2. Binárny perceptrón: pojem učenia s učiteľom, učiace pravidlo, algoritmus trénovania, deliaca nadrovina, klasifikácia vzorov, lineárne separovateľné problémy, definícia a príklad.

Binárny perceptrón – vracia len hodnoty 0 a 1 (prípadne -1, +1) – teda delí vstupné dáta na dve podmnožiny. Z toho vyplýva, že dokáže riešiť len lineárne separovateľné problémy – teda také, ktoré ak si zobrazíme v k-dimenzionálnom priestore (kde k je dĺžka vstupného vektora), tak medzi tieto dve skupiny musíme vedieť skonštruovať deliacu nadrovinu.



Učenie s učiteľom: máme k dispozícii cieľovú hodnotu (prípadne vektor) y pre každú vstupnú hodnotu x.

Algoritmus:

Vstup: množina dvojíc {x, d} kde x je vektor a d je cieľová hodnota.
inicializácia: vygeneruj náhodné váhy, nastav koeficient učenia.

1. nastav celkovú chybu E := 0, náhodne zamiešaj vstupnú množinu vzoriek
2. pre všetky vzorky x zo vstupnej množiny
   a. vyber vstupnú vzorku x, vypočítaj výstup y
   b. vypočítaj kvadratickú chybu učenia: $e(t) = ½(d - y)^2$, nastav E += e(t)
   c. ak e(t) > 0 zmeň váhy pomocou učiaceho pravidla
3. Ak E = 0 (nulová chyba) tak skonči, inak choď na bod 1.

Učiace pravidlo $w_j(t+1) = w_j(t) + \alpha(d - y)x_j$

Aktivačná funkcia $y = f\left(\sum_{j=1}^{n+1} w_j x_j\right) \quad x_{n+1} = -1$

kde *f* je nejaká prahová funkcia: unipolárna {0,1} alebo bipolárna {-1,+1}

náčrt dôkazu konvergencie

Dokážeme konvergenciu pre $\alpha = 1$.
Predpoklady $w(0) = 0$, $w^T(n).x(n) < 0$ pre n=1,2...
Iteratívne aplikujeme učiace pravidlo: $w(n+1)=x(1)+x(2)+...+x(n)$
Keďže C1 a C2 sú lin. separovateľné, tak existuje w_0: $w_0^T.x(i) > 0$
Definujme a = $\min\{w_0.x(n)\}$. Takže $w_0^T.w(n+1) = w_0^T x(1)+...+ w_0^T x(n)$ => $w_0^T w(n+1) >= n.a$
Cauchy-Swartz: $||w_0||^2.||w(n+1)||^2 \geq ||w_0^T.w(n+1)||^2$
Preto $||w_0||^2.||w(n+1)||^2 \geq n^2a^2$ => $\mathbf{||w(n+1)||^2 \geq n^2a^2 / ||w_0||^2}$ **(*)**
Teraz $w(k+1) = w(k)+x(k)$, x(k) patri C1
$||w(k+1)||^2 \leq ||w(k)||^2 + ||x(k)||^2$ i.e. $||w(k+1)||^2 - ||w(k)||^2 \leq ||x(k)||^2$ (&)
Pridanim (&), $k \equiv n$, s w(0) = 0 dostaneme $\mathbf{||w(n+1)||^2 \leq \Sigma ||x(k)||^2 \leq n.b}$, s b = max $\{||x(k)||^2\}$ čo je v konflikte s (*), preto $n_{max}= b||w_0||^2/a^2$

3. Spojitý perceptrón: Rôzne aktivačné funkcie perceptrónu, chybová funkcia a spôsob jej minimalizácie, pojem učenia s učiteľom, učiace pravidlo, algoritmus trénovania perceptrónu.

Spojitý perceptrón: Nelineárna jednotka, štandardne používa sigmoidnú aktivačnú funkciu.

Algoritmus trénovania – rovnaký ako pri binárnom perceptróne.

Alternatívne aktivačné funkcie:

sigmoida: $y = 1 / (1+ e^{-net})$ softmax: $y_i = \frac{e^{net_i}}{\sum_j e^{net_j}}$ hypertangens: tanh(net)

Chyba učenia – kvadratická rovnako ako pri binárnom perceptróne: $e(t) = ½(d - y)^2$

Učiace pravidlo – dve možnosti (p je zvolená vzorka dát):

(stochastické, online) gradient descent: $w_j(t+1) = w_j(t) + \alpha(d - y)f'x_j \quad \boldsymbol{kde}\ f' = y(1 - y)$

(alternatívne) batch: $w_j(t+1) = w_j(t) + \alpha \sum_p \left(d^{(p)} - y^{(p)}\right) x_j^{(p)}$

Učenie s učiteľom: máme k dispozícii cieľovú hodnotu (prípadne vektor) d pre každú vstupnú hodnotu x.

(unconstrained) minimization of the error function: necessary conditions $e(\mathbf{w}^*) \leq e(\mathbf{w})$ and $\nabla e(w^*) = 0$, gradient operator $\nabla = [\partial/\partial w_1, \partial/\partial w_2, \ldots]^T$

4. Viacvrstvové dopredné neurónové siete: architektúra a aktivačné vzorce, odvodenie metódy učenia pomocou spätného šírenia chýb (back-propagation) pre dvojvrstvovú doprednú NS, modifikácie BP, typy úloh pre použitie doprednej NS.

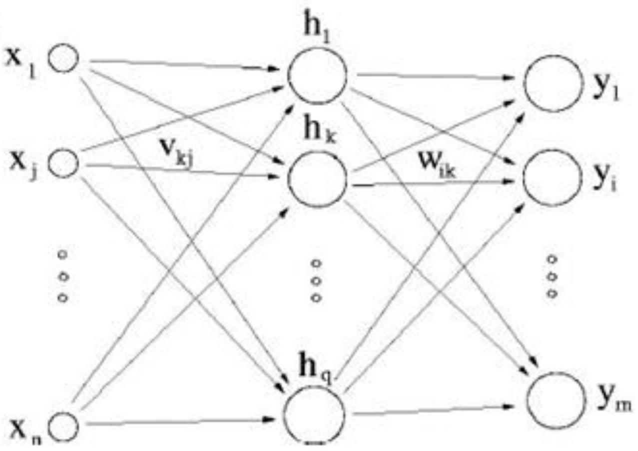
Sú zovšeobecnením jednoduchých perceptrónov. Obsahujú skryté vrstvy, neuróny majú nelineárnu aktivačnú funkciu.

- Inputs x, weights w, v, outputs y
- Nonlinear activation function f
- Unit activation:

$$h_k = f\left(\sum_{j=1}^{n+1} v_{kj} x_j\right)$$

$$y_i = f\left(\sum_{k=1}^{q+1} w_{ik} h_k\right)$$

- Bias input: $x_{n+1} = h_{q+1} = -1$

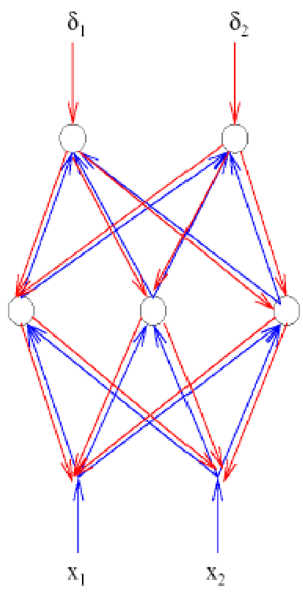


Alternatívne aktivačné funkcie:

sigmoida: $y = 1 / (1 + e^{-net})$ softmax: $y_i = \dfrac{e^{net_i}}{\sum_j e^{net_j}}$ hypertangens: tanh(net)

Chyba učenia – kvadratická, počíta sa cez všetky výstupné neuróny: $e^{(p)} = \frac{1}{2} \sum_i (d_i^{(p)} - y_i^{(p)})^2$

Back-propagation



Vstup: množina dvojíc $\{x^{(p)}, d^{(p)}\}$ kde x je vektor a d je cieľová hodnota.
inicializácia: vygeneruj náhodné váhy, nastav koeficient učenia.

1. nastav celkovú chybu E := 0
2. pre všetky vzorky x zo vstupnej množiny
   a. vyber vstupnú vzorku x, vypočítaj výstup y
   b. vypočítaj chybu a pripočítaj ju k celkovej E += $e^{(p)}$
   c. vypočítaj `sigma`$_i$ a `sigma`$_k$ (spätný prechod)
   d. uprav všetky váhy w_{ik} a v_{kj}
3. ak je splnené kritérium zastavenia tak skonči, inak pokračuj bodom 1.

Učiace pravidlo

Hidden-output weights:

$$w_{ik}(t+1) = w_{ik}(t) + \alpha\delta_i h_k \quad \text{where} \quad \delta_i = (d_i - y_i) f_i'$$

Input-hidden weights:

$$v_{kj}(t+1) = v_{kj}(t) + \alpha\, \delta_k x_j \quad \text{where} \quad \delta_k = (\Sigma_i w_{ik}\, \delta_i) f_k'$$

Kritérium zastavenia (napríklad):

- zmena celkovej chyby E dostatočne malá (< 1 % oproti predchádzajúcej epoche),
- ak sieť dobre generalizuje.

Modifikácia BP

- **momentum** – na preskočenie lokálnych miním,
- **permutácia vstupu** – náhodné preusporiadanie pred každou epochou,
- **weight decay** – váhy sa vynásobia konštantou.

Príklady použitia

- XOR – lineárne neseparovateľne problémy (2-class),
- kompresia obrázkov,
- čítanie anglického textu,
- rozpoznávanie ručné písaných PSČ,
- predikcia časových radov.

5. Viacvrstvová dopredná NS ako univerzálny aproximátor funkcií (formulácia teorémy), trénovacia a testovacia množina, zovšeobecňovanie, preučenie, skoré zastavenie učenia, selekcia modelu, prekrížená validácia.

Trojvrstvová sieť je schopná s danou presnosťou aproximovať ľubovoľnú spojitú funkciu.

Veta: Majme $A_{train} = \{x^{(1)}, ..., x^{(p)}, ..., x^{(N)}\}$, $x^{(p)} \in \mathbf{R}^n$. Pre $\varepsilon > 0$ a ľubovoľnú spojitú funkcu F: $\mathbf{R}^n \rightarrow (0,1)$ definovanú na diskrétnej množine A_{train} existuje funkcia G:

$$G(x^{(p)}) = f\left(\sum_{k=1}^{q+1} w_k f\left(\sum_{j=1}^{n+1} v_{kj} x_j^{(p)}\right)\right)$$

kde parametre w_k, $v_{kj} \in \mathbf{R}$ a $f(z) = \mathbf{R}^n \rightarrow (0,1)$ je spojitá monotónne rastúca funkcia spĺňajúca

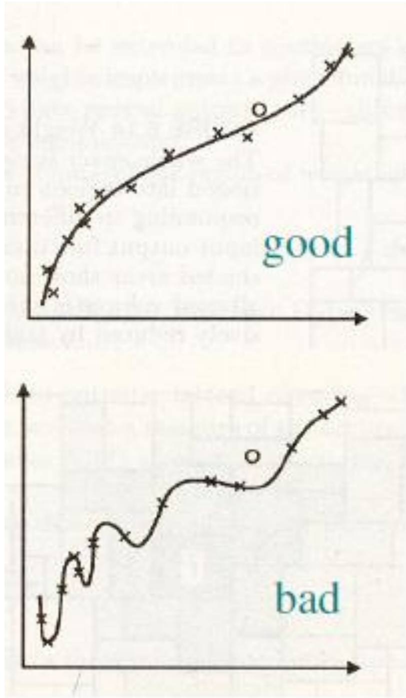
$f(-\infty) = 0$ a $f(\infty) = 0$ taká že $\sum_p | F(x^{(p)}) - G(x^{(p)}) | < \epsilon.$

Hovoríme, že G aproximuje F na A_{train} s presnosťou ε.

G môžeme interpretovať ako dvojvrstvovú doprednú NS s jedným výstupným neurónom.

Zovšeobecnenie, trénovacia a testovacia množina

Množinu všetkých dát rozdelíme na dve: $A = A_{train} \cup A_{test}$



Kvalita generalizácie je ovplyvnená:

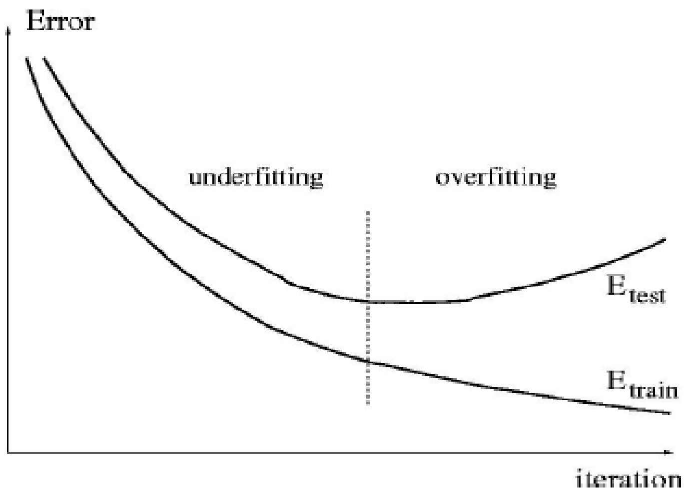
- reprezentatívnosťou vybranej testovacej množiny,
- architektúrou siete,
- zložitosťou problému.

Selekcia modelu – v princípe máme dve možnosti:

- zafixovať veľkosť trénovacej množiny a hľadať optimálnu sieť (network pruning, Occam's razor),
- zafixovať sieť, hľadať optimálnu veľkosť trénovacej množiny (teória založená na VC dimenzii).

Early stopping

Trénovanie sa snažíme zastaviť na hranici medzi podučením a preučením – teda skôr ako sa začne generalizačná sila zhoršovať.



Cross-validation

Trénovaciu množinu rozdelíme ďalej na estimačnú a validačnú podmnožinu. Najlepší model potom hľadáme tak, že modely trénujeme a validujeme na estimačnej a validačnej podmnožine. Najlepší z nich potom môžeme použiť na testovacej množine a overiť tak jeho kvalitu. Používa sa early stopping.

K-fold cross-validation

Rozdelíme A_{train} na k podmnožín A_1 .. A_k. Následne k-krát trénujeme (použijeme early stopping) každý model NS na množine A_{train} - A_i a validujeme na množine A_i. Ako najlepší vyberieme ten ktorý je má najlepšie validačné výsledky. *Extrémny prípad:* veľkosť A_i = 1.

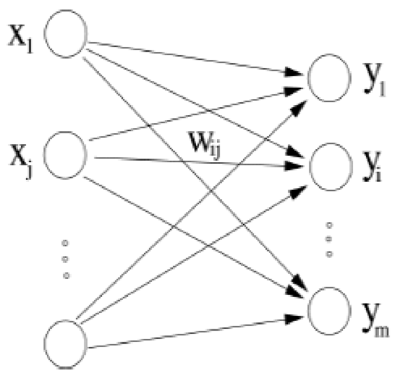
6. Lineárne modely NS: vzťah pre riešenie systému lineárnych rovníc v jednovrstvovej sieti, pojem pseudoinverzie matice, autoasociatívna pamäť: lineárny obal, princíp funkcie modelu, detektor novosti.

Input vector: $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, .., x_n]^T$

Output vector: $\boldsymbol{y} = [y_1, y_2, .., y_m]^T$

Weight matrix: W ~ type $[m \times n]$

Linear transformation $\varphi : \Re^n \to \Re^m$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{x}$



Pridávanie vrstiev je zbytočné, lebo lineárne zobrazenie je uzatvorené na skladanie.

Pseudoinverzia matice

Trénovacia množina (veľkosti N) má vstupy X a výstupy Y. Platí $y^{(p)} = W x^{(p)}$ pre každý prípad p, v maticovej notácii Y = WX.

$$\underset{(m\times N)}{[y^{(1)}\, y^{(2)} \ldots y^{(N)}]} = \underset{(m\times n)}{W} \times \underset{(n\times N)}{[x^{(1)}\, x^{(2)} \ldots x^{(N)}]}$$

Ak je X regulárna tak $W = YX^{-1}$. Inak $W = YX^{+}$, kde X^{+} je pseudoinverzná matica k matici X.

a) $X^{+} = X^{T}(XX^{T})^{-1}$, if $n < N$ and $rank(X) = n$.
b) $X^{+} = (X^{T}X)^{-1}X^{T}$, if $n > N$ and $rank(X) = N$.

Autoasociatívny prípad

Uvažujme N < n a autoasociatívny prípad $y^{(p)} = W x^{(p)}$, m = n.
Model NS by si mal zapamätať/natrénovať N prototypov $[x^{(1)}\, x^{(2)} \ldots x^{(N)}]$.

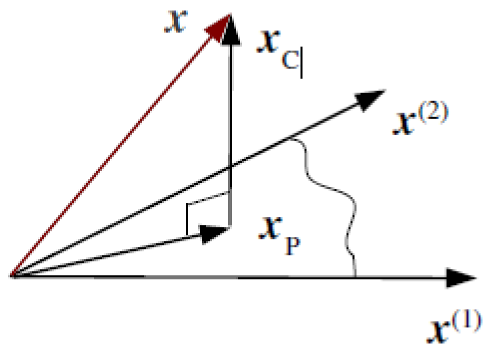
Cieľ: natrénovať na prototypoch a potom pustiť na poškodenej verzii prototypu. Model by mal byť schopný prototyp zrekonštruovať.

V špeciálnom prípade ak N = n existuje triviálne riešenie – W = I (identita).

Linear manifold $\mathscr{L} = \{x \in \Re^n \mid x = a_1 x^{(1)} + a_2 x^{(2)} + \ldots + a_N x^{(N)},\ a_p \neq 0\}$

$\mathscr{L} \subset \Re^n$

Orthogonal complement $\mathscr{L}^{\perp} = \{x \in \Re^n \mid x \perp \mathscr{L}\}$



Každý vektor $x \in R^n$ vieme jednoznačne rozložiť:
$x = x_p + x_c$ kde $x_p \in L$ a $x_c \in L^{\perp}$.

Čo robí autoasociacívna NS?

Tréningová množina $A_{train} = \{x^{(1)}, \ldots, x^{(p)}, \ldots, x^{(N)}\}$ tvorí Lineárny obal L. NS považuje každé smer každého x z L ako šum, ktorý je potrebné odfiltrovať pred projekciou x do L. Z odchýliek sa spraví ortogonálna projekcia(odstráni sa šum) vynásobením zľava $W = XX^{+}$. Keby sa to zľava vynásobilo ($W = I - XX^{+}$), máme bázový vektor z R^n – L, kolmý na L – **detektor novosti** je model s týmto operátorom.

7. Lineárne modely NS: účel Grammovho-Schmidtovho ortogonalizačného procesu, GI model. Pamäť korelačnej matice ako autoasociatívna pamäť, vzťah pre výpočet váh, presluch, porovnanie s GI.

ktorým z množiny lineárne nezávislých vektorov priestoru vytvárame jeho ortonormálnu bázu.

V prvom kroku Gramovho-Schmidtovho ortogonalizačného procesu sa pokladá za základ prvý vektor z množiny vektorov, ktoré normalizujeme. Podľa tohto vektora sa odvíja orientácia zvyšných. Ďalším krokom je samotná ortogonalizácia vektorov, a nakoniec normalizácia vektorov. Pre zjednodušenie výpočtov sa vektory normalizujú až na koniec procesu. Tento proces možno popísať ako rekurentný proces.

Pridanie novej vzorky nemusí byť až tak výpočtovo náročné ako rátať znovu pseudoinverziu.

General Inverse (GI) model: (Ortogonalizačný proces: máme bázu u^1..u^k. Chceme ortogonálnu bázu v^1..v^k. v^1:=u^1. Keď už máme p vektorov určených, ďalší bude z priestoru gen. v^1..v^p,u^(p+1).v^(p+1) = u^(p+1) - ⍰_i=1^p{(v^i^T * u^(p+1) / ||v^i||^2) * v^i}

Keď príde nový vektor x, čo nepatrí do priestoru, týmto vzorcom získame zložku kolmú na priestor.

W_0 = 0. W_(N+1) = W_N +(x_(N+1) * x_(N+1)^T / |x_(N+1)|^2).x_(N+1) = x – W_N*x.)

Máme pattern $x^{(1)}$, $x^{(2)}$,..., $x^{(N)}$ a príslušnú ortogonálnu bázu (Gram-Schmidt) $x'^{(1)}$, $x'^{(2)}$,..., $x'^{(N)}$

W je vypočátane rekurzívne po pridaní nového vstupu x.

1. Initialize $\mathbf{W}^{(0)} = \mathbf{0}$.

2.
$$W^{(N+1)} = W^{(N)} + \frac{\tilde{x}^{(N+1)}\tilde{x}^{(N+1)T}}{\left|\tilde{x}^{(N+1)}\right|^2}$$

$$\tilde{x}^{(N+1)} = x^{(N+1)} - W^{(N)}x^{(N+1)}$$

Korelačná matica: Váha z j-teho vstupu do i-teho výstupu w_{ij} je úmerná sume x_j*y_i pre všetky x,y z trénovacej množiny. $W=YX^T$. Ak sú vstupy X ortonormálne, $X^T=X^{-1}=X^+$. Potom CMM=GI.

Autoasociácia: $W=XX^T$. Pre vstup x_p: $Wx_p = x_p|x_p|^2 + C(p)$ – presluch z iných zložiek. Ak by bol nulový, $x_1..x_N$ sú ortogonálne. Vo všeobecnosti teda nie je. Dá sa ale znížiť posunutím strednej hodnoty zložiek vstupov do nuly. x_k := x_k – 1/N ⍰x_i. (obr.)

Porovnanie: Ak vstupy nie sú ortogonálne, GI s detektorom novosti je lepší. (obr. rozp. tvárí).

8. Samoorganizácia v NS, základné princípy, pojem učenia bez učiteľa, typy úloh použitia, Ojovo pravidlo učenia – vzťah pre adaptáciu váh a vysvetlenie konvergencie váhového vektora, pojem vlastného vektora a vlastného čísla.

Učenie bez učiteľa – algoritmus učenia nemá informáciu o požadovaných aktivitách výstupných neurónov v priebehu trénovania. Súperenie medzi váhami, aktualizácia váh blízkych víťazovi. Tendencia samozosilňovania – Hebbovo pravidlo. Využíva sa redundancia vo vstupných dátach (využíva sa klasterizácia – vektorová kvantizácia). Topologické zobrazenie príznakov.

pouzitie: PCA, Data clustering, data coding

Ak netreba hlavné komponenty, ale stačí podpriestor nimi generovaný, je tu Ojovo pravidlo: w_ij += y_i(x_j -SUM{y_k*w_kj}), máme n vstupov a p výstupov, i=1..p, k=1..p

For small α we get Oja's (1982) rule:

$$w_j(t+1)=w_j(t)+\alpha y x_i - y^2 w_j(t) \qquad (*)$$

Hebbian term — Stabilizing term

$$\Delta w_{ij}=y_i\left(x_j-\sum_{k=1}^{p} y_k w_{kj}\right) \quad i=1,2,\ldots,p$$

Výstupy nie sú usporiadané, variancia je cca rovnaká. Výsledky závisia od počiatočných podmienok a poradiu vstupov. Váhový vektor konverguje k vlastnému vektoru korelačnej matice vstupov xx^T.

Matica A má vlastné číslo v, ak je determinant A - vI nulový. Vlastné čísla trojuholníkovej a diagonálnej matice sú na diagonále. X je vlastný vektor prislúchajúci vlastnému číslu v, ak Ax=vx.

Architektúry – dopredné (+ laterálne spojenia)

9. Metóda hlavných komponentov pomocou algoritmu GHA a APEX, architektúra modelu, vzťah pre adaptáciu váh, pojem vlastných vektorov a vlastných čísel, redukcia dimenzie, aplikácia na kompresiu obrazu.

PCA = lineárna transformácia do priestoru príznakov. S tým súvisí redukcia dimenzie. Slúži na predspracovanie dát, ktoré majú cca Gaussovské rozloženie.

Príznakový priestor je n-dimenzionálny priestor, kde každý vzor je bod s n súradnicami. n je počet príznakov vzoru. Podobné vzory sú blízko pri sebe.

Matica A má vlastné číslo v, ak je determinant A-vI nulový. Vlastné čísla trojuholníkovej a diagonálnej matice sú na diagonále. X je vlastný vektor prislúchajúci vlastnému číslu v, ak Ax=vx. Majme vstupný vektor x, premietneme ho do priestoru príznakov na vektor u.

Variancia je u^T*Ru, kdeR=xx^T je korelačná matica vstupu. Keď variancia nadobúda extrém, Ru = vu, kde v sú vlastné čísla Ra u sú vlastné vektory R. Pre n rôznych vlastných vektorov dostaneme n rôznych projekcií a_i =x^T*u_i. a_i sú hlavné komponenty(príznaky). Rekonštrukcia: x = □{a_i*u_i}. Keď to zosumujeme len pre p najväčších vlastných čísel, dostaneme akceptovateľnú aproximáciu s redukovanou dimenziou.

GHA:

Majme n vstupov, p výstupov. Pre i=1..p w_ij += y_i(x_j - sum_k=1^i{y_k*w_kj}). Takto sa extrahuje p hlavných komponentov korelačnej matice vstupov usporiadaných podľa veľkosti. Netreba počítať korelačnú maticu. Výpočtovo nenáročný, ak p<<n. Je to reestimačný algoritmus.

vlastnosti: Nájde hlavné komponenty a zoradí ich podľa veľkosti

Použitie: kódovanie dát, kompresia.

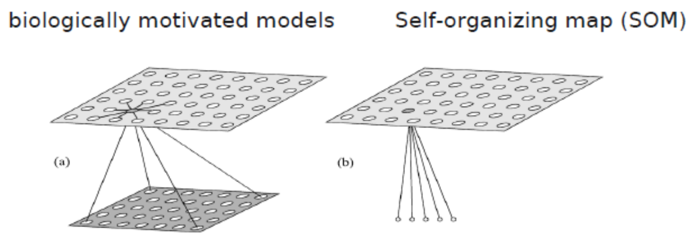
APEX:

Má aj laterálne spojenia, ktoré majú inhibičný účinok, ale konvergujú k 0. Váhy konvergujú k vlastným vektorom R a lateralne k 0 vektorom. Je to dekorelačný algoritmus. Dopredné váhy sú modifikované podľa Ojovho pravidla a lateralne váhy pomocou anti Hebovského pravidla

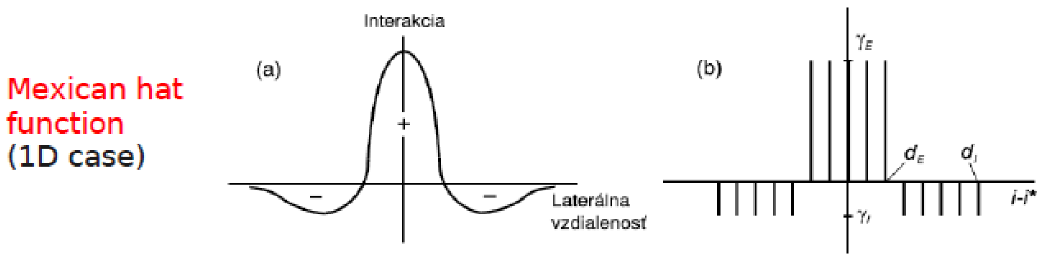
10. Učenie so súťažením (typu "winner-take-all"), nevýhody. Neurobiologická motivácia algoritmu SOM, laterálna interakcia a jej náhrada v SOM, sumarizácia algoritmu, voľba parametrov modelu, DP verzia algoritmu.

Winner-take-all v nelineárnej sieti – neuróny sa ovplyvňujú navzájom (kooperácia neurónov) a zároveň aktivujú samé seba (rekurencia) – postupne sieť dospeje do štádia kedy je aktívny len jeden výstupný neurón – korešpondujúci najsilnejšiemu vstupu.

Neurobiologická motivácia:
oko - sietnica je prepojená s mozgovou kôrou.

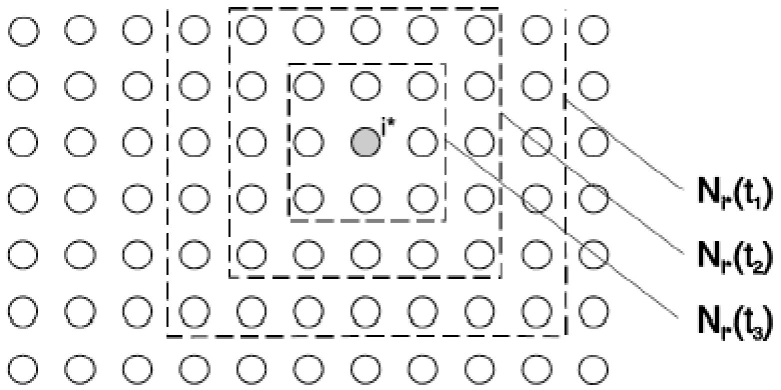


Laterálna interakcia: každý s každým, vplyv v závislosti od vzdialenosti má tvar mexického klobúka. Šírka mexického klobúka má byť dostatočne široká v porovnaní s šírkou lokálnych vstupov.



Náhrada – použijeme **funkciu susedstva:** neuróny sa aktualizujú len v susedstve víťaza. Veľkosť susedstva časom klesá. Susedstvo: *štvorcové* alebo *gaussovské*.

• rectangular neighborhood (below)



• alternative: gaussian neighborhood

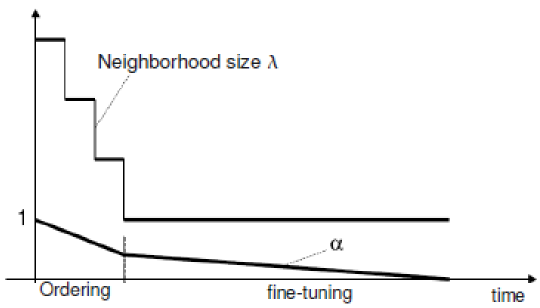
$$h(i^*, i) = \exp\{-\frac{d_E^2(i^*, i)}{\lambda^2(t)}\}$$

$$\lambda(t) = \lambda_i.(\lambda_f/\lambda_i)^{t/t_{max}}$$

Algoritmus

1. náhodne vyber vstup x
2. nájdi víťazný neurón i* pre x $\quad i^* = \mathrm{argmin}_i \, \|x - w_i\|$
3. uprav váhy v susedstve víťazného neurónu
$$w_i(t+1) = w_i(t) + \alpha(t) * \mathrm{h}(i^*, i) * [x(t) - w_i(t)]$$
4. aktualizuj parametre – susedstvo, koeficient učenia
5. opakuj až kým nie je splnené kritérium zastavenia

Voľba parametrov modelu - proces učenia možno rozlíšiť dve fázy.
1. usporiadanie - klesá veľkosť okolia diskrétne s časom.
2. doladenie – možno ponechať najbližších susedov súčasťou okolia, až kým učenie neskončí.
Na funkcii poklesu parametra učenia **α** v praxi až tak veľmi nezáleží - monotónne klesajúca funkcia **z hodnoty blízkej 1**, s malými hodnotami (**do rádovo 0,1–0,01**) - doladenie (napr. lineárna lomená funkcia, exponenciálna funkcia atď.).



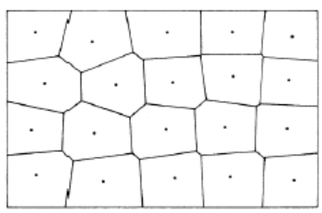
Počet iterácií: aspoň 500 * počet neurónov (Kohonen)

DP verzia (dot product, skalárny súčin) – použitá metrika – $d_i = w_i^t * x$, spočíva to v rotácii váhového vektora smerom k vstupnému vektoru. Víťaz má najmenší uhol. Váhy ležia na povrchu hypergule.

11. SOM: vektorová kvantizácia, topografické zobrazenie príznakov, redukcia dimenzie, magnifikačný faktor, príklad použitia.

SOM umožňuje realizovať zobrazenie zachovávajúce topológiu a zobraziť tak charakteristické príznaky vstupných dát. SOM je schopná dáta klasterizovať, redukovať ich dimenziu.

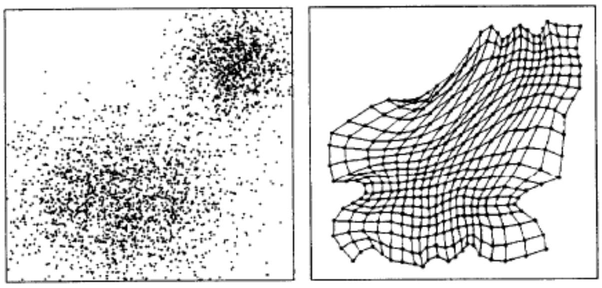
Vektorová kvantizácia – nahradenie množiny vstupných vektorov za menšiu množinu prototypov (v SOM – váhových vektorov). Vstupný priestor sa rozdelí na Voronoiov diagram tak, aby sa minimalizovala chyba rekonštrukcie. Použitie: napr. kompresia dát.



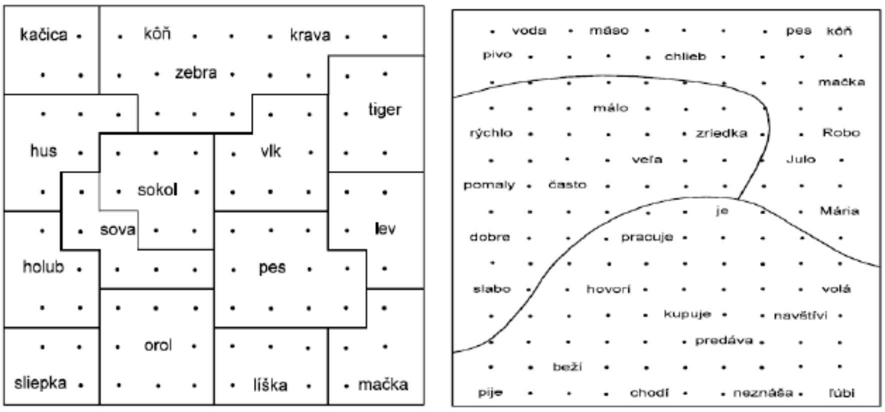
Voronoi tessellation

$$V_i = \{x \mid \|x-w_i\| < \|x-w_j\|, \ \forall j \neq i$$

Magnifikačný faktor – počet váhových vektorov pripadajúcich na jednotku plochy vstupného priestoru. SOM má tendenciu rovnomerne pokryť trénovacie dáta – hustejšie vstupy = hustejšie váhové vektory.



Attribute map | Contextual map



- words represented by features | - words represented by contexts

12. Hybridné modely NS, RBF model: aktivačné vzorce, bázové funkcie, príznakový priestor, problém interpolácie, aproximačné vlastnosti RBF siete.

Hybridné modely

– kombinácia učenia s učiteľom a učenia bez učiteľa,
– môže byť oveľa rýchlejšia ako gradient descent ale s podobnými výsledkami,
– fungujú správne ak podobné vstupy majú dať podobné výstupy,
– môže byť potrebných viac skrytých neurónov ako v prípade učenia s učiteľom.

RBF siete sú také, v ktorých je aktivačnou funkciou skrytých neurónov tzv. radiálna bázová funkcia (RBF) - najčastejšie sa používa gaussovská funkcia.

- Inputs $\boldsymbol{x}$, weights $\boldsymbol{w}$, outputs $\boldsymbol{y}$
- Output activation:

$$y_i = \sum_{k=1}^{q} w_{ik} h_k(x) + w_{i0}$$

- h_k = radial activ. function, e.g.

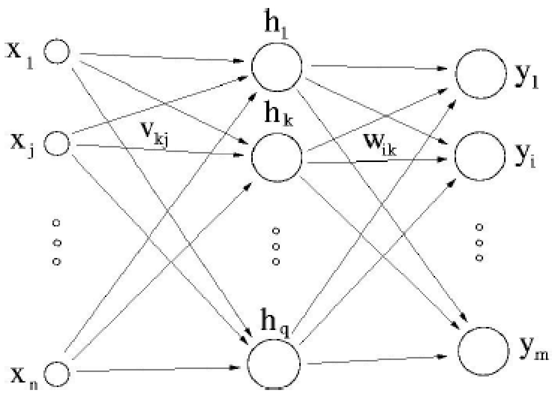
  $h_k(\boldsymbol{x}) = \varphi(x) = \exp(-\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}_k\|^2/\sigma_k^2)$

  $\boldsymbol{v}_k$ ~ center k, σ_k ~ its width

  $\varphi(d)$ are (usually) local functions because for $d \to \infty$ $\varphi(d) \to 0$

  σ affects generalization

- $\boldsymbol{v}_k$ used for approximation of unconditional probability density of input data $p(\boldsymbol{x})$



Celá sieť reprezentuje nasledovnú sumu (podľa wikipedie):

$$y(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} w_i\, h(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|),$$

Typy bázových funkcií

Gaussian: $\varphi(r) = \exp(-r^2/\sigma^2)$

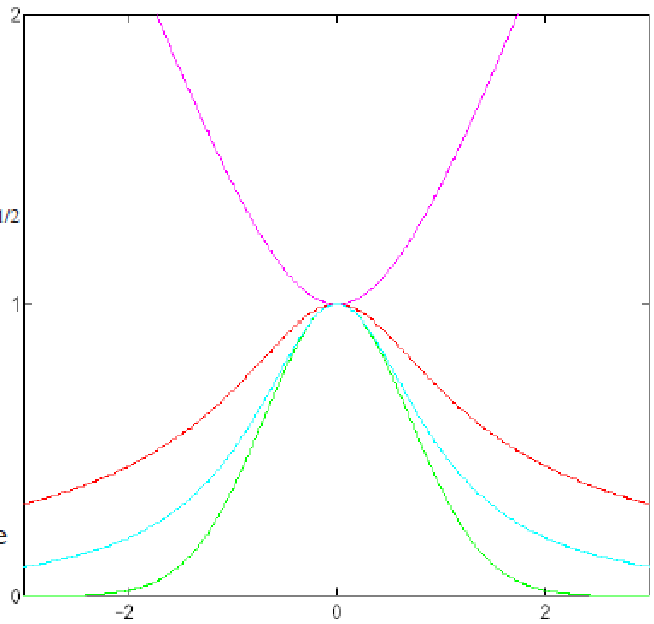
Multiquadrics: $\varphi(r) = (r^2+c^2)^{1/2}$

Inverse multiquadrics: $\varphi(r) = (r^2+c^2)^{-1/2}$

Cauchy: $\varphi(r) = 1/(1+r^2)$

$r \in \Re,\ c > 0$

RBFs that grow at infinity (multiquadrics) can be used to approximate a smooth I/O mapping with greater accuracy than those that yield positive-definite interpolation matrix (Powell, 1988).



Príznakový priestor je n-dimenzionálny priestor, kde každý vzor je bod s n súradnicami. n je počet príznakov vzoru. Podobné vzory sú blízko pri sebe.

Problém interpolácie: RBF umožňuje interpolovať zobrazenie $R^n \rightarrow R$. Interpolácia je metóda umožňujúca konštruovať nové body z konečnej množiny známych bodov. Napríklad danými bodmi preložiť polynóm. Váhy sa dajú vypočítať pomocou lineárnej algebry.

Problém: zobrazenie nemusí byť všadedefinované ani jednoznačné ani spojité. (šum..)

13. Hybridné modely NS, RBF model: spôsoby trénovania váh. Základné vlastnosti dynamických modelov NS na online aproximáciu dátových množín (TRN, DCS). Porovnanie RBF a MLP.

Hybridné modely, RBF – viď vyššie.

Trénovanie váh RBF je dvojfázový proces - najprv sa upravujú centrá a šírky, potom váhy.

Centrá: vyberú sa náhodne zo vstupov alebo klasterizáciou vstupov (napr. k-means) alebo supervised (vzdialenosť – najmenšie štvorce).

Šírky: sa vyberú podľa najväčšej vzdialenosti centier.

Váhy: zráta sa matica G ($g_{11}..g_{1n}..$ $..g_{m1}..g_{mn}$), $g_{ij} = h(|x_i - x_j|)$. $w = G^+y$

Dá sa to, lebo na rozdiel od MLP majú RBF siete jedno lokálne minimum, keď sú centrá fixnuté. Ale tiež sa to dá aj gradient descentom.

TRN = topology representing network, neorientovaný graf, po určení víťaza sa zvýši vek hrán z neho idúcich, staré hrany sa rozpoja.

DCS = dynamic cell structures, neorientovaný graf, môžu sa vkladať vrcholy. Odstraňujú sa vrcholy bez spojenia.

RBF vs. MLP: obe sú nelineárne dopredné viac-vrstvové univerzálne aproximátory,

- RBF rýchlejšie konverguje,
- reprezentácia skrytej vrstvy: MLP – globálna, RBF – lokálna => MLP potrebuje menej parametrov
- MLP – stochastický aproximačný problém,
- RBF – fitovanie hyperpovrchu vo vysoko-dimenzionálnom priestore,
- MLP – jednofázové; RBF – dvojfázové trénovanie.

14. Rekurentné NS: spôsoby reprezentácie času, typy úloh pre rekurentné NS. Modely s časovým oknom do minulosti, výhody a nedostatky, príklad použitia.

V trénovacej množine môžu byť pre rovnaké vstupy rôzne výstupy – menia sa v čase.

Reprezentácia času

- *tapped-delay input* – čas ako priestorový rozmer – „okno do minulosti“,
- *rekurentná architektúra*
  - dočasné vstupno-výstupné mapovanie,
  - asociatívna pamäť.

Typy úloh

- klasifikácia sekvencií ,
- predikcia sekvencií,
- generovanie sekvencií.

Nevýhody - spotrebujú veľa pamäti; nemajú spätnú väzbu.

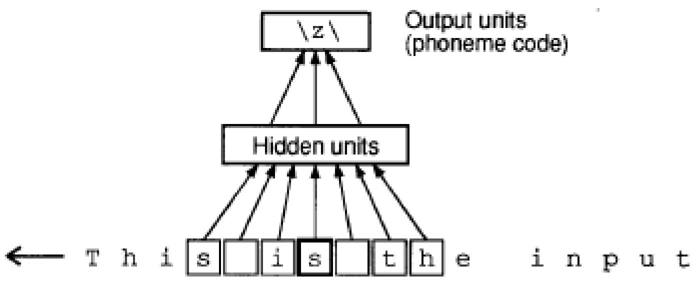
Príklady použitia – predikcia a modelovanie časových radov; odstraňovanie šumu; rozpoznávanie hlasu.

Okno do minulosti – reprezentuje kontext - vstupom NS je postupnosť niekoľkých reálnych vstupov tak ako za sebou nasledujú v čase. Napr. niekoľko po sebe nasledujúcich písmen pri ‚čítaní anglického textu‘.

Modely využívajúce okno do minulosti

NETtalk: čas ako priestorový rozmer

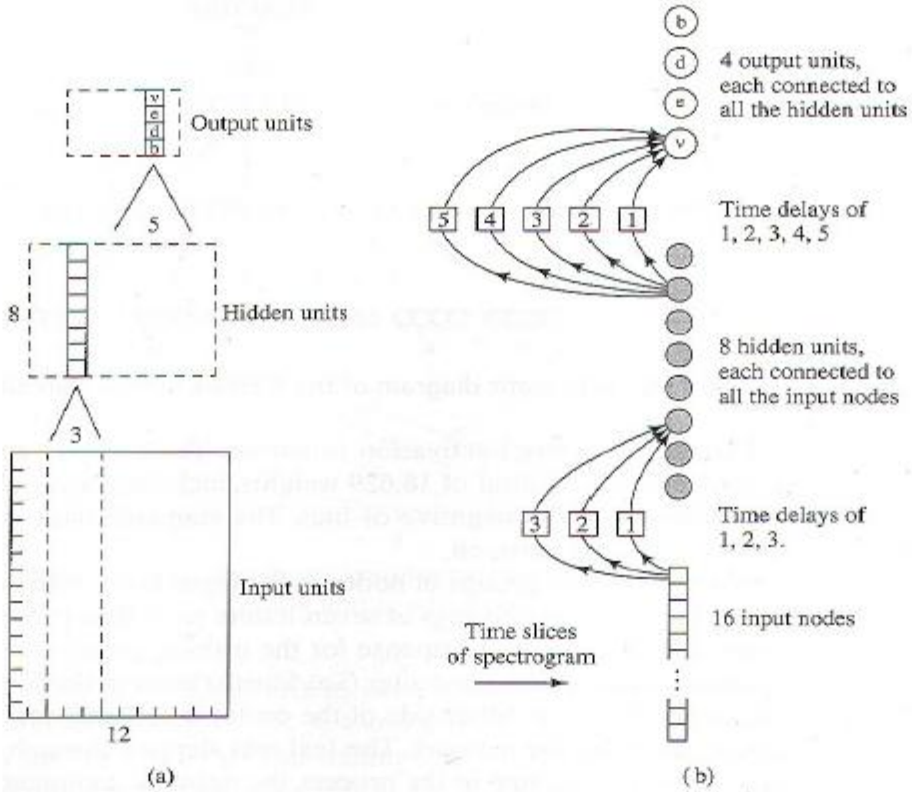
Čítanie anglického textu. Vstup = 7 × 29 neurónov (7 znakov), 80 skrytých a 26 výstupných (fonémy).

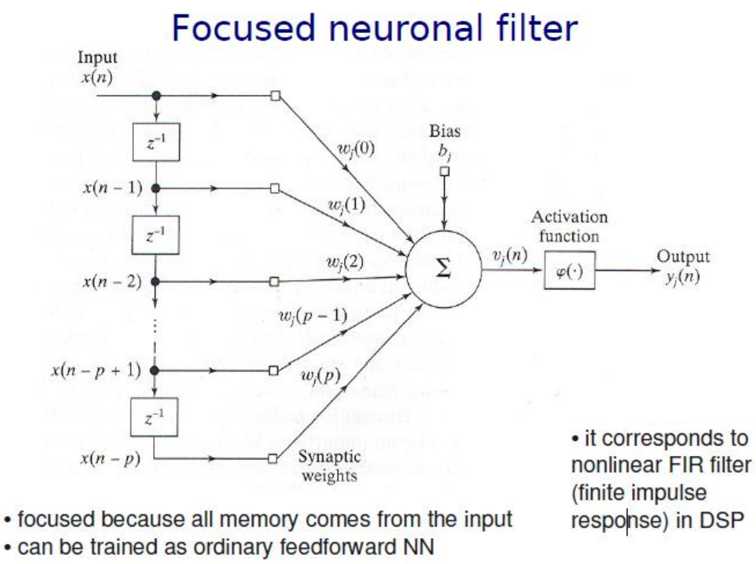


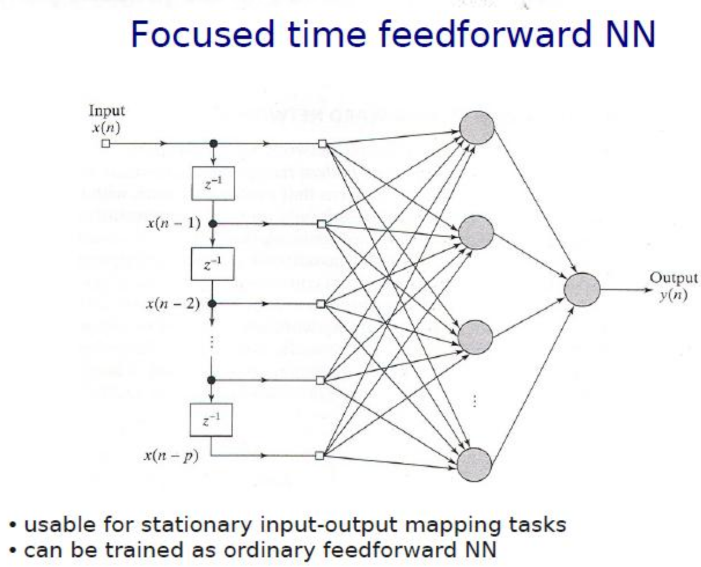
Time-Delay Neural Network

Vstup: spektogram (16 × 12).
Skrytá vrstva: 10 kópií 8 neurónov.
Výstup: 6 kópií 4 jednotiek

Trénuje sa ako dopredná NS.
Nevhodná pre úlohy vyžadujúce dlhú pamäť.

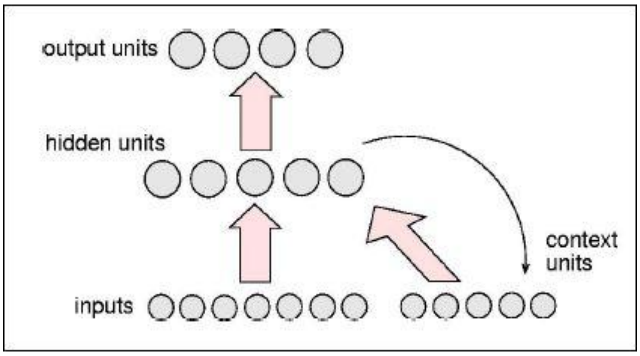






Aplikacie: predikcia a modelovanie časových radov, odstraňovanie šumu, rozpoznávanie reči, identifikácia systému

15. Rekurentné NS: opis architektúry a princíp trénovania RNN pomocou algoritmu BPTT a pomocou RTRL. Príklad použitia.



Dynamicky riadené rekurentné NS, globálny feedback – nadobúda stavovú reprezentáciu, trenovanie po epochách, kontinuálne trénovanie.
Heuristika:
začne s kratšou sekvenciou, potom zväčši dĺžku,
updatni váhy iba ak error je vačší ako treshold,
zober do úvahy regularizácie (weight decay)

Aktiváciu majú rovnakú ako MLP: S_i^(t+1) = g(?w_ij*S_j^t + I_i^t) – I je vstup.

BPTT: Chyba sa šíri po časovo rozvinutej sieti takisto ako v BP. Veľké pamäťové nároky. Moc sa neujala.

RTRL: Netreba vedieť dopredu dĺžku postupnosti, môže sa meniť a netreba alokovať toľko pamäti. Výpočtovo náročnejšia. Požadovaná odpoveď v čase T+1 je $O(N^4)$. Chyba k-teho neurónu v čase t=T+1 je E_k^t = O_k – S_k^t.

V čase t z {1..T} je E_k^t = 0. Celková chyba je E^t = 1/2{?(E_k^t)^2}. Váhy sa updatujú ako v MLP. delta w_ij^t = ??(E_k^t*deriv.S_k^t podla w_ij).

16. Elmanova sieť: interné reprezentácie pri symbolovej dynamike, markovovské správanie, architektúrny bias, vzťah k IFS, sieť s echo stavmi architektúra, trénovanie.

Elman: predikuje postupnosti z kontextu, rozpoznáva, dopĺňa, má hierarchickú reprezentáciu. Stavový priestor siete má fraktálovú reprezentáciu. Trénovať sa môže BP bez rekurentných váh, alebo BPTT alebo RTRL.

IFS – množina transformácií. Príklad – žaba v sierinskeho trojuholníku. Postupnosť transformácií je adresa v priestore. Dve postupnosti ak majú dlhý spoločný suffix, sú blízko seba.

Markovovská vlastnosť: budúce stavy sú nezávislé na minulých stavoch.

Architektúrny bias: je fenomén – štruktúra klastrov odráža históriu vstupov.

Skrytá vrstva (rezervoar):

lineárna alebo sigmoidná aktivačná funkcia

vytvára dynamický rezervoár s s echo stavmi(súčasný stav je určený vstupnou sekvenciou)
iba výstupné váhy sú trénované

17. Hopfieldov model NS: deterministická verzia, typy dynamiky modelu, energia systému, relaxácia, možné typy atraktorov, autoasociatívna pamäť – nastavenie váh, kapacita pamäte.

Plne prepojená vrstva s n neurónmi. Každý neurón je v jednom z dvoch stavov S_i z {-1,+1}. Spojené sú každý s každým. Váha synapsy J_{ij}. Postsynaptický potenciál h_i^{int}=sum{J_{ij}*S_j}. Ak prekročí prah excitácie h_i^{ext}, neuróny sa aktivuje. $S_i = sgn(h_i^{int} – h_i^{ext})$.

Paralelná dynamika: Všetky menia svoj stav naraz. Najprv sa zrátajú zmeny, potom sa aplikujú.

Sekvenčná dynamika: Vždy sa mení len jeden náhodne vybratý neurón. Zodpovedá to pohybu po hranách hyperkocky.

Energia systému: E(S)=-1/2(sumJ_ij*S_i*S_j) - sumS_i*h_i^ext.

Atraktory: pravé/predstierané

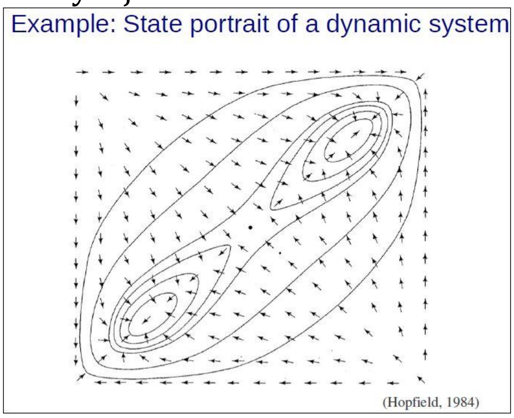
Správanie: chaotické trajektórie(synchrónna dyn., asymetrická J), limitné cykly (pri synch. dyn.), bodové atraktory. (energia klesá, kým nedosiahne minimum, pri async. dyn.)

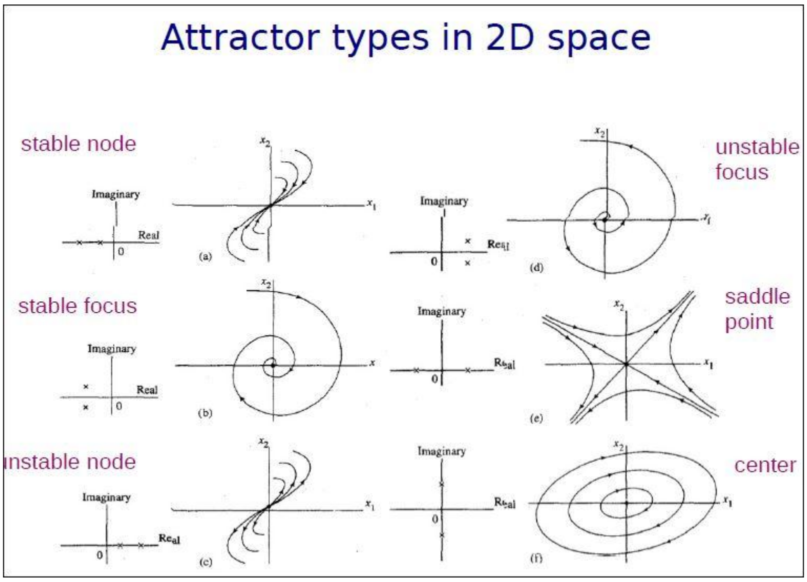
Autoasociátor: nastavenie váh: J_ij=x_i^p*x_j^p pre jednotlivé pamäťové vzory p. Pri relaxácii keď sa dostane do nejakého vzoru (S_i=x_i^p) (recall), podmienka stability: 1+C_i^p = x_i^p*h_i^p>0.C_i^p je presluch, rovná sa nule, ak sú pamäťové vzory ortogonálne. Pamäťová kapacita sa potom blíži k počtu neurónov.

Autoasociatívna pamäť: Bodové atraktory = stacionárne stavy ⇔ naučené vzory
obsahovo adresovateľná pamäť
Nastavenie váh: $J_{ij} = 1/n\ \Sigma_p\ x_i^{(p)}\ x_j^{(p)}$
kapacita pamäte: pre ortogonálne vzory $C_i^{(r)} = 0 \Rightarrow N_{max}= n$

18. Nelineárne dynamické systémy: stavový portrét, atraktory v 2D. Hopfieldov model NS: stochastická verzia, opis dynamiky, parameter inverznej teploty, odstránenie falošných atraktorov.

stavovo priestorový model, používa stavové premenné rozkladajúce sa v čase
stavový postrét: všetky trajektórie sa prekrývajú





Každý neurón je v jednom z dvoch stavov S_i ⍰{-1,+1}. Spojené sú každý s každým. Váha synapsyJ_ij. Postsynaptický potenciál h_i^int=⍰_j=1^N{J_ij*S_j}. Ak prekročí prah excitácie h_i^int, neurón i sa aktivuje.

Sú tu reverzné atraktory, ale tie nás netrápia. Chceme odstrániť zmiešané atraktory. Pridáme šum(teplotu). Každý zmiešaný stav má kritickú teplotu do 0.46, od ktorej už nie je stabilný.

Použitie: rozoznávanie vzorov(písmo, tváre..), generovanie, rozpoznávanie postupností(reč, zvuky, video..), autoasociácia, klasifikácia, rekonštrukcia, optimalizačné problémy, obch. cestujúci, párovanie,