Phạm Gia Khang - 22120152.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|y+1|(x-1)^2}{(x-1)^2+(y+1)^2} & (x,y) \neq (1,-1) \\ m+2020 & (x,y) = (1,-1) \end{cases}$$

a) Tính $f(1,-1)$; $f(1,0)$ $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y)$

b) Tìm m để $f(x,y)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Giải.

a).

$f(1,-1) = m+2020$

$$f(1,0) = \frac{|0+1|(1-1)^2}{(1-1)^2+(0+1)^2} = 0$$

Đặt $L = \lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{|y+1|(x-1)^2}{(x-1)^2+(y+1)^2}$

Ta có:

$0 \leq (x-1)^2 \leq (x-1)^2+(y+1)^2$

$0 \leq \dfrac{(x-1)^2}{(x-1)^2+(y+1)^2} \leq 1$

Học để biết, học để làm, học để chung sống, học để tự khẳng định...

Mà $|y+1| > 0 \quad \forall y \neq -1$

Nên

$$0 \leq \frac{|y+1|(x-1)^2}{(x-1)^2+(y+1)^2} \leq |y-1|$$

Ta có:

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} 0 = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} |y+1| = 0$$

Do đó, theo đ.lí giới hạn kẹp, suy ra

$$\exists \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{|y+1|(x-1)^2}{(x-1)^2+(y+1)^2} = 0$$

b) f ~~liên tục~~

Ta có: $\forall (x,y) \neq (1,-1)$ thì $f(x) = \dfrac{|y+1|(x-1)^2}{(x-1)^2+(y+1)^2}$

là hàm sơ cấp nên liên tục trên TXĐ.

Xét tính liên tục tại $(x,y) = (1,-1)$

f liên tục tại $(1, -1) \Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y) = f(1,-1)$ $(*)$

* $f(1, -1) = m + 2020$

* $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y) = 0$ (câu a)

$(*) \Leftrightarrow 0 = m + 2020$

$\Leftrightarrow m = -2020$

Vậy, $m = -2020$ thì $f(x, y)$ liên tục trên $\mathbb{R}$