

## SỬ DỤNG CHU TRÌNH EULER XÂY DỰNG TẤT CẢ CÁC ĐỒ THỊ CÓ DÂY BẬC CHO TRƯỚC

Vũ Đình Hòa

*Khoa Công nghệ Thông tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội*

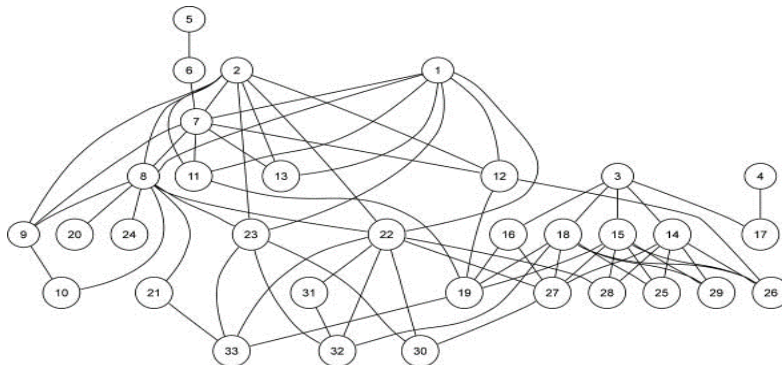
**Tóm tắt.** Một vấn đề cơ bản của lý thuyết đồ thị đã tồn tại từ lâu là tìm tất cả các đồ thị có dây bậc là một dãy số tự nhiên cho trước. Vấn đề này không chỉ là lý thuyết cơ bản mà còn có ứng dụng trong khoa học và thực tế. Kết quả chính trong bài báo này là một thuật toán dựa trên khái niệm đồ thị cân bằng (có thể xây dựng được nhờ các chu trình Euler đơn màu) để xác định tất cả đồ thị có dây bậc cho trước.

**Từ khóa:** Đồ thị đơn, chu trình Euler, bậc của đỉnh.

### 1. Mở đầu

Bài báo này chỉ khảo sát đồ thị đơn vô hướng. Các khái niệm cơ sở có thể tham khảo từ nhiều nguồn tài liệu khác nhau như trong tài liệu [1].

Một dãy số tự nhiên  $d = (d_1, \dots, d_n)$  được gọi là dãy bậc nếu tồn tại một đồ thị đơn vô hướng  $n$  đỉnh để bậc của đỉnh  $i$  là  $d_i$ . Một vấn đề cơ bản của lý thuyết đồ thị đã tồn tại từ lâu là tìm tất cả các đồ thị có dây bậc là một dãy số tự nhiên cho trước. Vấn đề này không chỉ là lý thuyết cơ bản mà còn có ý nghĩa thực tế [2, 3].



**Hình 1. Hệ thống mạng cung cấp thực phẩm Chesapeake Bay [2]**

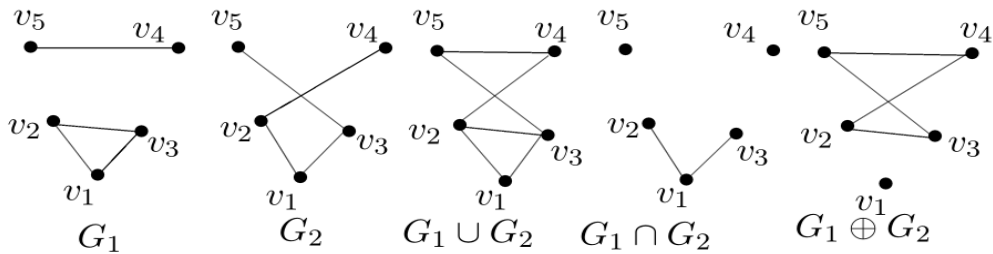
Đã có nhiều nhà khoa học đề cập tới nó, như Havel [4], Erdős và Gallai [5], Hakimi và Havel [4], Zoltán [6], Hyunju Kima, Zoltán Toroczka, István Miklós, Péter L. Erdős, László A. Székely trong [5], M. Mihail- N. Vishnoi [3], Jonathan McLaughlin [4]. Tuy nhiên, cho đến nay, vấn đề này vẫn chưa được giải quyết triệt để. Havel [4], Erdős và Gallai [4], Hakimi và Havel [4] mới chỉ

Ngày nhận bài: 12/12/2018. Ngày sửa bài: 13/3/2019. Ngày nhận đăng: 20/3/2019.

Tác giả liên hệ: Vũ Đình Hòa. Địa chỉ e-mail: [hoavudinh@gmail.com](mailto:hoavudinh@gmail.com)

xác định được khi nào một dãy số tự nhiên là dãy bậc của một đồ thị. Các nỗ lực khác của Zoltán [6], Hyunju Kima, Zoltán Toroczkai, István Miklós, Péter L. Erdos, László A. Székely trong [5], M. Mihail- N. Vishnoi [3], Jonathan McLaughlin [4] cũng không rõ ràng vì họ không đưa ra chứng minh thuật toán của họ có thể cho ta tất cả các đồ thị cần tìm. Các chương trình được cài đặt theo các thuật toán của họ cũng chỉ đưa ra được một trong các đồ thị đó. Trong bài báo này, thuật toán sau đây giải quyết các vấn đề còn tồn tại dựa trên đường một nét Euler đan màu khép kín và ta cũng sẽ chứng minh rằng thuật toán này xác định được tất cả đồ thị có dãy bậc cho trước.

Cho trước một đồ thị  $G = (V, E)$  mà  $V$  là tập đỉnh,  $E$  là tập cạnh. Ta kí hiệu  $uv$  là cạnh nối 2 đỉnh  $u$  và  $v$ . Một đồ thị con  $G_0$  của  $G$  với cùng tập đỉnh  $V$  được gọi là đồ thị khung. Một đồ thị khung tầm thường của đồ thị  $G = (V, E)$  là đồ thị không có cạnh  $G = (V, \emptyset)$ . Đồ thị bù của đồ thị  $G = (V, E)$  được kí hiệu là  $\bar{G} = (V, \bar{E})$ . Ta định nghĩa một số phép toán hợp, giao và trừ với các đồ thị như sau: Với  $G_1 = (V_1, E_1)$  và  $G_2 = (V_2, E_2)$  thì  $G_1 \cup G_2$  là đồ thị  $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ . Đặc biệt khi  $V_1 = V_2 = V$  thì ta kí hiệu  $G_1 \cap G_2$  là đồ thị  $G = (V, E_1 \cap E_2)$  và  $G_1 \oplus G_2$  là đồ thị  $G = (V, E_1 \oplus E_2)$ , ở đây  $A \oplus B := (A \cup B) - (A \cap B)$  (xem minh họa ở Hình 2).



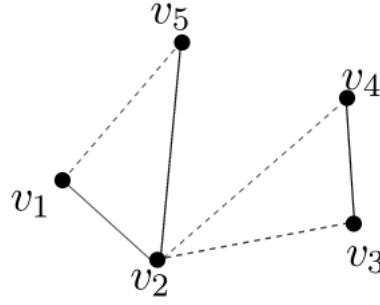
Hình 2. Các đồ thị  $G_1 \cup G_2$ ,  $G_1 \cap G_2$  và  $G_1 \oplus G_2$  của hai đồ thị  $G_1$  và  $G_2$

Một hành trình  $H = (u_1, e_1, u_2, \dots, u_k, e_k, u_{k+1})$  là một dãy các đỉnh  $u_i$  sao cho cạnh  $e_i = u_i u_{i+1}$ , ở đó  $e_i \neq e_j, \forall i \neq j$ . Nếu không xảy ra hiểu nhầm (chẳng hạn trong đồ thị đơn), ta có thể kí hiệu  $H = (u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1})$  thông qua liệt kê các đỉnh của đồ thị nằm trên  $H$ . Hai hành trình được gọi là rời nhau nếu chúng không có đỉnh chung. Khi  $H$  chứa tất cả các cạnh của đồ thị, ta gọi  $H$  là hành trình Euler. Bài toán quen thuộc về hình một chiếc phong bì thư một nét chính là bài toán chỉ ra một hành trình Euler của đồ thị biểu diễn phong bì. Khi  $u_1 = u_{k+1}$  thì  $H$  được gọi là hành trình khép kín. Hành trình Euler khép kín còn được gọi là chu trình Euler.

Vấn đề xác định hành trình Euler khép kín đã được giải quyết trọn vẹn. Thuật toán của Carl Hierholzer [7] cho ta cách tìm một chu trình Euler trong thời gian tuyến tính. Euler đã đưa ra mà không chứng minh Định lí sau (đã được nhiều người chứng minh lại):

**Định lí 1** (Euler, Định lí 1.8.1 trong [1]). Một đồ thị liên thông có chu trình Euler khi và chỉ khi bậc của đỉnh tùy ý của nó là chẵn.

Nếu các cạnh của đồ thị được tô màu hai màu xanh đỏ thì cạnh đỏ được hiển thị bằng các nét liền, cạnh xanh hiển thị bằng các nét đứt (như trong Hình 3). Số cạnh màu đỏ (xanh) xuất phát từ một đỉnh  $v$  được gọi là bậc đỏ (bậc xanh) của  $v$ . Đồ thị có các cạnh được tô hai màu mà đỉnh tùy ý của nó có số cạnh xanh bằng số cạnh đỏ được gọi là đồ thị cân bằng (ví dụ đồ thị  $H$  trong Hình 3). Cho trước đồ thị  $G$ , ta tô màu các cạnh của  $G$  trong đồ thị  $G \cup \bar{G}$  bởi màu đỏ và các cạnh của  $\bar{G}$  bởi màu xanh, và gọi đồ thị đầy đủ thu được là đồ thị tô màu sinh bởi  $G$  mà ta kí hiệu nó bởi  $G^*$  (ví dụ đồ thị  $G^*$  trong Hình 7).



**Hình 3.** Một hành trình Euler khép kín đơn màu  $H = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1)$

Một hành trình được gọi là *hành trình đơn màu* nếu nó không có hai cạnh liên tiếp cùng màu. Một *hành trình khép kín đơn màu* là hành trình đơn màu và không chỉ các cạnh liên tiếp phải khác màu nhau mà cả cạnh xuất phát và cạnh kết thúc của hành trình cũng khác màu nhau (như hành trình Euler  $H$  trong Hình 3). Một đỉnh có thể coi là một hành trình khép kín đơn màu tầm thường. Dễ thấy là hợp của một số hành trình khép kín đơn màu hiển nhiên là một đồ thị cân bằng. Ta có thể thêm điều kiện đơn màu (cạnh chọn tiếp theo khác màu cạnh vừa chọn ngay trước nó) vào các thuật toán quen thuộc để xây dựng hành trình khép kín đơn màu.

Erdős và Gallai đã đưa ra một điều kiện cần và đủ để một dãy số tự nhiên là dãy bậc của một đồ thị đơn như sau:

**Định lý 2 (Erdős-Gallai).** Cho  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n > 0$  là các số nguyên. Các số này là dãy bậc của một đồ thị đơn khi và chỉ khi

(i)  $d_1 + \dots + d_n$  là số chẵn.

(ii) Cho mọi  $k = 1, \dots, n-1$  ta có 
$$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min\{k, d_i\}.$$

Định lý 2 chỉ ra một tiêu chuẩn thuần túy toán về điều kiện cần và đủ để một dãy số là dãy bậc của đồ thị. Nó không cho ta biết cách xây dựng đồ thị tương ứng như thế nào. Một cách cụ thể hơn, gần gũi hơn với thuật toán là kết quả sau của Hakimi và Havel [4]:

**Định lý 3 (Hakimi-Havel).** Dãy số tự nhiên  $d_1 \geq \dots \geq d_n > 0$  ( $n \geq 3$ ) là dãy bậc khi và chỉ khi dãy số  $d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n$  cũng là dãy bậc.

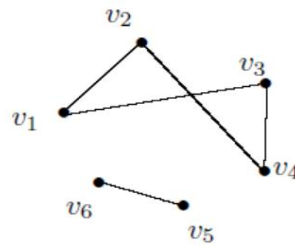
Định lý 3 cho ta một thuật toán đệ quy xác định một dãy số tự nhiên cho trước có phải là một dãy bậc hay không, đồng thời nó cũng cho ta cách xây dựng một đồ thị tương ứng với dãy bậc này. Tuy nhiên đồ thị thu được là một đồ thị hết sức đặc biệt, trong đó đỉnh có bậc cao nhất kề với tất cả các đỉnh có bậc cao tiếp theo.

Thuật toán Hakimi-Havel được áp dụng như sau: Trong mỗi bước ta chọn đỉnh  $v$  có bậc cao nhất trong số các đỉnh còn lại và giảm bậc  $d(v)$  đỉnh có bậc cao nhất và kí hiệu tập đỉnh này là  $N(v)$ . Khi bậc của tất cả các đỉnh về toàn giá trị 0, ta xây dựng lại đồ thị theo qui tắc nối các đỉnh  $v$  được chọn với các đỉnh của tập  $N(v)$ . Chẳng hạn với dãy bậc 2, 2, 2, 2, 1, 1 ta sẽ xây dựng đồ thị 6 đỉnh (Bảng 1). Trong Bảng 1, từ hàng thứ 3 trở đi, cột đầu tiên chứa thông tin về đỉnh  $v$  được chọn và tập đỉnh  $N(v)$  các đỉnh nó sẽ nối tới.

**Bảng 1. Xây dựng đồ thị có dãy bậc  $d = (2, 2, 2, 2, 1, 1)$  theo thuật toán Hakimi**

Đỉnh	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$
Bậc	2	2	2	2	1	1
$N(v_1) = \{v_2, v_3\}$	$\times$	1	1	2	1	1
$N(v_4) = \{v_2, v_3\}$		0	0	$\times$	1	1
$N(v_5) = \{v_6\}$					$\times$	0

Khi bảng kết thúc, ta xây dựng đồ thị tương ứng bằng cách nối các đỉnh  $v$  được chọn với các đỉnh của tập hợp  $N(v)$  tương ứng và có đồ thị tương ứng, được biểu diễn trong Hình 4.



**Hình 4. Đồ thị có dãy bậc  $d = (2, 2, 2, 2, 1, 1)$  theo thuật toán Hakimi**

Các tác giả của [5] mở rộng kết quả này theo cách tương tự, và họ tin tưởng rằng thuật toán sau cho ta tất cả các đồ thị có dãy bậc cho trước:

**Định lý 4 (Định lý mở rộng Hakimi - Havel).** Cho  $d = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ , là dãy bậc không giảm, và  $j$  là một đỉnh cố định (có thể lựa chọn tùy ý). Giả sử chúng ta cho trước một tập hợp các đỉnh bị cấm không được chọn làm láng giềng của  $j$ . Thì tồn tại một đồ thị có dãy bậc  $d$  trong đó  $j$  không nối với các đỉnh bị cấm khi và chỉ khi tồn tại một đồ thị với dãy bậc  $d$  trong đó  $j$  được nối với tất cả các đỉnh bậc cao nhất trong số các đỉnh không bị cấm.

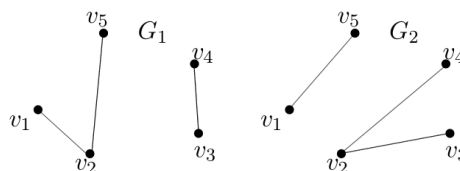
Tuy nhiên các tác giả không hề chứng minh thuật toán mở rộng của mình có thể quét được hết các đồ thị ứng với dãy bậc cho trước. Thuật toán áp dụng Định lý 4 có thể xây dựng một đồ thị sao cho tập láng giềng của một đỉnh được xác định như mong muốn của ta, nhưng nó khó cho ta được hết các đồ thị cần tìm (vì có thể tập láng giềng của các đỉnh khác không xác định như mong muốn được).

## 2. Nội dung nghiên cứu

### 2.1. Các kết quả chính

Ta kí hiệu đồ thị gồm các cạnh đỏ thu được từ đồ thị  $G$  bằng cách đổi màu các cạnh bởi một đồ thị  $H$  cân bằng của nó bởi  $G(H)$  (Hình 5). Dễ dàng thấy rằng nếu đổi màu các cạnh của một đồ thị cân bằng thì bậc của các đỉnh vẫn được giữ nguyên.

Điều ngược lại cũng đúng:



**Hình 5. Từ đồ thị  $G_1$  (trái), đổi màu các cạnh của đồ thị cân bằng  $H$  trong Hình 3 ta thu được đồ thị  $G_2 = G(H)$  (phải)**

**Định lí 5.** Cho trước đồ thị  $G_1 = (V, E_1)$ . Đồ thị  $G_2 = (V, E_2)$  có cùng một dãy bậc như  $G_1$  khi và chỉ khi tồn tại đồ thị khung cân bằng  $H$  trong đồ thị tô màu  $G^*_1$  sinh bởi  $G_1$  sao cho đồ thị tô màu sinh bởi  $G^*_2 = G^*_1(H)$ .

*Chứng minh.* Hiển nhiên  $H$  là một đồ thị cân bằng trong đồ thị tô màu  $G^*_1$  sinh bởi  $G_1$  thì đồ thị  $G^*_1(H)$  có bậc các đỉnh vẫn như bậc của nó trong  $G^*_1$ . Khi đó đồ thị  $G_2 = (V, E_2)$  tạo bởi các cạnh đồ trong  $G^*_1(H)$  có cùng một dãy bậc như  $G_1$ .

Ngược lại nếu  $G_2$  là đồ thị có cùng dãy bậc  $d_1, d_2, \dots, d_n$  như  $G_1$  ( $d_i$  là bậc của đỉnh  $i$  trong  $G_1$  và trong  $G_2$ ), ta sẽ chứng minh tồn tại đồ thị cân bằng  $H$  sao cho  $G^*_2 = G^*_1(H)$ . Thực vậy, tô màu các cạnh của  $G_1$  màu đỏ và các cạnh của  $G_2$  mà không thuộc  $G_1$  màu xanh. Kí hiệu  $H$  là đồ thị  $G_1 \oplus G_2$ . Khi đó dễ thấy số cạnh xanh và số cạnh đỏ tại đỉnh  $i$  tùy ý của  $H$  bằng nhau, do cùng bằng  $d_i$  trừ đi số cạnh chung của  $G_1$  và  $G_2$  tại đỉnh  $i$ . Hiển nhiên là đồ thị  $G_2$  chính là đồ thị thu được từ  $G_1$  bằng cách đổi màu các cạnh của  $H$ , và do đó  $G^*_2 = G^*_1(H)$ .

Từ Định lí 5, ta có hệ quả hiển nhiên sau:

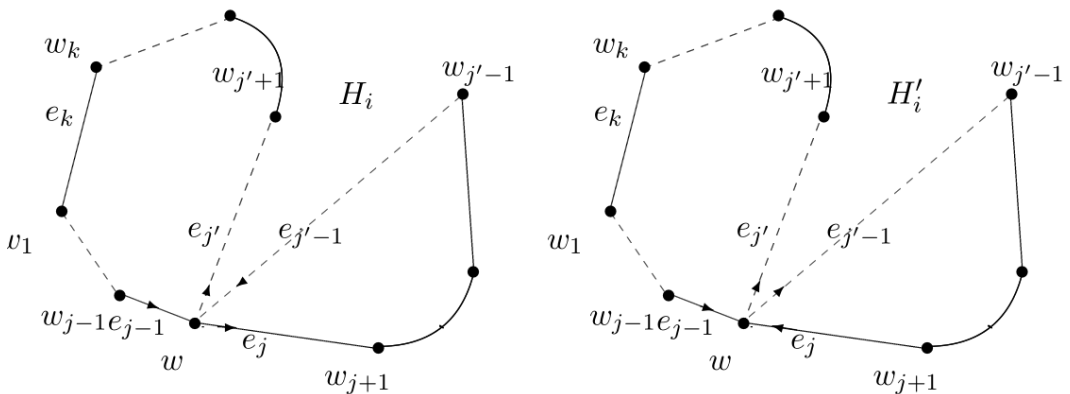
**Hệ quả 1.** Số đồ thị có cùng dãy bậc như đồ thị  $G$  cho trước là số đồ thị khung cân bằng của đồ thị tô màu  $G^*$  sinh ra bởi  $G$ .

Như vậy, để tạo ra các đồ thị có cùng dãy bậc với đồ thị  $G$  cho trước, ta cần có phương pháp xác định được hết các đồ thị khung cân bằng của đồ thị tô màu  $G^*$  sinh bởi  $G$ . Như đã lưu ý ở trên, hợp của một số tùy ý các hành trình đơn xen kẽ kín là một đồ thị cân bằng. Ta sẽ chứng minh rằng điều ngược lại cũng đúng.

**Định lí 6.** Đồ thị  $H$  là đồ thị khung cân bằng của một đồ thị tô màu  $G^*$  sinh bởi đồ thị  $G$  khi và chỉ khi  $H$  là hợp của một số  $t \geq 1$  các hành trình đơn màu khép kín rời nhau trong đồ thị tô màu  $G^*$  sinh bởi  $G$ .

*Chứng minh.* Một chiều của Định lí là hiển nhiên. Ta sẽ chứng minh chiều ngược lại là nếu  $H$  là đồ thị khung cân bằng của đồ thị tô màu  $G^*$  thì  $H$  là hợp của một số  $t \geq 1$  các hành trình đơn màu khép kín rời nhau trong  $G^*$  sinh bởi  $G$ .

Giả sử  $H$  có  $t$  thành phần liên thông  $C_1, \dots, C_t$ . Xét một thành phần liên thông  $C_i$  tùy ý của  $H$ . Ta sẽ chứng minh rằng trong  $C_i$  tồn tại một chu trình Euler đơn màu. Do  $C_i$  không có đỉnh bậc lẻ, cho nên theo Định lí 1, tồn tại trong  $C_i$  chu trình Euler. Trên một chu trình Euler, ta gọi lỗi là một vị trí của một đỉnh  $v$  mà cạnh đi vào cùng màu với cạnh ra khỏi  $v$ . Do có hữu hạn chu trình Euler trong  $C_i$ , cho nên tồn tại một chu trình Euler  $H_i$  với ít lỗi nhất.



**Hình 6.** Hành trình Euler khép kín  $H_i$  và  $H'_i$  sau khi sửa lỗi đỉnh  $v$  tại vị trí  $v_j, v_j$

Bây giờ ta chứng minh rằng  $H_i$  không có lỗi, tức là  $H_i$  là chu trình Euler đơn màu. Thật vậy, giả sử ngược lại là  $H_i = (w_1, e_1, w_2, e_2, \dots, e_{k-1}, w_k, e_k, w_1)$  có lỗi tại một đỉnh  $v$  nào đó, tương ứng vị trí  $w_j$  trên  $H_i$ .

Không mất tổng quát giả sử cả hai cạnh đi vào và đi ra khỏi  $v$  ở đó là  $e_{j-1}$  và  $e_j$  cùng màu đỏ. Do số cạnh xanh và cạnh đỏ của đỉnh  $v$  bằng nhau, cho nên tại vị trí khác của  $v$  trên  $H_i$ , chẳng hạn tại  $w_{j_0}$  cả hai cạnh  $e_{j_0-1}, e_{j_0}$  cùng màu xanh. Không mất tổng quát giả sử  $j < j_0$ , khi đó

$$H_{i'} = (w_1, e_1, w_2, e_2, \dots, e_{j-1}, w_j, e_{j-1}, w_{j'-1}, e_{j'-2}, \dots, e_j, w_j, e_j, w_{j'+1}, \dots, e_{k-1}, w_k, e_k, w_1)$$

(xem Hình 6) cũng là hành trình Euler khép kín nhưng với ít lỗi hơn  $H_i$ , trái với giả thiết  $H_i$  là hành trình Euler ít lỗi nhất trong  $C_i$ . Vậy  $H_i$  là hành trình Euler khép kín đơn màu trong  $C_i$ . Hiển nhiên là  $H$  là hợp các  $H_i$  và các hành trình  $H_i$  ( $i = 1, 2, \dots, t$ ) này rời nhau, do chúng thuộc về các thành phần liên thông  $C_i$  khác nhau.

## 2.2. Thuật toán

Định lí 5 và Định lí 6 cho ta một thuật toán xác định các đồ thị khung cân bằng cũng như các đồ thị có cùng dãy bậc với đồ thị  $G$  cho trước như *Thuật toán* sau:

(i) Xác định một hành trình đơn màu khép kín bắt đầu từ đỉnh có chỉ số thấp nhất trong đồ thị tô màu  $G^*$  sinh ra bởi  $G$ .

(ii) Quay lại bước 1 thực hiện với đồ thị tô màu thu được từ đồ thị cho trước khi bỏ đi hành trình đơn màu khép kín (cùng các đỉnh của nó) vừa thu được.

(iii) Kết thúc khi không còn đỉnh nào nữa. Ta thu được một đồ thị khung cân bằng được tạo bởi các hành trình đơn màu khép kín này.

(iv) Đổi màu tất cả các cạnh của đồ thị khung cân bằng thu được, ta sẽ có đồ thị có cùng dãy bậc với đồ thị  $G$ .

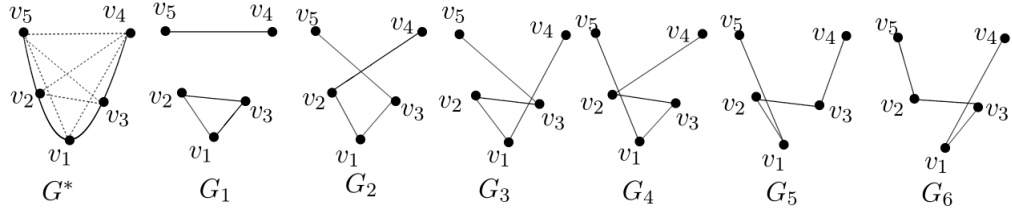
Định lí 5 cho thấy thuật toán này quả thật cho ta tất cả các đồ thị cần tìm. Định lí 6 cho ta biết cách xây dựng các đồ thị khung cân bằng này bằng các đường một nét khép kín đơn màu. Ta có thể thêm điều kiện đơn màu (cạnh chọn tiếp theo khác màu cạnh vừa chọn ngay trước nó) vào các thuật toán quen thuộc (có độ phức tạp thấp, chẳng hạn độ phức tạp tuyến tính như của Carl Hierholzer [7]) để xây dựng các hành trình khép kín đơn màu. Một cách duyệt đơn giản là dùng cây phân nhánh để theo dõi các bước lựa chọn các cạnh thêm vào hành trình cho tới khi nó trở thành hành trình khép kín đơn màu. Một nghiên cứu tiếp theo sẽ hoàn thiện thuật toán này trong tương lai.

Ta mô tả thuật toán qua một ví dụ. Chọn dãy bậc  $d = (2, 2, 2, 1, 1)$ , ta có một đồ thị  $G$  thỏa mãn nó là đồ thị đường đi  $G = (v_4, v_2, v_1, v_3, v_5)$ , thu được nhờ thực hiện thuật toán Hakimi-Havel (xem Bảng 2).

**Bảng 2. Xây dựng đồ thị có dãy bậc  $d = (2, 2, 2, 1, 1)$  theo thuật toán Hakimi**

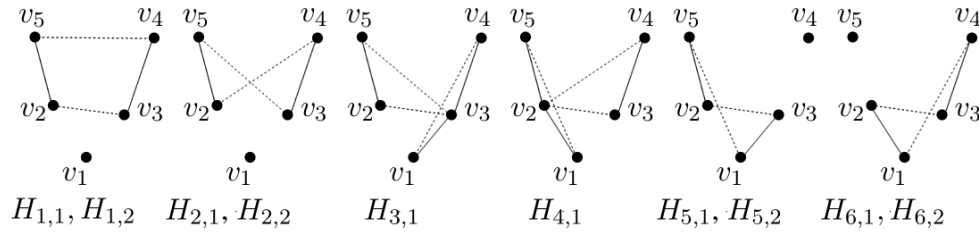
Đỉnh	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$
Bậc	2	2	2	1	1
$N(v_1) = \{v_2, v_3\}$	$\times$	1	1	1	1
$N(v_3) = \{v_4\}$		1	$\times$	0	1
$N(v_2) = \{v_5\}$		$\times$			0

Đồ thị tô màu  $G^*$  sinh bởi  $G$  được biểu diễn trong Hình 7.



**Hình 7. Tất cả 7 đồ thị có cùng dãy bậc  $d = (2, 2, 2, 1, 1)$**

Đồ thị khung cân bằng tầm thường  $G=(V, \emptyset)$  cho ta lại đồ thị  $G$ . Còn có tất cả 6 đồ thị khung cân bằng không tầm thường của đồ thị tô màu  $G^*$  sinh bởi  $G$  (xem Hình 8).



**Hình 8. Các hành trình đơn màu khép kín**

Các đồ thị khung cân bằng không tầm thường được sinh ra bởi các hành trình đơn màu khép kín sau:

- (i)  $H_{1,1} = (v_5, v_2, v_3, v_4, v_5)$  và  $H_{1,2} = (v_1)$ . Đồ thị thu được từ nó là  $G_1$ .
- (ii)  $H_{2,1} = (v_5, v_2, v_4, v_3, v_5)$  và  $H_{2,2} = (v_1)$ . Đồ thị thu được từ nó là  $G_2$ .
- (iii)  $H_{3,1} = (v_5, v_2, v_3, v_1, v_4, v_3, v_5)$  hoặc  $H_{3,1} = (v_5, v_2, v_3, v_4, v_1, v_3, v_5)$ . Đồ thị thu được từ nó là  $G_3$ .
- (iv)  $H_{4,1} = (v_4, v_3, v_2, v_1, v_5, v_2, v_4)$  hoặc  $H_{4,1} = (v_4, v_3, v_2, v_5, v_1, v_2, v_4)$ . Đồ thị thu được từ nó là  $G_4$ .
- (v)  $H_{5,1} = (v_5, v_2, v_3, v_1, v_5)$  và  $H_{5,2} = (v_4)$ . Đồ thị thu được từ nó là  $G_5$ .
- (vi)  $H_{6,1} = (v_4, v_3, v_2, v_1, v_4)$  và  $H_{6,2} = (v_5)$ . Đồ thị thu được từ nó là  $G_6$ .

### 3. Kết luận

Bài báo này nghiên cứu vấn đề xây dựng tất cả các đồ thị có dãy bậc cho trước. Vấn đề này được nghiên cứu từ lâu, nhưng cho đến nay vẫn chưa được giải quyết triệt để. Kết quả chính của bài báo là chỉ ra mỗi đồ thị cùng dãy bậc với đồ thị  $G$  cho trước ứng với một đồ thị khung cân bằng trong đồ thị tô màu  $G^*$  sinh bởi  $G$ . Bài báo đưa ra một giải thuật dựa trên việc đổi màu cho

các cạnh của các đồ thị khung cân bằng (xác định được bởi các hành trình đơn màu khép kín) và chứng minh giải thuật cho ta tất cả các đồ thị có dãy bậc cho trước.

## **TÀI LIỆU THAM KHẢO**

- [1] R. Diestel, 2000. *Graph theory*. Springer-Verlag, New York, second edition.
- [2] Joseph Blitzstein and Persi Diaconis, 2010. *A Sequential Importance Sampling Algorithm for Generating Random Graphs with Prescribed Degrees*. Taylor & Francis Group, LLC ISSN: 1542-7951 print.
- [3] M. Mihail- N. Vishnoi, 2002. *On Generating Graphs with Prescribed Degree Sequences for Complex Network Modeling Applications*, Position Paper, ARACNE (Approx. Rmized Algorithms for Communication Networks), Rome.
- [4] Jonathan McLaughlin, 2018. *On connected degree sequences*, arXiv:1511.09321v1 [math.CO] 30 Nov 2015-2018.
- [5] Hyunju Kima, Zoltán Toroczkai, István Miklós, Péter L. Erdős, László A. Székely, 2008. On realizing all simple graphs with a given degree sequence, Preprint, submitted to Discrete Mathematics.
- [6] Zoltán Király, 2012. *Recognizing graphic degree sequences và generating all realizations*, www.cs.elte.hu/egres . ISSN 1587-4451.
- [7] Carl Hierholzer (xem [https://en.wikipedia.org/wiki/Eulerian\\_path](https://en.wikipedia.org/wiki/Eulerian_path)). Using Eulerian cycles construct all graphs with given degree sequence.

## **ABSTRACT**

### **Using Eulerian cycles construct all graphs with given degree sequence**

Vu Dinh Hoa

*Faculty of Information Technology, Hanoi National University of Education*

A fundamental longstaving problem of graph theory is to find all graphs whose order is a given sequence of natural numbers. This problem is not only a fundamental theoretical problem, but also a problem that applies in science và practice. The main result of this article is an algorithm based on the concept of balance graphs (which can be constructed using colored Euler cycles) to construct all graphs having a given degree sequence.

**Keywords:** Graph, Euler cycles, degrees of vertices.