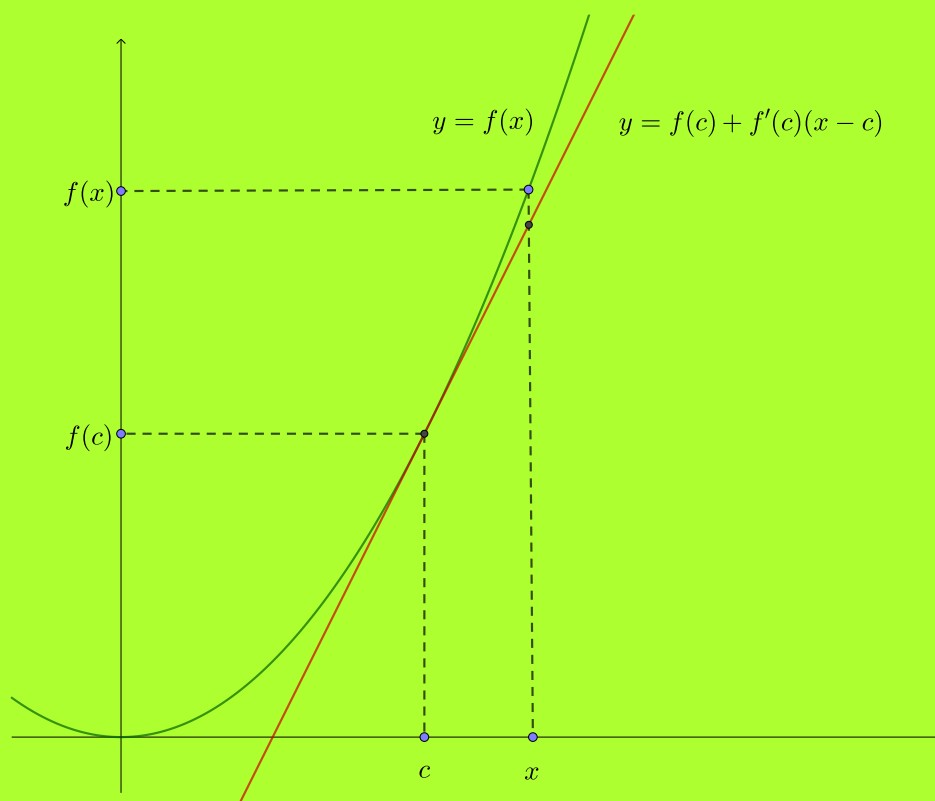


Khoa Toán - Tin học
Fac. of Math. & Computer Science

Bộ môn Giải tích



VI TÍCH PHÂN

Giáo trình Vi tích phân 1

Bộ môn Giải tích

(Khoa Toán - Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên
Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh)

Bản ngày 18 tháng 3 năm 2025

Mục lục

Giới thiệu	1
1 Số thực và Hàm số thực	4
1.1 Số thực	4
1.1.1 Tập hợp và ánh xạ	4
1.1.2 Quy tắc suy luận toán học	7
1.1.3 Các tập hợp số thường gặp	9
1.1.4 Dãy số thực	12
1.2 Hàm số	21
1.2.1 Đồ thị	21
1.2.2 Hàm số sơ cấp	23
2 Hàm số liên tục	29
2.1 Giới hạn của hàm số	29
2.1.1 Tiếp tuyến, vận tốc, tỉ lệ thay đổi	29
2.1.2 Giới hạn của hàm số	33
2.1.3 Một số tính chất căn bản của giới hạn	37
2.1.4 Các giới hạn mở rộng	40
2.2 Hàm số liên tục	48
2.2.1 Tính chất của hàm số liên tục	49
2.2.2 Định lý giá trị trung gian	52
3 Phép tính vi phân	59
3.1 Đạo hàm	59
3.1.1 Định nghĩa đạo hàm	59
3.1.2 Tính chất của đạo hàm	64
3.2 Các công thức cho đạo hàm	68
3.2.1 Đạo hàm của hàm hợp	68
3.2.2 Đạo hàm của hàm ngược	70
3.2.3 Đạo hàm của hàm sơ cấp	71
3.2.4 Đạo hàm của hàm ẩn	74
3.2.5 Đạo hàm bậc cao	76

4	Ứng dụng của đạo hàm	79
4.1	Cực trị của hàm số	79
4.1.1	Sự tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất	83
4.1.2	Các định lý giá trị trung bình	85
4.2	Liên hệ giữa đạo hàm và tính chất của hàm	89
4.2.1	Tính tăng, giảm, và cực trị	89
4.2.2	Tính lồi, lõm, và điểm uốn	92
4.2.3	Xấp xỉ tuyến tính	99
4.2.4	Quy tắc l'Hôpital và ứng dụng trong tính giới hạn	101
5	Phép tính tích phân	116
5.1	Định nghĩa và tính chất của tích phân	116
5.1.1	Định nghĩa tích phân	116
5.1.2	Tính chất của tích phân	121
5.2	Định lý Cơ bản của phép tính vi tích phân	123
5.2.1	Nguyên hàm	123
5.2.2	Công thức Newton-Leibniz	125
5.3	Các phương pháp biến đổi và tính tích phân	132
5.3.1	Phép đổi biến trong tích phân	132
5.3.2	Tích phân từng phần	135
5.3.3	Một số phương pháp tính tích phân đặc biệt	137
5.3.4	Sự tồn tại công thức cho tích phân	140
5.3.5	Tính tích phân bằng phương pháp số	141
5.3.6	Tích phân suy rộng	142
5.4	Ứng dụng của tích phân	149
5.4.1	Diện tích, thể tích	149
5.4.2	Giá trị trung bình	152
5.4.3	Một số ứng dụng trong khoa học	153
5.4.4	Xác suất	155
6	Chuỗi	164
6.1	Chuỗi số	164
6.1.1	Sự hội tụ của chuỗi số	165
6.1.2	Chuỗi số dương	168
6.1.3	Chuỗi số bất kì	172
6.2	Chuỗi hàm	182
6.2.1	Chuỗi Taylor và chuỗi Maclaurin	183
6.2.2	Chuỗi lũy thừa	188
6.2.3	* Chuỗi Fourier	192
	Hướng dẫn sử dụng phần mềm máy tính	197
	Tài liệu tham khảo	201

Giới thiệu

Đây là giáo trình cho các môn toán Vi tích phân 1 cho khối B và C (các ngành ngoài toán) do Bộ môn Giải tích (Khoa Toán - Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh) chủ trì biên soạn từ tháng 9 năm 2016.

- Tham gia biên soạn: Vũ Đỗ Huy Cường, Lý Kim Hà, Nguyễn Vũ Huy, Bùi Lê Trọng Thanh, Nguyễn Thị Thu Vân, Huỳnh Quang Vũ
- Tham gia đánh máy LaTeX: Hồ Thị Kim Vân
- Tham gia vẽ hình: Nguyễn Hoàng Hải
- Biên tập: Huỳnh Quang Vũ. Liên hệ: hquvu@hcmus.edu.vn

Tài liệu này có trên trang web Đào tạo của Bộ môn Giải tích ở địa chỉ:
<https://sites.google.com/view/math-hcmus-edu-vn-giaitich>

Tài liệu đang được tiếp tục chỉnh sửa bổ sung. Các góp ý vui lòng gửi về cho người biên tập.

Đối tượng của giáo trình

Sinh viên ngành khoa học dữ liệu, trí tuệ nhân tạo, nhóm ngành máy tính và công nghệ thông tin, vật lý, điện tử - viễn thông, khoa học vật liệu, ...(môn toán B), và hóa học, sinh học, công nghệ sinh học, môi trường, địa chất, ...(môn toán C). Sinh viên các ngành toán cũng có thể dùng giáo trình này làm tài liệu tham khảo.

Mục tiêu của giáo trình

Giáo trình nhằm dùng làm tài liệu giảng và học phép tính vi phân và phép tính tích phân của hàm một biến, với trình độ tương đồng với một số giáo trình vi tích phân phổ biến quốc tế như [Ste16], sát với chương trình đào tạo hiện hành của Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh. Mục tiêu chính gồm: trang bị hiểu biết khoa học đại cương, rèn luyện khả năng tư duy chính xác và tính toán định lượng, cung cấp công cụ toán học cho các ngành khoa học kỹ thuật.

Việc giảng dạy của giảng viên trên lớp cũng như việc học và tự học của sinh viên không nhất thiết theo hết nội dung giáo trình. Để phục vụ nhiều đối tượng sinh viên, giáo trình đã chứa nhiều chứng minh chính xác cho các mệnh đề, nhiều ví dụ và bài tập từ dễ hơn tới khó hơn, và một số phần nâng cao. Mỗi giảng viên và sinh viên có thể chọn bỏ qua một số nội dung, để những phần còn lại để tự học thêm. Đối với toán C có thể giảm bớt mức độ chặt chẽ và chi tiết trong các lý luận và có thể giảm các bài tập về các phần này.

Sử dụng giáo trình

Mục tiêu sư phạm của giáo trình và môn học nhấn mạnh: hiểu khái niệm, tăng cường năng lực tư duy và năng lực tính toán, tiếp xúc với một số ứng dụng. Việc giảng dạy và học tập nhắm tới cả 3 tiêu chí trên, không quá tập trung một tiêu chí mà bỏ qua một tiêu chí nào:

- (a) Hiểu các khái niệm, kết quả và phương pháp chính;
- (b) Phát triển tư duy bằng việc thảo luận một số lý luận toán học chặt chẽ. Các khái niệm khác khi có thể sẽ giải thích ở mức độ nhất định. Bổ sung các giải thích trực quan, định lượng và miêu tả ý tưởng;
- (c) Tăng cường kỹ năng tính toán, hướng dẫn sinh viên sử dụng phần mềm tính toán;
- (d) Giới thiệu một số ví dụ ứng dụng cụ thể.

Một phần nội dung của môn học này sinh viên đã được học ở trung học, việc đọc lại sách giáo khoa trung học [SGKTH] rất bổ ích cho sinh viên, tuy nhiên giáo trình và môn học này yêu cầu cao hơn rõ rệt ở các tiêu chí trên.

Mỗi mục cấp hai trong giáo trình (như Mục 1.1) ứng với khoảng 3 tiết học trên lớp.

Các mục có dấu * là tương đối nâng cao, không bắt buộc.

Cuối giáo trình có phần Hướng dẫn sử dụng phần mềm máy tính.

Về dạy và học ứng dụng

Việc giới thiệu các ứng dụng vào ngành khoa học kỹ thuật cụ thể được quan tâm trong giáo trình và môn học, xuất hiện trong giải thích về khái niệm đạo hàm, mô hình dân số, bài toán cực trị, Tuy nhiên cần lưu ý những điểm sau:

- (a) Hàm lượng ứng dụng được thảo luận trên lớp bị hạn chế bởi thời lượng dành cho môn học, vì vậy sinh viên cần dành thời gian tự học.
- (b) Để có thể ứng dụng được toán học thường cần trình độ chuyên môn tương đối cao trong ngành khoa học kỹ thuật. Chẳng hạn, muốn áp dụng được phép tính vi tích phân vào một ngành thì phải ở trình độ có thể xét những mô hình có tính liên tục trong ngành đó.

- (c) Toán học có chức năng chính là nghiên cứu chung những quan hệ số lượng, hình dạng, cấu trúc bằng phương pháp suy luận logic. Việc áp dụng các hiểu biết chung đó vào từng lĩnh vực thực tế cụ thể thường là công việc của những chuyên gia trong các lĩnh vực này.

Vì thế sinh viên các ngành khoa học kỹ thuật nên học tốt các môn toán vi tích phân để có thể ứng dụng chúng vào ngành của mình khi học các môn chuyên ngành về sau.

Chương 1

Số thực và Hàm số thực

1.1 Số thực

1.1.1 Tập hợp và ánh xạ

Trong mục này ta điểm qua một số khái niệm và phép toán mà phần lớn đã có trong chương trình trung học, chủ yếu để ôn tập.

Trong môn học này, tập hợp là một khái niệm ban đầu không được định nghĩa.

Có thể hình dung một tập hợp là một nhóm các đối tượng có tính chất chung nào đó, các đối tượng đó gọi là các phần tử của tập hợp.

Nếu x là một phần tử của tập hợp A ta viết bằng kí hiệu là $x \in A$ và đọc là “ x thuộc A ”. Nếu x không là một phần tử của tập hợp A ta viết bằng kí hiệu là $x \notin A$ và đọc là “ x không thuộc A ”. Tập hợp không chứa phần tử nào được gọi là tập hợp rỗng, kí hiệu là \emptyset .

Để mô tả một tập hợp ta có thể liệt kê các phần tử của tập hợp đó. Cách này thường được dùng để mô tả các tập hợp có ít phần tử.

Ví dụ 1.1.1. Nếu tập hợp A chứa đúng 4 phần tử x, y, z và t thì ta viết $A = \{x, y, z, t\}$.

Tập hợp B gồm các ngày trong tuần được viết là

$$B = \{\text{Thứ Hai, Thứ Ba, Thứ Tư, Thứ Năm, Thứ Sáu, Thứ Bảy, Chủ Nhật}\}.$$

■

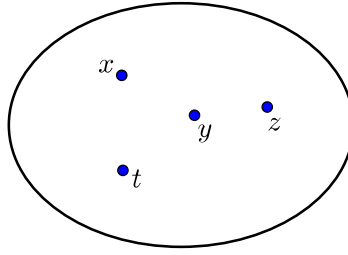
Tổng quát, để mô tả một tập hợp ta chỉ ra những tính chất mà các phần tử của tập hợp đó có và chỉ các phần tử đó mới có. Nếu A là tập hợp các phần tử có tính chất \mathcal{P} , tức là tập hợp các phần tử làm cho mệnh đề \mathcal{P} là đúng, thì ta viết $A = \{x \mid \mathcal{P}\}$.

Ví dụ 1.1.2. Tập hợp C gồm các sinh viên năm nhất học môn Vi tích phân 1 có thể được viết là:

$$C = \{\text{sinh viên năm nhất} \mid \text{học môn Vi tích phân 1}\}.$$



Để minh họa trực quan tập hợp ta có thể dùng biểu đồ như trong Hình 1.1.1.



Hình 1.1.1: Biểu đồ minh họa một tập hợp chứa 4 phần tử.

Nếu mọi phần tử của tập A cũng là phần tử của tập B thì ta nói A là tập con của B và kí hiệu $A \subset B$.

Ví dụ 1.1.3. Cho $A = \{x, y, z\}$ và $B = \{x, y, z, t\}$ thì $A \subset B$. ■

Nếu mỗi phần tử của tập hợp A đều thuộc về tập hợp B và ngược lại, mỗi phần tử của tập hợp B đều thuộc về tập hợp A thì ta nói A và B bằng nhau hay trùng nhau, kí hiệu $A = B$.

Các phép toán trên tập hợp

Hợp hay **hội** của hai tập hợp A và B là tập hợp gồm tất cả các phần tử của A và tất cả các phần tử của B , kí hiệu $A \cup B$.

Ví dụ 1.1.4. Cho $A = \{a, b, x, z\}$ và $B = \{a, c, x, y\}$ thì $A \cup B = \{a, b, c, x, y, z\}$. ■

Giao của hai tập hợp A và B là tập hợp gồm tất cả các phần tử của A mà cũng là phần tử của B , kí hiệu $A \cap B$.

Ví dụ 1.1.5. Cho $A = \{a, b, x, z\}$ và $B = \{a, c, x, y\}$ thì $A \cap B = \{a, x\}$. ■

Hiệu của tập A và tập B là tập gồm tất cả các phần tử của A mà không là phần tử của B , kí hiệu $A \setminus B$.

Ví dụ 1.1.6. Cho $A = \{a, b, x, z\}$ và $B = \{a, c, x, y\}$ thì $A \setminus B = \{b, z\}$. ■

Nếu $B \subset A$ thì $A \setminus B$ được gọi là **phần bù** của B trong A .

Ví dụ 1.1.7. Cho $A = \{a, b, c, x, y, z\}$ và $B = \{a, b, x, z\}$ thì $A \setminus B = \{c, y\}$. ■

Tích của tập hợp A với tập hợp B là tập hợp gồm tất cả các cặp có thứ tự (x, y) với $x \in A$ và $y \in B$, kí hiệu $A \times B$.

Người ta có thể diễn đạt được cặp có thứ tự như là một trường hợp của tập hợp.

Ví dụ 1.1.8. Cho $A = \{a, b\}$, $B = \{x, y\}$ thì

$$A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y)\}.$$



Ánh xạ

Ánh xạ là một khái niệm về quan hệ giữa các tập hợp, cho tương ứng giữa phần tử của tập hợp này với phần tử của tập hợp khác. Cụ thể hơn một **ánh xạ** f từ tập hợp X đến tập hợp Y là một tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một phần tử duy nhất y của Y .

Người ta có thể diễn đạt được ánh xạ như là một trường hợp của tập hợp.

Ta thường kí hiệu ánh xạ dưới dạng $f : X \rightarrow Y, x \mapsto y = f(x)$. Tập X gọi là tập hợp nguồn, hay **miền xác định** của ánh xạ, tập Y gọi là tập hợp đích của ánh xạ. Phần tử y được gọi là ảnh của x và phần tử x được gọi là một tiền ảnh của y .

Cho A là tập con bất kì của X , tập hợp tất cả các ảnh của các phần tử của A qua ánh xạ f được gọi là tập ảnh của A qua f , kí hiệu là $f(A)$.

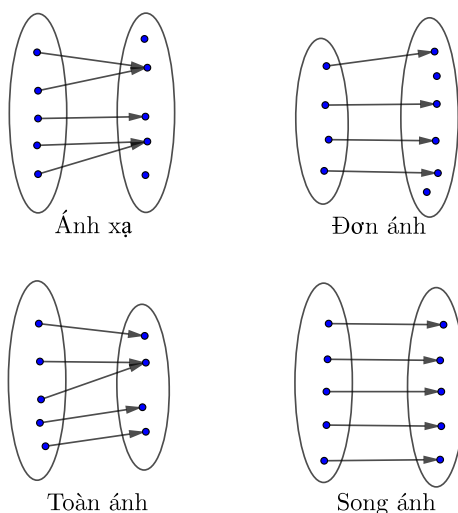
Ảnh $f(X)$ của miền xác định X được gọi là **miền giá trị** của ánh xạ f .

Cho B là tập con bất kì của Y , ta gọi tập hợp các tiền ảnh của các phần tử trong B qua ánh xạ f là tiền ảnh của B qua f và được kí hiệu bởi $f^{-1}(B)$.

Một ánh xạ là một **đơn ánh** nếu hai phần tử khác nhau có hai ảnh khác nhau. Bằng kí hiệu, điều này có thể được viết là với mọi $x_1, x_2 \in X$, nếu $x_1 \neq x_2$ thì $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Một ánh xạ là một **toàn ánh** nếu mọi phần tử của tập đích đều là ảnh, tức là mọi phần tử của tập đích đều có tiền ảnh. Bằng kí hiệu thì $f : X \rightarrow Y$ là toàn ánh nếu với mọi $y \in Y$ tồn tại $x \in X$ sao cho $y = f(x)$; hay nói cách khác, $f(X) = Y$.

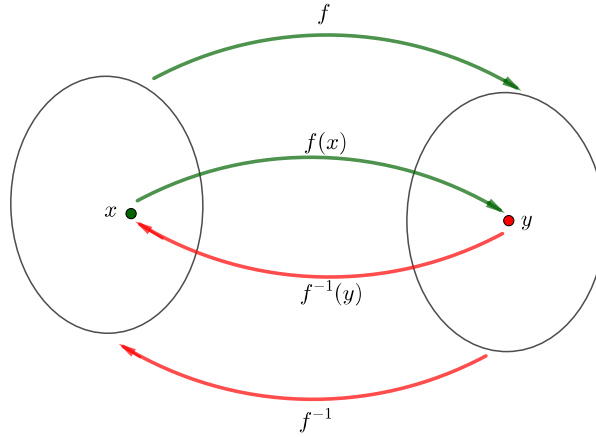
Một ánh xạ là một **song ánh** nếu nó vừa là một đơn ánh vừa là một toàn ánh.



Hình 1.1.2: Biểu đồ minh họa các loại ánh xạ.

Giả sử $f : X \rightarrow Y$ là một song ánh thì với bất kỳ $y \in Y$ tồn tại duy nhất một $x \in X$ sao cho $f(x) = y$, khi đó ánh xạ $g : Y \rightarrow X$ xác định bởi $g(y) = x$ được gọi là

ánh xạ ngược của f , và thường được kí hiệu là f^{-1} . Xem Hình 1.1.3.



Hình 1.1.3: Biểu đồ minh họa ánh xạ ngược.

Cho ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ và $g : Y \rightarrow Z$ thì **ánh xạ hợp** $g \circ f$ được định nghĩa bởi $g \circ f : X \rightarrow Z$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Ví dụ 1.1.9. Cho $X = \{a, b\}$, $Y = \{c, d, e\}$, $Z = \{i, j, k\}$, $f : X \rightarrow Y$, và $g : Y \rightarrow Z$. Giả sử $f(a) = c$ và $g(c) = i$, thì $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(c) = i$. ■

1.1.2 Quy tắc suy luận toán học

Nội dung mục này đã có một phần ở trung học, nên người học có thể chưa đọc ngay, để lại tra cứu sau khi cần.

Mệnh đề toán học

Các kết quả trong toán học được trình bày như những mệnh đề. Mỗi mệnh đề toán học có một trong hai giá trị: đúng hoặc sai. Vì thế toán học không chấp nhận mâu thuẫn: không thể có một mệnh đề vừa đúng vừa sai.

Với mệnh đề A thì mệnh đề đúng khi và chỉ khi A sai được gọi là mệnh đề phủ định của mệnh đề A , thường được kí hiệu là \bar{A} .

Ví dụ 1.1.10. Phủ định của mệnh đề $x \in A$ là mệnh đề $x \notin A$. ■

Với hai mệnh đề A và B , mệnh đề mới “ A hay B ” là đúng khi và chỉ khi có ít nhất một trong hai mệnh đề A và B là đúng.

Mệnh đề “ A và B ” là đúng khi và chỉ khi cả hai mệnh đề A và B là đúng.

Phủ định của “ A hay B ” là “phủ định A và phủ định B ”. Phủ định của “ A và B ” là “phủ định A hay phủ định B ”.

Giả sử mỗi phần tử x thuộc tập D tương ứng với một mệnh đề $T(x)$. Mệnh đề “tồn tại phần tử x thuộc D mà mệnh đề $T(x)$ là đúng” được viết bằng kí hiệu là

$\exists x \in D, T(x)$. Mệnh đề “với mọi phần tử x thuộc D mệnh đề $T(x)$ là đúng” được viết bằng kí hiệu là $\forall x \in D, T(x)$.¹

Phủ định của mệnh đề “tồn tại phần tử x thuộc D mà mệnh đề $T(x)$ là đúng” là mệnh đề “với mọi phần tử x thuộc D mệnh đề $T(x)$ là sai”. Phủ định của mệnh đề “với mọi phần tử x thuộc D mệnh đề $T(x)$ là đúng” là mệnh đề “tồn tại phần tử x thuộc D mệnh đề $T(x)$ là sai”.

Trong các văn bản toán học, như trong tài liệu này, các “Mệnh đề” được viết trong các đoạn văn riêng, như Mệnh đề 1.1.12 bên dưới, là những mệnh đề được khẳng định là đúng. Các Định lý và Hệ quả cũng là những mệnh đề được khẳng định là đúng.

Suy diễn và chứng minh

Toán học phát triển bằng cách xuất phát từ một số nhỏ khái niệm và mệnh đề được thừa nhận để suy diễn theo một số nhỏ các quy tắc suy luận ra những mệnh đề mới. Điều này giúp cho các lý luận và kết quả trong toán học có tính chặt chẽ và chính xác, có thể thẩm định một lý luận toán học có tuân thủ quy tắc suy luận toán học hay không, có thể xác định một mệnh đề toán học là đúng hay sai.

Cho hai mệnh đề A và B .

Mệnh đề “ A dẫn tới B ” hay “ A kéo theo B ” hay “ A suy ra B ”, kí hiệu là $A \Rightarrow B$, là đúng khi và chỉ khi A đúng và B đúng, hoặc A sai. Mệnh đề này sai khi và chỉ khi A đúng và B sai. Xuất phát từ một giả thiết đúng, qua suy luận toán học, ta phải được một kết luận đúng. Xuất phát từ một giả thiết sai thì suy luận toán học có thể dẫn tới một kết luận sai.

Nếu mệnh đề “ A dẫn tới B ” là đúng thì A là một **điều kiện đủ** cho B (có A đủ để có B), và B là một **điều kiện cần** cho A (cần có B để có A , không có B thì không có A).

Phủ định của “ A dẫn tới B ” là “ A và \overline{B} ”, nghĩa là “có A nhưng không có B ”.

Nếu hai mệnh đề “ A dẫn tới B ” và “ B dẫn tới A ” đều đúng thì A và B có cùng giá trị, được gọi hai mệnh đề **tương đương**, kí hiệu là $A \iff B$.

Lưu ý rằng mệnh đề $A \Rightarrow B$ (có A thì có B) không tương đương với **mệnh đề đảo** của nó là mệnh đề $B \Rightarrow A$, cũng không tương đương với mệnh đề $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$, mà tương đương với với **mệnh đề phản đảo** của nó là mệnh đề $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ (nếu không có B thì không có A).

Ví dụ 1.1.11. Mệnh đề “học chăm chỉ thì đạt môn Vi tích phân” tương đương với “rớt môn Vi tích phân là học không chăm chỉ”, không tương đương với “học không chăm chỉ thì rớt môn Vi tích phân”, và phủ định là “có người học chăm chỉ mà vẫn rớt môn Vi tích phân”.

Mệnh đề “nếu $x = 2$ thì $x^2 = 4$ ” tương đương với “nếu $x^2 \neq 4$ thì $x \neq 2$ ”, không tương đương với “nếu $x \neq 2$ thì $x^2 \neq 4$ ”. ■

¹Kí hiệu \exists (tiếng Anh là Exists) đọc là “tồn tại”, kí hiệu \forall (tiếng Anh là for All) đọc là “với mọi”.

Một **chứng minh** trong toán học là việc khẳng định một mệnh đề toán học A là đúng bằng cách chỉ ra một dãy các suy luận từ các mệnh đề khác đã được biết là đúng đi tới A .

Nếu tồn tại một phần tử $x \in D$ mà mệnh đề $T(x)$ là sai (một **phản ví dụ**) thì mệnh đề “với mọi phần tử x thuộc D mệnh đề $T(x)$ là đúng” là sai. Thuật ngữ “chứng minh” trong toán học đòi hỏi ta không được khẳng định một mệnh đề là đúng khi chưa kiểm tra **tất cả** các trường hợp có thể xảy ra.

1.1.3 Các tập hợp số thường gặp

Số tự nhiên, số nguyên, số hữu tỉ

Trải qua quá trình thay đổi theo thời gian con người dần dần hình thành những khái niệm số lượng để miêu tả thế giới. Từ phép đếm trong đời sống hình thành tập hợp các số tự nhiên

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Các tiên đề về số tự nhiên được đưa ra vào cuối thế kỉ 19, giả thiết sự tồn tại duy nhất của tập hợp này, với các phần tử đặc biệt 0, 1, phép cộng, phép trừ, phép nhân, phép so sánh, thỏa các tính chất mà ta đã quen thuộc từ trung học.

Đi cùng với tập hợp các số tự nhiên là khái niệm “vô hạn”. Một tập hợp là hữu hạn nếu ta có thể đánh số tập hợp đó, tức là đếm tập đó, bằng các số tự nhiên từ 1 tới một số tự nhiên nào đó. Nếu một tập hợp không là hữu hạn thì ta nói nó là **vô hạn**. Ta thừa nhận như một tiên đề rằng tập hợp các số tự nhiên là vô hạn.

Từ các tính chất của tập hợp các số tự nhiên người ta rút ra được một mệnh đề được gọi là phép quy nạp hay còn gọi là nguyên lý quy nạp toán học, là một cách chính xác trong toán học để tổng quát hóa từ những trường hợp đơn lẻ. Phương pháp này cơ bản nói rằng, nếu ta chỉ ra được một mệnh đề là đúng với một số tự nhiên n_0 nào đó, và hệ mệnh đề này là đúng với một số tự nhiên lớn hơn hay bằng n_0 thì nó là đúng với số tự nhiên tiếp theo, thì ta kết luận được mệnh đề là đúng với mọi số tự nhiên lớn hơn hay bằng n_0 .

Mệnh đề 1.1.12 (Phép quy nạp). *Giả sử n_0 là số tự nhiên nào đó và với mỗi số tự nhiên $n \geq n_0$ có $T(n)$ là một mệnh đề mà giá trị phụ thuộc giá trị của n . Nếu hai điều sau được thỏa:*

(a) $T(n_0)$ là đúng,

(b) với mọi số tự nhiên $k \geq n_0$, nếu $T(k)$ là đúng thì $T(k+1)$ là đúng,

thì $T(n)$ là đúng với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$.

Ví dụ 1.1.13. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n < 2^n$.

Gọi $T(n)$ là mệnh đề $n < 2^n$, ta muốn chứng minh rằng $T(n)$ là đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Ta kiểm tra mệnh đề đúng với số tự nhiên đầu tiên. Với $n = 0$, ta có $0 < 2^0 = 1$, vậy $T(0)$ là đúng.

Giả sử $T(k)$ là đúng với một số tự nhiên k nào đó, tức là $k < 2^k$. Bất đẳng thức này dẫn tới $k + 1 < 2^k + 1$. Ta có thể dự đoán $2^k + 1 \leq 2^{k+1}$. Thực vậy

$$\begin{aligned} 2^k + 1 \leq 2^{k+1} &\iff 2^k + 1 \leq 2 \cdot 2^k \\ &\iff 1 \leq 2^k. \end{aligned}$$

Nếu $k = 0$ thì $1 = 2^0$ nên điều trên là đúng, nếu $k > 0$ thì vì 2^k bằng tích của k số 2 nên $2^k \geq 2$ và điều trên cũng đúng. Suy ra $k + 1 < 2^k + 1 < 2^{k+1}$. Vậy $T(k + 1)$ là đúng.

Bây giờ phép quy nạp khẳng định $T(n)$ đúng với mọi số tự nhiên n . ■

Dần dần do nhu cầu của đời sống tập hợp các số tự nhiên được mở rộng thành tập hợp \mathbb{Z} các số nguyên, bao gồm các số nguyên dương và các số nguyên âm, cùng với số không 0:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Tập hợp các số nguyên dương được kí hiệu là \mathbb{Z}^+ :

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Dần dần người ta có nhu cầu chia một lượng thành nhiều phần bằng nhau và miêu tả độ lớn của mỗi phần, hình thành khái niệm phân số. Các phân số là các cặp có thứ tự hai số nguyên, thường được viết dưới dạng tỉ số $\frac{m}{n}$. Sau này chúng được gọi là các số hữu tỉ, nghĩa là số có tỉ số. Tập hợp các số hữu tỉ có thể được miêu tả là

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

Số thực

Hơn 2500 năm trước người ta nhận ra nếu một hình tam giác vuông có cạnh góc vuông có chiều dài bằng 1 thì chiều dài của cạnh huyền phải có bình phương bằng 2, nhưng một lý luận toán học cho thấy không có số hữu tỉ nào có bình phương bằng 2 (Bài tập 1.1.8). Như vậy trong mô hình của ta về thế giới còn thiếu những đại lượng nhất định, mà ta gọi là các số vô tỉ, nghĩa là số không có tỉ số.

Sau này khi hệ đếm cơ số 10 trở nên phổ biến người ta thường tương ứng mỗi số hữu tỉ với một dãy các số tự nhiên từ 0 tới 9, được gọi là biểu diễn của số này theo hệ cơ số 10, còn được gọi là dạng thập phân. Theo cách này có những số hữu tỉ có dạng thập phân hữu hạn như $\frac{7}{20} = 0,35$, và có những số hữu tỉ có dạng thập phân vô hạn tuần hoàn như $\frac{3}{7} = 0,428571428571428571428571\dots$ ¹. Mỗi dãy thập phân

¹Trong tài liệu này ta dùng quy tắc kí hiệu số thập phân của Việt Nam, giống như ở nhiều nước khác như Pháp, Nga, ở đó phần nguyên và phần thập phân được tách biệt bởi dấu phẩy “,”. Một số nước như Anh, Mỹ thay vào đó dùng dấu chấm “.”. Do sự phổ biến của máy tính và phần mềm từ Mỹ mà dấu chấm đang được dùng nhiều hơn, đặc biệt là khi dùng máy tính, người đọc cần chú ý tới ngữ cảnh để khỏi bị nhầm lẫn.

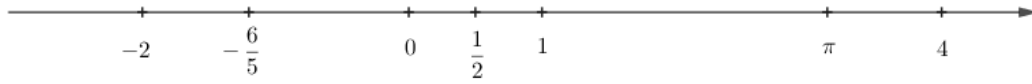
vô hạn không tuần hoàn tương ứng với một số vô tỉ.

Tập hợp tất cả các số hữu tỉ và số vô tỉ được gọi là tập hợp tất cả các số thực, kí hiệu là \mathbb{R} .

Từ thế kỉ 20 toán học đã xây dựng được tập hợp các số thực bằng suy luận toán học từ tập hợp các số tự nhiên.

Tập hợp các số thực có các phép toán cộng trừ nhân chia; có các tính chất của các phép toán này như kết hợp, số đối, số nghịch đảo, phân phối giữa cộng và nhân; và có một thứ tự tương thích với thứ tự trên các số tự nhiên.

Ta thường biểu diễn trực quan tập các số thực bằng hình vẽ một đường thẳng được định hướng trên mặt phẳng, được gọi là trục số thực hay đường thẳng thực, trên đó mỗi điểm đại diện cho một số thực. Điều này cho tương ứng đường thẳng với tập số thực, điểm với số, chiều dài đoạn thẳng với khoảng cách giữa hai số.



Hình 1.1.4: Trục số thực.

Trong tài liệu này, một **khoảng** số thực có thể gồm hoặc không gồm đầu mút, ví dụ như $(1, 2)$, $[1, 2]$, $(1, 2]$, $[1, 2)$, $[1, \infty)$, $(1, \infty)$, $(-\infty, 1)$, $(-\infty, 1]$, $(-\infty, \infty)$. Một **đoạn** là một khoảng gồm cả hai đầu mút là hai số thực, như $[1, 2]$. Một **khoảng mở** là một khoảng không gồm đầu mút nào, như $(1, 2)$, $(1, \infty)$, $(-\infty, 1)$, $(-\infty, \infty)$.¹

Một tính chất đặc biệt quan trọng của tập hợp số thực, khác biệt với các tập hợp số nguyên và tập hợp số hữu tỉ, là tính đầy đủ, hay còn gọi là tính liên tục. Ta trình bày tính chất này dưới đây.

Cho tập $A \subset \mathbb{R}$.

- Ta nói tập A là **bị chặn trên** nếu có một số thực α lớn hơn hay bằng mọi số thực thuộc tập A , và số α được gọi là một **chặn trên** của tập A .
- Tập A là **bị chặn dưới** nếu có một số β nhỏ hơn hay bằng mọi số thuộc tập A , và số β được gọi là một **chặn dưới** của A .
- Một tập được gọi là **bị chặn** hay **giới nội** nếu vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới.
- Nếu có phần tử $\alpha \in A$ sao cho α lớn hơn hay bằng mọi phần tử thuộc tập A , thì α được gọi là **phần tử lớn nhất** của tập A , được kí hiệu là $\max A$.
- Nếu có phần tử $\beta \in A$ sao cho β nhỏ hơn hay bằng mọi phần tử thuộc tập A , thì β được gọi là **phần tử nhỏ nhất** của tập A , được kí hiệu là $\min A$.

Mệnh đề 1.1.14 (Tính đầy đủ của tập hợp các số thực). Mọi tập con khác rỗng của \mathbb{R} , nếu bị chặn trên thì có chặn trên nhỏ nhất, nếu bị chặn dưới thì có chặn dưới lớn nhất.

¹Trong tài liệu này “khoảng” tương ứng với từ tiếng Anh “interval” trong [Ste16], là cách dùng phổ biến ở bậc đại học. Trong sách giáo khoa trung học phổ thông hiện hành [SGKTH] thì “khoảng” không gồm đầu mút.

Chặn trên nhỏ nhất của tập A thường được kí hiệu là $\sup A$, chặn dưới lớn nhất của A thường được kí hiệu là $\inf A$ ¹.

Ví dụ 1.1.15. Xét $A = (0, 1]$. Ta có 2 là một chặn trên của A , -1 là một chặn dưới của A , $\max A = 1$, $\min A$ không tồn tại, $\sup A = 1$, $\inf A = 0$.

Xét $A = [0, \infty)$. Ta có A không bị chặn trên nhưng bị chặn dưới, $\max A$ không tồn tại, $\min A = 0$, $\sup A$ không tồn tại, $\inf A = 0$. ■

Tính đầy đủ của tập hợp các số thực dẫn tới những tính chất như giữa hai số thực khác nhau bất kì luôn có ít nhất một số hữu tỉ và một số vô tỉ, và mỗi số thực có một biểu diễn ở dạng thập phân.

Do tính đầy đủ này mà tập hợp các số thực thường được dùng để mô hình hóa thời gian và các không gian liên tục.

Tính đầy đủ của tập hợp các số thực dẫn tới nhiều kết quả nền tảng của phép tính vi tích phân. Tuy vậy trong môn học này ta không đi vào chi tiết ở những chỗ nào trực tiếp sử dụng tính đầy đủ của tập hợp các số thực. Ở những chỗ như vậy người đọc muốn tìm hiểu thêm có thể tham khảo những tài liệu viết cho sinh viên ngành toán, như [Duc06], [Spi94].

1.1.4 Dãy số thực

Có thể hình dung một dãy số thực là một phép đếm một tập hợp gồm các số thực. Phép đếm đó là một ánh xạ từ tập hợp tất cả các số tự nhiên vào tập hợp tất cả các số thực.

Nói cách khác, một dãy số thực là một tập hợp gồm các số thực được đánh chỉ số bằng tập hợp tất cả các số tự nhiên.

Ta có thể dùng tập chỉ số gồm tất cả các số tự nhiên từ một số nào đó trở đi.

Định nghĩa 1.1.16. Một **dãy số** là một ánh xạ a từ tập $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$, với một $n_0 \in \mathbb{N}$, vào tập \mathbb{R} .

Ta thường kí hiệu $a_n = a(n)$, và dãy số a này được kí hiệu bởi $(a_n)_{n \geq n_0}$ (hoặc trong một số tài liệu là $\{a_n\}_{n \geq n_0}$), hoặc ngắn gọn hơn là (a_n) nếu số n_0 không có vai trò trong vấn đề đang khảo sát và không sợ nhầm lẫn.

Thường một dãy số được nghĩ tới và được cho như một danh sách vô hạn các số thực $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

Ví dụ 1.1.17. Với $n \in \mathbb{Z}^+$ đặt $a_n = \frac{1}{n}$ thì $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ là một dãy số thực, khởi đầu bởi $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ ■

Tập hợp $\{a_n \mid n \in \mathbb{N} \text{ và } n \geq n_0\}$ là tập giá trị của dãy $(a_n)_{n \geq n_0}$. Một dãy số được gọi là **bị chặn trên** hoặc **bị chặn dưới** hoặc **bị chặn** (hay giới nội) nếu tập giá trị của nó có các tính chất tương ứng.

¹các kí hiệu trên là viết tắt của các từ supremum và infimum

Ví dụ 1.1.18. Công thức $a_n = \frac{1}{n-3}$, $n \geq 4$, xác định một dãy số $(a_n)_{n \geq 4}$, và là dãy bị chặn vì $|a_n| \leq 1$, $\forall n \geq 4$.

Dãy số $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ định bởi $a_n = (-1)^n$ có miền giá trị là $\{-1; 1\}$, và là dãy bị chặn vì $|a_n| \leq 1$, $\forall n \geq 1$. ■

Dãy số (u_n) được gọi là **dãy tăng** nếu $\forall n, u_n \leq u_{n+1}$, được gọi là **dãy giảm** nếu $\forall n, u_n \geq u_{n+1}$. Dãy tăng và dãy giảm được gọi chung là **dãy đơn điệu**.

Giới hạn của dãy

Chương trình toán trung học đã có khái niệm giới hạn của dãy. Ở mục này chúng ta thảo luận lại khái niệm này một cách chi tiết hơn. Nội dung của mục này còn giúp người học tiếp cận dễ dàng hơn với khái niệm giới hạn của hàm số ở Chương 2. Một số thảo luận sâu hơn về dãy có ở Chương 6.

Ta muốn khảo sát một dãy số cho trước thay đổi giá trị như thế nào.

Trong một số trường hợp, giá trị của dãy càng gần hơn tới một số cố định khi chỉ số tăng.

Ví dụ 1.1.19. Dãy số $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ định bởi $a_n = \frac{1}{n}$ có giá trị càng gần hơn tới 0 khi n càng lớn. ■

Trong một số trường hợp khác, giá trị của dãy không có vẻ gần hơn tới một số cố định nào khi chỉ số tăng.

Ví dụ 1.1.20. Xét dãy $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ định bởi $a_n = (-1)^n$. Giá trị của dãy khi thì bằng -1 , khi thì bằng 1 , không gần hơn tới một số nhất định nào. ■

Trong nhiều trường hợp ta có thể hiểu đơn giản rằng giới hạn của dãy (a_n) là số thực L nếu như khi chỉ số n lớn hơn thì số hạng a_n gần số L hơn. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp khác cách hiểu đó không đủ tổng quát, như ví dụ sau chỉ ra.

Ví dụ 1.1.21. Xét dãy số $(a_n)_{n \geq 1}$ định bởi

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n+2}, & n \text{ chẵn}, \\ \frac{1}{n}, & n \text{ lẻ}. \end{cases}$$

Ta thấy a_n có khuynh hướng gần tới 0, tuy nhiên quá trình này không diễn ra một cách đơn điệu mà vẫn có tăng giảm, chẳng hạn $a_1 = \frac{1}{1}, a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{6}, a_5 = \frac{1}{5}, a_6 = \frac{1}{8}, a_7 = \frac{1}{7}, \dots$ ■

Khái niệm giới hạn tổng quát là như sau: Giới hạn của dãy (a_n) là số thực L nếu như ta có thể chắc chắn sai khác giữa số hạng a_n và số L không vượt quá một số cho trước bất kì miễn là ta đảm bảo chỉ số n đủ lớn. Ngắn gọn hơn, **a_n tiến về L nếu a_n gần L tùy ý khi n đủ lớn.**

Định nghĩa 1.1.22. Dãy số (a_n) được gọi là **hội tụ** hay tiến về số thực L nếu $|a_n - L|$ nhỏ tùy ý miễn là n đủ lớn.

Dạng kí hiệu là

$$\forall \epsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, |a_n - L| < \epsilon. \quad (1.1.1)$$

Khi đó ta nói số L là **giới hạn** của dãy (a_n) , và viết là

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L,$$

hoặc viết vắn tắt hơn là $\lim a_n = L$, hoặc viết là $a_n \rightarrow L$ khi $n \rightarrow \infty$.

Nếu không tồn tại số thực L nào như vậy thì ta nói dãy (a_n) là không hội tụ, hay là **phân kì**.

Ví dụ 1.1.23. Xét dãy $\forall n \geq 1, a_n = 1$. Đây là một dãy hằng. Ta tìm giới hạn của dãy. Rõ ràng ứng cử viên của giới hạn là số 1. Số hạng a_n gần 1 tùy ý, ở đây là trùng, với mọi n . Vậy theo định nghĩa thì dãy (a_n) hội tụ và giới hạn là 1. Ngắn gọn hơn,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Tổng quát hơn, với cùng lý luận, với mọi số thực c thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c = c.$$

■

Ví dụ trên đủ đơn giản để ta lý luận mà không dùng dạng kí hiệu (1.1.1).

Dạng kí hiệu (1.1.1) ban đầu thể hơi lạ lẫm với người học. Ở đó “nhỏ tùy ý” được lượng hóa thành “nhỏ hơn số dương ϵ cho trước bất kì”, còn “đủ lớn” được lượng hóa thành “lớn hơn số p nào đó”. Việc lượng hóa, cùng với việc dùng kí hiệu, giúp ta tính toán và biến đổi các đại lượng dễ dàng hơn. Với những giới hạn khó hơn thì dạng kí hiệu thể hiện hiệu quả, giúp ta lý luận được chính xác và tin cậy, như trong các ví dụ tiếp theo đây.

Ví dụ 1.1.24. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$.

Ta có thể dự đoán kết quả là 0. Ta kiểm dự đoán này. Cho $\epsilon > 0$ bất kì, ta có

$$\left| \frac{1}{n} \right| < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon}.$$

Như vậy lấy số tự nhiên p lớn hơn $\frac{1}{\epsilon}$, thì $n \geq p$ dẫn tới $n > \frac{1}{\epsilon}$, dẫn tới

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

Vậy theo định nghĩa hội tụ ở dạng kí hiệu (1.1.1), ta kết luận

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

■

Ví dụ 1.1.25. Xét dãy số $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ định bởi $a_n = \frac{n}{n+1}$. Qua tính toán một số giá trị, ta có thể dự đoán giới hạn là 1. Độ lớn sai số giữa a_n và 1 là

$$|a_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1}.$$

Với số $\epsilon > 0$ tùy ý, ta có thể làm sai số $|a_n - 1|$ bé hơn ϵ , miễn là lấy n sao cho $\frac{1}{n+1} < \epsilon$, tức là $n > \frac{1}{\epsilon} - 1$. Trong dạng kí hiệu (1.1.1), ta có thể chọn p là một số tự nhiên cố định lớn hơn $\frac{1}{\epsilon} - 1$. Khi đó với mọi $n \geq p$ thì $n > \frac{1}{\epsilon} - 1$, dẫn tới $|a_n - 1| < \epsilon$.

Vậy ta kết luận

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

■

Qua các ví dụ trên ta có thể nhận thấy dạng kí hiệu (1.1.1) giúp thể hiện chính xác các khái niệm giới hạn, vì vậy tiếp tục được sử dụng tiếp theo đây.

Định nghĩa 1.1.26. Dãy số (a_n) được gọi là phân kì ra vô cùng, hay **tiến về vô cùng**, nếu a_n lớn tùy ý miễn là n đủ lớn. Dạng kí hiệu là

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, a_n > M. \quad (1.1.2)$$

Khi đó ta viết

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty,$$

hoặc viết $a_n \rightarrow \infty$ khi $n \rightarrow \infty$, và nói “giới hạn của a_n khi n tiến ra vô cùng là vô cùng”.

Dãy số (a_n) được gọi là phân kì ra âm vô cùng, hay **tiến về âm vô cùng**, nếu a_n nhỏ hơn số thực bất kì miễn là n đủ lớn. Dạng kí hiệu là

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, a_n < M. \quad (1.1.3)$$

Khi đó ta viết

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty,$$

hoặc viết $a_n \rightarrow -\infty$ khi $n \rightarrow \infty$, và nói “giới hạn của a_n khi n tiến ra vô cùng là âm vô cùng”.

Ví dụ 1.1.27. Với $n \in \mathbb{Z}^+$ đặt $a_n = n$. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Ta có thể dự đoán giới hạn không gì khác hơn là ∞ . Ta kiểm điều này. Cho $M \in \mathbb{R}$ bất kì. Lấy một số tự nhiên p sao cho $p > M$. Với mọi $n > p$ thì $a_n = n > p > M$. Vậy ta kết luận được dãy (a_n) tiến ra vô cùng, và viết

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty.$$

■

Ví dụ 1.1.28. Xét

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2.$$

Cho $M \in \mathbb{R}$ bất kì. Lấy p là một số nguyên dương lớn hơn M . Nếu $n \geq p$ thì

$$n^2 \geq p^2 = p \times p > M \times 1 = M.$$

Vậy theo định nghĩa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty.$$

■

Ghi chú 1.1.29. Các khái niệm “vô cùng”, “vô cực”, “vô hạn”, các kí hiệu ∞ và $-\infty$ được dùng để miêu tả các quá trình giới hạn, chúng không phải là các số thực, do đó các phép toán trên số thực không có sẵn cho chúng.

Các kết quả cơ bản về dãy hội tụ

Từ định nghĩa sự hội tụ ta có thể thu được các tính chất căn bản về giới hạn của dãy số. Về sau ta thường sử dụng các tính chất này để khảo sát giới hạn chứ không sử dụng trực tiếp định nghĩa của giới hạn.

Mệnh đề 1.1.30. Nếu $(a_n)_n$ và $(b_n)_n$ là các dãy hội tụ thì:

(a) $(a_n + b_n)_n$ là một dãy hội tụ và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

(b) $(a_n - b_n)_n$ là một dãy hội tụ và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

(c) $(a_n b_n)_n$ là một dãy hội tụ và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right)$$

(d) Nếu $\forall n, b_n \neq 0$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ thì $\left(\frac{a_n}{b_n} \right)_n$ là một dãy hội tụ và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

Ghi chú 1.1.31. Các trường hợp giới hạn bằng vô cùng không được kể là hội tụ do đó các tính chất trên không áp dụng.

Những tính chất trên hẳn phù hợp với trải nghiệm về số lượng của nhiều người, chẳng hạn nếu a_n gần tới a và b_n gần tới b , thì hẳn là $a_n + b_n$ gần tới $a + b$.

Chứng minh. Đôi chỗ của chứng minh này có thể hơi phức tạp, nếu người học hiểu được một phần của lý luận cũng đã bổ ích, mặt khác nếu chưa có đủ thời gian thì có thể gác lại để tra cứu sau.

Đặt $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ và $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

(a) Từ bất đẳng thức tam giác cho số thực (xem Bài tập 1.1.13), ta có

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|.$$

Từ đây có thể thấy $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$.

Chi tiết hơn như sau. Cho $\epsilon > 0$ ta có số N_1 sao cho khi $n \geq N_1$ thì $|a_n - a| < \epsilon/2$, và có số N_2 sao cho khi $n \geq N_2$ thì $|b_n - b| < \epsilon/2$. Vậy có số $N = \max\{N_1, N_2\}$ sao cho khi $n \geq N$ thì

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Theo định nghĩa thì điều này thể hiện rằng $a_n + b_n$ hội tụ về $a + b$.

(b) Tương tự, tính chất này đến từ tính chất của các số thực:

$$|(a_n - b_n) - (a - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|.$$

(c) Tính chất này đến từ tính chất của các số thực:

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \leq |a_n - a| |b_n| + |a| |b_n - b|.$$

Cụ thể hơn, cho $\epsilon_1 > 0$ bất kì, có số nguyên N sao cho khi $n \geq N$ thì $|a_n - a| < \epsilon_1$ và $|b_n - b| < \epsilon_1$. Khi đó

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \leq |a_n - a| |b_n| + |a| |b_n - b| \\ &\leq |a_n - a| (|b_n - b| + |b|) + |a| |b_n - b| \\ &< \epsilon_1 (\epsilon_1 + |b|) + |a| \epsilon_1 = \epsilon_1 (\epsilon_1 + |a| + |b|). \end{aligned}$$

Bây giờ, cho trước $\epsilon > 0$ bất kì, ta có thể chọn $\epsilon_1 > 0$ sao cho $\epsilon_1 (\epsilon_1 + |a| + |b|) < \epsilon$, chẳng hạn chọn $\epsilon_1 < 1$ và $\epsilon_1 < \epsilon / (1 + |a| + |b|)$. Khi đó với $n \geq N$ thì

$$|a_n b_n - ab| < \epsilon_1 (\epsilon_1 + |a| + |b|) < \epsilon.$$

(d) Do câu (c) ta chỉ cần tìm giới hạn của $\frac{1}{b_n}$. Cho trước $\epsilon_1 > 0$, có N để với $n \geq N$ thì $|b_n - b| < \epsilon_1$. Với $\epsilon_1 < |b|/2$, dùng bất đẳng thức tam giác ta có $|b_n| \geq |b| - |b - b_n| > |b| - |b|/2 = |b|/2$. Suy ra

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n| |b|} < \frac{\epsilon_1}{\frac{|b|}{2} |b|} = \frac{2\epsilon_1}{b^2}.$$

Với $\epsilon_1 < \epsilon b^2/2$ thì $\frac{2\epsilon_1}{b^2} < \epsilon$. Như vậy, cho $\epsilon > 0$ tùy ý, lấy $\epsilon_1 > 0$ thỏa $\epsilon_1 < |b|/2$ và $\epsilon_1 < \epsilon b^2/2$, thì với mọi $n \geq N$ ta có $\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| < \epsilon$. Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. \square

Khi đã quen về sau ta thường viết tắt hoặc bỏ bớt một số bước trong lý luận với kí hiệu như trên.

Ví dụ 1.1.32. Tìm giới hạn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n} - 3 \right).$$

Sử dụng các tính chất của giới hạn và các kết quả đã có, ta viết

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n} - 3 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{1}{n} - 3 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - 3 = 2 \cdot 0 - 3 = -3. \end{aligned}$$

■

Mệnh đề 1.1.33 (Tính chất so sánh). Nếu $(a_n)_n$ và $(b_n)_n$ là hai dãy hội tụ và có $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\forall n \geq n_0, a_n \leq b_n$, thì $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Chứng minh. Ý của chứng minh này rất đơn giản và trực quan khi ta vẽ biểu diễn số thực trên đường thẳng. Giả sử $\lim a_n = a > \lim b_n = b$, khi đó với n đủ lớn thì a_n gần tùy ý a trong khi b_n gần tùy ý b , dẫn tới $b_n < a_n$, trái giả thiết.

Chi tiết hơn như sau. Giả sử $a > b$. Đặt $\epsilon = \frac{a-b}{2} > 0$. Vì $(a_n)_n$ hội tụ về a nên với n đủ lớn thì phải có $-\epsilon < a_n - a$, tức là $a_n > a - \epsilon = \frac{a+b}{2}$. Vì $(b_n)_n$ hội tụ về b nên với n đủ lớn thì phải có $b_n - b < \epsilon$, tức là $b_n < b + \epsilon = \frac{a+b}{2}$. Với n như vậy thì dẫn tới $a_n > b_n$, mâu thuẫn với giả thiết $a_n \leq b_n$. Vậy $a \leq b$. □

Ta thu được một hệ quả thường dùng:

Mệnh đề 1.1.34 (Tính chất kẹp). Nếu có $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\forall n \geq n_0, a_n \leq b_n \leq c_n$, và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L,$$

thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L.$$

Như vậy, nếu b_n bị kẹp giữa a_n và c_n mà a_n và c_n lại cùng tiến về L thì b_n cũng phải tiến về L .

Chứng minh. Chứng minh này chỉ là viết chi tiết hơn nhận xét trên. Cho $\epsilon > 0$ tùy ý. Khi n đủ lớn, ta có đồng thời $-\epsilon < a_n - L$ và $c_n - L < \epsilon$, nên

$$-\epsilon < a_n - L \leq b_n - L \leq c_n - L < \epsilon,$$

dẫn tới $|b_n - L| < \epsilon$. Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$. □

Ví dụ 1.1.35. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Ta có đánh giá

$$0 < \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}.$$

Sử dụng các tính chất trên của giới hạn, ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Vậy theo tính chất kẹp thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + 1} = 0.$$

■

Ví dụ 1.1.36. Xét giới hạn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n + 3}{n^2 + 3n + 2}.$$

Sử dụng các tính chất của giới hạn và các kết quả đã có, ta viết

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n + 3}{n^2 + 3n + 2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(3 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2})}{n^2(1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2})} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} \right)} \\ &= \frac{3 - 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 3. \end{aligned}$$

■

Ví dụ 1.1.37. Xét giới hạn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - 8n - 2019.$$

Ta dự đoán giới hạn là ∞ . Ta viết

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - 8n - 2019 = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(1 - \frac{8}{n} - \frac{2019}{n^2} \right).$$

Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$, trong khi $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{8}{n} - \frac{2019}{n^2} \right) = 1$. Điều này hẳn sẽ dẫn tới giới hạn của tích bằng ∞ . Trong môn học này lý luận như thế được chấp nhận. Tuy vậy để rõ hơn ta có thể lý luận rằng, cho trước số M bất kì, khi n đủ lớn thì n^2 phải lớn hơn $2M$, trong khi số hạng kia thì do gần 1 tùy ý phải lớn hơn $1/2$, dẫn tới tích phải lớn hơn M . Vậy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - 8n - 2019 = \infty.$$

■

Bài tập

1.1.1. Cho A, B, C là ba tập hợp thỏa $A \subset B$ và $B \subset C$. Chứng tỏ $A \subset C$.

1.1.2. Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề sau: Có một số thực dương M sao cho với mọi phần tử x của tập A thì $x \leq M$.

1.1.3. Khi nào thì một ánh xạ không là đơn ánh? không là toàn ánh? không là song ánh?

1.1.4. Một hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là tăng nếu với hai số thực x, y bất kì thì $x \leq y$ dẫn tới $f(x) \leq f(y)$. Hàm như thế nào thì không tăng?

1.1.5. Cho $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$. Hàm này có phải là một song ánh hay không?

1.1.6. Hãy kiểm tra tính đúng đắn của các công thức:

- (a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{Z}^+.$
- (b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \in \mathbb{Z}^+.$
- (c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, n \in \mathbb{Z}^+.$

1.1.7. (a) Cho số tự nhiên m . Chứng minh rằng nếu m^2 chẵn thì m cũng là số chẵn.

(b) Chứng minh rằng nếu một số chính phương (số là bình phương của một số nguyên) là chẵn thì số chính phương đó chia hết cho 4.

1.1.8. Chứng minh rằng không tồn tại phân số dạng $\frac{m}{n}$, với m và n là số tự nhiên ($n \neq 0$), thỏa $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. Như vậy không có số hữu tỉ x nào sao cho $x^2 = 2$.

1.1.9. Cho $\alpha > -1$ và n là số tự nhiên tùy ý lớn hơn 1. Dùng phép quy nạp, hãy chứng minh bất đẳng thức Bernouli: $(1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha$.

1.1.10. Cho số thực $c \neq 1$ và số nguyên dương n . Hãy kiểm công thức:

$$1 + c + c^2 + c^3 + \cdots + c^n = \frac{1 - c^{n+1}}{1 - c}.$$

1.1.11 (Nhị thức Newton). Cho hai số thực a, b và số nguyên dương n . Hãy kiểm công thức:

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i a^i b^{n-i},$$

với $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$.

1.1.12. Chứng tỏ hai mệnh đề sau là tương đương: mệnh đề 1 là “ $\forall \varepsilon > 0, a < \varepsilon$ ”, mệnh đề 2 là “ $\forall \varepsilon > 0, a \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ”.

1.1.13. Chứng minh các bất đẳng thức sau đây cho các số thực, thường được gọi là các bất đẳng thức tam giác:

- (a) $|x + y| \leq |x| + |y|.$
- (b) $|x| - |y| \leq |x - y|.$
- (c) $||x| - |y|| \leq |x - y|.$

1.1.14. Tìm giới hạn:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n+2}$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} 3n^2 - 2n - 1$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n+1}{3n^2+2n-4}$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} -5n^2 + 2n + 3$

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} -n^3 + 4n^2 + 1$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-2n+1}{5n-3}$

(g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!}$

1.1.15. Chứng tỏ giới hạn của một dãy nếu có là duy nhất. Nói cách khác, một dãy số không thể hội tụ về hai giới hạn khác nhau.

1.2 Hàm số

Các ánh xạ từ một tập con của tập hợp các số thực vào tập hợp các số thực thường được gọi là các **hàm số**, hay đầy đủ hơn là hàm số thực với biến số thực.

Ví dụ 1.2.1. Hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, với mọi $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ là một hàm số. Hàm này có giá trị không đổi trên toàn miền xác định, nên được gọi là một **hàm hằng**. ■

1.2.1 Đồ thị

Trong môn học này ta dùng phương pháp Hình học Giải tích mà René Descartes khởi xướng từ thế kỉ 17, ở đó ta dùng tập hợp các số thực \mathbb{R} để mô hình hóa đường thẳng, tập hợp \mathbb{R}^2 để mô hình hóa mặt phẳng, qua đó các quan hệ trong Hình học Euclid được miêu tả bằng các quan hệ giữa các số thực.

Cho hàm số $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. **Đồ thị** của hàm f là tập hợp tất cả các điểm (x, y) trong mặt phẳng \mathbb{R}^2 với $x \in D$ và $y = f(x)$.

Ví dụ 1.2.2. Đồ thị của hàm $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ là tập hợp điểm $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ trong \mathbb{R}^2 . ■

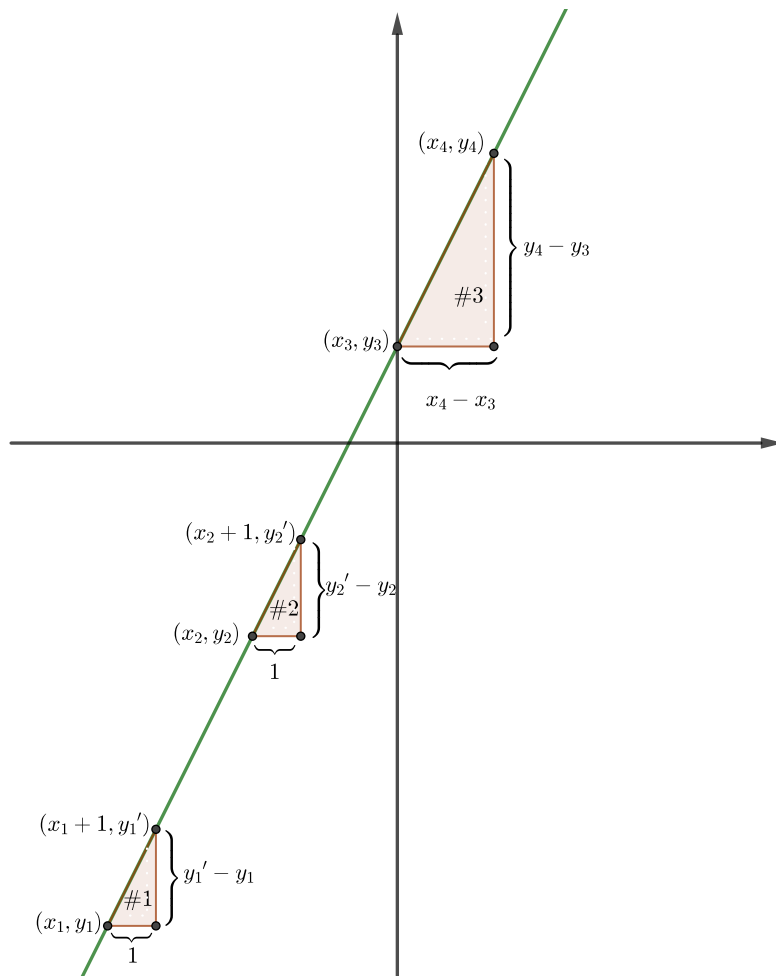
Một **đường thẳng** trong \mathbb{R}^2 là đồ thị của một hàm số có dạng $y = ax + b$ (đường thẳng nghiêng) hoặc là tập hợp những điểm thỏa $x = c$ (đường thẳng đứng), với a, b, c là các hằng số thực. Số a được gọi là **hệ số góc** hay **độ nghiêng** hay độ dốc của đường thẳng. Chú ý là khái niệm hệ số góc không được định nghĩa cho đường thẳng đứng $x = c$.

Xét (x_0, y_0) và (x_1, y_1) là hai điểm bất kỳ trên một đường thẳng không thẳng đứng cho bởi phương trình $y = ax + b$. Vì $y_0 = ax_0 + b$ và $y_1 = ax_1 + b$ nên hệ số góc của đường thẳng này đúng bằng

$$a = \frac{ax_1 + b - (ax_0 + b)}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Đây là công thức tính hệ số góc của một đường thẳng đi qua hai điểm cho trước, không phụ thuộc vào cách chọn hai điểm trên đường thẳng, xem Hình 1.2.1.

Ví dụ 1.2.3. Hệ số góc của đường thẳng nối hai điểm $(4, 6)$ và $(0, 7)$ cho bởi $\frac{7-6}{0-4} = -\frac{1}{4}$. ■



Hình 1.2.1: Hệ số góc của đường thẳng không phụ thuộc vào cách chọn hai điểm để tính, tương thích với tính chất tam giác đồng dạng của hình học Euclid.

Hai đường thẳng được gọi là **song song** nếu chúng khác nhau nhưng có cùng một hệ số góc hoặc cùng thẳng đứng.

Ví dụ 1.2.4. Nhiệt độ theo đơn vị Celsius x và nhiệt độ theo đơn vị Fahrenheit y có quan hệ tuyến tính với nhau, đó là 0° Celsius hay 32° Fahrenheit là nhiệt độ đông của nước và 100° Celsius hay 212° Fahrenheit là nhiệt độ sôi của nước. Để tìm phương trình biểu diễn mối liên hệ của độ Celsius và độ Fahrenheit, chúng ta tìm phương trình của đường thẳng đi qua hai điểm $(0, 32)$ và $(100, 212)$. Hệ số góc của đường thẳng này là

$$m = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{9}{5}.$$

Điều này có nghĩa là khi nhiệt độ Celsius tăng 1° thì nhiệt độ Fahrenheit tăng $\frac{9}{5}^\circ$. Vậy

$$\frac{y - 32}{x - 0} = \frac{9}{5} \quad \text{hay} \quad y = \frac{9}{5}x + 32.$$

■

1.2.2 Hàm số sơ cấp

Hàm lượng giác

Người đọc đã học môn Lượng giác trong chương trình trung học [SGKTH]. Tài liệu này giả sử các tính chất của các hàm lượng giác đã quen thuộc với người đọc.

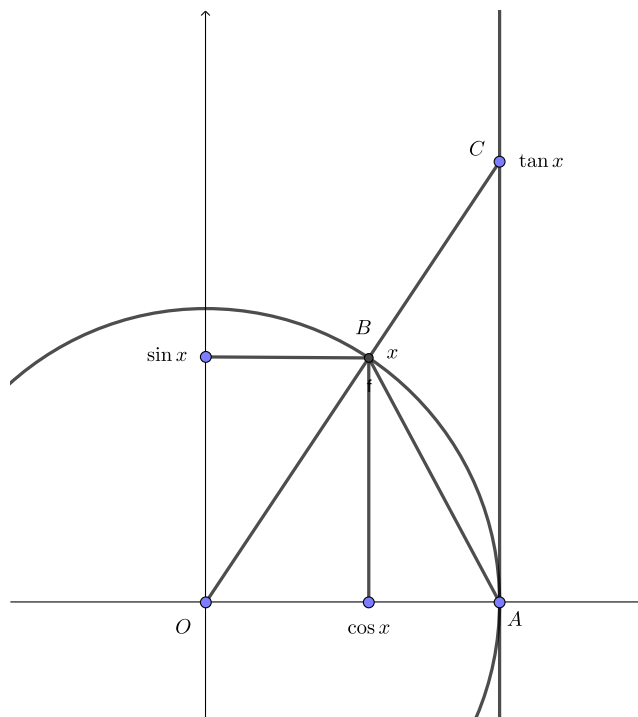
Hình học và lượng giác (nghĩa đen: đo góc) ra đời từ trước Công nguyên, trong khi môn vi tích phân như chúng ta trình bày ở đây, dựa trên hệ thống suy diễn từ tập hợp các số thực, chỉ mới được phát triển từ thế kỉ 19. Một số kết quả trong hình học và lượng giác mà ta đã biết ở trung học (mà ta đã học theo cách chúng được phát triển trong lịch sử) là chưa tương thích, tức là chưa nằm trong cùng hệ suy diễn, với vi tích phân. Chẳng hạn các khái niệm “góc giữa hai đường thẳng”, “góc lượng giác”, số π , mà ta dùng trong hình học và lượng giác, chưa được định nghĩa từ tập hợp số thực. Về sau người ta có thể đưa hàm lượng giác vào khuôn khổ của vi tích phân, tuy nhiên việc này khá phức tạp, không thích hợp cho môn học này, vì vậy trong môn học này ta không định nghĩa các hàm lượng giác, người đọc quan tâm có thể tham khảo những tài liệu như [Apo67], [Spi94].

Môn Vi tích phân quan tâm các hàm lượng giác chủ yếu để sử dụng các tính chất đặc biệt của chúng. Dưới đây ta tóm tắt một số tính chất của hàm lượng giác mà ta thường dùng.

- \sin và \cos là hàm số xác định trên \mathbb{R} , có giá trị trên $[-1, 1]$.
- \sin và \cos là hàm tuần hoàn có chu kì là 2π .
- $\cos(0) = 1$, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.
- $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$.
- $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$.
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
- Với $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ thì \cos là hàm giảm, \sin là hàm tăng.
- $\tan = \frac{\sin}{\cos}$, $\cot = \frac{1}{\tan}$.
- Với $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ thì $\sin x < x < \tan x$. Xem Hình 1.2.2.

Từ các tính chất trên ta có thể suy ra nhiều tính chất khác, trong đó có sự tồn tại của các hàm lượng giác ngược.

- Trên $[0, \pi]$ thì hàm \cos là một song ánh lên $[-1, 1]$ và có hàm ngược là hàm \arccos , còn được viết là \cos^{-1} .
- Trên $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ thì hàm \sin là một song ánh lên $[-1, 1]$ và có hàm ngược là hàm \arcsin .
- Trên $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ thì hàm \tan là một song ánh lên \mathbb{R} và có hàm ngược là hàm \arctan .



Hình 1.2.2: Minh họa hình học của tính chất $\sin x < x < \tan x$ với $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Diện tích tam giác OAB là $\frac{1}{2} \sin x$, nhỏ hơn diện tích góc OAB của hình tròn đơn vị là $\frac{1}{2} x$, nhỏ hơn diện tích của tam giác OAC là $\frac{1}{2} \tan x$.

Hàm lũy thừa và hàm mũ

Với x là một số thực khác 0, nếu n là một số nguyên dương thì x^n là tích của n số x . Nếu n là một số nguyên âm thì ta định nghĩa x^n là số thực $\frac{1}{x^{-n}}$. Ta định nghĩa $x^0 = 1$.

Nếu $x > 0$ và n là một số nguyên dương thì có duy nhất một số thực không âm a sao cho $a^n = x$. Có thể chứng tỏ điều này bằng cách dùng tính đầy đủ của tập hợp số thực. Số a được gọi là căn bậc n của x , kí hiệu là $\sqrt[n]{x}$ hay $x^{\frac{1}{n}}$.

Nếu $x > 0$ và $m \in \mathbb{Z}$ và $n \in \mathbb{Z}^+$ thì $x^{\frac{m}{n}}$ được định nghĩa là $\sqrt[n]{x^m}$.

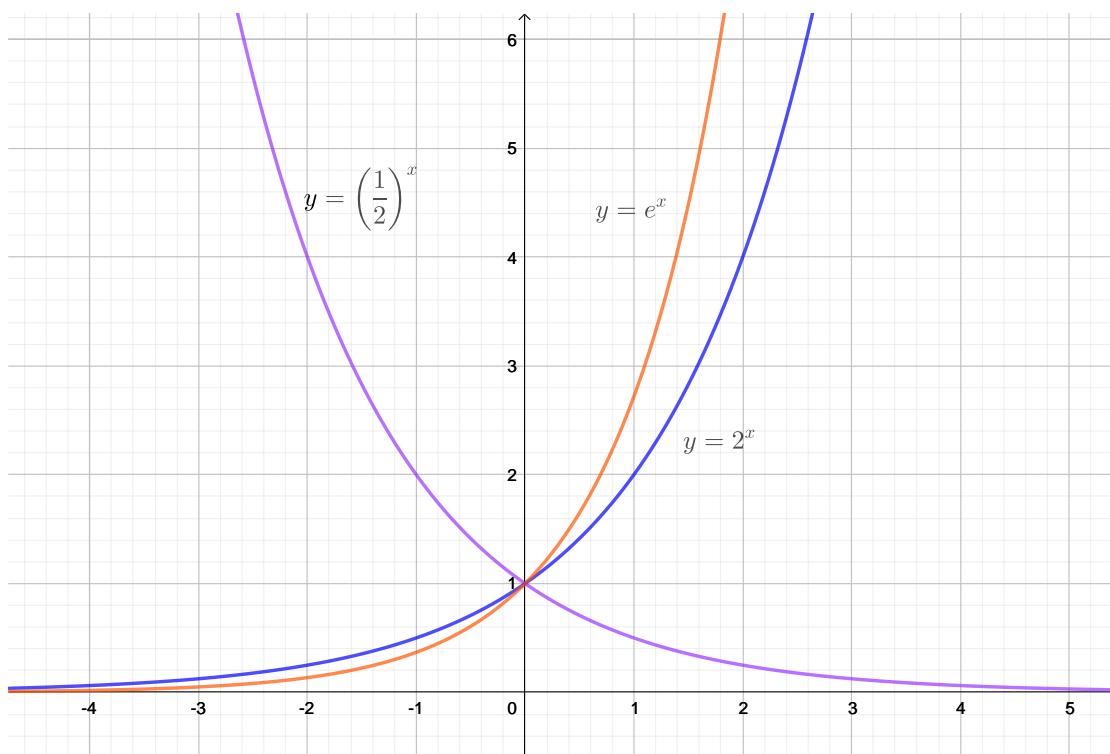
Như vậy khi $x > 0$ và $r \in \mathbb{Q}$ thì x^r đã được định nghĩa. Khi $r \in \mathbb{R}$ thì định nghĩa cần thông qua quá trình giới hạn, từ việc xấp xỉ số thực bởi số hữu tỉ.

Ví dụ 1.2.5. Có thể định nghĩa $3^{\sqrt{2}}$ bằng cách lấy một dãy số hữu tỉ dương r_n hội tụ về $\sqrt{2}$ rồi đặt $3^{\sqrt{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{r_n}$. ■

Với $r \in \mathbb{R}$ cho trước thì hàm $f(x) = x^r$ được gọi là một hàm lũy thừa.

Với $a > 0$ và $a \neq 1$ cho trước thì hàm $f(x) = a^x$ được gọi là một hàm mũ. Xem Hình 1.2.3.

Có thể xây dựng một cách chặt chẽ hàm lũy thừa và hàm mũ thỏa mãn những tính chất như đã thấy ở trung học, người đọc quan tâm có thể tham khảo những tài liệu như [TPTT02], [Apo67], [Spi94].



Hình 1.2.3: Đồ thị và dáng điệu của một số hàm mũ. Chú ý sự khác nhau giữa trường hợp cơ số lớn hơn 1 và trường hợp cơ số nhỏ hơn 1.

Hàm mũ a^x có hàm ngược là hàm lô-ga-rít¹ cơ số a , kí hiệu là \log_a . Như vậy

$$y = a^x \iff x = \log_a y.$$

Ví dụ 1.2.6. Giả sử một đại lượng A thay đổi theo thời gian t (như dân số của một quần thể, số tiền trong một tài khoản, ...). Tại thời điểm ban đầu $t = 0$ số lượng của A là $A(0)$. Sau mỗi đơn vị đo thời gian (một kỳ hạn, ...) thì lượng A tăng lên (lãi) với một tỉ lệ r (như tốc độ tăng dân số, lãi suất ngân hàng, ...) và lãi được nhập vào lượng trước đó. Đây được gọi là **lãi nhập vốn**. Ta muốn biết tại thời điểm t thì giá trị của đại lượng A là bao nhiêu?

Sau 1 đơn vị thời gian thì giá trị của A là

$$A(1) = A(0) + A(0)r = A(0)(1 + r).$$

Sau 2 đơn vị thời gian thì giá trị của A là

$$A(2) = A(1) + A(1)r = A(1)(1 + r) = A(0)(1 + r)^2.$$

Sau 3 đơn vị thời gian thì giá trị của A là

$$A(3) = A(2) + A(2)r = A(2)(1 + r) = A(0)(1 + r)^3.$$

¹tiếng Anh là logarithm

Đến đây ta có thể dự đoán công thức giá trị của A sau t đơn vị thời gian (cũng là t lần tính lãi nhập vốn) chính là

$$A(t) = A(0)(1 + r)^t.$$

Các tính toán trên cho thấy ta có thể dễ dàng kiểm tra công thức này là đúng bằng phương pháp quy nạp toán học. ■

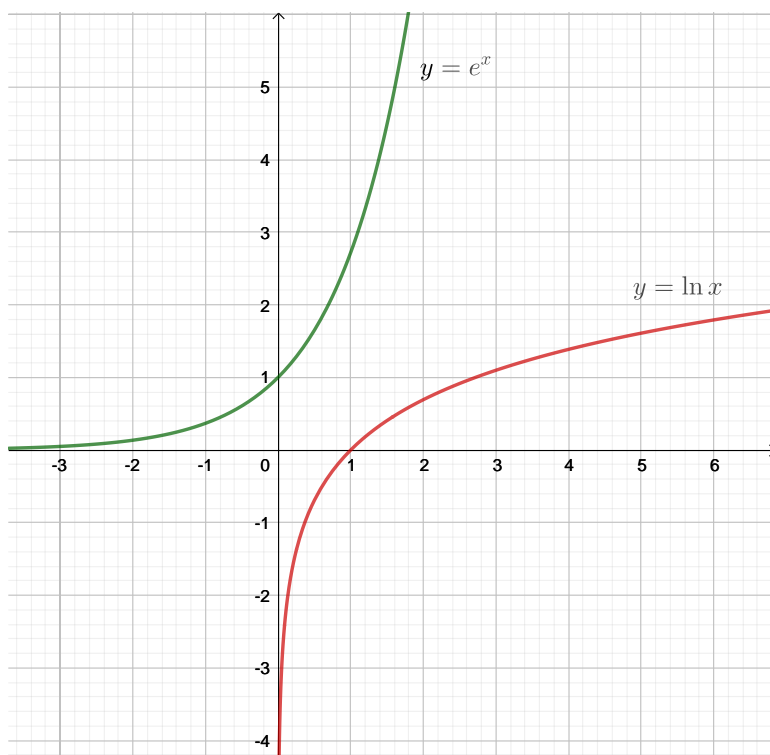
Hằng số e là một số vô tỉ, với biểu diễn thập phân có các chữ số đầu là 2,71828.¹ Hằng số này có thể được định nghĩa là giới hạn của một dãy số hữu tỉ bằng công thức

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Hàm mũ $y = e^x$ có hàm ngược được gọi là hàm lô-ga-rít tự nhiên, kí hiệu là \ln .² Vậy

$$y = e^x \iff x = \ln y.$$

Xem Hình 1.2.4.



Hình 1.2.4: Đồ thị và dáng điệu của hàm mũ $y = e^x$ và hàm ngược $y = \ln x$.

Tổng, hiệu, tích, thương, hàm hợp của các hàm lũy thừa, hàm mũ, hàm log, hàm lượng giác, hàm lượng giác ngược được gọi là các **hàm số sơ cấp**. Trong các hàm sơ cấp có các hàm thường gặp như hàm đa thức, hàm phân thức (thương của hai đa thức), hàm căn thức.

¹Kí hiệu e có thể có nguồn gốc từ tên Euler (một trong những người đầu tiên sử dụng số này), hoặc exponent (mũ), và còn được gọi là hằng số Napier (tên Napier còn được viết là Néper).

²Lô-ga-rít tự nhiên trong tiếng Anh là natural logarithm. Chú ý một số tài liệu và phần mềm máy tính lại dùng kí hiệu \log để chỉ hàm này.

Ví dụ 1.2.7. Hàm mũ $f(x) = e^x$ cùng với hàm $g(x) = \sin x$ cho hàm hợp $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{\sin x}$ và $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin e^x$. Đây là những hàm sơ cấp. ■

Bài tập

1.2.1. Viết phương trình đường thẳng có tính chất dưới đây:

- (a) có hệ số góc là 2 và giao với trục Oy tại $(0, 3)$
- (b) có hệ số góc là -3 và giao với trục Oy tại $(0, 0)$
- (c) có hệ số góc là 4 và đi qua điểm $(1, 1)$
- (d) có hệ số góc là -2 và đi qua điểm $(2, -2)$
- (e) đi qua các điểm $(2, 3)$ và $(4, 5)$
- (f) đi qua các điểm $(2, -4)$ và $(0, 3)$
- (g) đi qua hai điểm $(0, 8)$ và $(8, 0)$
- (h) có hệ số góc là -1 , có giao điểm với trục Oy là $(0, -2)$
- (i) có hệ số góc là -1 , đi qua điểm $(-4, -4)$
- (j) đi qua điểm $(2, 1)$ song song với đường $y = -4x + 3$
- (k) thẳng đứng và đi qua điểm $(3, 4)$
- (l) nằm ngang và đi qua điểm $(-2, -3)$.

1.2.2. Giải thích các công thức sau:

- (a) $\ln e^x = x$
- (b) $e^{\ln x} = x$.

1.2.3. Chứng minh các công thức sau:

- (a) $\log_b x \cdot y = \log_b x + \log_b y$
- (b) $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
- (c) $\log_b a^x = x \log_b a$
- (d) $\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$.

1.2.4. Giải phương trình

- (a) $3e^{2x-4} = 5$.
- (b) $-1 + 2 \ln(2 - 3x) = 9$.

1.2.5. Dân số nước Việt Nam năm 2019 là 97 triệu người. Tốc độ tăng dân số hiện là $1\% = 0,01$ mỗi năm. Nếu tốc độ tăng này không thay đổi thì năm 2029 dân số nước Việt Nam sẽ là bao nhiêu?

1.2.6. Một người gửi 3 triệu đồng vào một tài khoản tiết kiệm với lãi suất $6\% = 0,06$ một năm, kì hạn (thời điểm tính lãi gộp vốn) là 1 năm. Hỏi sau 4 năm thì tài khoản có bao nhiêu? Bao lâu thì người đó có được 10 triệu đồng?

1.2.7. Giá đất đai đã tăng gấp đôi trong 10 năm qua. Trong thời gian đó lãi suất tiết kiệm ngân hàng vào khoảng 8%/năm. Hình thức nào có lợi hơn, đầu tư đất đai hay gửi tiết kiệm?

1.2.8. Năm 2016 GDP (tổng sản phẩm xã hội - Gross Domestic Product) của Việt Nam là 215 tỉ USD với tốc độ tăng là 6,7% mỗi năm. Năm 2016 GDP của Thái Lan là 409 tỉ USD với tốc độ tăng trưởng là 2,8% mỗi năm. Giả sử hai tốc độ tăng trưởng này được giữ nguyên trong tương lai.

- (a) Khi nào thì GDP của Việt Nam đạt GDP năm 2016 của Thái Lan?
- (b) Khi nào thì GDP của Việt Nam đuổi kịp GDP của Thái Lan?
- (c) Hãy phác họa đồ thị GDP của hai nước trên cùng hệ trục tọa độ.

1.2.9. Một quần thể vi khuẩn có 100 cá thể và tăng gấp đôi mỗi 3 giờ. Hãy lập mô hình số lượng của quần thể theo thời gian. Khi nào thì số vi khuẩn đạt 1000?

1.2.10. “Luật Moore” là một quan sát năm 1965 và được chính năm 1975 bởi Gordon Moore, lúc đó là CEO của Intel, rằng mật độ của các bộ phận trong mạch tích hợp đang gấp đôi mỗi xấp xỉ hai năm. Luật này được thấy cơ bản là đúng cho tới nay và đã cho những dự đoán tốt.

Kích thước của transistor trong các bộ xử lý máy tính bán trên thị trường là 14 nm (nanometer) vào năm 2014 và 10 nm vào năm 2016. Hãy giải thích vì sao điều này là phù hợp với Luật Moore. Hãy dự đoán khi nào có quy trình sản xuất transistor kích thước 5 nm .

Chương 2

Hàm số liên tục

2.1 Giới hạn của hàm số

2.1.1 Tiếp tuyến, vận tốc, tỉ lệ thay đổi

Các khái niệm giới hạn hàm số và hàm số liên tục đã được giới thiệu ở trung học. Trong phần này chúng ta tìm hiểu kỹ hơn các khái niệm đó.

Ý niệm về giới hạn đã có từ xưa, như Archimedes từ cách đây hơn 2200 năm đã dùng ý tưởng rằng chiều dài của đường tròn bằng giới hạn của chu vi của hình đa giác đều nội tiếp khi số cạnh tăng lên vô hạn.

Trước khi đi vào định nghĩa chính xác cho giới hạn hàm số, để làm động lực, chúng ta thảo luận các bài toán dẫn tới khái niệm này.

Bài toán tiếp tuyến

Đối với đường tròn thì có thể coi tiếp tuyến là đường thẳng giao với đường tròn đúng một điểm, như trong Hình 2.1.1 (a). Đối với các đường cong phức tạp hơn thì cách tiếp cận này không phù hợp. Hình 2.1.1 (b) chỉ ra hai đường thẳng l và t qua điểm P trên đường cong C . Đường l giao với C đúng một điểm nhưng nhìn hình thì không có vẻ gì là tiếp xúc. Đường thẳng t có vẻ tiếp xúc với C nhưng cắt C tại hai điểm.

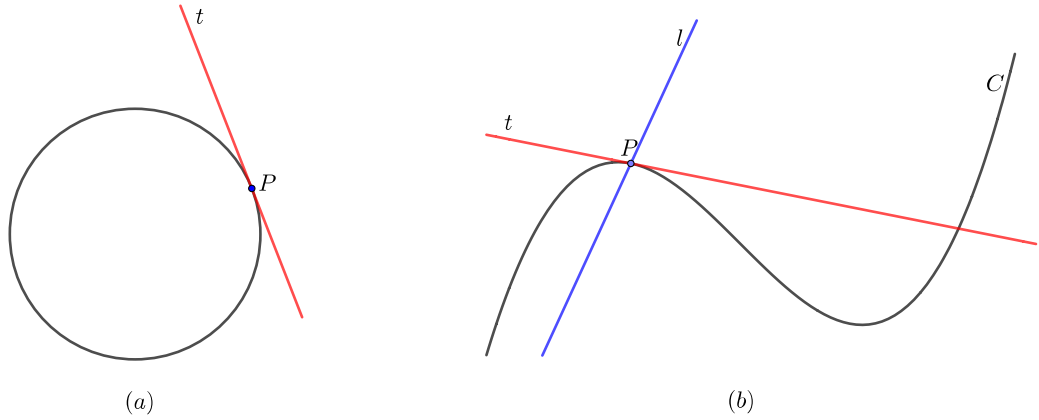
Như vậy khái niệm “tiếp tuyến” tuy quen thuộc và dễ hình dung trong một số trường hợp, lại chưa có ý nghĩa rõ ràng trong một số trường hợp khác.

Dưới đây ta xét một ví dụ để tìm hiểu khái niệm này.

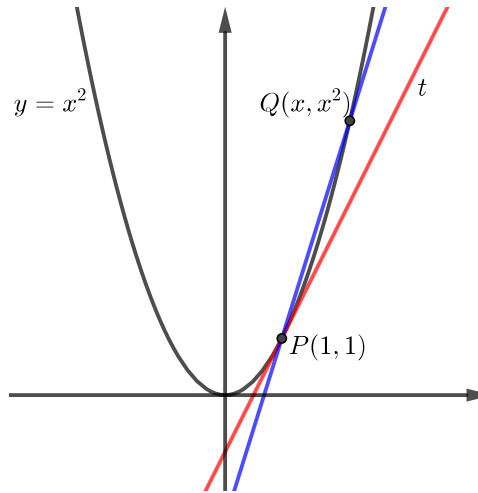
Ví dụ 2.1.1. Tìm phương trình đường tiếp tuyến cho parabol $y = x^2$ tại điểm $P(1, 1)$.

Ta sẽ phải tìm hệ số góc m của đường tiếp tuyến. Ta tìm một xấp xỉ của m bằng cách chọn điểm $Q(x, x^2)$ trên parabol gần điểm P và tính hệ số góc của đường thẳng cắt tuyến PQ là

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$



Hình 2.1.1



Hình 2.1.2

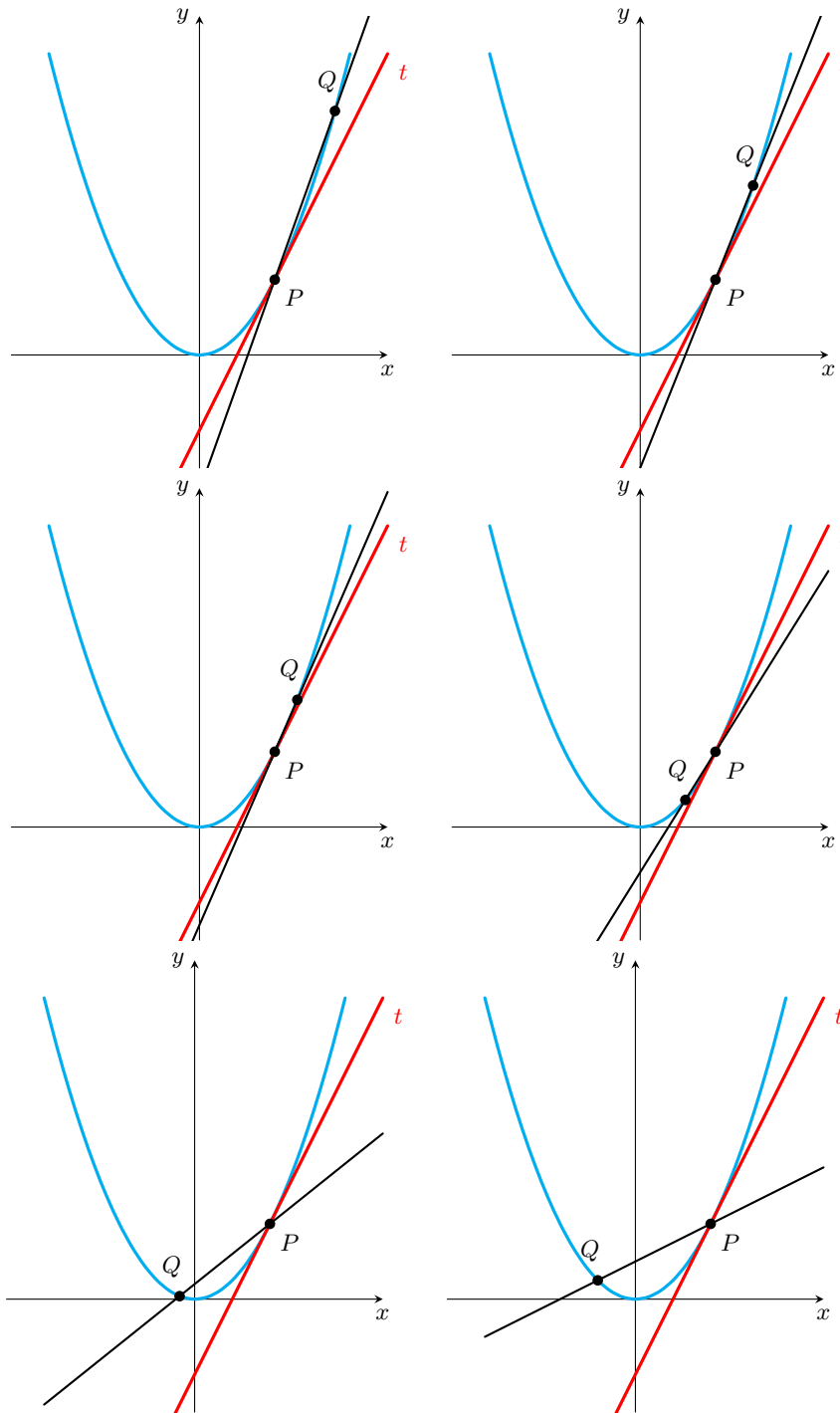
Từ Hình 2.1.2 ta thấy khi Q càng gần P , x càng gần 1 thì hệ số góc càng gần tới một số thực nhất định.

Bây giờ ta có thể đoán rằng hệ số góc của tiếp tuyến tại P là 2, là “giới hạn” của hệ số góc của đường cát tuyến PQ khi Q tiến về P . Xem minh họa ở Hình 2.1.3.

Nếu hệ số góc của tiếp tuyến đúng thực là 2 thì phương trình đường thẳng có hệ số góc bằng 2 đi qua điểm $(1, 1)$ là

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \text{hay là} \quad y = 2x - 1.$$

Như vậy ý then chốt là: tiếp tuyến tại P chính là “giới hạn” của cát tuyến PQ khi “ Q tiến về P ”. ■



Hình 2.1.3: Tiếp tuyến tại P là giới hạn của cát tuyến PQ khi Q tiến về P từ bên phải và từ bên trái.

Bài toán vận tốc

Khi ta di chuyển, vị trí của ta thay đổi theo thời gian. Vận tốc, chính xác hơn là vận tốc trung bình, vốn được hiểu là tỉ số giữa thay đổi vị trí với khoảng thời gian được dùng để đi. Nếu ngồi trên một chiếc xe, nhìn bảng đo vận tốc của xe ta có thể thấy nó liên tục thay đổi, mỗi khi ta nhìn đồng hồ đo vận tốc thì thấy có vận tốc nhất định. Đây chính là **vận tốc tức thời**. Nhưng vận tốc tức thời đó được hiểu chính xác như thế nào?

Ví dụ 2.1.2. Giả sử một quả bóng được thả rơi từ một vị trí cách mặt đất 10 mét. Gọi $s(t)$ là quãng đường bóng rơi sau t giây, thì

$$s(t) = \frac{1}{2} \cdot 9,8t^2,$$

với $9,8 m/s^2$ là hằng số trọng trường. Ta tìm vận tốc của quả bóng sau 1 giây.

Ta có thể xấp xỉ vận tốc tức thời này cần tính bằng cách tính vận tốc trung bình trên một khoảng thời gian cụ thể gần thời điểm 1 giây. Chẳng hạn trên khoảng thời gian $0,95 \leq t \leq 1$ thì

$$\begin{aligned} \text{vận tốc trung bình} &= \frac{\text{lượng thay đổi vị trí}}{\text{lượng thời gian trôi qua}} \\ &= \frac{s(1) - s(0,95)}{1 - 0,95} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot (0,95)^2}{0,05} = 9,555 m/s. \end{aligned}$$

Bảng dưới cho ta tính toán vận tốc trung bình trên khoảng thời gian nhỏ dần:

Khoảng thời gian	Vận tốc trung bình
$0,95 \leq t \leq 1$	9,555
$0,96 \leq t \leq 1$	9,604
$0,97 \leq t \leq 1$	9,653
$0,98 \leq t \leq 1$	9,702
$0,99 \leq t \leq 1$	9,751

Ta thấy khi khoảng thời gian ngắn đi thì vận tốc trung bình tiến gần hơn tới một số thực nào đó, có thể là 9,8. ■

Như vậy “vận tốc tức thời” tại thời điểm t có thể hiểu là “giới hạn” của vận tốc trung bình trên những khoảng thời gian chứa t khi chiều dài những khoảng thời gian này “tiến về” 0.

Tỉ lệ thay đổi

Cả hai bài toán tìm hệ số góc của tiếp tuyến và tìm vận tốc tức thời đều đưa về một bài toán chung: Tìm “giới hạn” của đại lượng

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

khi x “tiến về” a . Số thực này đo tỉ lệ lượng thay đổi của một đại lượng $f(x)$ so với lượng thay đổi của đại lượng x mà nó phụ thuộc vào tại một giá trị nhất định của đại lượng đó là a . Nó cho ta một số đo phản ánh đại lượng $f(x)$ thay đổi như thế nào khi x thay đổi. Đây là một đại lượng then chốt khi ta khảo sát các hiện tượng trong thế giới, là đề tài và công cụ chủ yếu của phép tính vi tích phân, được gọi là đạo hàm mà ta sẽ tìm hiểu chi tiết ở chương tiếp theo. Chúng ta thấy rằng để xây dựng khái niệm này cần xây dựng khái niệm “giới hạn” trước. Ta làm điều này ngay tiếp theo đây.

2.1.2 Giới hạn của hàm số

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định khi x gần số a nhưng có thể không xác định tại a . Ta nói giới hạn của $f(x)$ khi x tiến về a là số thực L nếu $f(x)$ *gần L tùy ý khi x đủ gần a nhưng không bằng a* , và viết

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Trong nhiều trường hợp khái niệm giới hạn có thể được diễn tả đơn giản hơn tuy kém tổng quát hơn rằng nếu x gần tới a hơn thì $f(x)$ gần tới L hơn.

Ví dụ 2.1.3. Cho f là một hàm hằng, nghĩa là có một số thực c sao cho $f(x) = c$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Rõ ràng, với mọi $a \in \mathbb{R}$, khi x gần tới a thì $f(x)$ gần, thực ra luôn bằng, c . Vậy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$, hay ngắn gọn hơn:

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c.$$

■

Ví dụ 2.1.4. Cho $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Rõ ràng, với mọi $a \in \mathbb{R}$, khi x gần tới a thì $f(x) = x$ cũng gần tới a . Vậy

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a.$$

■

Chú ý trong khái niệm giới hạn ở trên có giả thiết $x \neq a$. Mục đích của điều này là để cho phép ta xét những giới hạn tại những điểm mà hàm không được xác định, như trong ví dụ dưới đây.

Ví dụ 2.1.5. Xét

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}.$$

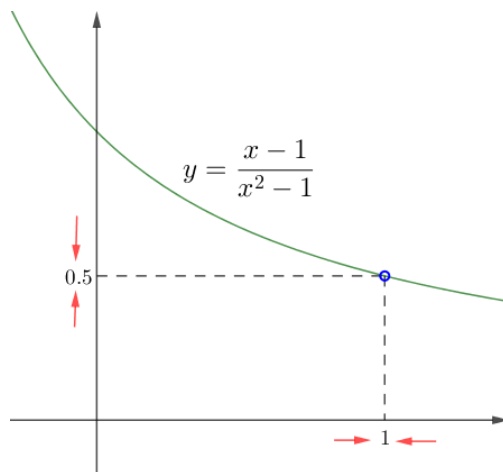
Khi x gần 1 nhưng khác 1 ta có

$$\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1},$$

mặc dù hai vế không bằng nhau khi $x = 1$. Do đó

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1}.$$

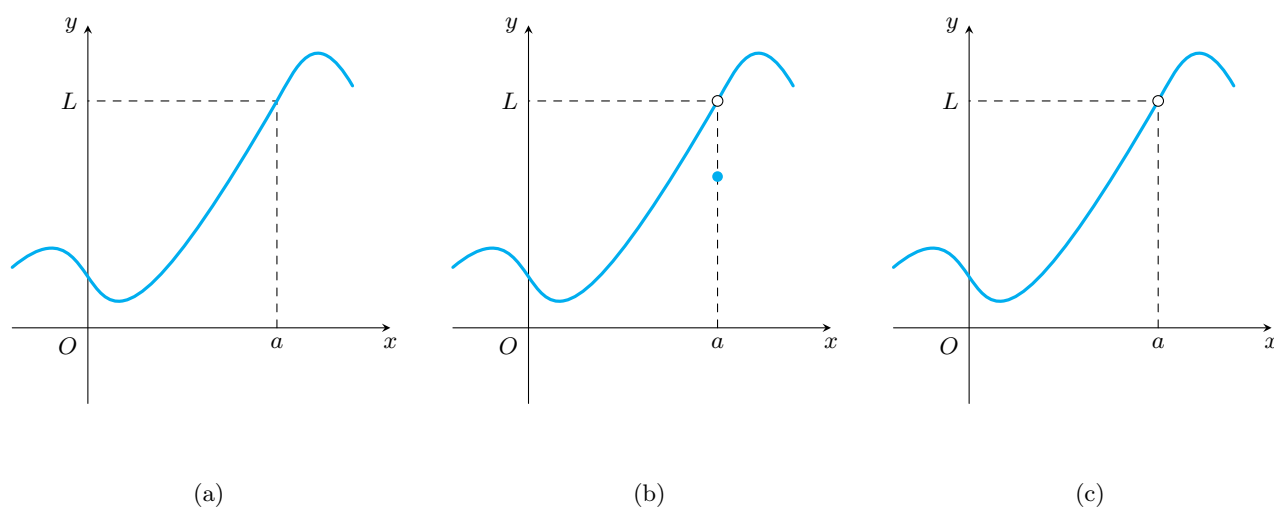
Có thể dự đoán giá trị của giới hạn này là $\frac{1}{2}$, xem Hình 2.1.4.



Hình 2.1.4

■

Ví dụ trên minh họa chi tiết trong định nghĩa rằng khi tìm giới hạn của $f(x)$ khi x tiến đến a ta không cần xét và sẽ không xét $x = a$. Hàm f thậm chí không cần được xác định tại $x = a$. Giới hạn tại a không phụ thuộc vào f như thế nào tại a , chỉ phụ thuộc việc f như thế nào gần a mà thôi. Xem Hình 2.1.5.



Hình 2.1.5: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ trong cả ba trường hợp (dấu tròn rỗng tại một điểm chỉ rằng điểm đó không thuộc đồ thị).

Định nghĩa chính xác của giới hạn

Ở mục này khái niệm giới hạn được chính xác hóa và được viết ở dạng kí hiệu, tương tự như cách viết khái niệm giới hạn của dãy ở Định nghĩa 1.1.22. Tuy có vẻ hơi trừu tượng nhưng cách viết này chỉ là lượng hóa khái niệm giới hạn ở trên, giúp ta làm được các lý luận phức tạp hơn.

Điểm $a \in D$ được gọi là một **điểm tụ** hay một **điểm giới hạn** của D nếu mọi khoảng mở của \mathbb{R} chứa a đều chứa một điểm của D khác a . Có thể thấy điều này đồng nghĩa với việc có một dãy các phần tử của D khác a mà hội tụ về a . Một điểm tụ a của tập D không nhất thiết phải thuộc D , nhưng luôn có phần tử của D không phải là a mà gần a tùy ý.

Ví dụ 2.1.6. Điểm 0 là một điểm tụ của tập $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Điểm 0 không phải là một điểm tụ của tập $\{0\} \cup (1, \infty)$. ■

Định nghĩa 2.1.7. Cho f là một hàm số được xác định trên tập D và a là một điểm tụ của D . Ta nói **giới hạn** của $f(x)$ khi x tiến đến a là số thực L và viết là

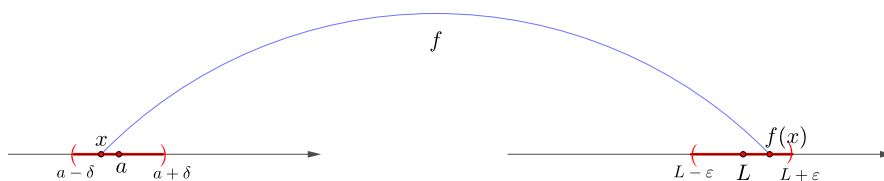
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

nếu với mọi số $\epsilon > 0$ có một số $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in D$ nếu $0 < |x - a| < \delta$ thì $|f(x) - L| < \epsilon$. Viết hoàn toàn bằng kí hiệu thì

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

hay

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D \cap ((a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}), f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon).$$



Hình 2.1.6: Giới hạn của hàm số f .

Trong định nghĩa này, “ $f(x)$ gần L tùy ý” được lượng hóa thành khoảng cách giữa hai số thực $f(x)$ và L , cho bởi $|f(x) - L|$, nhỏ hơn số dương ϵ cho trước bất kì; và “ x đủ gần a nhưng không bằng a ” được lượng hóa thành khoảng cách giữa hai số thực x và a , cho bởi $|x - a|$, nhỏ hơn số dương δ nào đó nhưng khác 0. Định nghĩa này thường được gọi là “định nghĩa ϵ - δ ”.

Sau đây là một số ví dụ để minh họa.

Ví dụ 2.1.8. Kiểm rằng $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 3$.

Bước 1: Phân tích để dự đoán δ . Cho trước $\epsilon > 0$, ta muốn tìm $\delta > 0$ sao cho nếu $|x - 2| < \delta$ thì $|(2x - 1) - 3| < \epsilon$. Vì $|(2x - 1) - 3| = |2x - 4| = 2|x - 2|$ nên nếu $|(2x - 1) - 3| < \delta$ thì $2|x - 2| < 2\delta$. Từ đây ta dự đoán $\delta = \epsilon/2$.

Bước 2: Chứng minh. Cho trước một $\epsilon > 0$, chọn $\delta = \epsilon/2$. Nếu $0 < |x - 2| < \delta$ thì

$$|(2x - 1) - 3| = 2|x - 2| < 2\delta = \epsilon.$$

Vậy ta kết luận

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 3.$$

■

Ví dụ 2.1.9. Kiểm rằng $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.

Bước 1: Dự đoán số δ . Cho trước $\epsilon > 0$, ta tìm số $\delta > 0$ sao cho nếu $0 < |x - 2| < \delta$ thì $|x^2 - 4| < \epsilon$. Ta có $|x^2 - 4| = |(x - 2)(x + 2)|$. Ta quan tâm đến những x gần 2 nên ta có thể giả sử x cách 2 không quá 1, nghĩa là $|x - 2| < 1$, hay $1 < x < 3$, do đó $3 < x + 2 < 5$. Khi đó

$$|x^2 - 4| = |(x - 2)(x + 2)| < 5|x - 2| < 5\delta.$$

Để chắc chắn rằng $|x^2 - 4| < \epsilon$ ta có thể lấy δ sao cho $\delta < 1$ và $5\delta < \epsilon$ chẳng hạn $\delta = \min\{1, \epsilon/5\}$.

Bước 2: Chứng minh. Cho $\epsilon > 0$, chọn $\delta = \min\{1, \epsilon/5\}$. Nếu $0 < |x - 2| < \delta$, thì $|x - 2| < 1$ do đó $|x + 2| < 5$, và $|x - 2| < \epsilon/5$, nên

$$|x^2 - 4| = |(x - 2)(x + 2)| < (\epsilon/5)5 = \epsilon.$$

Vậy

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4.$$

Khi đã thông thạo hơn lý luận này thì người ta thường chỉ cần viết ra Bước 1 ở trên chứ không cần viết ra Bước 2 nữa. ■

Yêu cầu rằng điểm tại đó ta xét giới hạn phải là một điểm tụ của miền xác định giúp đảm bảo giới hạn nếu tồn tại là duy nhất.

Mệnh đề 2.1.10. *Giới hạn nếu tồn tại là duy nhất.*

Chứng minh. Giả sử $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ và a là một điểm tụ của D . Giả sử $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ và $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$. Cho $\epsilon > 0$, có $\delta_1 > 0$ sao cho khi $x \in D$ và $0 < |x - a| < \delta_1$ thì $|f(x) - L_1| < \epsilon$, và có $\delta_2 > 0$ sao cho khi $x \in D$ và $0 < |x - a| < \delta_2$ thì $|f(x) - L_2| < \epsilon$. Lấy $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Vì a là một điểm tụ của D nên có $x \in D$ sao cho $0 < |x - a| < \delta$. Với x này thì ta có

$$|L_1 - L_2| \leq |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < 2\epsilon.$$

Điều này đúng với mọi số dương ϵ , nên bắt buộc $L_1 = L_2$. □

2.1.3 Một số tính chất căn bản của giới hạn

Ở mục này, từ định nghĩa giới hạn ta phát triển những tính chất và công thức, nhờ đó làm việc với giới hạn dễ dàng hơn.

Sau đây là các tính chất số học căn bản cho giới hạn của hàm số, tương tự các kết quả cho dãy ở Mệnh đề 1.1.30, người học hãy xem lại.

Mệnh đề 2.1.11. Cho hai hàm số f và g có cùng miền xác định và a là một điểm tụ của miền xác định đó. Giả sử các giới hạn $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ tồn tại. Khi đó các giới hạn ở vế trái của các đẳng thức dưới đây tồn tại và bằng vế phải:

$$(a) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \text{ nếu } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0.$$

Chứng minh. Có thể chứng minh mệnh đề này giống như chứng minh cho giới hạn của dãy ở Mệnh đề 1.1.30. Để minh họa, dưới đây là chi tiết cho tính chất (a).

Đặt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$ và $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = N$. Cho $\epsilon > 0$, có $\delta_1 > 0$ sao cho khi $x \in D$ và $0 < |x - a| < \delta_1$ thì $|f(x) - M| < \epsilon/2$, và có $\delta_2 > 0$ sao cho khi $x \in D$ và $0 < |x - a| < \delta_2$ thì $|g(x) - N| < \epsilon/2$. Lấy $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Với mọi $x \in D$ sao cho $0 < |x - a| < \delta$ thì ta có

$$|(f(x) + g(x)) - (M + N)| \leq |f(x) - M| + |g(x) - N| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Theo định nghĩa thì điều này thể hiện rằng $f(x) + g(x)$ hội tụ về $M + N$. □

Ví dụ 2.1.12. Tính $\lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 - 4x + 5$.

Áp dụng các tính chất của giới hạn ở trên, ta viết

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 - 4x + 5 &= \lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} -4x + \lim_{x \rightarrow 2} 5 \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 2} 3 \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right)^2 + \left(\lim_{x \rightarrow 2} -4 \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right) + \lim_{x \rightarrow 2} 5 \\ &= 3 \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right)^2 - 4 \lim_{x \rightarrow 2} x + 5 = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 5. \end{aligned}$$

Về sau ta viết tắt và bỏ bớt các bước trên. ■

Ví dụ 2.1.13. Với n là một số nguyên dương thì áp dụng tính chất giới hạn của tích:

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} x \right)^n = a^n.$$
■

Hai ví dụ trên chỉ ra rằng *giới hạn của đa thức thu được bằng cách thế số vào*, tức là nếu p là một đa thức thì

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a).$$

Tiếp theo, nhờ tính chất giới hạn của thương, *giới hạn của phân thức cũng thu được bằng cách thế số vào*, miễn là không chia cho 0, tức là nếu p và q là hai đa thức thì

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)},$$

nếu $q(a) \neq 0$.

Ví dụ 2.1.14. Tìm

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}.$$

Trước hết nhận xét rằng hàm số trên không xác định tại điểm tính giới hạn. Tuy nhiên ta có thể biến đổi bằng cách phân tích thành tích rồi thu gọn để được một hàm số mới đơn giản hơn mà chỉ khác hàm số ban đầu tại đúng một điểm, chính là điểm tính giới hạn. Cụ thể:

$$\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1},$$

với mọi $x \neq 1$. Vì giới hạn tại $x = 1$ không phụ thuộc vào giá trị của hàm tại $x = 1$, nên ta có thể dùng hàm mới thu được để tính giới hạn. Áp dụng các tính chất của giới hạn ta được

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = \frac{1^2 + 1 + 1}{1 + 1} = \frac{3}{2}.$$

■

Tiếp theo ta có các mệnh đề về so sánh giới hạn tương tự các kết quả cho dãy ở Mệnh đề 1.1.33, và có thể được chứng minh một cách tương tự.

Mệnh đề 2.1.15 (Tính chất so sánh). Nếu $f(x) \leq g(x)$ khi x gần a , có thể ngoại trừ tại a , và các giới hạn của hàm số f và g tồn tại khi x tiến đến a , thì

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Ta có ngay một hệ quả tương ứng với Mệnh đề 1.1.34 cho dãy, với chứng minh tương tự:

Mệnh đề 2.1.16 (Tính chất kẹp). Nếu $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ khi x gần a có thể ngoại trừ tại a , và

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$$

thì

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$

Ví dụ 2.1.17. Tìm

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}.$$

Với mọi $x \neq 0$ ta có các bất đẳng thức sau

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1,$$

nên

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ nên theo Định lý kẹp ở trên ta kết luận

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0.$$

■

* Giới hạn của hàm số thông qua giới hạn của dãy số

Dưới đây ta trình bày giới hạn của hàm số thông qua giới hạn của dãy số. Cách tiếp cận này có thể dễ hơn cho một số người học vì đã quen thuộc với giới hạn của dãy từ Mục 1.1.4, và vì đây cũng là cách tiếp cận trong sách giáo khoa trung học lớp 11 [SGKTH].

Mệnh đề 2.1.18. Cho a là một điểm tụ của miền xác định của hàm số f . Hai điều sau là tương đương:

(a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$

(b) Với mọi dãy số $(x_n)_{n \geq 1}$ khác a hội tụ về a , dãy số $(f(x_n))_{n \geq 1}$ hội tụ về L . Nói cách khác, với mọi dãy $(x_n)_{n \geq 1}$ khác a thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L.$$

Chứng minh. Xét một chiều, giả sử $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Cho trước $\epsilon > 0$ tùy ý. Có số $\delta > 0$ sao cho nếu $0 < |x - a| < \delta$ thì $|f(x) - L| < \epsilon$. Có số tự nhiên p sao cho nếu $n \geq p$ thì $0 < |x_n - a| < \delta$. Suy ra với $n \geq p$ thì $|f(x_n) - L| < \epsilon$. Ta kết luận $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$.

Xét chiều ngược lại. Giả sử phản chứng, không có $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Theo định nghĩa ϵ - δ của giới hạn, tồn tại số thực $\epsilon > 0$ sao cho với $\delta = \frac{1}{n}$ thì có số thực x_n sao cho $0 < |x_n - a| < \delta$ và $|f(x_n) - L| \geq \epsilon$. Nhưng như vậy thì dãy số $(x_n)_{n \geq 1}$ khác a hội tụ về a nhưng dãy số $(f(x_n))_{n \geq 1}$ không hội tụ về L , mâu thuẫn. □

Dùng quan hệ trên ta có thể nhận được những tính chất căn bản của giới hạn của hàm số ở mục trước như Mệnh đề 2.1.11 trực tiếp từ các tính chất tương ứng của giới hạn của dãy số.

Một ứng dụng khác là chỉ ra rằng không có giới hạn:

Hệ quả 2.1.19. Nếu có một trong hai điều sau thì hàm f không có giới hạn tại a :

- (a) có một dãy $(x_n)_{n \geq 1}$ khác a hội tụ về a nhưng dãy $(f(x_n))_{n \geq 1}$ không hội tụ,
 (b) có hai dãy $(x_n)_{n \geq 1}$ và $(y_n)_{n \geq 1}$ khác a cùng hội tụ về a nhưng

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n).$$

Ví dụ 2.1.20. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$.

Ta tìm được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} = 0,$$

nhưng

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin 2n\pi = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(2n\pi + \frac{\pi}{2} \right) = 1.$$

Vậy giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ không tồn tại. ■

2.1.4 Các giới hạn mở rộng

Giới hạn một phía

Trong nhiều trường hợp ta muốn xét những giới hạn như

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Hàm số được xác định bằng các công thức khác nhau khi $x < 0$ và khi $x > 0$, vì thế ta muốn xét hai giới hạn: giới hạn khi $x < 0$ và giới hạn khi $x > 0$. Do đó bây giờ ta định nghĩa giới hạn một phía của hàm số.

Định nghĩa 2.1.21. Giả sử a là một điểm tụ bên trái của miền xác định của f , tức là mỗi khoảng (c, a) đều chứa một điểm thuộc miền xác định của f . Ta viết

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

và nói **giới hạn bên trái** của hàm số $f(x)$ khi x tiến đến a , hay giới hạn của $f(x)$ khi x tiến đến a từ bên trái, là L nếu giá trị của $f(x)$ gần tùy ý L khi giá trị của x đủ gần a nhưng nhỏ hơn a . Ký hiệu “ $x \rightarrow a^-$ ” có nghĩa là ta chỉ xem xét $x < a$. Viết hoàn toàn bằng ký hiệu thì $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, -\delta < x - a < 0 \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Tương tự nếu ta yêu cầu x lớn hơn a ta sẽ có **giới hạn bên phải** của $f(x)$ khi x tiến đến a là L và ký hiệu là

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

nếu giá trị của $f(x)$ gần tùy ý L khi giá trị của x đủ gần a nhưng lớn hơn a . Viết hoàn toàn bằng kí hiệu thì $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, 0 < x - a < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Ví dụ 2.1.22. Cho

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Khi $x > 0$ ta có $f(x) = 1$, nên $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$. Khi $x < 0$ ta có $f(x) = 0$, nên $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0$. ■

Sau đây là một mệnh đề giúp ta nhận biết sự tồn tại giới hạn của một hàm số tại một điểm thông qua các giới hạn một phía:

Mệnh đề 2.1.23. (a) Nếu $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ tồn tại và bằng L thì $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ nếu tồn tại phải bằng L .

(b) Nếu $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ tồn tại và bằng L thì $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ tồn tại và bằng L .

Như vậy hàm số không có giới hạn tại một điểm nếu không tồn tại một giới hạn một bên tại điểm đó, hoặc nếu cả hai giới hạn một bên tồn tại nhưng có giá trị khác nhau.

Chứng minh. Nếu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ và giới hạn mỗi phía tồn tại (là khi a là điểm tụ bên trái và là điểm tụ bên phải) thì từ định nghĩa các giới hạn ta có ngay $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$.

Ngược lại giả sử $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$. Cho $\epsilon > 0$, có $\delta_1 > 0$ sao cho khi $x \in D$ và $0 < x - a < \delta_1$ thì $|f(x) - L| < \epsilon$, và có $\delta_2 > 0$ sao cho khi $x \in D$ và $0 < a - x < \delta_2$ thì $|f(x) - L| < \epsilon$. Lấy $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Với mọi $x \in D$ sao cho $0 < |x - a| < \delta$ thì $|f(x) - L| < \epsilon$. Vậy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. □

Ví dụ 2.1.24. Tìm giới hạn của

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}.$$

Vì

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

và

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

là hai số khác nhau nên giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ không tồn tại. ■

Giới hạn ở vô cùng

Định nghĩa 2.1.25. Cho hàm số f được xác định khi a đủ lớn. Ta nói giới hạn của f khi x tiến tới vô cùng là số thực L , và viết

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

nếu $f(x)$ gần L tùy ý miễn x đủ lớn. Chính xác hơn, nếu với mọi số dương ϵ tồn tại một số dương M sao cho nếu $x > M$ thì $|f(x) - L| < \epsilon$.

Tương tự ta nói

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

nếu $f(x)$ gần L tùy ý miễn x đủ nhỏ. Chính xác hơn, nếu với mọi số dương ϵ tồn tại một số dương M sao cho nếu $x < -M$ thì $|f(x) - L| < \epsilon$.

Có thể so sánh sự tương tự của giới hạn của hàm ở vô cùng với giới hạn của dãy trong Mục 1.1.4.

Ví dụ 2.1.26. Có thể thấy ngay:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

■

Như đã thảo luận ở phần dãy ở Ghi chú 1.1.29, kí hiệu ∞ không thể hiện một số thực, mà thể hiện một loại giới hạn, và chỉ có ý nghĩa trong ngữ cảnh đó. Kí hiệu này được đọc là **vô cùng**, hay **vô hạn**, hay **vô cực**.

Giới hạn ở vô cùng có cùng các tính chất với giới hạn tới một số thực như ở Mệnh đề 2.1.11, với chứng minh tương tự.

Ví dụ 2.1.27. Tìm

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{3x + 4}.$$

Dùng các tính chất của giới hạn ta viết

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{3x + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(2 - \frac{1}{x})}{x(3 + \frac{4}{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{3 + \frac{4}{x}} = \frac{2 - 0}{3 + 0} = \frac{2}{3}.$$

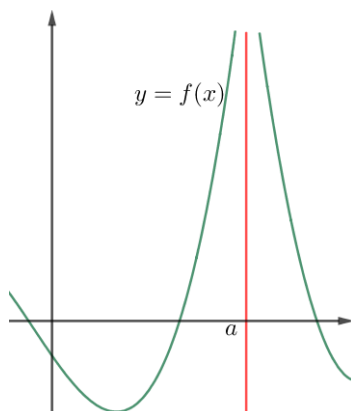
■

Giới hạn bằng vô cùng

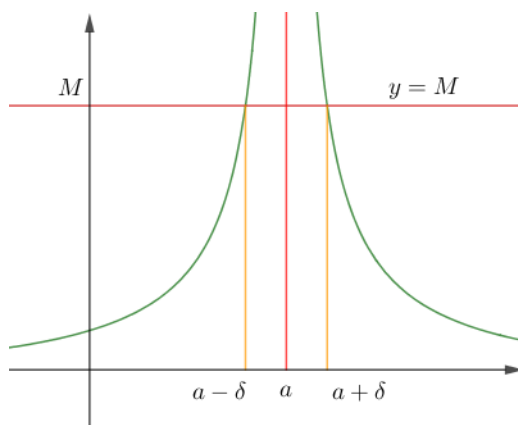
Định nghĩa 2.1.28. Cho hàm số f được xác định ở gần a nhưng có thể không xác định tại a . Ta nói giới hạn của f khi x tiến tới a là vô cùng và viết

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

nếu $f(x)$ lớn tùy ý miễn x đủ gần nhưng không bằng a . Chính xác hơn, nếu với mọi số dương M tồn tại một số dương δ sao cho nếu $0 < |x - a| < \delta$ thì $f(x) > M$. Xem Hình 2.1.7 và Hình 2.1.8.



Hình 2.1.7: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.



Hình 2.1.8: Minh họa $0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > M$.

Tương tự ta có thể nói tới giới hạn bằng âm vô cùng. Ta nói

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

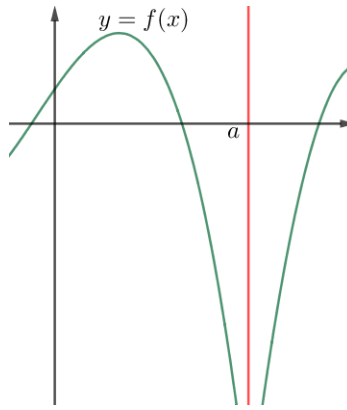
nếu $f(x)$ nhỏ tùy ý miễn x đủ gần nhưng không bằng a . Chính xác hơn, nếu với mọi số dương M tồn tại một số dương δ sao cho nếu $0 < |x - a| < \delta$ thì $f(x) < -M$. Xem Hình 2.1.9.

Có thể so sánh sự tương tự của giới hạn bằng vô cùng của hàm với việc dãy tiến ra vô cùng trong Mục 1.1.4.

Ví dụ 2.1.29. Không khó để thấy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Để kiểm tra, cho M là số thực dương bất kỳ, ta có $\frac{1}{x^2} > M \iff |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$, vậy trong định nghĩa chỉ cần lấy $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ thì ta sẽ có $0 < |x - 0| < \delta \implies \frac{1}{x^2} > M$.

Hình 2.1.9: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Tương tự,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty.$$

■

Ví dụ 2.1.30. Ta có thể kết hợp tất cả các loại giới hạn trên:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty.$$

■

Ví dụ 2.1.31. Tìm $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x^3 - 4x^2 - 5x + 6$.

Ta viết

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(2 - \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{6}{x^3} \right).$$

Trong hai thừa số trên, một thừa số tiến ra ∞ , còn thừa số còn lại tiến về 2, do đó tích rõ ràng tiến ra ∞ (chi tiết hơn có thể làm tương tự trong Ví dụ 1.1.37). Người ta thường tóm tắt lý luận này bằng cách viết

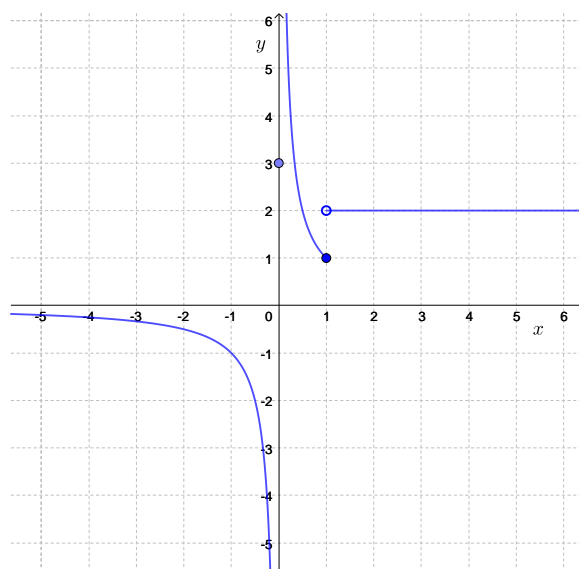
$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(2 - \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{6}{x^3} \right) = \infty \cdot 2 = \infty.$$

■

Bài tập

2.1.1. Cho đồ thị hàm trong Hình 2.1.10.

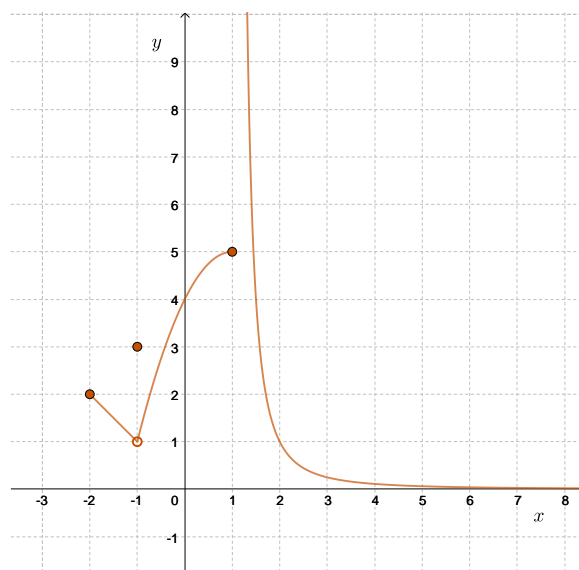
Hãy tìm các giới hạn của hàm, gồm cả giới hạn trái và giới hạn phải nếu có, tại:



Hình 2.1.10

- (a) 1. (b) 0. (c) $-\infty$. (d) ∞ .

2.1.2. Cho đồ thị của hàm trong Hình 2.1.11.



Hình 2.1.11

Hãy tìm các giới hạn của hàm, gồm cả giới hạn trái và giới hạn phải nếu có, tại:

- (a) -2. (b) -1. (c) 1. (d) $-\infty$. (e) ∞ .

2.1.3. Giả sử $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -3$, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 5$. Hãy tìm:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)]$. (c) $\lim_{x \rightarrow 1} [4f(x) + 3g(x)^2]$.
 (b) $\lim_{x \rightarrow 1} [-2f(x) + 3g(x)]$. (d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4x^2 f(x) g(x)^3}{1 - f(x)}$.

2.1.4. Hãy giải thích mệnh đề sau có nghĩa là gì?

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6} = \frac{3}{5}.$$

Mệnh đề này là đúng hay sai, tại sao?

2.1.5. Tính các giới hạn sau:

$$(a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(10+h)^2 - 100}{h}.$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{8x - x^3}.$$

$$(b) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{100+h} - 10}{h}.$$

$$(f) \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t\sqrt{1+t}} - \frac{1}{t} \right).$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow -2017} \frac{\frac{1}{2017} + \frac{1}{x}}{2017+x}.$$

$$(g) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}.$$

$$(d) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+t} - \sqrt{1-t}}{t}.$$

2.1.6. Sử dụng Định lý kẹp, hãy chỉ ra

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos 20\pi x = 0.$$

Hãy vẽ đồ thị để minh họa kết quả trên.

2.1.7. Sử dụng Định lý kẹp, hãy chỉ ra

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin \frac{\pi}{x} = 0.$$

Hãy vẽ đồ thị để minh họa kết quả trên.

2.1.8. Nếu $4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7$ với $x \geq 0$, tìm $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

2.1.9. Nếu $2x \leq g(x) \leq x^4 - x^2 + 2$ với mọi x , tìm $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

2.1.10. Chứng minh rằng

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \left[1 + \sin^2 \left(\frac{2\pi}{x} \right) \right] = 0.$$

2.1.11. Tìm giới hạn sau nếu tồn tại:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{|x^3 - x^2|}.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -7} \frac{7-|x|}{3x+21}.$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right).$$

2.1.12. Cho

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{nếu } x < 1 \\ 0 & \text{nếu } x = 1 \\ 2x - x^2 & \text{nếu } 1 < x \leq 2 \\ x^3 - 5x + 4 & \text{nếu } x > 2. \end{cases}$$

Tìm các giới hạn sau nếu tồn tại

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 2} g(x).$$

2.1.13. Có số a nào sao cho

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 2ax - a - 1}{x^3 - 3x - 2}$$

tồn tại không? Tìm giới hạn đó.

2.1.14. Cho $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x^2+x-2}$. Tìm:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.
- (b) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.
- (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2.1.15. Tìm:

- (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2+3x+7}{-3x^3+6x}$.
- (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^4+3x+7}{-3x^3+6x}$.
- (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^6-4x^4+10}{-2x^6-10x^3+2}$.

2.1.16. Chọn đáp án đúng.

(a) Giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow 1} 4x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

bằng

- A) 1 B) 2 C) 3 D) ∞

(b) Giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

bằng

- A) 5 B) $-\infty$ C) ∞ D) không tồn tại

(c) Giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 9x^4 - 8x^2 + 9x + 5$$

bằng

- A) 2 B) ∞ C) $-\infty$ D) không tồn tại

(d) Giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^4 - 9x^2 - 6x + 1}{8x^5 - 3x^3 + 7x^2 + 16}$$

bằng

- A) -3 B) $-\infty$ C) 0 D) không tồn tại

(e) Giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12x^4 - 4x^2 + 9x + 11}{2x^4 - 15x^2 + 71x + 60}$$

bằng

- A) 0 B) $-\infty$ C) 6 D) không tồn tại

2.1.17. Cho

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ là số hữu tỉ} \\ 0, & x \text{ là số vô tỉ.} \end{cases}$$

Tìm $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

2.1.18. Xét hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Chúng ta có $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Hãy vẽ đồ thị của hàm này (có thể dùng phần mềm máy tính), để thấy rằng trong trường hợp này mặc dù $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ nhưng không phải khi x gần 0 hơn thì $f(x)$ gần 0 hơn.

2.2 Hàm số liên tục

Khái niệm liên tục được dùng phổ biến trong đời sống. Một quá trình được coi là liên tục nếu một thay đổi nhỏ trong đầu vào chỉ dẫn tới một thay đổi nhỏ trong đầu ra. Nhiều quá trình thường được con người hình dung là có tính chất liên tục, như chuyển động của con người trong không gian theo thời gian, sự thay đổi cân nặng của mỗi người theo thời gian, sự thay đổi nhiệt độ trong ngày,

Định nghĩa 2.2.1. Hàm số f xác định trên tập D được gọi là **liên tục** tại $a \in D$ nếu $f(x)$ gần $f(a)$ tùy ý khi x đủ gần a .

Bằng kí hiệu thì:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

hay

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D \cap (a - \delta, a + \delta), f(x) \in (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon).$$

Hàm số f không liên tục tại a thì còn được gọi là **gián đoạn** tại a .

Hàm số f được gọi là liên tục trên tập D nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc D .

Có thể trình bày một cách tương đương sự liên tục thông qua giới hạn như sau:

Mệnh đề 2.2.2. Cho hàm số f xác định trên tập D và cho $a \in D$. Nếu a không phải là một điểm tụ của D thì f liên tục tại a . Nếu a là một điểm tụ của D thì f liên tục tại a khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Vậy **hàm liên tục tại một điểm tụ thì giới hạn của hàm tại điểm đó thu được bằng cách thế số vào**.

Xem lại phần giới hạn của hàm số sau Mệnh đề 2.1.11 ta suy ra rằng các hàm đa thức và phân thức đều liên tục.

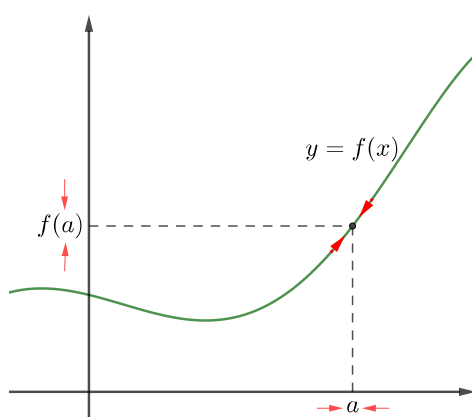
Ghi chú 2.2.3. Để hàm liên tục tại a thì a phải thuộc miền xác định của hàm, tức là hàm phải có giá trị tại a , mặt khác ta không cần phải yêu cầu a là một điểm tụ của miền xác định như trong định nghĩa giới hạn.

Trong nhiều trường hợp đơn giản phổ biến có thể diễn tả khái niệm liên tục một cách đơn giản hơn là: khi x gần tới a thì $f(x)$ gần tới $f(a)$. Nói cách khác, khi biến thiên $\Delta x = x - a$ của giá trị của biến x nhỏ đi thì biến thiên $\Delta y = f(x) - f(a)$ của

giá trị của hàm phải nhỏ đi theo. Thô sơ hơn nữa, liên tục có nghĩa là một thay đổi “nhỏ” của giá trị biến độc lập chỉ dẫn tới một thay đổi “nhỏ” của giá trị biến phụ thuộc. Đây là một tính chất tiện lợi cho nhiều ứng dụng khiến cho hàm liên tục được sử dụng phổ biến.

Chính xác hơn và tổng quát hơn, như trong định nghĩa ở đây, thì khái niệm liên tục có ý nghĩa là: *thay đổi giá trị của hàm là nhỏ tùy ý nếu thay đổi giá trị của biến là đủ nhỏ*, tức là Δy nhỏ tùy ý miễn Δx đủ nhỏ. Tính liên tục cho phép ta kiểm soát được sai số: ta có thể đảm bảo sai số của đầu ra nhỏ tùy ý bằng cách giữ cho sai số của đầu vào đủ nhỏ.

Ta có thể hình dung tính liên tục tại một điểm nghĩa là *đồ thị không có lỗ thủng* tại điểm đó. Xem Hình 2.2.1 và Hình 2.2.2.



Hình 2.2.1: Nếu f liên tục tại a thì khi x tiến về a thì điểm $(x, f(x))$ trên đồ thị tiến về điểm $(a, f(a))$, vì vậy không có lỗ thủng hay nét đứt trên đồ thị tại $x = a$.

Định nghĩa 2.2.1 yêu cầu ba điều sau để f liên tục tại một điểm a :

- (a) $f(a)$ tồn tại,
- (b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ tồn tại,
- (c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

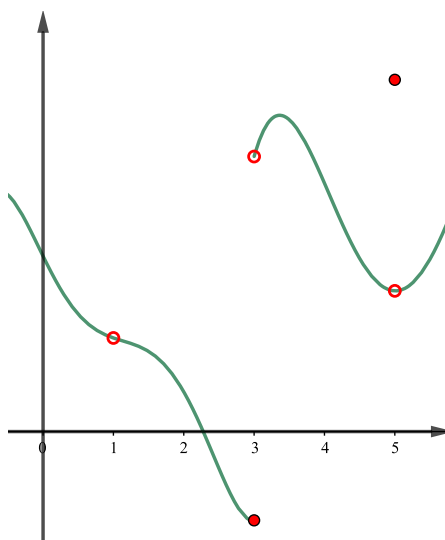
Như vậy một hàm số không liên tục tại a nếu nó vi phạm một trong các yêu cầu trên.

Ví dụ 2.2.4. Hình 2.2.2 là đồ thị hàm số f . Tìm điểm gián đoạn của hàm số f .

Hàm f gián đoạn tại điểm $x = 1$ vì tại $x = 1$ đồ thị bị thủng, $f(1)$ không được định nghĩa. Đồ thị cũng bị đứt tại điểm $x = 3$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ không tồn tại, nên f gián đoạn tại $x = 3$. Tại $x = 5$ thì đồ thị lại bị thủng, $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) \neq f(5)$, vì vậy $x = 5$ cũng là một điểm gián đoạn. ■

2.2.1 Tính chất của hàm số liên tục

Sau đây là một loạt các tính chất quan trọng cho hàm số liên tục.



Hình 2.2.2: Minh họa đồ thị của một hàm không liên tục (dấu tròn rỗng chỉ rằng điểm đó không thuộc vào đồ thị).

Mệnh đề 2.2.5. Nếu f và g có cùng miền xác định và cùng liên tục tại a thì các hàm số sau cũng liên tục tại a : $f + g$, $f - g$, fg , và $\frac{f}{g}$ nếu $g(a) \neq 0$.

Chứng minh. Các kết quả trên tới ngay từ đặc trưng sự liên tục qua giới hạn ở Mệnh đề 2.2.2 và các kết quả tương ứng về giới hạn ở Mệnh đề 2.1.11.

Ta chứng minh minh họa rằng $f + g$ liên tục tại a . Xét a là một điểm tụ của miền xác định của f và g . Theo Mệnh đề 2.2.2 ta có $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$. Theo Mệnh đề 2.1.11 thì $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = f(a) + g(a)$. Lại theo Mệnh đề 2.2.2 thì $f + g$ liên tục tại a . \square

Mệnh đề 2.2.6. Nếu g liên tục tại a và f liên tục tại $g(a)$ thì hàm hợp $f \circ g$ liên tục tại a .

Chứng minh. Cho $\epsilon > 0$. Vì f liên tục tại $g(a)$ nên có $\delta > 0$ sao cho nếu $|g(x) - g(a)| < \delta$ thì $|f(g(x)) - f(g(a))| < \epsilon$. Vì g liên tục tại a nên có $\delta' > 0$ sao cho nếu $|x - a| < \delta'$ thì $|g(x) - g(a)| < \delta$. Do đó nếu $|x - a| < \delta'$ thì $|f(g(x)) - f(g(a))| < \epsilon$, vậy $f \circ g$ liên tục tại a . \square

Ta đã biết các hàm đa thức và phân thức đều liên tục. Tổng quát hơn:

Định lý 2.2.7. Các hàm số sơ cấp đều liên tục trên tập xác định của chúng.

Như đã thảo luận ở Mục 1.2.2, ta chưa nghiên cứu đủ về hàm sơ cấp để có thể chứng minh kết quả trên, có thể đọc thêm ở [TPTT02, tr. 64], [Fic77, mục 63].

Ví dụ 2.2.8. Các hàm số $h(x) = \cos(x^2)$ và $k(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+5}-2}$ liên tục trên \mathbb{R} .

Hàm số $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ liên tục trên miền xác định là đoạn $[-1, 1]$. \blacksquare

Tính liên tục của các hàm sơ cấp dẫn tới *giới hạn các hàm sơ cấp thu được bằng cách thế số vào*.

Ví dụ 2.2.9. Tìm

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2 + x \sin x}{2018 + \cos x}.$$

Vì hàm số trên là một hàm sơ cấp nên

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2 + x \sin x}{2018 + \cos x} = \frac{\pi^2 + \pi \sin \pi}{2018 + \cos \pi} = \frac{\pi^2}{2017}.$$

■

Ví dụ 2.2.10. Cho

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{nếu } x \leq 1 \\ 2x - x^2, & \text{nếu } 1 < x < 2 \\ x^3 - 5x + 4, & \text{nếu } x \geq 2. \end{cases}$$

Tìm các điểm gián đoạn của hàm số. Trong các điểm gián đoạn, tại những điểm nào hàm số liên tục bên trái, bên phải hoặc không liên tục ở bên nào cả?

Đây là câu hỏi thường gặp về tính liên tục của hàm được định nghĩa từng khúc.

Tại mỗi điểm x_0 thuộc khoảng mở $(-\infty, 1)$ thì khi x trong miền xác định của f đủ gần x_0 ta luôn có $f(x) = x^2 - 1$, do đó tại x_0 tính liên tục của f trùng với tính liên tục của hàm $x^2 - 1$, một hàm sơ cấp nên liên tục. Lý luận này áp dụng được trên mỗi khoảng mở (khoảng không gồm đầu mút) của miền xác định.

Tại $x_0 = 1$ thì f được cho bởi các công thức khác nhau ở bên trái và bên phải của x_0 , do đó ta phải xét cả hai bên:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 1 = 1^2 - 1 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - x^2 = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1.$$

$$f(1) = 1^2 - 1 = 0.$$

Vậy tại $x_0 = 1$ thì f không liên tục.

Trên khoảng mở $(1, 2)$ hàm f là hàm sơ cấp nên liên tục.

Tại $x_0 = 2$ ta có

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x - x^2 = 2 \cdot 2 - 2^2 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^3 - 5x + 4 = 2^3 - 5 \cdot 2 + 4 = 2.$$

$$f(2) = 2^3 - 5 \cdot 2 + 4 = 2.$$

Vậy f không liên tục tại $x_0 = 2$.

Trên khoảng mở $(2, \infty)$ hàm f là hàm sơ cấp nên liên tục.

■

Dưới đây là một giới hạn đặc biệt, thường dùng:

Mệnh đề 2.2.11. *Ta có*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (2.2.1)$$

Chứng minh. Ở Mục 1.2.2, hàm lượng giác có tính chất với $0 < x < \pi/2$ thì $\sin x < x < \tan x$. Suy ra

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Vì \cos là hàm liên tục nên khi cho $x \rightarrow 0$, dùng Tính chất kẹp, ta được

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Với $x < 0$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(-x)}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Vậy ta được $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. \square

Liên quan tới đặc trưng giới hạn của hàm thông qua giới hạn của dãy ở Mệnh đề 2.1.18, và đặc trưng của sự liên tục qua giới hạn ở Mệnh đề 2.2.2, có thể đưa ra một đặc trưng của sự liên tục thông qua giới hạn của dãy như sau:

Mệnh đề 2.2.12. *Hàm số f là liên tục tại a khi và chỉ khi với mọi dãy $(x_n)_{n \geq 1}$ hội tụ về a thì dãy $(f(x_n))_{n \geq 1}$ hội tụ về $f(a)$, nói cách khác với mọi dãy $(x_n)_{n \geq 1}$ thì*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a).$$

Sách giáo khoa trung học lớp 11 [SGKTH] lấy mệnh đề này làm định nghĩa cho sự liên tục.

2.2.2 Định lý giá trị trung gian

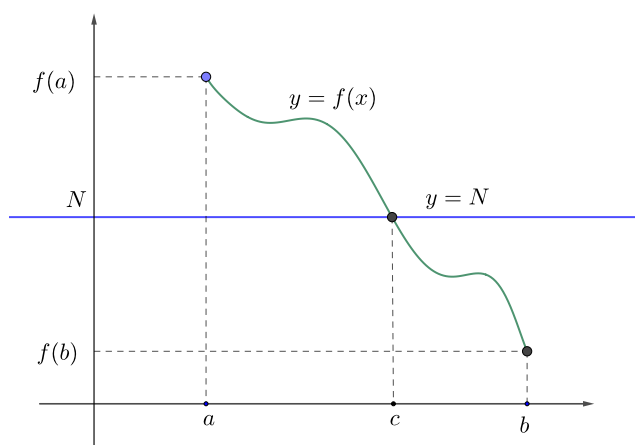
Trong đời sống ta thường nghĩ một chuyển động như của con người là liên tục theo thời gian. Chẳng hạn mọi người hẳn thấy hiển nhiên là đi từ trong nhà ra đường thì phải bước qua cửa. Cơ sở toán học của điều này chính là Định lý giá trị trung gian.

Định lý 2.2.13 (Định lý giá trị trung gian). *Giả sử f liên tục trên đoạn $[a, b]$ và N là một số bất kỳ nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$. Khi đó tồn tại một số $c \in [a, b]$ sao cho $f(c) = N$.*

Một cách ngắn gọn, một hàm số liên tục trên một đoạn lấy mọi giá trị trung gian. Tập giá trị của một hàm liên tục trên một đoạn số thực là một đoạn số thực.

Về mặt trực quan, Định lý giá trị trung gian có ý nghĩa rằng **đồ thị của một hàm liên tục trên một đoạn là liên thông**. Điều này thể hiện rằng đồ thị không có lỗ trống hay nét đứt. Đồ thị đó chẳng qua là một đoạn số thực được uốn cong. Có

thể tưởng tượng vẽ được đồ thị này mà không cần nhắc bút khỏi trang giấy. Cũng có thể tưởng tượng đồ thị này là một con đường mà ta có thể đi từ đầu này tới đầu kia không gặp một trở ngại nào.



Hình 2.2.3: Đường nằm ngang $y = N$ luôn cắt đồ thị hàm số f ở ít nhất một điểm.

Định lý có thể được chứng minh dùng tính đầy đủ của tập hợp các số thực, Mệnh đề 1.1.14. Từ Hình 2.2.3 ta dự đoán có thể lấy số thực c là chặn dưới lớn nhất của tập hợp các số thực x trong đoạn $[a, b]$ sao cho $f(x) \leq N$. Chi tiết có trong các tài liệu như [TPTT02, tr. 59], [Fic77, mục 68], [Apo67, tr. 143], [Wu20, tr. 305].

Ghi chú 2.2.14. Nhắc lại ta dùng từ “đoạn” cho khoảng đóng của số thực, gồm cả hai đầu mút, có dạng $[a, b]$. Tính liên tục của hàm f trên đoạn $[a, b]$ được hiểu là hàm f với miền xác định thu hẹp xuống đoạn $[a, b]$ là một hàm liên tục. Điều này còn có thể được diễn đạt là f liên tục tại các điểm trong khoảng mở (a, b) và liên tục phải tại a và liên tục trái tại b .

Ví dụ 2.2.15. Chứng tỏ rằng phương trình

$$3x^3 - 2017x^2 + 2018x - 2 = 0$$

có một nghiệm nằm giữa 0 và 1.

Đặt $f(x) = 3x^3 - 2017x^2 + 2018x - 2$. Ta có $f(0) = -2 < 0$ và $f(1) = 2 > 0$. Vì f là một hàm số liên tục và $f(0) < 0 < f(1)$ nên Định lý giá trị trung gian khẳng định có một số $c \in (0, 1)$ sao cho $f(c) = 0$.

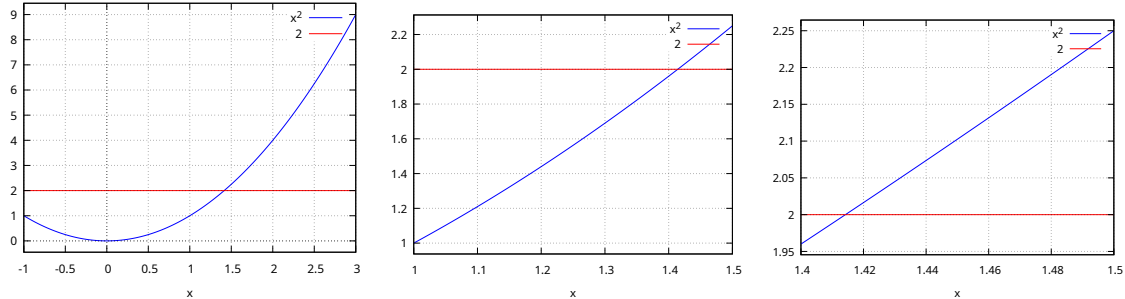
Ta có thể vẽ đồ thị của hàm để dự đoán và minh họa cho tính toán trên. ■

Ví dụ 2.2.16 (Sự tồn tại căn bậc hai). Ta chứng tỏ mọi số thực không âm đều có căn bậc hai, tức là với mọi số thực $y \geq 0$ có số thực c sao cho $c^2 = y$. Điều này ở trung học thường được giả sử.

Nếu $y = 0$ thì $0^2 = 0$. Xét $y > 0$. Đặt $f(x) = x^2$, một hàm liên tục. Ta có $f(0) = 0 < y$. Lấy một số thực $a > y$ và $a > 1$, thì $f(a) = a^2 > y \cdot 1 = y$. Theo Định lý giá trị trung gian phải có số thực c giữa 0 và a sao cho $f(c) = y$. ■

Định lý giá trị trung gian không chỉ giúp khẳng định sự tồn tại nghiệm mà còn có thể được dùng để tìm nghiệm. Bằng cách thu nhỏ khoảng chắc chắn chứa nghiệm, phóng to hơn hình vẽ đồ thị, ta có thể đưa ra giá trị gần đúng của nghiệm.

Ví dụ 2.2.17. Ta có thể tìm giá trị gần đúng chính xác hơn của $\sqrt{2}$ như sau.

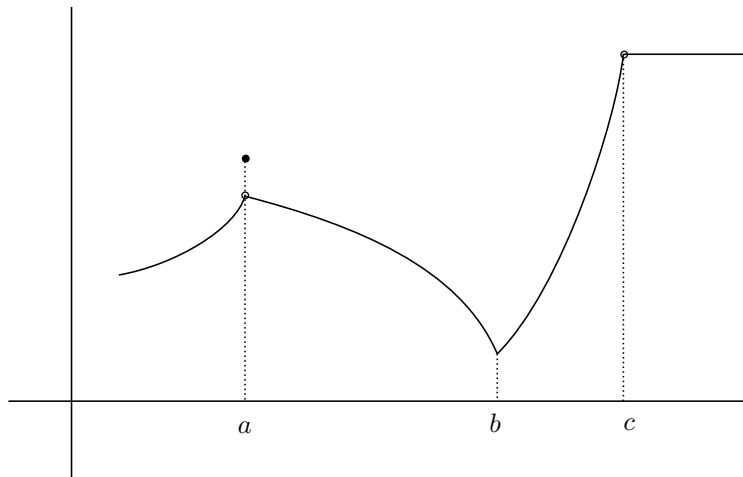


Hình 2.2.4: Tìm giá trị chính xác hơn của $\sqrt{2}$ bằng Định lý giá trị trung gian.

Ở Hình 2.2.4, lần lượt phóng to vào điểm giao của đồ thị $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2$, ta có thể xác định nghiệm của phương trình $x^2 = 2$, tức là $\sqrt{2}$, do Định lý giá trị trung gian, phải lần lượt nằm trong các đoạn $[1, 1.5]$, $[1.4, 1.5]$, $[1.4, 1.42]$, ■

Bài tập

2.2.1. Từ đồ thị của hàm trong hình, tìm điểm tại đó hàm không liên tục và giải thích tại sao.



Hình 2.2.5

(a) Hình 2.1.10 trang 45.

(d) Hình 2.2.6.

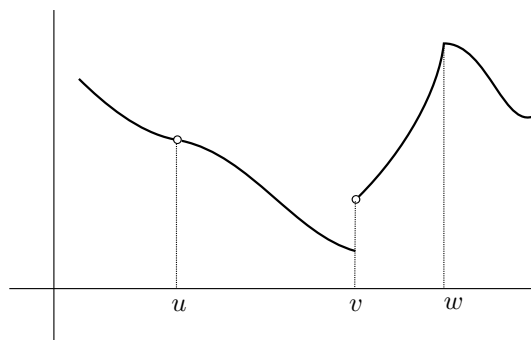
(b) Hình 2.1.11 trang 45.

(c) Hình 2.2.5.

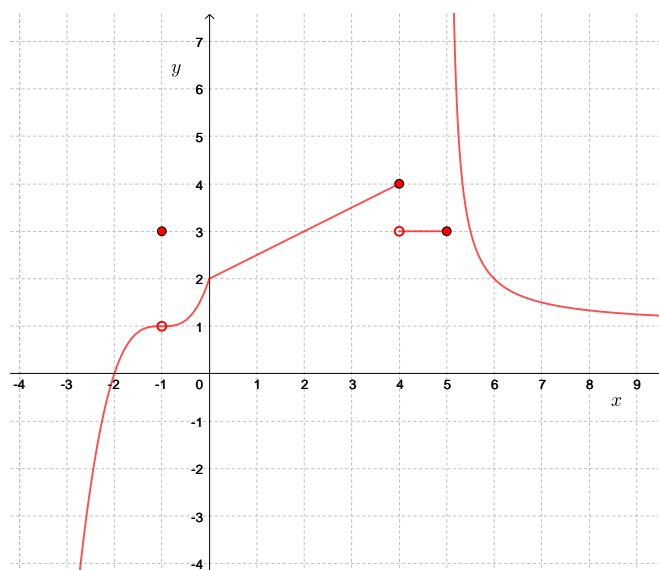
(e) Hình 2.2.7.

2.2.2. Cho

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{nếu } x \leq -1 \\ x^3 - 1 & \text{nếu } x > -1. \end{cases}$$



Hình 2.2.6



Hình 2.2.7

- (a) Tìm $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ and $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.
 (b) Hàm $f(x)$ liên tục ở đâu? Không liên tục ở đâu?

2.2.3. Xét tính liên tục của hàm tại điểm a cho trước.

(a)

$$f(x) = \frac{1}{x + 2017}, a = -2017.$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2017} & \text{nếu } x \neq -2017 \\ 2018 & \text{nếu } x = -2017, \end{cases} \quad a = -2.$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 2 & \text{nếu } x < 1 \\ 2 - \frac{1}{x} & \text{nếu } x \geq 1, \end{cases} \quad a = 1.$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x}{x^4 - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{nếu } x = 1, \end{cases} \quad a = 1.$$

(e)

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x^2 - x) & \text{nếu } x < 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ -(x+1)^3 - x^2 + 2 & \text{nếu } x > 0, \end{cases} \quad a = 0.$$

(f)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x-4}{\sqrt{x}-2} & \text{nếu } x \neq 4 \\ 10 & \text{nếu } x = 4, \end{cases} \quad a = 4.$$

2.2.4. Xét sự liên tục của các hàm số sau:

(a)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{nếu } x < 1 \\ \sqrt{x+3} & \text{nếu } x \geq 1. \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{x}{2} + \cos x) & \text{nếu } x < \pi/2 \\ \cos(\frac{x}{2} + \sin x - 1) & \text{nếu } x \geq \pi/2. \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = |2x - 1|.$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(e)

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

2.2.5. Cho

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x+1} & \text{nếu } x < -1 \\ 3 & \text{nếu } x \geq -1. \end{cases}$$

(a) Tìm $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.(b) Hàm f liên tục ở đâu?**2.2.6.** Cho

$$f(x) = \begin{cases} 3^x & \text{nếu } x \leq -1 \\ 3 - x & \text{nếu } 1 \leq x \leq 4 \\ \sqrt{x} & \text{nếu } x > 4. \end{cases}$$

Tìm các điểm gián đoạn của hàm số.

2.2.7. Ký hiệu $[t]$ là số nguyên lớn nhất không lớn hơn số thực t , gọi là *phần nguyên* của t . Xét hàm số f cho bởi $f(x) = [2 \cos x]$. Hãy phác họa đồ thị của f trên đoạn $[-\frac{2\pi}{3}, 2\pi]$ và cho biết hàm f gián đoạn tại những điểm nào.

2.2.8. Tính các giới hạn sau:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{5 + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{7 + x}}.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \pi} \sin(x + \sin x).$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \pi/4} e^x \cos^2 x - x^2.$$

(d) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 4x + 1)^{-7}$.

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x}$.

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{3x}$.

2.2.9. Giả sử f và g là các hàm số liên tục sao cho $g(1) = 2017$ và $\lim_{x \rightarrow 1} [f^2(x) - 2f(x)g(x)] = -2017^2$. Tính $f(1)$.

2.2.10. Tìm giá trị của c sao cho hàm số sau liên tục trên $(-\infty, \infty)$:

$$f(x) = \begin{cases} c^2x^2 + 2cx & \text{nếu } x < 1 \\ 4x^3 - cx & \text{nếu } x \geq 1. \end{cases}$$

2.2.11. Tìm giá trị của a, b sao cho hàm số sau liên tục trên $(-\infty, \infty)$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4-1}{x-1} & \text{nếu } x < 1 \\ ax^2 - bx + 4 & \text{nếu } 1 \leq x < 2 \\ 3x + a - b & \text{nếu } x \geq 2. \end{cases}$$

Định lý giá trị trung gian

2.2.12. Lúc 15 tuổi, Hương cao gấp đôi cậu em 5 tuổi Huy, nhưng vào sinh nhật thứ 21 của Huy thì Huy đã cao hơn chị 6 cm. Giải thích tại sao có một thời điểm mà cả hai đã cao bằng nhau.

2.2.13. Tốc độ quang hợp của của một cây được tính bằng lượng CO_2 hấp thụ trên một đơn vị diện tích bề mặt lá cây trong một đơn vị thời gian. Có thể giả sử tốc độ quang hợp thay đổi theo các thời điểm trong một ngày một cách liên tục ([BLG14, tr. 346]). Dữ liệu đo đạc cho thấy lúc nửa đêm tốc độ quang hợp bằng -30 (cây thải ra CO_2), còn lúc 12 giờ trưa tốc độ quang hợp bằng 18. Liệu ta có thể khẳng định có một thời điểm trong buổi sáng mà tốc độ quang hợp đúng bằng 10 hay không?

2.2.14. Hãy dùng máy tính vẽ đồ thị của các hàm sau (có phần Hướng dẫn ở trang 197) để dự đoán khoảng chứa nghiệm, sau đó sử dụng Định lý giá trị trung gian để chỉ ra sự tồn tại một nghiệm. Hơn nữa, hãy thu nhỏ khoảng chứa nghiệm để đưa ra một giá trị gần đúng của nghiệm.

(a) $2x^5 + x - 2 = 0$.

(d) $x^3 - 3x - \sin x - 1 = 0$.

(b) $\sqrt[3]{x} = 2017 - x - x^2$.

(c) $\cos x = x$.

(e) $-x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$.

2.2.15. (a) Phác họa đồ thị của hàm $y = x^2 - 1$ và hàm $y = x^3 + 2$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

(b) Chứng tỏ hai đồ thị có ít nhất một giao điểm.

2.2.16. Chứng tỏ phương trình $x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $[0, 1]$.

2.2.17. Chứng minh phương trình $\ln x = e^{-x}$ có ít nhất một nghiệm thực.

2.2.18. Cho $f(x) = x^3 + 2017 \cos x$, chứng minh rằng tồn tại số c sao cho $f(c) = 2000$.

2.2.19. Giả sử f liên tục trên $[1, 10]$ và phương trình $f(x) = 2017$ chỉ có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = 7$. Nếu $f(2) = 2018$, giải thích vì sao $f(5) > 2017$.

2.2.20. Chứng minh các phương trình sau luôn có nghiệm thực với n là số nguyên dương lẻ.

(a) $\cos(x^n + 1) = x^n + 1$.

(b) $x^n - x^2 + 4x + 1 = 0$.

2.2.21. Nếu a và b là các số thực dương, chứng minh phương trình

$$\frac{a}{x^5 + 3x^4 - 2} + \frac{b}{2x^5 + x - 3} = 0$$

có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-1, 1)$.

2.2.22. Chứng tỏ phương trình

$$\frac{1}{1-x} + \frac{2}{2-x} + \frac{3}{3-x} = 0$$

có ít nhất hai nghiệm trên $(1, 2) \cup (2, 3)$.

2.2.23. Chứng tỏ mọi số thực đều có căn bậc 3.

2.2.24. Chứng tỏ mọi số thực đều có căn bậc lẻ, và mọi số thực không âm đều có căn bậc chẵn.

2.2.25. * Chứng tỏ mọi đa thức bậc lẻ đều có ít nhất một nghiệm.

Chương 3

Phép tính vi phân

3.1 Đạo hàm

3.1.1 Định nghĩa đạo hàm

Ở Mục 2.1.1 của chương trước, cả hai bài toán tìm hệ số góc của tiếp tuyến và tìm vận tốc tức thời đều đưa về một bài toán chung về tỉ lệ thay đổi: Tìm giới hạn của đại lượng

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

khi x tiến về a . Số thực này phản ánh đại lượng $f(x)$ thay đổi như thế nào khi x thay đổi.

Để giúp người đọc củng cố, một lần nữa ta nhắc lại minh họa của khái niệm này trong bài toán tìm độ nghiêng và tiếp tuyến của đồ thị hàm f tại điểm x_0 . Xem Hình 3.1.1. Ta lấy một dãy các số nhỏ h_n hội tụ về 0 và từ đó có các cát tuyến l_n đi qua hai điểm khác nhau $(x_0, f(x_0))$ và $(x_0 + h_n, f(x_0 + h_n))$ trên đồ thị hàm f . Các cát tuyến này tiến dần về tiếp tuyến với đồ thị hàm số f tại $(x_0, f(x_0))$ nên hệ số góc của chúng cũng tiến dần về hệ số góc của tiếp tuyến. Hệ số góc của l_n là

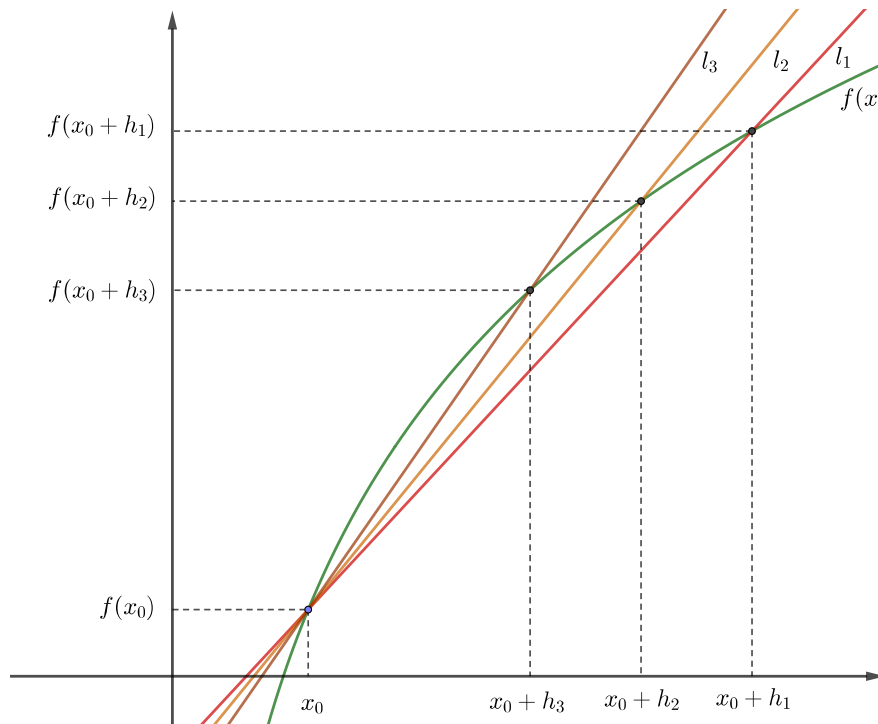
$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{(x_0 + h_n) - x_0} = \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}.$$

Vì thế hệ số góc của tiếp tuyến là giới hạn của số này khi h_n tiến dần về 0.

Định nghĩa 3.1.1. Cho hàm số f xác định trên một khoảng mở chứa điểm x_0 . **Đạo hàm** của f tại x_0 là số thực

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

nếu giới hạn này tồn tại. Khi giới hạn này tồn tại ta nói hàm f **có đạo hàm** hay **khả vi** tại x_0 với đạo hàm $f'(x_0)$.



Hình 3.1.1: Bài toán hệ số góc của tiếp tuyến.

Ta cũng có thể viết với $h = x - x_0$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Có một cách viết khác nữa như sau. Nếu biến x thay đổi một lượng $\Delta x = x - x_0$ ¹ thì lượng thay đổi tương ứng của giá trị của hàm $y = f(x)$ là $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Đạo hàm của f tại x_0 là tỉ lệ của thay đổi của y so với thay đổi của x tại x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Vậy đạo hàm của một hàm tại một điểm đo tỉ lệ giữa thay đổi của giá trị của hàm so với thay đổi của giá trị của biến tại điểm đó. Một cách ngắn gọn: **đạo hàm đo tỉ lệ thay đổi**, hay **đạo hàm đo tốc độ biến thiên**.

Vì đạo hàm đo sự thay đổi nên nó thường được dùng mỗi khi người ta cần khảo sát sự thay đổi ở mức độ chính xác cao. Điều này giải thích phạm vi ứng dụng và tầm quan trọng to lớn của đạo hàm nói riêng và phép tính vi tích phân nói chung. Khái niệm đạo hàm và vi phân và các ứng dụng được xây dựng và phát triển từ giữa thế kỉ 17, là một cơ sở cho những tiến bộ khoa học kỹ thuật và xã hội vượt bậc ngay sau đó.

Với khái niệm chính xác về đạo hàm, giờ ta có thể định nghĩa chính xác các khái niệm tiếp tuyến và vận tốc.

¹chữ cái Hy Lạp Δ (đọc là delta) thường được dùng để chỉ lượng thay đổi

Giả sử hàm f khả vi tại x_0 , ta định nghĩa **hệ số góc của tiếp tuyến** của đồ thị của hàm số f tại $(x_0, f(x_0))$ là số thực $f'(x_0)$. Vậy đường thẳng tiếp tuyến của đồ thị của hàm f tại x_0 có phương trình

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Nếu $f(t)$ là vị trí của vật trên đường thẳng thực tại thời điểm t và hàm f khả vi tại t thì số thực $f'(t)$, như trong vật lý, được gọi là **vận tốc** của vật tại thời điểm t .

Ví dụ 3.1.2. Cho hàm số f định bởi $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$ với mọi số thực x . Cho hai điểm $P = (1, 1)$ và $Q = (1+h, f(1+h))$, với $h \neq 0$, thuộc đồ thị của f .

Hệ số góc của cát tuyến PQ bằng

$$\frac{f(1+h) - 1}{(1+h) - 1} = \frac{\frac{2}{(1+h)^2+1} - 1}{h} = \frac{-2h - h^2}{((1+h)^2 + 1)h} = \frac{-2 - h}{(1+h)^2 + 1}.$$

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị tại P là giới hạn của hệ số góc của cát tuyến PQ khi Q tiến về P , bằng đạo hàm của f tại 1:

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - 1}{(1+h) - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 - h}{(1+h)^2 + 1} = \frac{-2 - 0}{(1+0)^2 + 1} = -1.$$

■

Ví dụ 3.1.3. Cho f là một hàm hằng, tức là có số thực c sao cho $f(x) = c$ với mọi số thực x . Tìm đạo hàm của f .

Theo định nghĩa của đạo hàm, ta có tại x_0 bất kì:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

Vậy $f'(x_0) = 0$ tại mọi $x_0 \in \mathbb{R}$.

Việc đạo hàm của hàm hằng phải bằng 0 hoàn toàn phù hợp với ý nghĩa của đạo hàm về mặt định lượng (nếu giá trị hàm không đổi thì tỉ lệ thay đổi bằng 0), hình học (tiếp tuyến của đường thẳng nằm ngang thì nằm ngang), hay vật lý (vật cố định thì vận tốc bằng 0). ■

Ví dụ 3.1.4. Dùng định nghĩa đạo hàm để tính đạo hàm của $f(x) = x$ tại điểm $x = x_0$.

Ta có

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0+h) - x_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Vậy $f'(x_0) = 1$ với x_0 tùy ý.

Giải thích hình học, đồ thị của hàm $f(x) = x$ là một đường thẳng, nên tiếp tuyến tại mọi điểm là chính đường thẳng này, với hệ số góc bằng 1.

Giải thích vật lý, $f(x) = x$ miêu tả một chuyển động đều, khi x tăng 1 thì $f(x)$ tăng 1, nên có vận tốc bằng 1. ■

Ví dụ 3.1.5. Dùng định nghĩa đạo hàm để tính đạo hàm của $f(x) = x^2$ tại điểm $x = x_0$.

Ta có

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x_0h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = 2x_0.$$

Vậy $f'(x_0) = 2x_0$ với mọi x_0 . ■

Ví dụ 3.1.6. Với số nguyên dương k , tính đạo hàm của hàm $f(x) = x^k$ tại $x = x_0$.

Dùng hằng đẳng thức cho các số thực a, b và số nguyên dương n :

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

ta viết

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \frac{(x_0 + h)^k - x_0^k}{h} \\ &= \frac{(x_0 + h - x_0)((x_0 + h)^{k-1} + (x_0 + h)^{k-2}x_0 + \cdots + (x_0 + h)x_0^{k-2} + x_0^{k-1})}{h} \\ &= (x_0 + h)^{k-1} + (x_0 + h)^{k-2}x_0 + \cdots + (x_0 + h)x_0^{k-2} + x_0^{k-1}. \end{aligned}$$

Từ đó,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = kx_0^{k-1}.$$

Vậy hàm số $f(x) = x^k$ có đạo hàm là $f'(x_0) = kx_0^{k-1}$.

Cũng tính bằng cách dùng Công thức nhị thức Newton (1.1.11). ■

Ví dụ 3.1.7. Tính đạo hàm của $f(x) = \sqrt{x}$.

Ta tính

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Chúng ta thấy rằng giới hạn trên tồn tại nếu và chỉ nếu $x > 0$, vậy $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ xác định với mọi $x > 0$. ■

Sau các ví dụ ta có thể thấy để viết công thức chung cho đạo hàm thì dùng công thức sau thường tiện hơn

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.1.1)$$

vì ta không cần phải giới thiệu thêm một biến mới x_0 . Ngoài ra công thức này cũng thể hiện rõ vai trò của đạo hàm như là một hàm mới, dẫn xuất từ hàm ban đầu ¹.

Ghi chú 3.1.8. Trong định nghĩa đạo hàm tại một điểm x_0 , để thuận tiện ta yêu cầu điểm x_0 phải có một khoảng mở chứa nó nằm trong miền xác định của hàm. Mặc dù vậy, theo định nghĩa của giới hạn, để xét giới hạn trong định nghĩa đạo hàm thì giả thiết x_0 là một điểm tụ của miền xác định là đủ. Đôi khi yêu cầu ít hơn này được sử dụng, chẳng hạn nếu hàm xác định trên đoạn $[a, b]$ thì ta có thể định nghĩa **đạo hàm bên phải** tại a (chỉ xét giới hạn bên phải) và **đạo hàm bên trái** tại b (chỉ xét giới hạn bên trái).

Liên hệ giữa khả vi và liên tục

Ta nói hàm số f là **khả vi** (có vi phân) tại x nếu f có đạo hàm tại x . Như vậy **khả vi nghĩa là có đạo hàm**.

Ta có thể đoán rằng để f khả vi tại x , tức là để $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ có giới hạn khi h tiến về 0, thì $f(x+h) - f(x)$ phải tiến về 0, do đó hàm f phải liên tục tại x . Thực vậy, ta có:

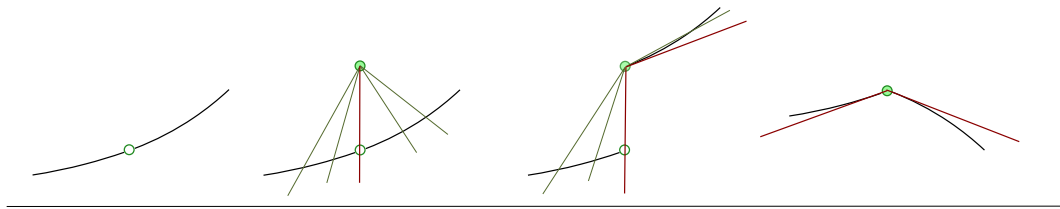
Định lý 3.1.9 (Khả vi thì liên tục). Nếu hàm số f khả vi tại x thì f liên tục tại x .

Chứng minh. Nếu f có đạo hàm tại x thì

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) - f(x)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} h \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h \\ &= f'(x) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Vậy $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$, nên f liên tục tại x . □

Mệnh đề phản đảo, tương đương, là **không liên tục thì không khả vi**. Xem minh họa ở Hình 3.1.2.



Hình 3.1.2: Các trường hợp đồ thị của hàm số không khả vi: không liên tục (đồ thị có lỗ thủng) hoặc liên tục nhưng không khả vi (đồ thị có góc). Trong các trường hợp này không tồn tại tiếp tuyến (kể cả trường hợp đường cắt tuyến dần tới một đường thẳng đứng).

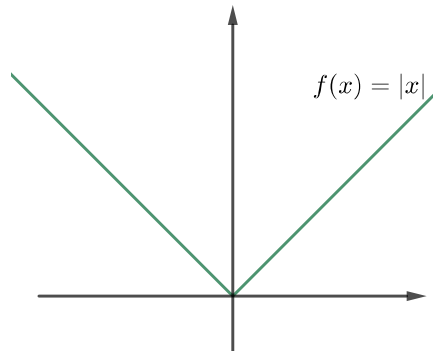
¹Từ “đạo hàm” có thể có nghĩa sơ lược là đường hướng của hàm, có lẽ bắt nguồn từ thuật ngữ ban đầu mà Newton đưa ra là fluxion. Ngày nay thuật ngữ đạo hàm trong tiếng Anh là derivative, có nghĩa là dẫn xuất, từ một cái khác mà ra.

Như ta biết về mặt hình học sự khả vi tại một điểm của hàm số có nghĩa là đồ thị của hàm số đó có tiếp tuyến tại điểm này. Đồ thị của hàm khả vi không được có những “góc nhọn” mà ở đó tiếp tuyến ở bên trái và tiếp tuyến ở bên phải khác nhau.

Về ý nghĩa vật lý, một chuyển động không liên tục thì không thể bàn tới vận tốc.

Quan sát trên cũng chỉ ra là *liên tục không dẫn tới khả vi*.

Ví dụ 3.1.10. Xét hàm số $f(x) = |x|$.



Hình 3.1.3: Đồ thị của hàm $f(x) = |x|$ có góc nhọn tại 0 nên liên tục mà không khả vi tại 0.

Ta thấy đồ thị của hàm số này, Hình 3.1.3, không có lỗ và không đứt, nên hàm này liên tục tại mọi nơi. Tuy nhiên đồ thị này có một góc nhọn tại $(0, 0)$. Ta nhận thấy tại $(0, 0)$ tiếp tuyến bên trái khác với tiếp tuyến bên phải, do đó không có một tiếp tuyến nào ở đó.

Chính xác thì

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

không tồn tại, như ta đã thấy ở Ví dụ 2.1.24. Vậy hàm trị tuyệt đối không có đạo hàm tại 0 mặc dù liên tục tại đó. ■

3.1.2 Tính chất của đạo hàm

Sau đây là các công thức để làm các tính toán cơ bản trên đạo hàm.

Định lý 3.1.11. Cho các hàm số f và g có đạo hàm tại x , khi đó trong các công thức sau hàm bên vế trái có đạo hàm và đạo hàm bằng vế phải:

$$(a) (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

$$(b) (f - g)'(x) = f'(x) - g'(x).$$

$$(c) (\alpha f)'(x) = \alpha f'(x) \text{ trong đó } \alpha \text{ là một hằng số thực.}$$

$$(d) (fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x).$$

$$(e) \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}.$$

Chứng minh. (a) Ta viết

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x).\end{aligned}$$

Quy tắc cho hiệu và quy tắc cho bội cũng tương tự.

(d) Với quy tắc cho tích, ta tính toán như sau:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= f(x)g'(x) + g(x)f'(x).\end{aligned}$$

Chú ý rằng ở bước cuối ta đã dùng $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$, tức là dùng tính liên tục của f tại x . Ta có tính liên tục này là vì f được giả sử là khả vi tại x .

(e) Với quy tắc cho thương, ta tính toán như sau:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g} \right)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)} \\ &= \frac{g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h)g(x)} \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.\end{aligned}$$

□

Ví dụ 3.1.12. Bây giờ ta có thể tính nhiều đạo hàm một cách dễ dàng bằng các quy tắc trên kí hiệu.

(a)

$$\begin{aligned}
 (x^7 + 3x^6 - 4x^2 + 5)' &= (x^7)' + (3x^6)' - (4x^2)' + 5' \\
 &= (x^7)' + 3(x^6)' - 4(x^2)' + 5' \\
 &= 7x^6 + 18x^5 - 8x.
 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 ((x^2 + 3x - 1)(x^4 - 8x))' &= (x^2 + 3x - 1)'(x^4 - 8x) + (x^2 + 3x - 1)(x^4 - 8x)' \\
 &= (2x + 3)(x^4 - 8x) + (x^2 + 3x - 1)(4x^3 - 8) \\
 &= 6x^5 + 15x^4 - 4x^3 - 24x^2 - 48x + 8.
 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)' &= \frac{(x^2 - 1)'(x^2 + 1) - (x^2 - 1)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} \\
 &= \frac{(2x)(x^2 + 1) - (x^2 - 1)(2x)}{(x^2 + 1)^2} \\
 &= \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}.
 \end{aligned}$$

■

Bài tập

3.1.1. Bằng ý nghĩa hình học của đạo hàm, hãy giải thích vì sao đạo hàm của hàm số hằng bằng 0, và đạo hàm của hàm số $f(x) = mx + b$ bằng m .

3.1.2. Cho hàm số f định bởi với mọi số thực x , $f(x) = x^2 + x$. Cho hai điểm $P = (1, 2)$ và $Q = (1 + h, f(1 + h))$, với $h \neq 0$ thuộc đồ thị của f .

(a) Tính theo h hệ số góc (độ dốc) của cát tuyến PQ của đồ thị hàm số f .

(b) Sử dụng định nghĩa, tính hệ số góc của tiếp tuyến tại P của đồ thị hàm số f .

3.1.3. Hãy giải thích ý nghĩa của $f'(500) = 5$, nếu:

(a) $f(t)$ là vị trí của một chiếc xe (theo mét) tại thời điểm t (theo giây).

(b) $f(x)$ là lợi nhuận (theo triệu đồng) khi lượng bán được là x (theo nghìn đơn vị sản phẩm).

3.1.4. Từ đồ thị của hàm trong hình tìm điểm tại đó hàm không khả vi, và giải thích tại sao.

(a) Hình 2.1.10 trang 45.

(e) Hình 2.2.7 trang 55.

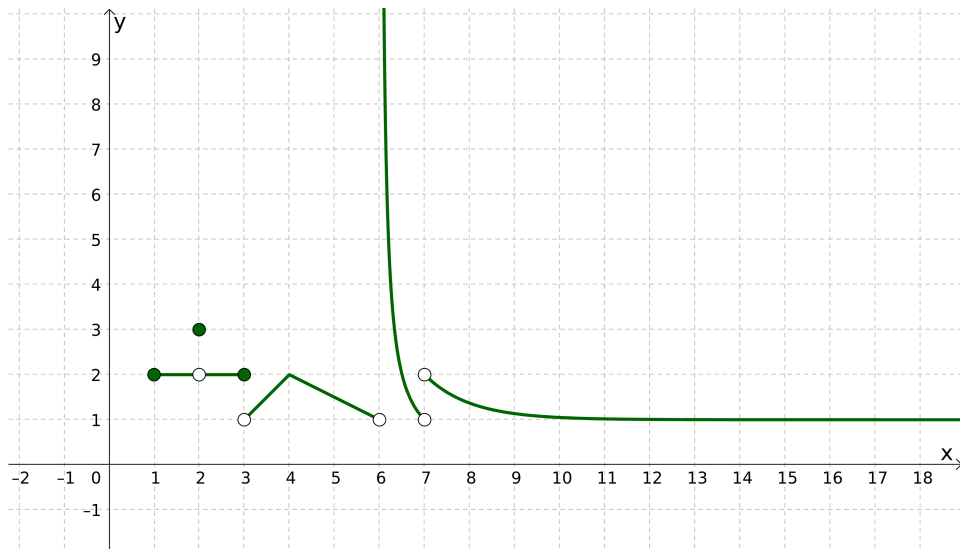
(b) Hình 2.1.11 trang 45.

(f) Hình 3.1.4.

(c) Hình 2.2.5 trang 54.

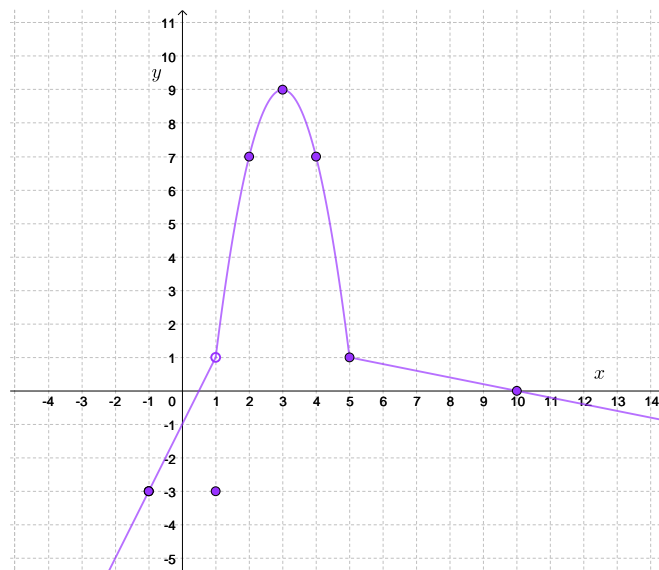
(g) Hình 3.1.5.

(d) Hình 2.2.6 trang 55.



Hình 3.1.4

3.1.5. Cho đồ thị của hàm f trong Hình 3.1.5. Tại các điểm đã đánh dấu trên đồ thị, hãy ước lượng $f'(x)$.



Hình 3.1.5

3.1.6. Hãy phác họa đồ thị của mỗi hàm số sau đây, và khảo sát tính liên tục hay khả vi của mỗi hàm.

$$(a) \ y = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x^2, & x < 0. \end{cases}$$

$$(c) \ y = \begin{cases} x^3, & x \leq 1, \\ x, & x > 1. \end{cases}$$

$$(b) \ y = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0, \\ -x^2 - 1, & x < 0. \end{cases}$$

$$(d) \ y = \begin{cases} x^3, & x < 1 \\ 3x - 2, & x \geq 1. \end{cases}$$

3.1.7. Dùng định nghĩa của đạo hàm, tính đạo hàm của hàm số

(a) $f(x) = x^3$.

(c) $f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$.

(b) $f(x) = x^4$.

(d) $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$.

3.1.8. Xét $f(x) = \sqrt{x}$. Chứng tỏ rằng $f'(0)$ không tồn tại. Hãy vẽ đồ thị để minh họa.

3.1.9. Xét $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Chứng tỏ rằng $f'(0)$ không tồn tại. Hãy vẽ đồ thị để minh họa.

3.1.10. Xét $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Chứng tỏ rằng $f'(0)$ không tồn tại. Hãy vẽ đồ thị để minh họa.

3.1.11. Hàm $f(x) = \sqrt[5]{x}$ có khả vi tại $x = 0$ hay không? Hãy vẽ đồ thị để minh họa.

3.1.12. Chứng tỏ rằng hàm số $f(x) = |x - 6|$ liên tục tại mọi nơi nhưng không khả vi tại $x = 6$. Hãy phác họa đồ thị của hàm số này.

3.1.13. Cho

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x-2}{x-3}, & 0 < x < 3 \\ \frac{x}{2}, & x \geq 3. \end{cases}$$

Hàm này khả vi tại đâu?

3.2 Các công thức cho đạo hàm

3.2.1 Đạo hàm của hàm hợp

Giả sử ta muốn tính đạo hàm của hàm $y = (x^2 + 1)^{100}$. Ta có thể khai triển hàm này thành dạng một đa thức rồi áp dụng các công thức đạo hàm, nhưng công thức sẽ rất dài dòng vì số mũ quá lớn. Ta có một cách tiếp cận khác dùng khái niệm hàm hợp như sau. Ta đặt $u = x^2 + 1$, thì $y = u^{100}$. Ta biết cách tính đạo hàm của u theo x và đạo hàm của y theo u . Liệu ta có tính được đạo hàm của hàm hợp y theo x ?

Ta có một lý luận đơn giản như sau. Viết đẳng thức của các số thực về tỉ lệ các lượng thay đổi,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Vì u khả vi theo x thì u liên tục theo x , nên khi $\Delta x \rightarrow 0$ thì $\Delta u \rightarrow 0$, do đó lấy giới hạn hai vế của đẳng thức trên khi $\Delta x \rightarrow 0$ ta được ngay

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \quad (3.2.1)$$

Đây là công thức cho đạo hàm của hàm hợp¹, còn có thể xem là công thức tính đạo hàm qua phép đổi biến.

Đặt $y = f(u)$, $u = g(x)$, thì Công thức 3.2.1 trở thành

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x).$$

Đây là một công thức thường dùng, được phát biểu chính xác như sau:

¹còn được gọi là quy tắc xích, trong tiếng Anh là chain rule

Định lý 3.2.1 (Đạo hàm của hàm hợp). Nếu hàm số g khả vi tại x và hàm số f khả vi tại $g(x)$ thì hàm hợp $f \circ g$ khả vi tại x và

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Chứng minh. Lý luận đơn giản rút ra Công thức (3.2.1) ở trên không thực hiện được nếu $\Delta u = 0$ vì chia cho 0, vì vậy ta chỉnh một chút tránh phép chia đó.

$$\text{Đặt } y = f(u), u = g(x), \Delta u = g(x + \Delta x) - g(x),$$

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u) = f(g(x + \Delta x)) - f(g(x)) = (f \circ g)(x + \Delta x) - (f \circ g)(x).$$

Ta có $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u)$. Với $\Delta u \neq 0$ đặt $\epsilon(\Delta u) = \frac{\Delta y}{\Delta u} - f'(u)$, và đặt $\epsilon(0) = 0$, thì $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \epsilon(\Delta u) = 0$, và

$$\Delta y = [f'(u) + \epsilon(\Delta u)]\Delta u$$

ngay cả khi $\Delta u = 0$.

Chia hai vế đẳng thức trên cho Δx ,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [f'(u) + \epsilon(\Delta u)] \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Lấy giới hạn khi Δx tiến về 0, lưu ý rằng u khả vi theo x nên u liên tục theo x do đó khi $\Delta x \rightarrow 0$ thì $\Delta u \rightarrow 0$, ta được

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)g'(x)$$

tức là

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

□

Ví dụ 3.2.2. Bây giờ ta quay lại câu hỏi lúc nãy, tính đạo hàm của $y = (x^2 + 1)^{100}$. Với $u = x^2 + 1$, ta có

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 100u^{99}2x = 100(x^2 + 1)^{99}2x.$$

Viết cách khác, nếu ta đặt $f(x) = x^{100}$, $g(x) = x^2 + 1$, thì $f'(x) = 100x^{99}$, $g'(x) = 2x$, và

$$[(x^2 + 1)^{100}]' = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = 100(x^2 + 1)^{99}2x = 200x(x^2 + 1)^{99}.$$

■

Làm như ví dụ trên, ta thu được công thức chung thường dùng cho đạo hàm của

hàm lũy thừa: với số nguyên dương k thì

$$\left[f(x)^k \right]' = k f(x)^{k-1} f'(x).$$

Ví dụ 3.2.3. Ta tính được ngay

$$((x^3 - 4x^2 + 1)^5)' = 5(x^3 - 4x^2 + 1)^4(x^3 - 4x^2 + 1)' = 5(x^3 - 4x^2 + 1)^4(3x^2 - 8x).$$

■

3.2.2 Đạo hàm của hàm ngược

Nếu hàm số $x = g(y)$ là hàm ngược của hàm số $y = f(x)$ thì

$$g(f(x)) = x.$$

Nếu cả hai hàm đều khả vi, thì lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức trên và áp dụng quy tắc đạo hàm của hàm hợp, ta được

$$g'(f(x))f'(x) = 1$$

hay

$$g'(y)f'(x) = 1$$

vậy

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Còn có một lý luận đơn giản khác như sau. Viết

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Lấy giới hạn, giả sử $\Delta y \rightarrow 0$ dẫn tới $\Delta x \rightarrow 0$, tức là giả sử hàm ngược là liên tục, thì ta được

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

hay

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)}.$$

Sự liên tục của hàm ngược thực ra luôn có, người đọc quan tâm có thể tham khảo [TPTT02, tr. 60], [Fic77, mục 71], [Spi94, tr. 232], nhờ đó ta đưa ra một phát biểu tổng quát hơn:

Định lý 3.2.4. Giả sử $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ là một song ánh liên tục và f^{-1} là hàm số ngược của f . Nếu f có đạo hàm tại $x \in (a, b)$ và $f'(x) \neq 0$, thì f^{-1} có đạo hàm tại

$y = f(x)$, và

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Ta sẽ dùng công thức đạo hàm của hàm ngược để tính đạo hàm của một số hàm sơ cấp ở mục tiếp theo.

3.2.3 Đạo hàm của hàm sơ cấp

Đạo hàm của hàm lượng giác

Ví dụ 3.2.5. Ta tính đạo hàm của hàm sin. Ta có

$$\begin{aligned}\sin'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} \\ &= \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}.\end{aligned}$$

Ta đã biết giới hạn đặc biệt ở Công thức (2.2.1):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

Dùng công thức lượng giác mà ta có thể rút ra được từ các tính chất của hàm lượng giác ở Mục 1.2.2

$$\cos(2a) = \cos(a - (-a)) = \cos(a) \cos(-a) + \sin a \sin(-a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a,$$

ta được

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2(\frac{h}{2})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin^2(\frac{h}{2})}{(\frac{h}{2})^2} \cdot \frac{h}{2} \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \right)^2 \cdot \frac{h}{2} = 1 \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Vậy

$$\sin' x = \cos x.$$

■

Ví dụ 3.2.6. Ta tính đạo hàm của hàm cos. Vì $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ nên theo đạo hàm của hàm hợp:

$$\cos' x = \sin' \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \left(\frac{\pi}{2} - x \right)' = -\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = -\sin x.$$

Vậy

$$\cos' x = -\sin x.$$

■

Ví dụ 3.2.7. Ta tính đạo hàm của hàm tan. Vì $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ nên dùng công thức đạo hàm của thương ta được:

$$\tan' x = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Vậy

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

■

Ví dụ 3.2.8. Xét hàm số $x = g(y) = \arcsin y$ với $-1 < y < 1$, là hàm số ngược của hàm số $y = f(x) = \sin x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Theo công thức đạo hàm của hàm số ngược ta có

$$\arcsin' y = g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Vậy

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

■

Tương tự ta cũng tính được (Bài tập 3.2.8):

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

$$\arctan' x = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Đạo hàm của hàm mũ và hàm log

Ta có công thức

$$(e^x)' = e^x.$$

Công thức đơn giản trên là một lý do khiến cơ số e được dùng phổ biến hơn các cơ số khác.

Chứng minh. Ta đưa ra một cách thu được công thức trên dùng các tính chất số học của hàm mũ, giả thiết hàm e^x và hàm \ln là liên tục, và rằng $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$, như [SGKTH, Giải tích 12], [Pis69, tr. 53].

Đặt $f(x) = e^x$. Ta có

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} e^x = f'(0) e^x.$$

Ta tính $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$. Đặt $u = e^h - 1$, thì $h = \ln(1 + u)$ và khi $h \rightarrow 0$ thì

do f là hàm liên tục nên $u \rightarrow e^0 - 1 = 0$. Suy ra

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\ln(1+u)} = \frac{1}{\lim_{u \rightarrow 0} \ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}.$$

Đặt $x = \frac{1}{u}$ ta được

$$\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{x-1} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) = e. \end{aligned}$$

Suy ra $\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e$. Do hàm \ln liên tục nên áp dụng \ln vào hai vế của đẳng thức này ta được $\lim_{u \rightarrow 0} \ln(1+u)^{\frac{1}{u}} = \ln e = 1$. Vậy $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

Chi tiết hơn cho lý luận trên có ở [TPTT02, tr. 83], [Fic77, mục 69]. \square

Từ công thức trên ta tính được ngay đạo hàm của hàm mũ với cơ số a bất kì:

$$(a^x)' = (e^{\ln a^x})' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} (x \ln a)' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

Vậy

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Ví dụ 3.2.9. Xét hàm số $x = g(y) = \log_a y$, với $a > 0$ và $a \neq 1$. Đây là hàm số ngược của hàm số $y = f(x) = a^x$. Theo công thức đạo hàm của hàm số ngược ta có

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{1}{y \ln a}.$$

Vậy

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Đặc biệt

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

■

Đạo hàm của hàm lũy thừa

Xét hàm $y = x^r$ trong đó r là một số thực bất kì và $x > 0$. Ta viết được, dùng đạo hàm của hàm hợp:

$$(x^r)' = (e^{\ln x^r})' = (e^{r \ln x})' = e^{r \ln x} (r \ln x)' = x^r \frac{r}{x} = r x^{r-1}.$$

Vậy đây là công thức chung cho đạo hàm của hàm lũy thừa bất kì:

$$(x^r)' = rx^{r-1}, \quad x > 0.$$

Ví dụ 3.2.10. Với $x > 0$ thì

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

■

Ví dụ 3.2.11. Chú ý là trong những trường hợp cụ thể công thức đạo hàm của hàm lũy thừa có thể đúng trên tập lớn hơn. Chẳng hạn với $x < 0$ thì

$$(\sqrt[3]{x})' = -(\sqrt[3]{-x})' = -((-x)^{1/3})' = -\frac{1}{3}(-x)^{-2/3}(-x)' = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}.$$

Vậy

$$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}, \quad x \neq 0.$$

■

3.2.4 Đạo hàm của hàm ẩn

Với một hàm số $y = f(x)$ thì giá trị của y phụ thuộc theo giá trị x và sự phụ thuộc này được biểu diễn một cách rõ ràng theo quy luật được cho bởi hàm f , ta nói y là một **hàm hiện** (hay hàm tường minh) của x . Tuy nhiên có nhiều trường hợp x và y phụ thuộc nhau nhưng chúng ta không có sẵn một công thức cụ thể để biểu diễn y theo x , khi đó người ta thường nói y là **hàm ẩn** của x .

Việc giải hàm ẩn là giải phương trình, thường là khó. Tuy nhiên trong một số ứng dụng, mục đích của ta không phải là tìm y theo x , mà là tìm đạo hàm của y theo x . Để giải quyết bài toán này trong nhiều trường hợp khi hàm ẩn được cho bởi một đẳng thức giữa x và y ta có thể lấy đạo hàm của cả hai vế của đẳng thức theo x rồi giải ra đạo hàm của y theo x . Cụ thể hơn ta giả thiết là y tồn tại trong một lân cận của mỗi giá trị của x và là hàm khả vi theo x . Một cách sơ lược thì giả thiết này được thỏa trong trường hợp thường gặp mà đẳng thức quan hệ giữa x và y được cho bởi các hàm sơ cấp của x và y . Vấn đề này được thảo luận chi tiết hơn trong môn Vi tích phân hàm nhiều biến [BMGT2, Chương 1].

Đây được gọi là phương pháp đạo hàm hàm ẩn.

Vấn đề này rõ hơn khi ta xét ví dụ.

Ví dụ 3.2.12. Cho y phụ thuộc vào x theo phương trình

$$x^3 + y^3 = 6y.$$

Giả thiết là y tồn tại trong một lân cận của mỗi giá trị của x và khả vi theo x , hãy tính $y'(x)$.

Nếu muốn tính công thức hiện y theo x ta sẽ giải một phương trình bậc 3, một việc không dễ. Ta dùng phương pháp đạo hàm hàm ẩn. Lấy đạo hàm của cả hai vế phương trình theo x , thì ta được

$$3x^2 + 3y^2 y'(x) = 6y'(x).$$

Từ đó

$$(3y^2 - 6)y'(x) = -3x^2,$$

hay

$$y'(x) = \frac{-3x^2}{3y^2 - 6}.$$

Ta vẫn chưa tính được đạo hàm $y'(x)$ một cách tường minh theo x , tuy nhiên tại mỗi điểm (x, y) cụ thể cho trước ta có thể tìm được giá trị của $y'(x)$.

Chẳng hạn tại điểm $(\sqrt[3]{5}, 1)$ thỏa phương trình $x^3 + y^3 = 6y$, ta có

$$y'(\sqrt[3]{5}) = \frac{-3\sqrt[3]{25}}{3 \cdot 1 - 6} = \sqrt[3]{25}.$$

■

Ví dụ 3.2.13. Cho đường cong mà các điểm (x, y) trên đó thỏa phương trình

$$xy = \arctan \frac{x}{y}.$$

Kiểm tra điểm $(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2})$ thuộc đường cong này. Giả sử tại gần điểm này đường cong là đồ thị của hàm số $y = y(x)$ khả vi. Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong tại điểm này.

Thế vào phương trình ta thấy điểm $(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2})$ thỏa phương trình, vậy điểm này nằm trên đường cong.

Để tính $y'(\frac{\sqrt{\pi}}{2})$ ta dùng phương pháp đạo hàm hàm ẩn. Lấy đạo hàm theo x cả hai vế của phương trình đường cong, nhớ rằng y là hàm của x , ta được

$$y + xy' = \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} \cdot \frac{y - xy'}{y^2}.$$

Giải tìm y' , ta được

$$y' = \frac{y(1 - x^2 - y^2)}{x(1 + x^2 + y^2)}.$$

Tại $x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ta được $y'(\frac{\sqrt{\pi}}{2}) = \frac{2-\pi}{2+\pi}$. Phương trình tiếp tuyến với đường cong tại điểm này được cho bởi

$$y - \frac{\sqrt{\pi}}{2} = y' \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) \left(x - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) = \frac{2-\pi}{2+\pi} \left(x - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right).$$

■

3.2.5 Đạo hàm bậc cao

Nếu f có đạo hàm f' trong một khoảng nào đó thì f' cũng là một hàm. Nếu f' có đạo hàm thì đạo hàm này được gọi là đạo hàm cấp hai của f . Ta ký hiệu $f'' = (f')'$.

Ví dụ 3.2.14. Đạo hàm cấp một của hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ là $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$. Đạo hàm cấp một của f' là $f''(x) = (f')'(x) = (3x^2 + 6x + 3)' = 6x + 6$. ■

Đạo hàm cấp hai cho tốc độ biến thiên của đạo hàm cấp một.

Ví dụ 3.2.15 (gia tốc). Xét chuyển động trên đường thẳng thực. Đạo hàm bậc một là vận tốc chuyển động của vật, còn đạo hàm bậc hai là vận tốc thay đổi của vận tốc của vật, tức là gia tốc. ■

Giả sử đạo hàm cấp $(n-1)$ được xác định, ký hiệu $f^{(n-1)}$, ta định nghĩa đạo hàm cấp n của f , ký hiệu là $f^{(n)}$, là đạo hàm của đạo hàm cấp $(n-1)$, tức là $f^{(n)} = [f^{(n-1)}]'$.

Ví dụ 3.2.16. Tính đạo hàm đến cấp n của hàm $f(x) = \sin x$.

Ta có $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$, $f^{(5)}(x) = \cos x$. Ta nhận thấy các đạo hàm này lặp lại xoay vòng sau 4 lần lấy đạo hàm. Kết luận này có thể được trình bày chặt chẽ bằng cách dùng phép qui nạp toán học, cho phép ta kết luận với mỗi số nguyên dương n thì

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x, & n = 0 \pmod{4}, \\ \cos x, & n = 1 \pmod{4}, \\ -\sin x, & n = 2 \pmod{4}, \\ -\cos x, & n = 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Ở đây $\pmod{4}$ (modulo) là phép lấy phần dư khi chia số nguyên cho 4. ■

Ví dụ 3.2.17. Không phải hàm nào cũng có đạo hàm cấp hai, cũng như không phải hàm nào cũng có đạo hàm cấp một. Xét hàm số sau

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & x \geq 0, \\ -\frac{x^2}{2}, & x < 0. \end{cases}$$

Ta tính được

$$f'(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ta thấy $f'(x) = |x|$. Như đã tìm hiểu ở Ví dụ 3.1.10, hàm $|x|$ không có đạo hàm tại $x = 0$. Do đó $f''(0)$ không tồn tại. ■

Bài tập

3.2.1. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

- | | |
|--|--|
| (a) $3x^2 - 9x + 7x^{2/5} - 3x^{1/2}$. | (j) $\sqrt[3]{x^3 + \sin x}$. |
| (b) $4x^5 - 3x^{1/2}$. | (k) $\cos(a^2 + x^2)$. |
| (c) $(x^2 + 1)(x^2 + 3x + 2)$. | (l) $(x^2 + 1)^3(\sin x)^2$. |
| (d) $(x^{1/2} + x^{-1/2})(4x^5 - 3\sqrt{x})$. | (m) $\sin \sqrt{x^2 + 1}$. |
| (e) $\frac{1}{x^2 + \sqrt{x}}$. | (n) $x \sin \frac{1}{x}$. |
| (f) $\sqrt{x} \sin x$. | (o) $\cos^4(\sin^3 x)$. |
| (g) $\frac{x}{1 + \tan x}$. | (p) $\cos \sqrt{\sin(\tan \pi x)}$. |
| (h) $\frac{\cos x}{1 - \sin x}$. | (q) $\sqrt[2018]{\ln(2017 + x^2)} e^{2014x}$. |
| (i) $(x^4 + 3x^2 - 2)^5$. | (r) x^x . |
| | (s) $e^{e^{e^x}}$. |

3.2.2. Hãy tìm phương trình của tiếp tuyến với đồ thị của mỗi hàm số sau tại giá trị x cho trước.

- (a) $f(x) = x^2, x = 3$.
 (b) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}, x = 1$.

3.2.3. Cho hàm g khả vi, $g'(1) = g(1) = 1$. Cho $f = 2g \cdot (g \circ g^2)$. Tìm $f'(1)$.

3.2.4. Cho $f(4) = 2, f'(4) = 3$, và $F(x) = f(xf(x^2))$. Tìm $F'(2)$.

3.2.5. Cho

$$g(x) = f(x^2 f(x)).$$

Cho $f(1) = 2, f(2) = 4, f'(1) = 3, f'(2) = -1$. Tính $g'(1)$.

3.2.6. Cho $F(x) = f(x(f(xf(x))))$, với $f(1) = 2, f(2) = 3, f'(1) = 4, f'(2) = 5, f'(3) = 6$. Tìm $F'(1)$.

3.2.7. Cho hai hàm số $g(x) = \sqrt[3]{x+5}$ và $h(x) = 3^{-x+1}$. Tính đạo hàm của g, h , và $g \circ h$.

3.2.8. Hãy rút ra công thức

(a)
$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

(b)
$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3.2.9. Cho

$$g(x) = \frac{x^{11}}{x^{10} + 2}$$

và cho h là hàm ngược của g . Tính $h'(1/3)$.

3.2.10. Cho $u(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$ và cho v là hàm ngược của u . Tính $v'(1)$.

3.2.11. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị của hàm số y được cho bởi phương trình ẩn:

- (a) $x^3 + y^3 = 6xy$ tại điểm $(3, 3)$.
- (b) $x^2 + y^2 = 25$ tại điểm $(3, -4)$.
- (c) $x^2 + y^2 = 2$ tại điểm $(1, 1)$.
- (d) $y^4 = 4x^4 + 6xy$ tại điểm $(1, 2)$.
- (e) $x^2 + y^2 = 1 + y \tan x$ tại điểm $(0, 1)$.
- (f) $y \sin 2x = x \cos 2y$ tại điểm $(\pi/2, \pi/4)$.
- (g) $\sin(x + y) = 2x - 2y$ tại điểm (π, π) .
- (h) $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$ tại điểm $(0, 1/2)$. Hãy dùng phần mềm máy tính để vẽ đường này để thấy lý do đường này được gọi là đường hình trái tim.
- (i) $x^2(x^2 + y^2) = y^2$ tại điểm $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.
- (j) $y^2 \tan x + \ln y = y$ tại điểm $(\frac{\pi}{4}, 1)$.

3.2.12. Hãy tính đạo hàm cấp 3 của hàm số $\frac{\sin x}{1 + x^2}$.

3.2.13. Hãy tính đạo hàm cấp 3 của hàm số $\frac{\cos x}{e^x}$.

3.2.14. Hãy tìm đạo hàm cấp n của mỗi hàm sau:

- (a) $f(x) = x^{10} + 2x^9 + 1$.
- (b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$.
- (c) $f(x) = \frac{1}{x-2}$.
- (d) $f(x) = \ln x$.

3.2.15 (Công thức Leibniz cho đạo hàm của tích). Bằng phương pháp quy nạp toán học hãy chứng minh công thức hữu ích sau trong tính toán đạo hàm cấp cao. Nếu f và g có đạo hàm đến cấp n thì hàm số tích $f \cdot g$ có đạo hàm đến cấp n và

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}.$$

Ở đây $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, và qui ước $f^{(0)} = f$.

3.2.16. Sử dụng công thức Leibniz cho đạo hàm của tích, tính đạo hàm cấp 100 của hàm $f(x) = x^3 \sin x$ tại $x = 0$.

3.2.17. Sử dụng công thức Leibniz cho đạo hàm của tích, tính đạo hàm cấp 2019 của hàm $(3x - 1)e^{2x}$.

3.2.18. Sử dụng công thức Leibniz cho đạo hàm của tích, tìm $y^{(n)}$ với

- (a) $y = xe^x$.
- (b) $y = (1 - x^2) \cos x$.
- (c) $y = x^3 \ln x$.

Chương 4

Ứng dụng của đạo hàm

4.1 Cực trị của hàm số

Một trong những ứng dụng của phép tính vi phân là trong các bài toán tối ưu hoá, ở đó chúng ta muốn phải tìm cách thức để làm một việc gì đó để được kết quả tối ưu (tốt nhất). Việc này trong nhiều trường hợp có thể đưa về bài toán tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Định nghĩa 4.1.1. Cho hàm số f xác định trên tập $D \subset \mathbb{R}$ và $c \in D$.

Nếu $f(c) \geq f(x)$ với mọi x thuộc một khoảng mở $(a, b) \subset D$ chứa c thì ta nói f có giá trị **cực đại địa phương** tại c .

Nếu $f(c) \geq f(x)$ với mọi x thuộc D thì ta nói f có giá trị **cực đại toàn cục** là $f(c)$ xảy ra tại c .

Nếu $f(c) \leq f(x)$ với mọi x thuộc một khoảng mở $(a, b) \subset D$ chứa c thì ta nói f có giá trị **cực tiểu địa phương** tại c .

Nếu $f(c) \leq f(x)$ với mọi x thuộc D thì ta nói f có giá trị **cực tiểu toàn cục** là $f(c)$ xảy ra tại c .

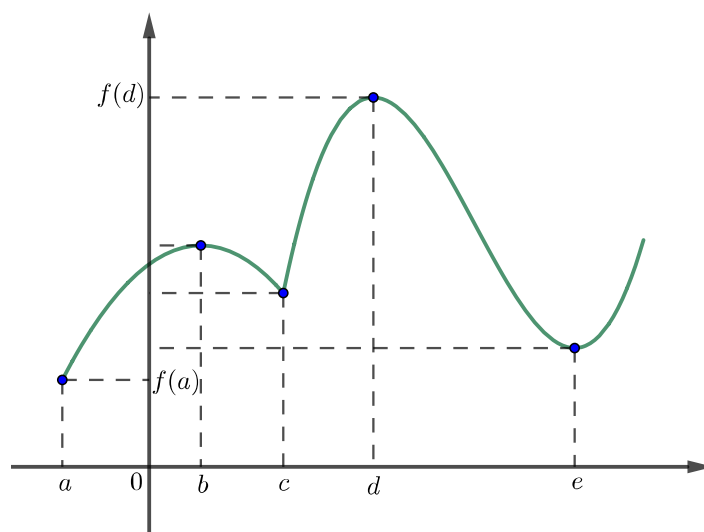
Giá trị cực đại và cực tiểu được gọi chung là **cực trị**¹. Điểm tại đó xảy ra cực trị thường được gọi là **điểm cực trị**.²

Ngắn gọn thì cực trị toàn cục được xét trong toàn miền xác định, còn cực trị địa phương chỉ xét trong một lân cận nào đó. Một cách trực quan, trên một đồ thị thì cực đại toàn cục xảy ra tại điểm cao hơn hay bằng mọi điểm khác trên đồ thị, trong khi cực đại địa phương xảy ra tại điểm cao hơn hay bằng mọi điểm khác trong một lân cận nào đó, xem Hình 4.1.1.

Với định nghĩa trên thì cực trị địa phương chỉ có thể xảy ra ở những **điểm trong** của miền xác định, do đó một giá trị có thể là cực trị toàn cục nhưng không phải là cực trị địa phương khi nó xảy ra ở một điểm biên của miền xác định.

¹cực trị địa phương còn được gọi là cực trị tương đối, cực trị toàn cục còn được gọi là cực trị tuyệt đối

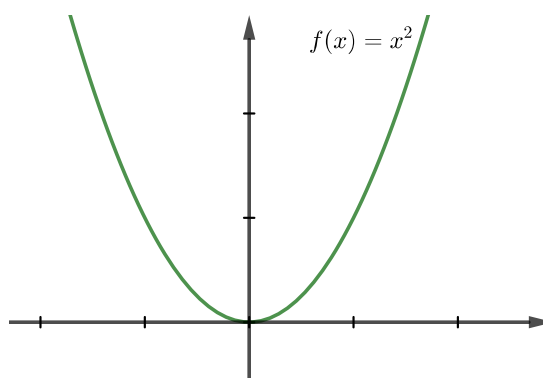
²Chú ý thuật ngữ cực trị dùng ở trung học [SGKTH, Giải tích 12, tr. 13] là cực trị địa phương ngặt, không cho phép xảy ra $f(x) = f(c)$ khi $x \neq c$. Ở đây dùng thuật ngữ này theo cách phổ biến ở đại học, như ở [Ste16, tr. 274], [Rud76, tr. 105].



Hình 4.1.1: Với hàm này thì cực tiểu toàn cục là $f(a)$, cực đại toàn cục là $f(d)$, cực tiểu địa phương là $f(c)$ và $f(e)$, cực đại địa phương là $f(b)$ và $f(d)$.

Ví dụ 4.1.2. Xét $f(x) = x^2$ trên miền xác định \mathbb{R} , xem Hình 4.1.2. Vì $f(x) \geq f(0)$ với mọi x nên $f(0) = 0$ là cực tiểu toàn cục và là cực tiểu địa phương của f . Tuy nhiên không có điểm cao nhất trên parabol và do đó hàm số này không có giá trị cực đại.

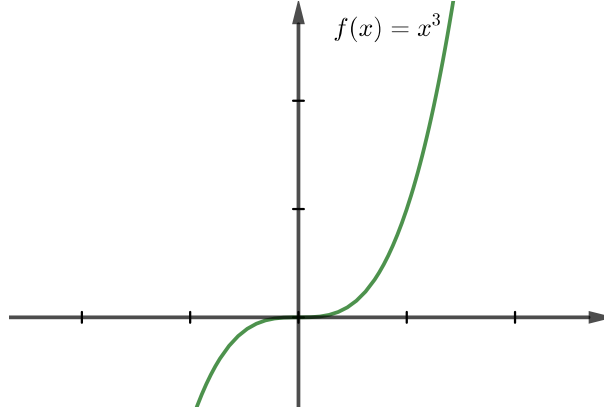
Nếu chỉ xét miền xác định là $[-1, 2]$ thì f có một cực tiểu địa phương ở $x = 0$, một cực tiểu toàn cục ở $x = 0$, một cực đại toàn cục ở $x = 2$, và không có cực đại địa phương.



Hình 4.1.2: Một hàm có cực tiểu, không có cực đại.



Ví dụ 4.1.3. Hàm số $f(x) = x^3$ không có cực trị, xem Hình 4.1.3.



Hình 4.1.3: Một hàm không có cực tiểu, không có cực đại.



Trong các hình vẽ ta thấy nếu tại điểm cực trị đồ thị của hàm có tiếp tuyến thì tiếp tuyến sẽ nằm ngang. Điều này không đáng ngạc nhiên với lý luận sau: gần điểm cực trị, nếu trước đó hàm đã tăng thì qua điểm cực trị không thể tiếp tục tăng, còn nếu trước đó đã giảm thì qua điểm cực trị không thể tiếp tục giảm, do đó đạo hàm phải đổi dấu khi đi qua c , do đó phải bằng 0 tại c . Lý luận đơn giản này giả thiết tính liên tục của đạo hàm, tuy nhiên kết quả đúng mà không cần giả thiết này:

Định lý 4.1.4 (Định lý Fermat). Nếu f có cực trị địa phương tại c và $f'(c)$ tồn tại thì $f'(c) = 0$.

Như vậy *tại cực trị địa phương đạo hàm phải bằng 0*. Đây là một quan sát then chốt trong ứng dụng của đạo hàm.

Có thể giải thích điều này một cách trực quan ở Hình 4.1.4.

Chứng minh. Ta chính xác hóa lý luận trực quan trên.

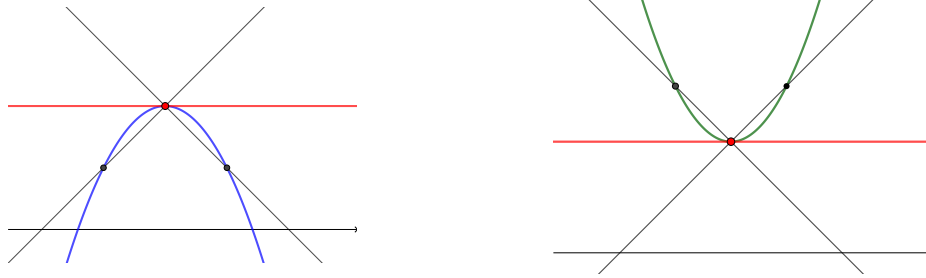
Giả sử f có cực đại địa phương tại c .

Nếu h đủ gần 0 (h có thể âm hoặc dương) thì $f(c) \geq f(c+h)$. Vậy nếu h đủ nhỏ và $h > 0$ thì

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0.$$

Lấy giới hạn phải của cả hai vế của bất đẳng thức khi h tiến về 0 ta có

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0.$$



Hình 4.1.4: Tại điểm cực trị, cát tuyến hướng lên ở một bên, hướng xuống ở bên còn lại, do đó tiếp tuyến phải nằm ngang.

Tương tự nếu h đủ nhỏ và $h < 0$ thì

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0.$$

Lấy giới hạn trái hai vế của bất đẳng thức khi h tiến về 0 ta được

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0.$$

Như thế ta buộc phải có $f'(c) = 0$.

Trường hợp cực tiểu địa phương là tương tự. □

Điểm tại đó đạo hàm bằng 0 còn được gọi là một **điểm dừng** của hàm.

Ví dụ 4.1.5. Xét chuyển động trên đường thẳng thực. Nếu tại một thời điểm c chuyển động đạt vị trí xa nhất địa phương (xa nhất trên một khoảng mở thời gian nào đó), thì tại thời điểm c không được đi xa hơn, nên phải dừng, vận tốc buộc phải bằng 0. ■

Điểm tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại được gọi là **điểm tới hạn** của hàm, là những điểm hệ trọng ¹.

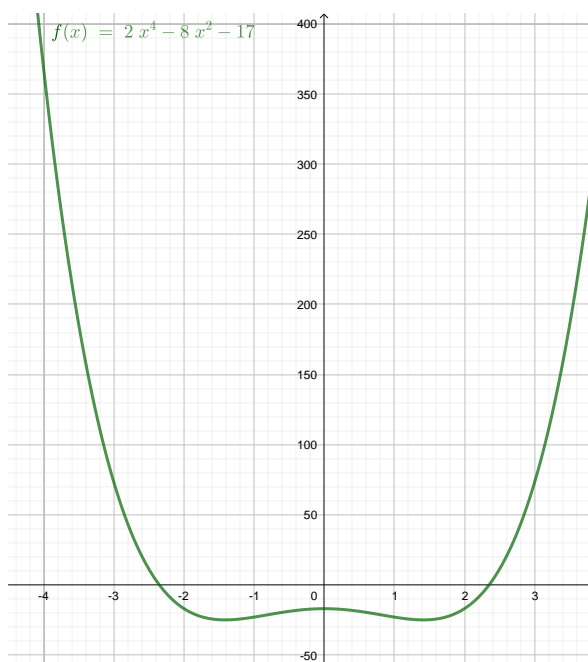
Ví dụ 4.1.6. Hàm số $f(x) = |x|$ có điểm tới hạn $x = 0$ vì $f'(0)$ không tồn tại. ■

Định lý Fermat có thể được viết lại là **cực trị địa phương chỉ xảy ra tại điểm tới hạn**.

Ví dụ 4.1.7. Giả sử ta biết hoặc dự đoán từ đồ thị Hình 4.1.5 là hàm $f(x) = 2x^4 - 8x^2 - 17$ có giá trị nhỏ nhất. Ta tìm giá trị đó.

Điểm x mà ở đó hàm f đạt cực tiểu toàn cục cũng là điểm tại đó hàm đạt cực tiểu địa phương do miền xác định của hàm f là một khoảng mở $(-\infty, \infty)$. Theo Định lý Fermat, điểm này phải là một điểm dừng, tức là $f'(x) = 0$. Giải phương

¹tiếng Anh là critical points

Hình 4.1.5: Đồ thị hàm $f(x) = 2x^4 - 8x^2 - 17$.

trình ta được

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff 8x^3 - 16x = 0 \iff 4x(x^2 - 2) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ hoặc } x = \sqrt{2} \text{ hoặc } x = -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Tính giá trị $f(0) = -17$, $f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = -25$ ta kết luận giá trị nhỏ nhất của hàm f , nếu có, là -25 . ■

4.1.1 Sự tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

Dưới đây là một điều kiện đủ quan trọng cho sự tồn tại cực trị toàn cục.

Định lý 4.1.8 (Định lý cực trị toàn cục). Nếu f liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì f đạt giá trị cực đại toàn cục và giá trị cực tiểu toàn cục trên $[a, b]$.

Nói ngắn gọn: **Một hàm liên tục trên một đoạn thì có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.**

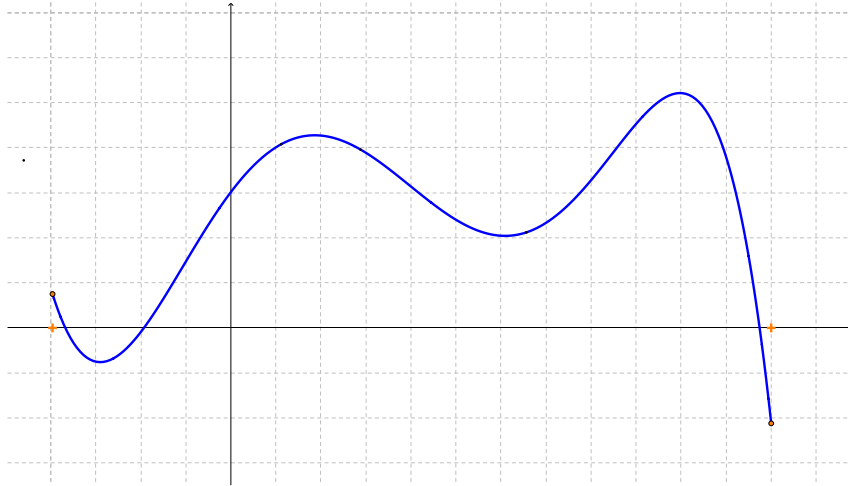
Định lý giá trị trung gian 2.2.13 đã khẳng định tập giá trị của f trên $[a, b]$ đã là một khoảng số thực I (có thể không bị chặn). Định lý cực trị toàn cục khẳng định khoảng I này là một đoạn, gồm cả hai đầu mút. Hai đầu mút của I là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của f .

Định lý cực trị toàn cục cho thấy ảnh của một đoạn số thực qua một hàm liên tục cũng là một đoạn số thực, và đồ thị của hàm liên tục trên một đoạn giống như một đoạn thẳng được uốn cong, có điểm cao nhất và điểm thấp nhất so với phương nằm ngang.

Định lý cực trị toàn cục có thể được chứng minh bằng cách dùng một hệ quả của tính đầy đủ của tập hợp số thực, rằng từ mỗi dãy số trong một đoạn số thực $[a, b]$ có

thể trích ra một dãy con hội tụ, từ đó rút ra rằng hai đầu mút của I cũng là hai giá trị của f . Chi tiết có trong các tài liệu như [Kha96, tr. 56], [TPPT02, tr. 58], [Fic77, mục 72], [Apo67, tr. 150].

Kết hợp với Định lý Fermat 4.1.4, ta rút ra một nhận xét quan trọng về điểm cực trị toàn cục: Một hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$ đồng thời khả vi trên khoảng (a, b) phải có cực trị toàn cục, và cực trị toàn cục này xảy ra hoặc là tại đầu mút a hoặc b , hoặc là bên trong khoảng (a, b) , nếu xảy ra bên trong khoảng (a, b) thì đó phải là cực trị địa phương và do đó phải tại điểm dừng, nơi đạo hàm bằng 0.



Hình 4.1.6: Cực trị toàn cục xảy ra ở điểm dừng hoặc trên biên.

Từ đó ta đưa ra thuật toán sau:

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của một hàm trên một khoảng đóng $[a, b]$:

Bước 1: Tìm các điểm tới hạn bên trong khoảng mở (a, b) .

Bước 2: Tính các giá trị của hàm tại các điểm tới hạn tìm được ở Bước 1 và tại các điểm mút a và b .

Bước 3: Số lớn nhất trong các số tìm được ở Bước 2 là giá trị lớn nhất của hàm, số nhỏ nhất là giá trị nhỏ nhất của hàm.

Ví dụ 4.1.9. Tiếp tục Ví dụ 4.1.7, ta tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm $f(x) = 2x^4 - 8x^2 - 17$ trên đoạn $[-1, 3]$.

Trong khoảng mở $(-1, 3)$ hàm f có hai điểm tới hạn là 0 và $\sqrt{2}$. Ta tính được $f(0) = -17$, $f(\sqrt{2}) = -25$, $f(-1) = -23$, $f(3) = 73$. Vậy giá trị nhỏ nhất là -25 và giá trị lớn nhất là 73 . ■

Ví dụ 4.1.10. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$$

trên đoạn $[-1, 4]$.

Ta tìm điểm dừng. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ ta được $x^2 - 4x + 3 = 0$, vậy $x = 1, x = 3$.

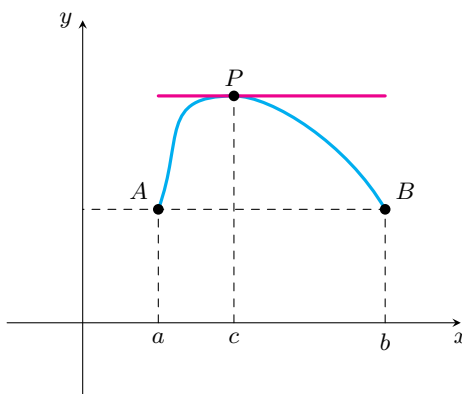
Tính và so sánh

$$f(1) = 6, f(3) = 2, f(-1) = -14, f(4) = 6,$$

ta kết luận cực giá trị lớn nhất là 6 ở $x = 1$ và $x = 4$, và giá trị nhỏ nhất là -14 ở $x = -1$. ■

4.1.2 Các định lý giá trị trung bình

Định lý 4.1.11 (Định lý Rolle). Nếu hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$, khả vi trong khoảng (a, b) , và $f(a) = f(b)$, thì tồn tại một số thực c thuộc (a, b) sao cho $f'(c) = 0$.



Hình 4.1.7: Định lý Rolle khẳng định một điều dễ thấy trực quan: Nếu một đường cong đồ thị liên tục nối hai điểm có cùng cao độ thì sẽ có một điểm trên đồ thị tại đó tiếp tuyến nằm ngang.

Có thể giải thích nguồn gốc của Định lý Rolle một cách khá đơn giản: hàm liên tục trên một đoạn thì có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất, nếu giá trị của hàm tại hai đầu của đoạn xác định bằng nhau thì một trong hai giá trị cực trị toàn cục trên phải xảy ra bên trong, do đó là cực trị địa phương, xảy ra tại một điểm dừng.

Chứng minh. Ta xét ba trường hợp.

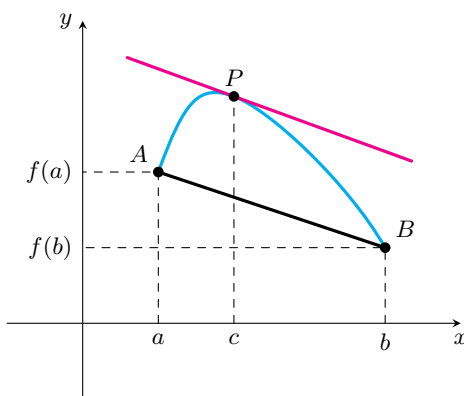
- (a) Trường hợp f là một hàm hằng, $f = f(a)$: Khi đó với mọi $x \in (a, b)$ thì $f'(x) = 0$, do đó ta có thể chọn c bất kì trong khoảng (a, b) .
- (b) Trường hợp $f(x) > f(a)$ với một x nào đó trong khoảng (a, b) : Theo Định lý cực trị toàn cục 4.1.8, f có một giá trị cực đại toàn cục tại một điểm nào đó trong đoạn $[a, b]$. Vì $f(a) = f(b)$ nên giá trị cực đại toàn cục này phải đạt tại một số c trong khoảng mở (a, b) . Khi đó f có cực đại địa phương tại c . Suy ra $f'(c) = 0$ theo Định lý Fermat.

- (c) Trường hợp $f(x) < f(a)$ với một x nào đó trong khoảng (a, b) : Tương tự, theo Định lý cực trị toàn cục 4.1.8, f có một giá trị cực tiểu toàn cục trong đoạn $[a, b]$ và vì $f(a) = f(b)$ giá trị cực tiểu toàn cục này đạt tại một số c trong khoảng (a, b) , do đó f có cực tiểu địa phương tại c và như vậy $f'(c) = 0$ theo Định lý Fermat.

□

Định lý 4.1.12 (Định lý giá trị trung bình – Định lý Lagrange). Nếu hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$ và khả vi trong khoảng (a, b) thì có c thuộc (a, b) sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Hình 4.1.8: Minh họa ý nghĩa hình học của định lý giá trị trung bình Lagrange: Hệ số góc của đường cắt tuyến AB là $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ và hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $P = (c, f(c))$ là $f'(c)$, định lý nói rằng có ít nhất một điểm P trên đồ thị mà tiếp tuyến tại đó song song với cắt tuyến AB . Về trực quan Định lý Lagrange cho một phiên bản nghiêng của Định lý Rolle.

Ta có thể thấy ngay Định lý Lagrange chứa Định lý Rolle.

Chứng minh. Áp dụng Định lý Rolle cho hàm

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right].$$

Hàm g này chẳng qua là hiệu giữa hàm f với hàm có đồ thị là đường cắt tuyến nối hai điểm $(a, f(a))$ và $(b, f(b))$. □

Định lý giá trị trung bình Lagrange nói rằng giá trị trung bình của tỉ lệ biến thiên trên một đoạn đúng bằng giá trị tức thời của tỉ lệ biến thiên tại một điểm nào đó trong đoạn.¹

¹Tránh lẫn lộn Định lý giá trị trung gian 2.2.13 (tiếng Anh: Intermediate Value Theorem) về tính liên tục, với Định lý giá trị trung bình 4.1.12 (tiếng Anh: Mean Value Theorem) về đạo hàm, có nội dung rất khác nhau.

Ví dụ 4.1.13. Xét một vật chuyển động trên đường thẳng thực. Vị trí của vật ở thời điểm t được cho bởi số thực $x(t)$. Vì vận tốc được định nghĩa là đạo hàm của vị trí theo thời gian, $v(t) = x'(t)$ (xem mục Đạo hàm trang 61), nên Định lý giá trị trung bình Lagrange nói rằng có số c giữa a và b sao cho

$$v(c) = \frac{x(b) - x(a)}{b - a},$$

nghĩa là vận tốc trung bình giữa hai thời điểm a và b đúng bằng vận tốc tức thời tại một thời điểm nào đó giữa a và b . ■

Nhờ Định lý giá trị trung bình, thông tin về giá trị của đạo hàm có thể dẫn tới thông tin về thay đổi giá trị của hàm. Đây là công cụ chính cho các ứng dụng rất quan trọng của đạo hàm ở chương sau.

Ta có thể viết công thức của Định lý giá trị trung bình Lagrange ở những dạng khác cũng rất hữu ích,

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a), \quad (4.1.1)$$

hoặc

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x - a) \quad (4.1.2)$$

với c giữa a và x ; hay

$$f(a + h) = f(a) + f'(a + \theta h)h \quad (4.1.3)$$

với θ giữa 0 và 1. Các công thức này cho giá trị chính xác của lượng thay đổi của giá trị của hàm thông qua đạo hàm.

Ta còn có một phát triển mà ta sẽ dùng về sau:

Định lý 4.1.14 (Định lý giá trị trung bình Cauchy). *Nếu hai hàm f và g liên tục trên đoạn $[a, b]$ và khả vi trong khoảng (a, b) thì tồn tại điểm c thuộc (a, b) sao cho*

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c). \quad (4.1.4)$$

Nếu $g(b) \neq g(a)$ và với mọi $x \in (a, b)$ ta có $g'(x) \neq 0$, thì đẳng thức trên có thể được viết dưới dạng

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (4.1.5)$$

Ta có thể thấy ngay Định lý giá trị trung bình Cauchy cho ra Định lý giá trị trung bình Lagrange nếu lấy $g(x) = x$.

Chứng minh. Áp dụng Định lý Rolle cho hàm

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x).$$

□

Từ Định lý giá trị trung bình ta được một hệ quả quan trọng:

Hệ quả 4.1.15 (Đạo hàm bằng 0 thì hàm là hàm hằng). Nếu $f'(x) = 0$ với mọi x trong khoảng (a, b) thì f là hàm hằng trên khoảng (a, b) .

Chứng minh. Với x_1 và x_2 bất kì thuộc khoảng (a, b) , ta chứng tỏ $f(x_1) = f(x_2)$. Giả sử $x_1 < x_2$. Áp dụng Định lý giá trị trung bình cho hàm f trên đoạn $[x_1, x_2]$ ta được $f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2)$ với một c nào đó trong khoảng (x_1, x_2) . Vì $f'(c) = 0$ nên ta được $f(x_1) = f(x_2)$. \square

Một hệ quả quan trọng nữa:

Hệ quả 4.1.16. Nếu $f'(x) = g'(x)$ với mọi x trong khoảng (a, b) , thì $f - g$ là hàm hằng trên khoảng (a, b) ; nghĩa là f và g sai khác một hằng số.

Chứng minh. Áp dụng hệ quả trên cho hàm $f - g$. \square

Bài tập

4.1.1. Tìm các điểm tới hạn của hàm số.

(a) $f(x) = 4 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x^2$.

(f) $g(t) = |3t - 4|$.

(b) $f(x) = x^3 - 16x^2 - 15x$.

(g) $g(y) = \frac{y-1}{y^2-y+1}$.

(c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$.

(h) $h(p) = \frac{p-1}{p^2+4}$.

(d) $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x$.

(i) $h(t) = t^{3/4} - 2t^{1/4}$.

(e) $g(t) = t^4 + t^3 + t^2 + 1$.

(j) $g(x) = x^{1/3} - x^{-2/3}$.

4.1.2. Hãy kiểm tra rằng hàm số thoả mãn giả thiết của định lý Rolle trên khoảng cho trước, sau đó tìm tất cả các số c thoả mãn kết luận của Định lý Rolle. Hãy vẽ đồ thị để minh họa.

(a) $f(x) = 5 - 12x + 3x^2$, $[1, 3]$.

(b) $f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 2$, $[0, 3]$.

(c) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x$, $[0, 9]$.

(d) $f(x) = \cos 2x$, $[\pi/8, 7\pi/8]$.

4.1.3. Cho $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. Chứng tỏ rằng $f(-1) = f(1)$ nhưng không tồn tại số c trong khoảng $(-1, 1)$ sao cho $f'(c) = 0$. Tại sao điều này không mâu thuẫn với Định lý Rolle?

4.1.4. Cho $f(x) = 2 - |2x - 1|$. Chứng tỏ rằng không tồn tại c sao cho $f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$. Tại sao điều này không mâu thuẫn với định lý Lagrange?

4.1.5. Chứng tỏ rằng phương trình có duy nhất một nghiệm thực.

(a) $2x + \cos x = 0$.

(b) $2x - 1 - \sin x = 0$.

4.1.6. Chứng tỏ rằng phương trình $x^3 - 15x + c = 0$ có nhiều nhất một nghiệm trong đoạn $[-2, 2]$.

4.1.7. Chứng tỏ rằng phương trình $x^4 + 4x + c = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm.

4.1.8. Cho $f(x) = x(x^2 - 1)(x^2 - 4)$. Tìm số nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$.

4.1.9. Chứng minh rằng một đa thức bậc n có nhiều nhất n nghiệm.

4.1.10. Sử dụng Định lý giá trị trung bình để chứng minh bất đẳng thức

$$|\sin a - \sin b| \leq |a - b| \quad \text{với mọi } a \text{ và } b.$$

4.1.11. Chứng tỏ nếu f khả vi trên \mathbb{R} và $f'(x) < 1$ với mọi x thì f có nhiều nhất một điểm bất động (tức điểm x tại đó $f(x) = x$).

4.1.12. Hai vận động viên bắt đầu chạy cùng lúc và đến đích cùng lúc. Chứng tỏ rằng tại một thời điểm nào đó trong quãng đường chạy họ có cùng vận tốc.

4.1.13. Một người lái xe vào một xa lộ dài 41 km có vận tốc tối đa cho phép là 80 km/giờ. Người đó vào xa lộ lúc 7g30 và ra khỏi xa lộ lúc 8g. Hỏi khẳng định rằng tại một thời điểm nào đó người này đã vượt tốc độ cho phép là đúng hay sai?

4.2 Liên hệ giữa đạo hàm và tính chất của hàm

4.2.1 Tính tăng, giảm, và cực trị

Định nghĩa 4.2.1. Một hàm số được gọi là **tăng** nếu giá trị của biến tăng thì giá trị của hàm không giảm:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2),$$

và **tăng ngặt** nếu giá trị của biến tăng thì giá trị của hàm tăng:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Tương tự, hàm được gọi là **giảm** nếu giá trị của biến tăng thì giá trị của hàm không tăng:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2),$$

và là **giảm ngặt** nếu giá trị của biến tăng thì giá trị của hàm giảm:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Tất nhiên hàm tăng ngặt là hàm tăng, hàm giảm ngặt là hàm giảm.¹

Về mặt hình học, nếu hàm là tăng thì đồ thị của hàm hướng lên hoặc hướng ngang khi đi từ trái sang phải. Đồ thị của hàm giảm hướng xuống hoặc hướng ngang khi đi từ trái sang phải.

¹Chú ý ở trung học [SGKTH, Giải tích 12, tr. 4] và ở một số tài liệu như [Ste16] thuật ngữ hàm tăng là thuật ngữ hàm tăng ngặt ở đây. Thuật ngữ dùng ở đây phổ biến ở đại học [Rud76, tr. 95].

Ta có thể nhận thấy, khi đạo hàm dương thì hàm phải tăng, bởi vì đạo hàm dương dẫn tới tỉ lệ biến thiên $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dương, do đó Δy phải dương khi Δx là dương, tức là hàm là tăng. Về hình học trực quan, nếu tiếp tuyến luôn hướng lên thì đồ thị cũng luôn đi lên.

Chính xác hóa nhận xét trên, ta có kết quả quan trọng sau giúp phát hiện tính tăng giảm bằng dấu của đạo hàm:

Định lý 4.2.2. *Giả sử f liên tục trên đoạn $[a, b]$ và khả vi trên khoảng (a, b) . Hàm f là tăng trên $[a, b]$ khi và chỉ khi $f' \geq 0$ trên (a, b) . Nếu $f' > 0$ trên (a, b) thì f tăng ngặt trên $[a, b]$. Hàm f là giảm trên $[a, b]$ khi và chỉ khi $f' \leq 0$ trên (a, b) . Nếu $f' < 0$ trên (a, b) thì f giảm ngặt trên $[a, b]$.*

Chứng minh. Giả sử f là hàm tăng. Đạo hàm của f là giới hạn của tỉ lệ thay đổi $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Lấy $\Delta x > 0$ thì $f(x+\Delta x) \geq f(x)$, do đó tỉ lệ trên lớn hơn hay bằng 0, dẫn tới giới hạn $f'(x)$ phải lớn hơn hay bằng 0.

Chiều ngược lại, lấy hai điểm bất kỳ x_1, x_2 trong đoạn $[a, b]$. Giả sử $x_1 < x_2$. Theo Định lý giá trị trung bình 4.1.12, tồn tại c thuộc (x_1, x_2) để

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c).$$

Vì $x_2 - x_1 > 0$ nên $f(x_2) - f(x_1)$ cùng dấu với $f'(c)$. Nếu $f'(c) \geq 0$ thì $f(x_2) \geq f(x_1)$, hàm f là tăng. Nếu $f'(c) > 0$ thì $f(x_2) > f(x_1)$, hàm f là tăng ngặt.

Trường hợp hàm giảm là tương tự. □

Ví dụ 4.2.3. Xét một chuyển động trên đường thẳng thực. Nếu vận tốc $v(t)$ luôn dương thì vị trí phải $x(t)$ tăng theo thời gian, nên vật chuyển động về phía trước theo chiều dương. ■

Ta rút ra một tiêu chuẩn đơn giản và hiệu quả, thường dùng để khảo sát cực trị:

Định lý 4.2.4 (Tiêu chuẩn đạo hàm bậc nhất cho cực trị). *Cho hàm số f liên tục trên một khoảng mở (a, b) chứa c và khả vi trên khoảng đó trừ c .*

- (a) *Nếu $f'(x) \geq 0$ trên (a, c) và $f'(x) \leq 0$ trên (c, b) thì f có cực đại địa phương tại c .*
- (b) *Nếu $f'(x) \leq 0$ trên (a, c) và $f'(x) \geq 0$ trên (c, b) thì f có cực tiểu địa phương tại c .*
- (c) *Nếu $f'(x)$ dương trên (a, c) và trên (c, b) , hoặc âm trên (a, c) và trên (c, b) , thì f không có cực trị địa phương tại c .*

Chứng minh. (a) Áp dụng Định lý 4.2.2 cho đoạn $[a, c]$, hàm f tăng trên $[a, c]$, do đó $f(x) \leq f(c)$ trên $[a, c]$. Tương tự, hàm f giảm trên đoạn $[c, b]$ và $f(c) \geq f(x)$ trên $[c, b]$. Vậy $f(c) \geq f(x)$ trên $[a, b]$.

(b) là tương tự.

(c) Nếu $f'(x)$ dương trên (a, c) và trên (c, b) , thì f tăng ngặt trên $[a, c]$ và trên $[c, b]$, do đó f không có cực trị tại c , mà tăng ngặt trên (a, b) . □

Nếu hàm f có đạo hàm liên tục trên một khoảng mở và nếu $a < b$ là hai điểm dừng liên tiếp của f trong khoảng mở này, nghĩa là giữa a và b không có điểm dừng nào khác, thì f' phải luôn dương hoặc luôn âm trên (a, b) , một hệ quả của Định lý giá trị trung gian 2.2.13 áp dụng cho f' . Vì tính chất đặc biệt này các hàm có đạo hàm liên tục, được gọi là các **hàm trơn**, rất thuận tiện cho các khảo sát dùng đạo hàm. Tên gọi thể hiện ý nghĩa trực quan đồ thị của một hàm trơn là một đường trơn tru, phương (độ nghiêng) của đồ thị thay đổi một cách liên tục. Về mặt vật lý, với một chuyển động trơn thì vận tốc thay đổi liên tục chứ không nhảy vọt đột ngột.

Tổng hợp các thảo luận trên cho chúng ta thuật toán sau.

Xét tính tăng giảm và tìm cực trị của hàm trơn:

Bước 1: Tìm các điểm dừng, bằng cách giải phương trình $f'(x) = 0$.

Bước 2: Xét tính tăng giảm, bằng cách xét dấu của f' quanh các điểm dừng tìm được ở Bước 1. Giữa hai điểm dừng liên tiếp dấu của f' không đổi.

Nếu dấu của f' là dương thì f tăng trong khoảng đó:

x	a	b	
$f'(x)$	0	+	0
$f(x)$	\nearrow		

Nếu dấu của f' là âm thì f giảm trong khoảng đó:

x	a	b
$f'(x)$	0	—
$f(x)$	\searrow	

Bước 3: Xét cực trị: quanh một điểm dừng, nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x tăng thì f có cực đại địa phương tại đó:

x	c		
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	\nearrow	cực đại	\searrow

Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x tăng thì f có cực tiểu địa phương tại đó:

x	c		
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	\searrow	cực tiểu	\nearrow

Nếu $f'(x)$ không đổi dấu thì f không có cực trị địa phương tại đó.

Ví dụ 4.2.5. Tiếp tục Ví dụ 4.1.7, ta xét tính tăng giảm và cực trị địa phương của hàm $f(x) = 2x^4 - 8x^2 - 17$.

Ta đã có $f'(x) = 8x^3 - 16x$ và f có các điểm dừng tại $x = 0, x = \pm\sqrt{2}$. Viết $f'(x) = 8x(x^2 - 2)$ ta dễ dàng xét dấu của f' . Một cách khác là trên mỗi khoảng giữa hai điểm dừng ta lấy một điểm tùy ý rồi tìm dấu của f' tại điểm đó. Chẳng hạn trên khoảng $(-\sqrt{2}, 0)$ thì $f'(-1) = 8 > 0$, do đó $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (-\sqrt{2}, 0)$.

Ta trình bày thông tin trong một bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	∞		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\searrow	cực tiểu	\nearrow	cực đại	\searrow	cực tiểu	\nearrow

Ta có hai cực tiểu địa phương tại $x = \pm\sqrt{2}$ và một cực đại địa phương tại $x = 0$.

So sánh, kết quả khớp với Hình 4.1.5 trang 83. Mặt khác từ hình ta khó mà đoán được vị trí chính xác của điểm cực tiểu là tại $x = \pm\sqrt{2}$. ■

4.2.2 Tính lồi, lõm, và điểm uốn

Ở phần này ta dùng đạo hàm bậc hai để khảo sát hàm số.

Định lý 4.2.6 (Tiêu chuẩn đạo hàm bậc hai cho cực trị). *Giả sử c là một điểm dừng của hàm f và f có đạo hàm cấp hai tại c .*

(a) *Nếu $f''(c) > 0$ thì f đạt cực tiểu địa phương tại c .*

(b) *Nếu $f''(c) < 0$ thì f đạt cực đại địa phương tại c .*

Ưu điểm của tiêu chuẩn này là chỉ tính đạo hàm bậc một và bậc hai tại một điểm chứ không khảo sát dấu đạo hàm bậc hai tại nhiều điểm như ở Tiêu chuẩn đạo hàm bậc một cho cực trị.

Chứng minh. Theo định nghĩa đạo hàm, do $f''(c)$ tồn tại nên f' tồn tại trong một khoảng mở nào đó chứa c . Dùng giả thiết $f'(c) = 0$ ta có

$$f''(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{x - c}.$$

Nếu $f''(c) > 0$ thì với x đủ gần c ta phải có $\frac{f'(x)}{x - c} > 0$, do đó $f'(x) < 0$ nếu $x < c$ và $f'(x) > 0$ nếu $x > c$, do đó f có cực tiểu địa phương tại c theo Tiêu chuẩn đạo hàm bậc nhất cho cực trị, Định lý 4.2.4. □

Ví dụ 4.2.7. Tiếp tục Ví dụ 4.1.7, ta xét cực trị của hàm $f(x) = 2x^4 - 8x^2 - 17$.

Do $f'(x) = 8x^3 - 16x$ nên f có các điểm dừng tại $x = 0, x = \pm\sqrt{2}$. Ta tính được $f''(x) = 24x^2 - 16$, $f''(0) < 0$, $f''(-\sqrt{2}) = f''(\sqrt{2}) > 0$. Vậy f có hai cực tiểu địa phương tại $x = \pm\sqrt{2}$ và một cực đại địa phương tại $x = 0$. ■

Nếu cho thêm giả thiết f'' liên tục ở gần c , thì ta có thể giải thích Tiêu chuẩn đạo hàm bậc hai cho cực trị 4.2.6 một cách ngắn gọn: Nếu $f''(c) > 0$ thì $f'' > 0$ ở gần c , dẫn tới f' tăng ở đó, mà $f'(c) = 0$, nên $f' < 0$ bên trái c và $f' > 0$ bên phải

c , do đó f có cực tiểu tại c . Ngoài ra có thể thay giả thiết $f''(c) > 0$ bởi giả thiết $f'' \geq 0$ trong một lân cận của c , nhưng như thế phải xét dấu trong một lân cận.

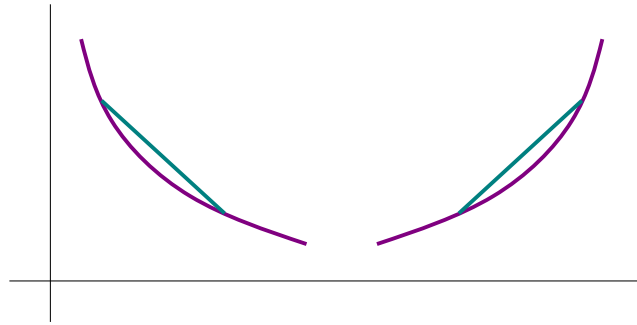
Trong thực tế, đối với hàm một biến, để khảo sát cực trị ta thường dùng Tiêu chuẩn đạo hàm bậc nhất chứ ít khi cần dùng Tiêu chuẩn đạo hàm bậc hai. Tuy vậy, khi sang Vi tích phân hàm nhiều biến [BMGT2, mục 1.5], việc xét dấu hàm thường khó khăn, và Tiêu chuẩn đạo hàm bậc hai lại trở thành công cụ chủ yếu cho hàm nhiều biến.

Định nghĩa 4.2.8. Hàm f được gọi là một **hàm lồi**¹ trên khoảng (a, b) nếu với mọi x, y thuộc (a, b) và với mọi α thuộc $[0, 1]$ thì

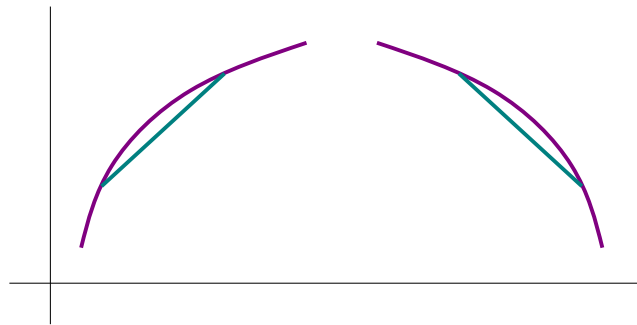
$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y). \quad (4.2.1)$$

Hàm f được gọi là một **hàm lõm** trên (a, b) nếu với mọi x, y thuộc (a, b) và với mọi α thuộc $[0, 1]$ thì

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y). \quad (4.2.2)$$



Hình 4.2.1: Đồ thị của hàm lồi: phần đồ thị giữa hai điểm nằm bên dưới đoạn cát tuyến nối hai điểm đó.



Hình 4.2.2: Đồ thị của hàm lõm: phần đồ thị giữa hai điểm nằm bên trên đoạn cát tuyến nối hai điểm đó.

¹Chú ý thuật ngữ ở trung học [SGKTH, Giải tích 12, tr. 25] ngược lại với ở đây. Trong tiếng Anh lồi là convex, lõm là concave. Một số tài liệu như [Ste16] dùng thuật ngữ lõm lên (concave upward) cho lồi, và lõm xuống (concave downward) cho lõm. Vì vậy khi dùng tài liệu khác người đọc cần xem định nghĩa được dùng là gì. Ở đây thuật ngữ lồi được dùng theo tập quán phổ biến trong ngành toán ở bậc đại học [Kha96, tr. 121], [Rud76, tr. 101].

Định lý 4.2.9. Giả sử hàm f khả vi trên khoảng (a, b) , thì f là hàm lồi khi và chỉ khi f' là hàm tăng, và f là hàm lõm khi và chỉ khi f' là hàm giảm.

Vậy ta thấy với hàm khả vi thì **tính lồi đồng nghĩa với tính tăng của đạo hàm.**

Chứng minh. Với $x_1 < x_2$ và $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$, thì $\alpha = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$. Ta có thể viết lại điều kiện lồi (4.2.1) như sau. Với mọi $x_1 < x < x_2$ thì

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Có thể kiểm được là công thức này tương đương với

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}.$$

Điều kiện cần: Với công thức trên, cho $x \rightarrow x_1$, và cho $x \rightarrow x_2$, ta được

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2).$$

Vậy f' là hàm tăng trên (a, b) .

Điều kiện đủ: Giả sử f' là hàm tăng trên (a, b) . Theo Định lý giá trị trung bình Lagrange 4.1.12, nếu x thuộc (x_1, x_2) thì tồn tại θ_1, θ_2 , với $x_1 < \theta_1 < x < \theta_2 < x_2$, để

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\theta_1) \text{ và } \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} = f'(\theta_2).$$

Vì $f'(\theta_1) \leq f'(\theta_2)$ nên $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$. Vậy f là hàm lồi.

Có thể làm tương tự cho tính lõm. □

Từ kết quả này, áp dụng Định lý 4.2.2 về tính tăng giảm cho f' , ta thu được một tiêu chuẩn đạo hàm cấp hai cho tính lồi lõm, rất thuận tiện, mà người ta cũng thường lấy luôn làm định nghĩa đơn giản hơn cho sự lồi lõm:

Định lý 4.2.10. Giả sử hàm f có đạo hàm cấp hai trong khoảng (a, b) . Hàm f lồi trên (a, b) khi và chỉ khi $f'' \geq 0$ trên (a, b) . Hàm f lõm trên (a, b) khi và chỉ khi $f'' \leq 0$ trên (a, b) .

Vậy ta **chỉ cần xét dấu của đạo hàm cấp hai để biết tính lồi lõm.**

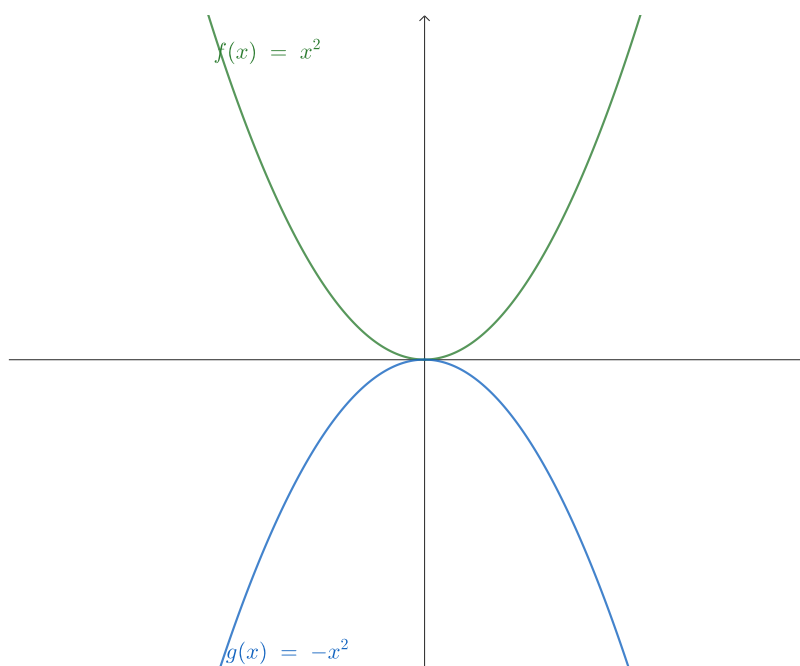
Ví dụ 4.2.11. Sau đây là hai ví dụ dễ nhớ. Xem Hình 4.2.3.

Hàm $y = x^2$ có $y' = 2x$, $y'' = 2 > 0$, nên là hàm lồi.

Hàm $y = -x^2$ có $y' = -2x$, $y'' = -2 < 0$, nên là hàm lõm. ■

Ví dụ 4.2.12. Hàm mũ $y = e^x$ có $y' = e^x$ và $y'' = e^x > 0$, nên là hàm lồi.

Hàm $y = \ln x$ có miền xác định $x > 0$, có $y' = \frac{1}{x}$ và $y'' = -\frac{1}{x^2} < 0$, nên là hàm lõm. Xem Hình 1.2.4. ■



Hình 4.2.3: Hàm $y = x^2$ lõm, hàm $y = -x^2$ lõm.

Ví dụ 4.2.13 (gia tốc). Trong một chuyển động trên đường thẳng thực, gia tốc được định nghĩa là đạo hàm của vận tốc theo thời gian, nên gia tốc là đạo hàm cấp hai của vị trí theo thời gian.

Gia tốc lớn hơn hay bằng không nghĩa là vận tốc của vật đang tăng, tức là vật đang tăng tốc, hàm vị trí là lõm. Ngược lại gia tốc nhỏ hơn hay bằng không nghĩa là vận tốc của vật đang giảm, vật đang giảm tốc, hàm vị trí là lõm.

Nói ngắn gọn, hàm lõm thì tăng tốc, hàm lõm thì giảm tốc. ■

Định nghĩa 4.2.14. Điểm của đồ thị mà ở đó đồ thị đổi tính lõm lõm, từ lõm sang lõm hay ngược lại, được gọi là **điểm uốn**¹ của đồ thị hay của hàm.

Ta lập tức có một tiêu chuẩn đạo hàm bậc hai cho điểm uốn:

Mệnh đề 4.2.15. Giả sử hàm f có đạo hàm bậc hai quanh điểm c . Nếu f'' đổi dấu tại c thì f có điểm uốn tại c .

Nếu ta thêm giả thiết đạo hàm cấp hai liên tục, thì khi f'' đổi dấu tại c ta phải có $f''(c) = 0$, một hệ quả của Định lý giá trị trung gian 2.2.13 áp dụng cho f'' . Điều này cho phép ta tìm các ứng cử viên cho điểm uốn bằng cách tìm nghiệm của đạo hàm cấp hai, tương tự như ta đã tìm ứng cử viên cho điểm cực trị bằng cách tìm nghiệm của đạo hàm cấp một.

Tổng hợp lại ta có thuật toán sau.

¹tiếng Anh là inflection point

Xét tính lồi lõm và tìm điểm uốn của một hàm có đạo hàm bậc hai liên tục:

Bước 1: Tìm các điểm tại đó đạo hàm bậc hai bằng 0, tức là giải phương trình $f''(x) = 0$.

Bước 2: Xét tính lồi lõm: Xét dấu của f'' quanh các điểm tìm được ở Bước 1. Trên khoảng giữa hai điểm liên tiếp tìm được ở Bước 1, dấu của f'' không đổi.

Nếu dấu của f'' là dương thì f lồi trong khoảng đó:

x	a	b	
$f''(x)$	0	+	0
$f(x)$	lồi		

Nếu dấu của f'' là âm thì f lõm trong khoảng đó:

x	a	b	
$f''(x)$	0	—	0
$f(x)$	lõm		

Bước 3: Xét điểm uốn: Tại mỗi điểm tìm được ở Bước 1, nếu f'' đổi dấu thì hàm có điểm uốn tại đó:

x	c		
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$	lồi	điểm uốn	lõm

hoặc

x	c		
$f''(x)$	—	0	+
$f(x)$	lõm	điểm uốn	lồi

Ví dụ 4.2.16. Tiếp tục Ví dụ 4.1.7, ta xét tính lồi của hàm $f(x) = 2x^4 - 8x^2 - 17$.

Ta đã có $f''(x) = 24x^2 - 16 = 8(3x^2 - 2)$. Giải phương trình $f''(x) = 0$ ta được $x = \pm\sqrt{2/3}$.

Ta tìm dấu của $f''(x)$ trên mỗi khoảng $(-\infty, -\sqrt{2/3})$, $(-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3})$, $(\sqrt{2/3}, \infty)$, bằng cách xét dấu hay tính giá trị của $f''(x)$ tại một điểm trong khoảng, chẳng hạn ta thấy $f''(0) < 0$ nên $f''(x) < 0$ trên $(-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3})$.

Ta thường tóm tắt thông tin trong một bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2/3}$	$\sqrt{2/3}$	∞	
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	lồi	điểm uốn	lõm	điểm uốn	lồi

Bảng trên cho thấy hàm f có hai điểm uốn ở $x = \pm\sqrt{2/3}$.

So sánh, kết quả khớp với Hình 4.1.5 trang 83. Mặt khác từ hình ta khó mà đoán được vị trí chính xác của điểm uốn là tại $x = \pm\sqrt{2/3}$. ■

Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số

Cho một hàm cụ thể, để khảo sát và vẽ đồ thị của hàm về cơ bản ta kết hợp việc khảo sát đạo hàm bậc một và đạo hàm bậc hai ở phần trên, cùng với xét thêm một số thông tin thêm như các giới hạn của hàm tại các điểm hàm không xác định hay giới hạn của hàm ở $-\infty, \infty$ (được gọi là các tiệm cận đứng và tiệm cận ngang). Việc này đã được làm nhiều ở trung học.

Ví dụ 4.2.17. Khảo sát hàm số

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$$

Ta khảo sát đạo hàm bậc nhất

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 36 = 6(x^2 + x - 6) = 6(x - 2)(x + 3)$$

$$f'(x) = 0 \iff x = 2, x = -3.$$

Bảng biến thiên cho đạo hàm bậc nhất:

x	$-\infty$	-3	2	∞		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		\nearrow	cực đại	\searrow	cực tiểu	\nearrow

Ta khảo sát đạo hàm bậc hai

$$f''(x) = 12x + 6$$

$$f''(x) = 0 \iff x = -1/2.$$

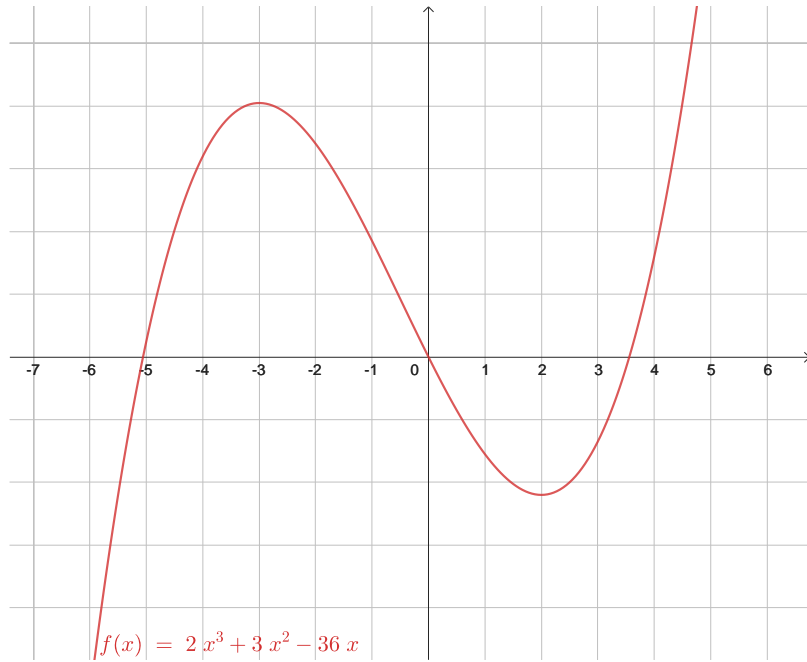
Bảng biến thiên cho đạo hàm bậc hai:

x	$-\infty$	$-1/2$	∞
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	lõm	điểm uốn	lồi

Đồ thị vẽ bằng máy tính ở Hình 4.2.4. ■

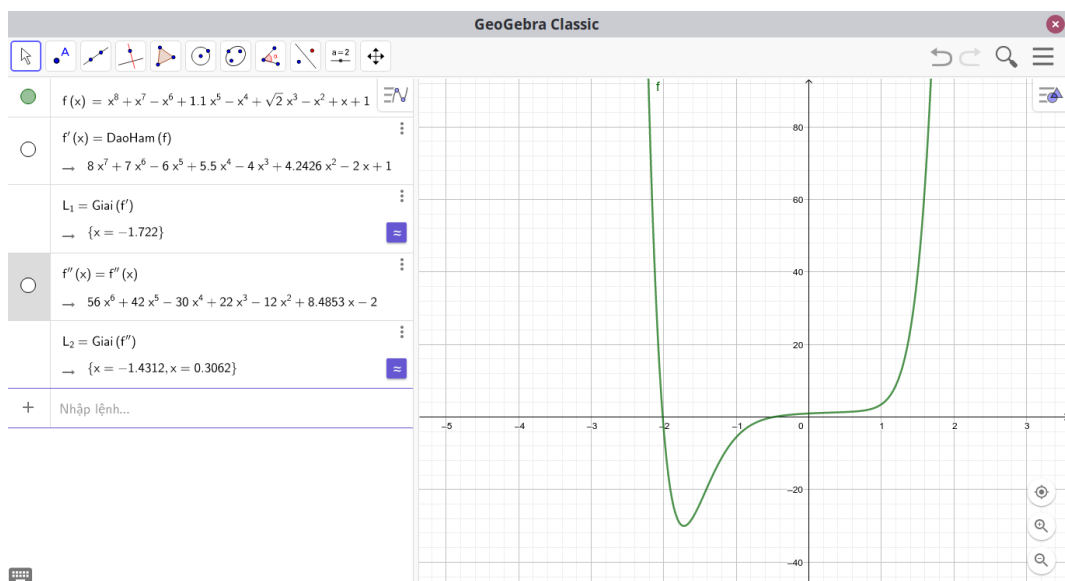
Ngày nay việc vẽ đồ thị của các hàm được cho bằng công thức sơ cấp trở nên dễ dàng nhờ chương trình máy tính. Người học cần sử dụng phần mềm máy tính để học môn này, trước hết để vẽ các đồ thị và làm các tính toán. Tài liệu này có phần Hướng dẫn sử dụng phần mềm máy tính ở trang 197.

Để từ đồ thị của hàm số thấy được các tính chất của hàm số, ta cần nắm vững các mối quan hệ giữa tính chất của hàm với đồ thị của hàm mà ta đã khảo sát trong mục này.

Hình 4.2.4: Đồ thị hàm $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$.

Ví dụ 4.2.18. Ở Hình 4.2.5 đồ thị của một hàm được cho bằng một công thức khá phức tạp được vẽ bằng phần mềm GeoGebra. Từ đồ thị ta có thể nhận xét những tính chất của hàm ở mức trực quan. Ta thấy hàm có một cực tiểu ở đâu đó giữa -2 và -1 , có hai điểm uốn ở gần -1 và gần 0 . Ta có thể phóng to hình vẽ để có những ước lượng chính xác hơn.

Với những nhận định trên, dùng phần mềm này ta có thể tính các đạo hàm bậc nhất và bậc hai, rồi giải xấp xỉ các phương trình, thu được giá trị xấp xỉ của điểm cực trị ở $x \approx -1,722$ và điểm uốn ở $x \approx -1,4312$ và $x \approx 0,3062$, với kí hiệu \approx nghĩa là “gần bằng”.

Hình 4.2.5: Đồ thị của hàm $f(x) = x^8 + x^7 - x^6 + 1,1x^5 - x^4 + \sqrt{2}x^3 - x^2 + x + 1$.

4.2.3 Xấp xỉ tuyến tính

Giả sử hàm f khả vi tại x thì

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

như thế khi h “nhỏ” thì $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ “gần bằng” $f'(x)$. Điều này có nghĩa là khi biến thiên của x là “nhỏ” thì tỉ lệ biến thiên trung bình “gần bằng” tỉ lệ biến thiên tức thời. Điều này dẫn tới $f(x+h) - f(x)$ “gần bằng” $f'(x)h$. Kí hiệu \approx là “gần bằng”, ta được:

$$h \approx 0 \implies f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h. \quad (4.2.3)$$

Viết $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ thì

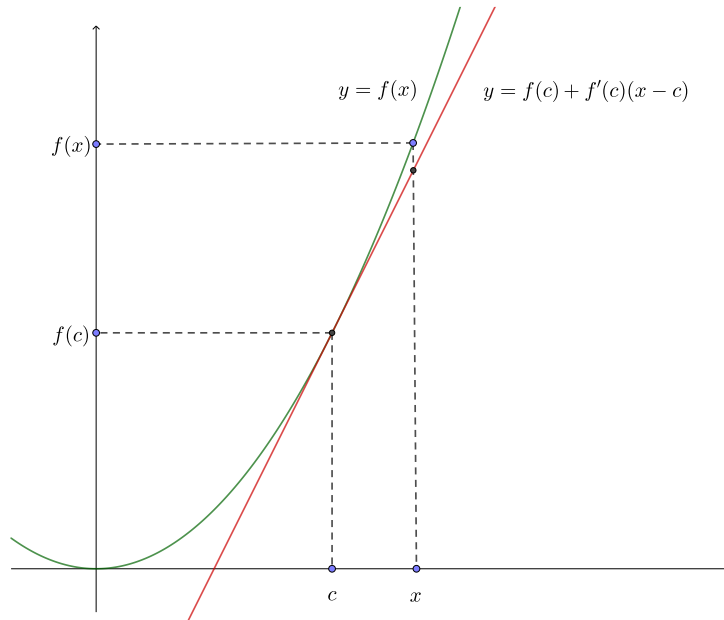
$$\Delta x \approx 0 \implies \Delta y \approx f'(x)\Delta x.$$

Có thể tóm tắt Nguyên lý xấp xỉ tuyến tính là *thay đổi giá trị của hàm gần bằng đạo hàm nhân thay đổi giá trị của biến*.

Viết ở dạng

$$x \approx c \implies f(x) \approx f(c) + f'(c)(x - c) \quad (4.2.4)$$

thì từ ý nghĩa hình học của đạo hàm, xem Hình 4.2.7, ta rút ra *xấp xỉ tuyến tính là xấp xỉ đồ thị bởi tiếp tuyến*¹.



Hình 4.2.6: Ý nghĩa hình học của xấp xỉ tuyến tính.

Xấp xỉ tuyến tính chỉ tính gần đúng mà chưa rõ sai số, không cho đẳng thức chính xác về giá trị thay đổi như ở Định lý giá trị trung bình Lagrange (4.1.2), nhưng có ưu điểm là đơn giản, dễ tính toán, và hiệu quả trong nhiều vấn đề.

¹tuyến tính nghĩa là có tính thẳng

Ví dụ 4.2.19. Ước lượng $\sqrt{1,01}$.

Ta thấy 1,01 gần bằng 1, nên ta dùng xấp xỉ tuyến tính của $f(x) = \sqrt{x}$ tại 1. Do $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ nên

$$\sqrt{1,01} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}(1,01 - 1) = 1,005.$$

Chú ý là trong trường hợp này xấp xỉ tuyến tính có thể được tính nhanh chóng mà không cần dùng máy tính. Giá trị cho bởi máy tính là 1,000499875.... ■

Ví dụ 4.2.20. Gọi $C(x)$ là chi phí để sản xuất x đơn vị sản phẩm của một món hàng. Với qui mô sản xuất rất lớn thì 1 đơn vị sản phẩm có thể được coi là một số rất nhỏ, và người ta có thể áp dụng xấp xỉ tuyến tính:

$$C(x+1) - C(x) \approx C'(x).$$

Điều này có nghĩa là $C'(x)$ xấp xỉ chi phí của sản phẩm thứ $x+1$. Trong kinh tế người ta gọi $C'(x)$ là **chi phí cận biên** (marginal cost), và dùng nó để xấp xỉ mức biến động chi phí khi qui mô sản xuất tăng lên 1 đơn vị.

Chẳng hạn $C'(1400) = 3$ có nghĩa là ở qui mô sản xuất 1400 đơn vị sản phẩm thì chi phí để sản xuất thêm 1 đơn vị sản phẩm gần bằng 3. ■

Ví dụ 4.2.21 (Phương pháp Newton giải gần đúng phương trình). Ta muốn giải phương trình $f(x) = 0$ để tìm một nghiệm x_0 . Giả sử ta đã có được một số x_1 gần bằng x_0 , chẳng hạn bằng cách quan sát đồ thị hay từ tính chất của hàm f . Ta muốn cải thiện nghiệm xấp xỉ này, tức là tìm một số x_2 gần x_0 hơn. Ý chính thứ nhất là thay vì tìm nghiệm của f thì ta tìm nghiệm của xấp xỉ tuyến tính của f tại gần x_1 , một việc dễ hơn nhiều. Một cách hình học, thay vì tìm giao điểm của đồ thị của f với trục x ta tìm giao điểm của đường thẳng tiếp tuyến của đồ thị của f tại điểm x_1 với trục x . Ta chờ đợi là trong nhiều trường hợp, điểm tìm được x_2 gần với nghiệm x_0 hơn x_1 . Ý chính thứ hai là lặp lại quá trình này để cải thiện nghiệm xấp xỉ. Xem Hình 4.2.7.

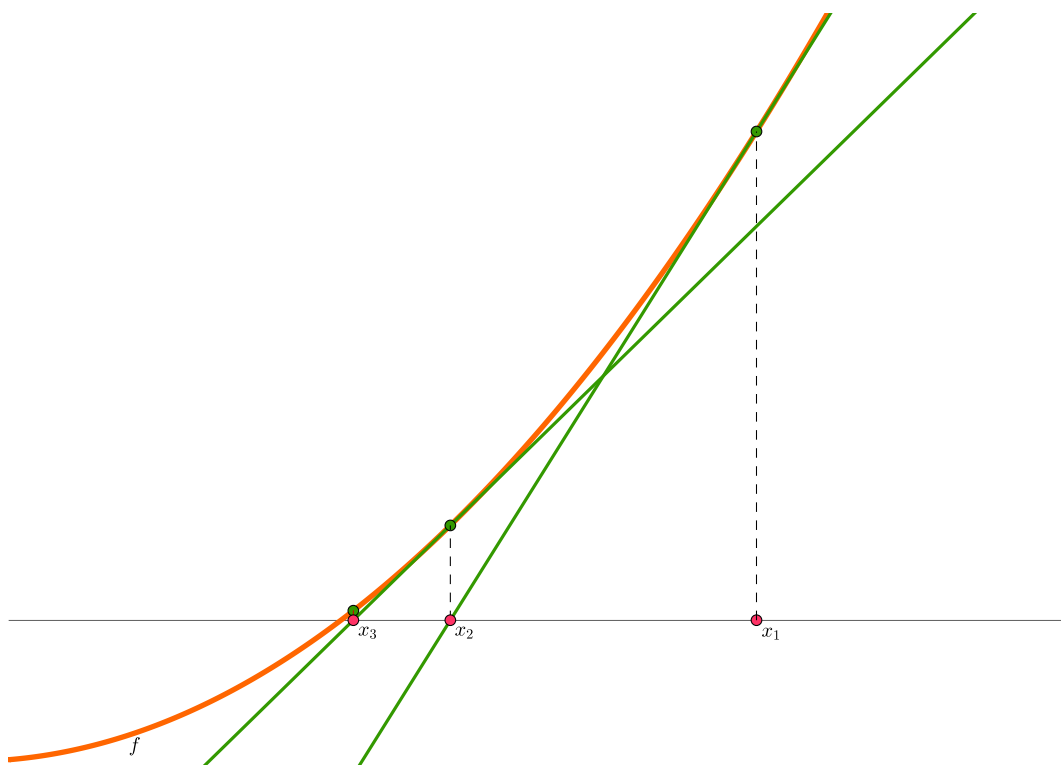
Với mỗi $n \geq 1$, điểm x_{n+1} là nghiệm của xấp xỉ tuyến tính tại x_n , tức là nghiệm của phương trình $f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0$, cũng là phương trình giao điểm của tiếp tuyến của đồ thị của hàm f tại điểm x_n với trục x . Giải phương trình này tìm x ta được công thức lặp là

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Một ví dụ, để tính $\sqrt{2}$ ta có thể giải phương trình $x^2 = 2$. Áp dụng phương pháp Newton với $f(x) = x^2 - 2$ ta có công thức lặp

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}.$$

Chọn khởi đầu với $x_1 = 2$, ta tính được $x_2 = \frac{3}{2} = 1,5$, $x_3 = \frac{17}{12} = 1,416666\dots$, $x_4 = \frac{577}{408} = 1,414215\dots$. Trong khi đó máy tính cho $\sqrt{2} = 1,414213\dots$. Như thế chỉ với 4 bước ta đã tính được đúng tới 5 chữ số thập phân. ■



Hình 4.2.7: Minh họa ý của phương pháp Newton tìm nghiệm gần đúng.

Ta khảo sát thêm về sai số của phép xấp xỉ tuyến tính. Giả sử hàm f có đạo hàm tại x . Ta có

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) = 0,$$

dẫn tới

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h} = 0,$$

vậy đặt $r(h) = f(x+h) - f(x) - f'(x)h$ thì $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$ và

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + r(h). \quad (4.2.5)$$

Do điều này ta nói *sai số trong xấp xỉ tuyến tính là “vô cùng bé” so với sai số của biến*. Ở mục Công thức Taylor 6.2.1, Ví dụ 6.2.5, ta sẽ trở lại vấn đề này.

Trong một số tài liệu xấp xỉ tuyến tính còn được diễn đạt thông qua “vi phân”.

4.2.4 Quy tắc l'Hôpital và ứng dụng trong tính giới hạn

Giả sử ta muốn tìm giới hạn của tỉ số $\frac{f(x)}{g(x)}$ khi x tiến tới a . Nếu xảy ra cả $f(x)$ và $g(x)$ cùng tiến về 0 hoặc cùng tiến về ∞ thì ta chưa thể đưa ra kết quả ngay được. Hai trường hợp này được gọi lần lượt là *dạng vô định* $\frac{0}{0}$ và $\frac{\infty}{\infty}$. Ta có một quy tắc

rất thuận tiện được gọi là quy tắc l'Hôpital¹, nói rằng dưới những điều kiện nhất định, với dạng vô định $\frac{0}{0}$ hay $\frac{\infty}{\infty}$ thì

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ta có thể giải thích phương pháp này trong trường hợp đơn giản như sau. Giả sử f và g liên tục quanh a và $f(a) = g(a) = 0$, do đó ta có dạng vô định $\frac{0}{0}$. Với xấp xỉ tuyến tính khi $x \approx a$ thì $f(x) \approx f'(a)(x - a)$ và $g(x) \approx g'(a)(x - a)$, do đó $\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f'(a)}{g'(a)}$.

Để lý luận chính xác ta dùng các định lý giá trị trung bình. Ta xem xét chi tiết hơn dưới đây.

Dạng vô định $\frac{0}{0}$

Mệnh đề 4.2.22. *Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ khả vi trong khoảng (a, b) và $g'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a, b)$. Nếu $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ bằng một số thực hoặc $-\infty$ hoặc ∞ , thì*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Mệnh đề vẫn đúng nếu thay giới hạn $x \rightarrow a^+$ bằng $x \rightarrow b^-$ hoặc $x \rightarrow c$ với $c \in (a, b)$. Trường hợp $a = -\infty$ và $b = \infty$ mệnh đề cũng đúng.

Chứng minh. Xét trường hợp a là số thực. Ta xây dựng hai hàm mới

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } a < x < b, \\ 0 & \text{nếu } x = a, \end{cases}$$

và

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{nếu } a < x < b, \\ 0 & \text{nếu } x = a. \end{cases}$$

Hai hàm này đơn giản là mở rộng liên tục của f và g lên $[a, b)$. Khi đó ta có thể kiểm được F và G thỏa các giả thiết của Định lý giá trị trung bình Cauchy 4.1.14 cho đoạn $[a, x]$ với mọi x thuộc (a, b) , do đó tồn tại c thuộc (a, x) sao cho

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Từ đẳng thức trên có thể rút ra

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

¹l'Hôpital là tên một nhà toán học sống vào cuối thế kỉ 17, được đọc theo tiếng Pháp tựa như Lô-pi-tan, và còn được viết là l'Hospital.

Trường hợp $x \rightarrow b^-$ với b hữu hạn ta chứng minh tương tự.

Trường hợp $a = -\infty$ ta đổi biến $t = \frac{1}{x}$. Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})}.$$

Về phải đã trở về trường hợp vô định đã chứng minh ở trên với $b = 0$. Áp dụng Quy tắc l'Hôpital cho trường hợp này ta được

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\frac{d}{dt} f(\frac{1}{t})}{\frac{d}{dt} g(\frac{1}{t})} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f'(\frac{1}{t}) \cdot \frac{-1}{t^2}}{g'(\frac{1}{t}) \cdot \frac{-1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Trường hợp $b = \infty$ ta giải quyết tương tự, đổi biến $t = \frac{1}{x}$ và đưa về trường hợp $a = 0$. \square

Ví dụ 4.2.23. Ta làm lại Ví dụ 2.1.14, tìm

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

bằng phương pháp mới. Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \left(= \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 1)'}{(x^2 - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x}{2} = \frac{3}{2}.$$

■

Chú ý là nếu $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ vẫn còn ở dạng vô định $\frac{0}{0}$ và các điều kiện được thỏa thì ta có thể áp dụng tiếp quy tắc l'Hôpital một lần nữa.

Ví dụ 4.2.24. Áp dụng quy tắc l'Hôpital ba lần:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{x - \sin x} \left(= \frac{0}{0} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x^3)'}{(x - \sin x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2}{1 - \cos x} \left(= \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(6x^2)'}{(1 - \cos x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12x}{\sin x} \left(= \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(12x)'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12}{-\cos x} = -12. \end{aligned}$$

■

Dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

Mệnh đề 4.2.25. Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ khả vi trong khoảng (a, b) và $g'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a, b)$. Nếu $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \pm\infty$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ bằng một số thực hoặc $-\infty$ hoặc ∞ , thì

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Mệnh đề vẫn đúng nếu thay giới hạn $x \rightarrow a^+$ bằng $x \rightarrow b^-$ hoặc $x \rightarrow c$ với $c \in (a, b)$. Trường hợp $a = -\infty$ và $b = \infty$ mệnh đề cũng đúng.

Chứng minh. Xét trường hợp $L = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ là một số thực (nếu $L = \pm\infty$ ta xét $\frac{g(x)}{f(x)}$). Với $c \in (a, b)$ ta viết

$$\frac{f(x)}{g(x)} - L = \frac{f(c) - Lg(c)}{g(x)} + \left(1 - \frac{g(c)}{g(x)}\right) \left(\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} - L\right).$$

Cho $\epsilon > 0$ bất kỳ. Tồn tại c thuộc (a, b) sao cho với mọi x thuộc (a, c) thì $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \epsilon$. Với mọi x thuộc (a, c) , áp dụng Định lý giá trị trung bình Cauchy 4.1.14 cho đoạn $[x, c]$, ta có $\theta \in (x, c)$ sao cho

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)},$$

do đó

$$\left|\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} - L\right| < \epsilon.$$

Mặt khác Vì $g(x) \rightarrow \pm\infty$ khi $x \rightarrow a^+$ nên tồn tại $c_1, a < c_1 < c$, sao cho với x thuộc (a, c_1) ta có

$$\left|\frac{f(c) - Lg(c)}{g(x)}\right| < \epsilon, \left|1 - \frac{g(c)}{g(x)}\right| < 2.$$

Từ đó ta suy ra được, với mọi $x \in (a, c_1)$,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \epsilon + 2\epsilon = 3\epsilon.$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Các trường hợp $x \rightarrow b^-$, $x \rightarrow c$, $a = -\infty$, $b = \infty$ ta làm tương tự như đã trình bày trong chứng minh của Mệnh đề 4.2.22. \square

Ví dụ 4.2.26. Ta làm lại Ví dụ 2.1.27 bằng phương pháp mới, tìm

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{3x + 4}.$$

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{3x + 4} \left(= \frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - 1)'}{(3x + 4)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

■

Ví dụ 4.2.27.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} \left(= \frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

■

Ví dụ 4.2.28.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} \left(= \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} \left(= \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

■

Các dạng vô định khác

Ta có thể dùng quy tắc l'Hôpital để khử các dạng vô định khác như $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , 1^∞ , ∞^0 , ... bằng cách tìm cách biến đổi để đưa về hai trường hợp trên hoặc về các kết quả đã biết. Ta minh họa bằng những ví dụ sau.

Ví dụ 4.2.29 (Dạng vô định $0 \cdot \infty$).

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x \left(= 0 \cdot \infty \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \left(= \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

■

Ví dụ 4.2.30 (Dạng vô định $\infty - \infty$).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) \left(= \infty - \infty \right) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} \left(= \frac{0}{0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x \ln x - x + 1)'}{[(x-1) \ln x]'} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} \left(= \frac{0}{0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\ln x)'}{(\ln x + 1 - \frac{1}{x})'} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1/x}{1/x + 1/x^2} = 1/2. \end{aligned}$$

■

Ví dụ 4.2.31 (Dạng vô định 0^0). Tìm

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x.$$

Dùng kết quả đã biết $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ và tính liên tục của hàm mũ, ta viết được

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1.$$

Vậy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1.$$

Người ta cũng hay trình bày lời giải này theo cách trước hết lấy \ln , ta tính được

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x^x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0,$$

suy ra $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$.

■

Ví dụ 4.2.32 (Dạng vô định 1^∞). Tính

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Lấy hàm \ln , ta có $\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Ta tính bằng quy tắc l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) (= \infty \cdot 0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1.$$

Dùng tính liên tục của hàm mũ, ta viết được

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^1 = e.$$

Vậy ta thu được một kết quả đáng chú ý:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (4.2.6)$$

■

Ví dụ 4.2.33 (Mô hình lãi nhập vốn liên tục). Trong Ví dụ 1.2.6 ta đã khảo sát mô hình lãi nhập vốn sau những khoảng thời gian rời rạc, với số lần hữu hạn, và được công thức $A(t) = A(0)(1 + r)^t$. Tuy nhiên có những đại lượng, như số cá thể của những quần thể vi khuẩn, có thể thay đổi rất nhanh trong khoảng thời gian tương đối nhỏ, khiến cho sử dụng những mô hình liên tục là thích hợp hơn.

Giả sử bây giờ trong mỗi đơn vị thời gian có n lần tính lãi (hay sinh sản), và do đó có n lần lãi nhập vốn. Như thế sau khoảng thời gian t có nt lần tính lãi, và giá trị của đại lượng A là

$$A(t) = A(0) \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

Mô hình lãi nhập vốn liên tục, còn gọi là “lãi kép”, xảy ra khi số lần tính lãi n trong một đơn vị thời gian tiến ra vô cùng. Vậy bài toán là tính

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

Ta viết

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r} rt}.$$

Đặt $x = \frac{n}{r}$, từ định nghĩa hoặc sử dụng Mệnh đề 2.1.18 hay 6.1.46 ta đưa bài toán từ giới hạn của dãy về giới hạn của hàm thực:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{xrt} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{rt} = e^{rt}.$$

Vậy ta thu được mô hình lãi nhập vốn liên tục là

$$A(t) = A(0)e^{rt}.$$

Đây cũng là một mô hình dân số tăng liên tục, được khảo sát tiếp theo ở [BMGT2, Chương 4]. ■

Ví dụ 4.2.34. Tính

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x^{\frac{1}{1-x}}.$$

Lấy hàm \ln , ta có $\ln x^{\frac{1}{1-x}} = \frac{\ln x}{1-x}$. Ta tính bằng quy tắc l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{1-x} \left(= \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{-x} = -1.$$

Dùng tính liên tục của hàm mũ, ta viết được

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\ln x^{\frac{1}{1-x}}} = e^{-1} = 1/e.$$

■

Ví dụ 4.2.35 (Dạng vô định ∞^0). Tính

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}.$$

Lấy hàm \ln , ta có $\ln x^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \ln x$. Ta tính bằng quy tắc l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \left(= \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Dùng tính liên tục của hàm mũ, ta viết được

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = e^0 = 1.$$

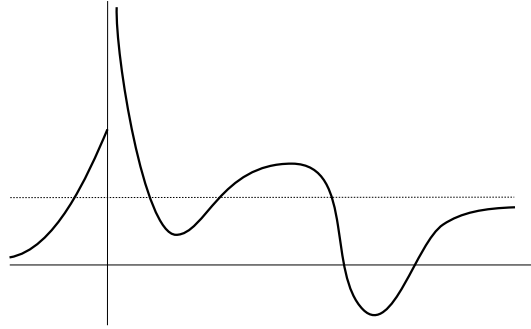
■

Bài tập

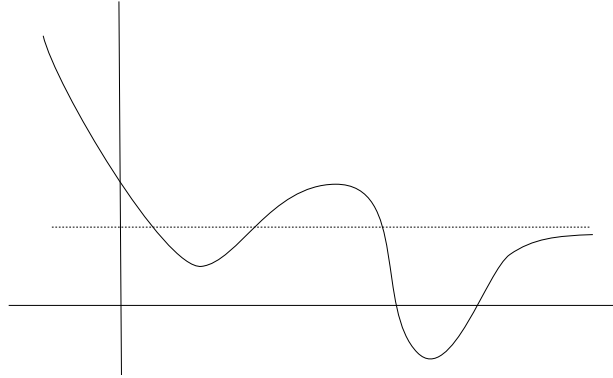
Khảo sát hàm số

4.2.1. Từ đồ thị ở Hình 4.2.8, hãy đặt tên cho các điểm quan tâm và chỉ ra tất cả các tính chất quan sát được, như: miền xác định, sự liên tục, sự khả vi, sự tăng, sự giảm, cực trị địa phương, cực trị toàn cục, tính lồi, tính lõm, điểm uốn, tiệm cận ...

4.2.2. Từ đồ thị ở Hình 4.2.9, hãy đặt tên cho các điểm quan tâm và chỉ ra tất cả các tính chất quan sát được, như: miền xác định, sự liên tục, sự khả vi, sự tăng, sự giảm, cực trị địa phương, cực trị toàn cục, tính lồi, tính lõm, điểm uốn, tiệm cận ...



Hình 4.2.8



Hình 4.2.9

4.2.3. GDP hằng năm của Việt Nam từ năm 2010 tới 2012 được cho trong bảng sau.

Năm	2010	2011	2012
tốc độ tăng trưởng GDP	6,4%	6,2%	5,2%

Hãy phác họa đồ thị của GDP of Việt Nam theo thời gian, thể hiện tính tăng/giảm, lồi/lõm.

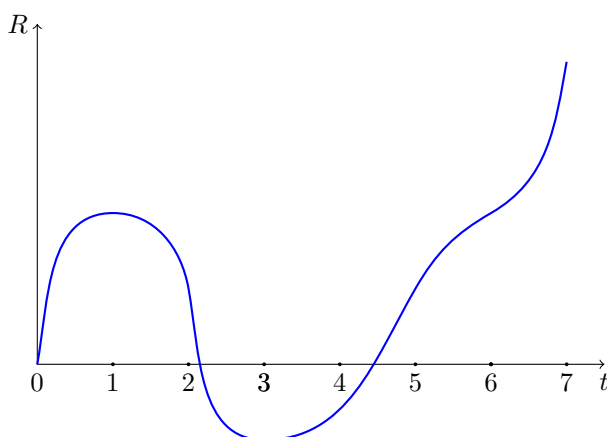
4.2.4. Dưới đây là các phát biểu về tình hình kinh doanh của một doanh nghiệp, dựa theo các đồ thị doanh số theo thời gian kèm theo. Hãy tương ứng mỗi đồ thị với phát biểu miêu tả nó.



- (a) Triển vọng tốt, tốc độ tăng trưởng ngày càng tăng.
- (b) Đang giảm sút, nhưng không nhanh như trước.
- (c) Đang giảm sút, và tình hình ngày càng tệ hơn.
- (d) Đang tăng trưởng, nhưng tốc độ tăng trưởng chậm lại.
- (e) Tốc độ tăng trưởng đã từng giảm nhưng nay đang tăng.
- (f) Tốc độ tăng trưởng đã từng tăng nhưng nay đang giảm.

4.2.5. Hình 4.2.10 dưới đây là đồ thị của doanh thu R của một doanh nghiệp theo thời gian t . Từ đồ thị hãy cho biết khi nào những điều sau xảy ra:

- (a) Triển vọng rất lạc quan: doanh thu đang tăng và ngày càng tăng nhanh hơn.
- (b) Doanh thu đang giảm sút nhưng tình hình đang được cải thiện.



Hình 4.2.10

- (c) Doanh thu đang giảm sút và tình hình ngày càng tệ hơn.
- (d) Doanh thu đang tăng nhưng đang trở nên ổn định.

4.2.6. Hãy vẽ đồ thị của hàm f thỏa tất cả các tính chất sau:

- (a) cực đại địa phương ở $(3, 4)$,
- (b) cực đại toàn cục ở $(-2, 6)$,
- (c) cực tiểu địa phương ở $(1, 2)$
- (d) điểm uốn ở $(-1, 5)$, $(2, 3)$, $(4, 1)$,
- (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$,
- (f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

4.2.7. Hãy vẽ đồ thị của hàm f thỏa tất cả các tính chất sau:

- (a) cực đại địa phương ở $x = -3$, $x = 1$,
- (b) cực tiểu địa phương ở $x = -1$, $x = 3$,
- (c) lõm trên $(-\infty, -2)$, $(0, 2)$,
- (d) lồi trên $(-2, 0)$, $(2, 4)$,
- (e) không liên tục ở $x = 4$,
- (f) không khả vi ở $x = 2$.

4.2.8. Hãy vẽ đồ thị của hàm f thỏa tất cả các tính chất sau:

- (a) cực đại địa phương ở $x = -1$, $x = 3$,
- (b) cực tiểu địa phương ở $x = -3$, $x = 1$,
- (c) lõm trên $(-2, 0)$, $(2, \infty)$,
- (d) lồi trên $(-\infty, -2)$, $(0, 2)$,
- (e) cắt trục x ở $x = 4$,
- (f) cắt trục y ở $y = 1$.

4.2.9. Hãy vẽ đồ thị của hàm f thỏa tất cả các tính chất sau:

- (a) Xác định trên khoảng $(-5, 6)$,
- (b) $\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = -\infty$,
- (c) Không liên tục ở $x = -3$, và liên tục ở mọi điểm khác,
- (d) Không khả vi ở $x = 1$,
- (e) $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = 2$.

4.2.10. Tìm các giá trị cực đại và cực tiểu toàn cục, cực đại và cực tiểu địa phương, tính lồi, lõm, điểm uốn, và vẽ đồ thị.

- (a) $f(x) = \frac{1}{x}$.
- (b) $f(x) = \sin x$.
- (c) $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & \text{nếu } -2 \leq x < 0 \\ 2x - 1, & \text{nếu } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$
- (d) $x^2 e^x$.

4.2.11. Cho

$$f(x) = \begin{cases} 3^x - 2, & x < 0, \\ \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 4, \\ \frac{8}{x}, & x > 4. \end{cases}$$

- (a) Tìm miền giá trị của f .
- (b) Hàm f liên tục trên những khoảng nào?
- (c) Tìm các điểm tới hạn của hàm f .
- (d) Vẽ đồ thị của hàm số f .

4.2.12. Một quần thể vi khuẩn tăng gấp đôi số lượng sau mỗi giờ. Hãy tính tỉ suất tăng r trong mô hình tăng dân số liên tục $A(t) = A(0)e^{rt}$, và vẽ đồ thị của hàm này.

4.2.13. Sản lượng thu hoạch nông sản y phụ thuộc vào hàm lượng nitơ trong đất N , được cung cấp bằng phân đạm (urea). Người ta quan sát thấy nếu tăng lượng nitơ thì sản lượng tăng, nhưng tốc độ tăng sẽ giảm dần và sản lượng không vượt qua được một mức nhất định. Xét mô hình

$$y = C \frac{N}{N + K}$$

trong đó C và K là những hằng số dương. Hãy khảo sát và vẽ đồ thị của mô hình này để kiểm sự phù hợp của mô hình.

4.2.14. Thuốc được tiêm vào mạch máu của người và tan trong máu. Tỉ lệ thuốc trên đơn vị thể tích máu theo thời gian được mô hình hóa bằng hàm

$$f(t) = \frac{Ct}{t^2 + D},$$

trong đó t là thời gian kể từ khi được tiêm thuốc, C và D là những hằng số dương. Hãy khảo sát hàm này và phác họa đồ thị, gồm tăng giảm, cực trị, điểm uốn, lồi lõm, tiệm cận. Hãy xem xét sự phù hợp của mô hình.

4.2.15. Hàm số

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

có khi được gọi là một **hàm logistic** (logistic function), xuất hiện trong mô hình hóa (xem [BMGT2, Chương 4]), và trong máy học (hàm sigmoid).

- (a) Khảo sát tính tăng giảm của hàm.
- (b) Khảo sát tính lồi và tìm điểm uốn của hàm.
- (c) Vẽ đồ thị của hàm.

Bài toán cực trị

4.2.16. Một cửa hàng định bán các bản sao của một tấm tranh. Nếu bán 50 bản họ có thể tính giá 400 nghìn đồng/bản. Nếu muốn bán nhiều hơn 50 bản thì cứ thêm một bản nhiều hơn 50 cửa hàng phải giảm giá mỗi bản thêm 5 nghìn đồng. Hỏi cửa hàng nên bán bao nhiêu bản để có doanh thu lớn nhất?

4.2.17. Giá p (đơn vị tiền/đơn vị sản phẩm) và doanh số x (số đơn vị sản phẩm bán được) cho một sản phẩm nhất định được cho bởi phương trình

$$x = 100 - 20p,$$

gọi là phương trình nhu cầu.

- (a) Tìm hàm doanh thu (số tiền thu được) $R(x)$ từ việc bán x đơn vị sản phẩm.
- (b) Tìm doanh thu cận biên (marginal revenue), tức đạo hàm của doanh thu theo doanh số.
- (c) Tìm doanh thu cận biên khi doanh số là 40 đơn vị sản phẩm và giải thích ý nghĩa của con số này.
- (d) Tìm doanh số để được doanh thu lớn nhất.
- (e) Vẽ đồ thị của hàm R .
- (f) Hàm chi phí là $C(x) = \frac{9}{4}x - 15$. Vẽ đồ thị của hàm C trên cùng mặt phẳng với R .
- (g) Tìm doanh số để hòa vốn.
- (h) Tìm doanh số để có lợi nhuận tối đa.

4.2.18. Chứng tỏ để lợi nhuận đạt cực đại thì doanh thu cận biên phải đúng bằng chi phí cận biên.

4.2.19. Gọi $C(x)$ là chi phí sản xuất x đơn vị sản phẩm của một loại hàng hóa, thì chi phí trung bình cho mỗi đơn vị sản phẩm là

$$c(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

Chứng tỏ nếu chi phí trung bình là cực tiểu thì nó bằng chi phí cận biên.

4.2.20. Một hồ nước bị nhiễm khuẩn được xử lý bằng một hóa chất kháng khuẩn. Sau t ngày, số lượng vi khuẩn trên mỗi mililit nước được mô hình hóa bởi hàm

$$N(t) = 32 \left(\frac{t}{4} - 2 \ln \frac{t}{5} \right)$$

với $1 \leq t \leq 15$. Cho biết số lượng vi khuẩn cao nhất và thấp nhất là bao nhiêu và xảy ra khi nào.

4.2.21. Hóa chất được lưu trữ trong hai nhà kho. Trong tháng, khối lượng hóa chất trong nhà kho A được mô tả bởi phương trình sau

$$g(t) = \frac{1}{2}t^2 - 20t + 300, t \in [0, 30].$$

trong đó là khối lượng (tính theo kilogram) và là thời gian (tính theo ngày). Cũng trong tháng, khối lượng hóa chất trong nhà kho B được mô tả bởi phương trình sau

$$h(t) = -t^2 + 30t + 80, t \in [0, 30].$$

- (a) Lúc $t = 5$, khối lượng hóa chất trong kho A nhiều hơn khối lượng trong kho B là bao nhiêu?
- (b) Tại thời điểm nào tổng khối lượng hóa chất được lưu trữ trong cả hai kho là nhiều nhất?
- (c) Chứng tỏ rằng trong khoảng thời gian, khối lượng hóa chất trong kho B luôn lớn hơn khối lượng hóa chất trong kho A.

4.2.22. Dữ liệu cho thấy tổng tài sản của Quỹ bảo hiểm xã hội theo thời gian có thể được mô hình hóa bởi hàm

$$f(t) = -0,0129t^4 + 0,3087t^3 + 2,1760t^2 + 62,8466t + 506,2955 \quad (0 \leq t \leq 35)$$

ở đó $f(t)$ được đo theo đơn vị tỉ đồng và t được đo theo năm, với $t = 0$ ứng với 1995.

- (a) Vẽ đồ thị của f dùng máy tính.
- (b) Khi nào thì tài sản của Quỹ đạt mức cao nhất?
- (c) Khi nào thì tài sản của Quỹ bắt đầu giảm sút?
- (d) Người ta dự đoán rằng Quỹ có thể bị vỡ (tài sản còn bằng 0) nếu như số người đóng bảo hiểm không tăng lên hoặc quyền lợi của người được hưởng bảo hiểm không bị giảm xuống. Dựa trên mô hình này, khi nào thì Quỹ sẽ vỡ?

4.2.23. Một mô hình được sử dụng cho năng suất Y của một cây trồng nông nghiệp dựa trên nồng độ nitơ N có trong đất (theo một đơn vị thích hợp) là

$$Y = \frac{kN}{1 + N^2}$$

với k là một hằng số. Hỏi nồng độ nitơ là bao nhiêu để cho năng suất lớn nhất?

4.2.24. Một quần thể động vật bị nhiễm bệnh. Sau t ngày, tỷ lệ phần trăm động vật bị nhiễm bệnh được mô hình hóa bởi hàm $p(t) = 8te^{-t/12}$ (đơn vị là phần trăm). Hỏi tỉ lệ này là lớn nhất khi nào?

4.2.25. Một hồ bị nhiễm khuẩn và được xử lý bằng một hóa chất kháng khuẩn. Sau t ngày, số lượng vi khuẩn trên mỗi mililit nước được mô hình hóa bởi hàm $N(t) = 32(\frac{t}{4} - 2\ln \frac{t}{5})$ với $1 \leq t \leq 15$. Hãy tìm số vi khuẩn nhiều nhất và ít nhất là bao nhiêu và xảy ra trong thời gian nào.

4.2.26. Một viên đạn được bắn lên với một tốc độ đầu cho trước bay dưới tác động của trọng trường. Hãy tìm góc bắn sao cho đạn bay xa nhất.

4.2.27. Trong số các tam giác cân có cùng chu vi, hãy tìm tam giác có diện tích lớn nhất.

4.2.28. Lon nước ngọt có hình dạng một mặt trụ với đáy hình tròn. Giả sử lon cần chứa lượng nước ngọt là 0,3 lít (1 lít bằng 1000 cm^3). Hãy tìm kích thước lon để lượng vật liệu làm lon (diện tích bề mặt lon) là nhỏ nhất.

4.2.29. Kim loại được dùng để làm một cái hộp với kích thước dài a , rộng a , cao h (đáy là một hình vuông). Tìm kích thước hộp để đạt thể tích 1000 cm^3 và lượng kim loại dùng là tối thiểu.

Xấp xỉ tuyến tính

4.2.30. Hãy tính gần đúng các giá trị sau bằng xấp xỉ tuyến tính.

(a) $(1,999)^4$.

(e) $\tan(44^\circ)$.

(b) $\sin(1^\circ)$.

(f) $\sqrt{99,8}$.

(c) $\sqrt[3]{1001}$

(g) $\sqrt[3]{999}$.

(d) $1/4,002$.

4.2.31. Hãy kiểm các xấp xỉ tuyến tính sau.

(a) $\sin x \approx x, x \approx 0$.

(b) $e^x \approx x + 1, x \approx 0$.

(c) $\ln x \approx x - 1, x \approx 1$.

4.2.32. Tìm xấp xỉ tuyến tính của hàm số $f(x) = \ln(1+x)$ tại $x=0$, áp dụng để xấp xỉ giá trị của $\ln(0,9)$ và $\ln(0,99)$.

4.2.33. Tìm xấp xỉ tuyến tính của hàm số $f(x) = \sqrt[4]{15+x^2}$ tại $x=1$, áp dụng để xấp xỉ giá trị của $\sqrt[4]{16,44}$ và $\sqrt[4]{16,21}$.

4.2.34. Hãy chứng minh công thức xấp xỉ, với $k \in \mathbb{R}, x \approx 0$:

$$(1+x)^k \approx 1+kx.$$

Từ đó hãy rút ra:

(a) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$.

(b) $\frac{1}{1-x} \approx 1+x$.

4.2.35. Một vỏ cầu bằng thép có đường kính 1 m và độ dày vỏ là 1 mm . Hãy dùng xấp xỉ tuyến tính (hay có cách nói khác là dùng “vi phân”) để ước tính thể tích lượng thép làm vỏ cầu. Thể tích hình cầu đường kính d được cho bởi công thức $V = \frac{\pi}{6}d^3$.

4.2.36. Dùng phương pháp Newton để tính $\sqrt[4]{3}$ với giá trị khởi đầu 1 với 5 bước lặp.

4.2.37. Dùng phương pháp Newton để tìm một nghiệm xấp xỉ của phương trình $2x^3 + x^2 - x + 1 = 0$ tới 4 chữ số thập phân.

Quy tắc l'Hôpital

4.2.38. Tìm các giới hạn sau:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$. (k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(\cos x)}$.
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$. (l) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$.
- (c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{2 \cos x}$. (m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - e^x + 1}{1 - e^{x^2}}$.
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-100} e^{-1/x^2}$. (n) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2017x^2 - 2017 + \sin(x-1)}{\tan(x-1)}$.
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$. (o) $\lim_{x \rightarrow 2017^-} (x - 2017)^3 e^{\sin\left(\frac{1}{2017-x}\right)}$.
- (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\tan x}$. (p) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + x})$.
- (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(2x)^{\frac{3}{x^2}}$. (q) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$.
- (h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$. (r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^2}$.
- (i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$. (s) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x)(\ln(x-1))$.
- (j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)(\ln x)$. (t) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$.

4.2.39. Hãy xem phương pháp l'Hôpital có hiệu quả với giới hạn này hay không:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}.$$

Tìm giới hạn này.

Các bài toán khác

4.2.40. Một cái thang dài 5 mét đang dựa vào tường. Khi đỉnh thang đang ở cách nền 3 mét thì thang bị trượt, đỉnh thang tuột xuống với tốc độ 0,3 mét mỗi giây.

- (a) Đặt x là khoảng cách từ đáy thang tới tường, y là khoảng cách từ đỉnh thang tới nền, và t là thời gian kể từ khi thang trượt. Hãy tìm một phương trình liên hệ x , y , và t .
- (b) Lấy đạo hàm của phương trình trên theo t , hãy tính $x'(t)$.
- (c) Đáy thang đang trượt xa khỏi bức tường với tốc độ bao nhiêu?

Đây là một **bài toán liên hệ tỉ lệ** (related rates).

4.2.41. Một máy bay đang bay ở cao độ 4000 m so với mặt đất. Một trạm radar cố định trên mặt đất dùng tín hiệu vô tuyến để theo dõi chiếc máy bay này. Đo tín hiệu phản xạ từ máy bay về radar cho thấy tại thời điểm máy bay cách radar 5000 m thì khoảng cách từ máy bay tới radar đang tăng với tốc độ 150 m/s.

- (a) Đặt d là khoảng cách từ radar tới máy bay, x là khoảng cách từ radar tới chiếu vuông góc của máy bay xuống mặt đất, và t là thời gian. Hãy tìm một phương trình liên hệ d , x , t .
- (b) Hãy lấy đạo hàm theo t của phương trình tìm được ở trên. Từ đó hãy tính $x'(t)$.
- (c) Hãy xác định tốc độ của máy bay tại thời điểm trên.

4.2.42. Một bồn nước hình trụ đáy tròn bán kính 1 m được bơm nước vào với tốc độ $2 \text{ m}^3/h$.

- (a) Hãy tìm một công thức liên hệ thể tích V của nước trong bồn, chiều cao h của mực nước trong bồn, và thời gian t .

(b) Hãy lấy đạo hàm của công thức tìm được theo t để tính $h'(t)$.

(c) Hỏi mực nước trong bồn đang dâng lên với tốc độ bao nhiêu?

4.2.43. Một bồn chứa nước hình trụ với đáy là một hình tròn bán kính 5 mét. Giả sử nước đang được tháo ra khỏi bồn với tốc độ 1 mét khối mỗi giây. Hỏi mực nước trong bồn đang thay đổi với tốc độ bao nhiêu?

4.2.44. Một hồ bơi có hình hộp chữ nhật dài 50 m và rộng 15 m. Nước đang được bơm vào hồ với tốc độ $1 m^3$ mỗi phút. Hỏi mực nước trong hồ đang dâng lên nhanh như thế nào?

4.2.45. Hai chiếc xe đang đi trên hai con đường vuông góc nhau tới cùng một ngã tư. Tại thời điểm đo, xe thứ nhất đang chạy với tốc độ 60 km/h và đang cách ngã tư 300 m, xe thứ hai đang chạy với tốc độ 80 km/h và đang cách ngã tư 400 m. Hỏi khoảng cách giữa hai xe lúc đó đang gần lại với tốc độ bao nhiêu?

4.2.46. Chứng tỏ với mọi số nguyên dương n thì

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

Hãy rút ra điều trên cũng đúng nếu n là số thực dương bất kì. Điều này thể hiện rằng *hàm mũ tăng nhanh hơn hàm lũy thừa*.

4.2.47. Chứng tỏ với mọi số thực dương α thì

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$$

Điều này thể hiện rằng *hàm lũy thừa tăng nhanh hơn hàm log*.

4.2.48. Cho $f(x) = x^{1/x}$.

(a) Tìm $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

(b) Tìm $f'(x)$.

(c) Số nào là lớn hơn, $3^{1/3}$ hay $\pi^{1/\pi}$?

4.2.49. Dùng phương pháp quy nạp và khảo sát hàm số, hãy chứng minh với mọi số tự nhiên n và mọi số thực $x \geq 0$ thì

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

4.2.50. Với hàm như $f(x) = x^4$ ta có $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) > 0$. Tiêu chuẩn đạo hàm bậc hai có hiệu quả để tìm tính chất cực trị của f tại 0 hay không? Chỉ từ dữ liệu đã cho tại 0 có thể rút ra tính chất cực trị của f tại 0 được không?

Chương 5

Phép tính tích phân

5.1 Định nghĩa và tính chất của tích phân

Khái niệm chiều dài, diện tích, thể tích đã hình thành từ lâu trong lịch sử nhằm phục vụ nhu cầu đo đạc. Ngày nay các khái niệm này được mỗi người tiếp nhận từ nhỏ. Tuy ta có thể hình dung chúng là các số đo độ lớn, độ chiếm chỗ của vật thể, nhưng thật sự không dễ trả lời câu hỏi: diện tích là gì?

Diện tích của một hình chữ nhật được cho bằng tích của chiều dài và chiều rộng của nó. Diện tích của một tam giác ta biết là bằng phân nửa của diện tích của một hình chữ nhật có cùng đáy và cùng chiều cao. Diện tích của một đa giác được tìm ra bằng cách chia nhỏ đa giác này thành các tam giác, rồi cộng diện tích của các tam giác này lại. Với những hình phức tạp thì có thể xấp xỉ bằng những hình đã biết.

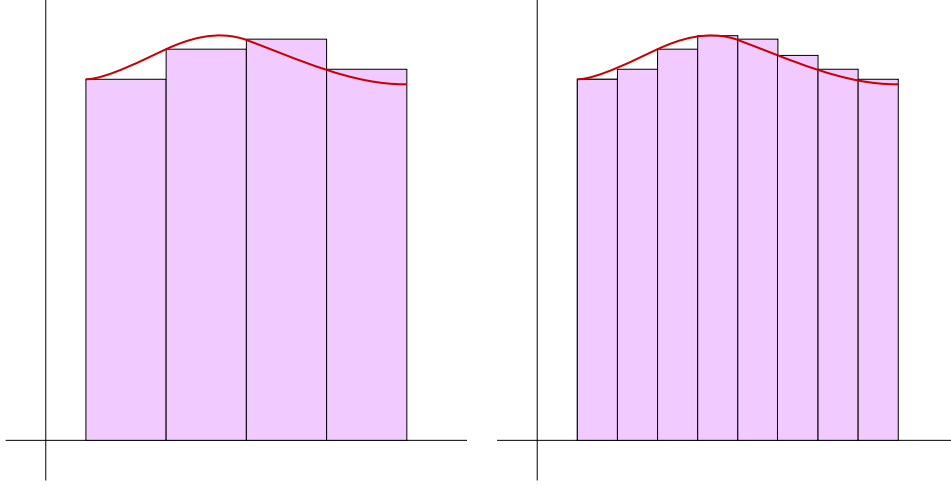
Có thể cho rằng trong lịch sử tuy khái niệm diện tích chưa được làm rõ nhưng việc sử dụng khái niệm này trong thực tế chủ yếu dựa trên nguyên tắc sau: đưa ra một mẫu vật có diện tích đơn vị, và dùng tính cộng, tức là diện tích của hai vật rời nhau thì bằng tổng diện tích của mỗi vật, và tính không thay đổi qua phép dời hình, để đo diện tích của các vật khác.

Từ khoảng thế kỉ 17 xuất hiện nhu cầu chính xác hóa, và phát triển khái niệm diện tích. Vấn đề này gắn liền với vấn đề xây dựng một phép tính tổng tổng quát, gọi là tích phân. Dưới đây chúng ta thảo luận một cách làm, được gọi là tích phân Riemann.

5.1.1 Định nghĩa tích phân

Cho hàm $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ không âm. Ta muốn tìm “diện tích” của miền bên dưới đồ thị của hàm f bên trên khoảng I . Ta xấp xỉ miền đó bằng những hình chữ nhật với đáy là một khoảng con của I và chiều cao là một giá trị của f trong khoảng con đó. Ta hy vọng rằng khi số hình chữ nhật tăng lên thì tổng diện tích của các hình chữ nhật có giá trị gần đúng với diện tích hình đang xét. Xem Hình 5.1.1.

Bây giờ ta làm chi tiết. Đầu tiên ta định nghĩa diện tích của một hình chữ nhật



Hình 5.1.1: Xấp xỉ bằng các hình chữ nhật.

$[a, b] \times [c, d]$ là số thực $(b - a)(d - c)$, tức là tích chiều rộng với chiều cao của hình chữ nhật. Điều này khớp với các nguyên lý đo diện tích đã bàn ở đầu mục này, và khớp với các công thức đã được đưa ra ở trung học.

Chia khoảng $[a, b]$ thành các khoảng con bằng các điểm

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Trên mỗi khoảng $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$, lấy một điểm x_i^* nào đó làm điểm mẫu (điểm mẫu thử), còn gọi là điểm đại diện. Giá trị $f(x_i^*)$ là một giá trị đại diện cho giá trị của f trên $[x_{i-1}, x_i]$. Đó cũng là chiều cao của hình chữ nhật với đáy $[x_{i-1}, x_i]$ xấp xỉ miền dưới đồ thị của hàm f bên trên $[x_{i-1}, x_i]$. Diện tích của hình chữ nhật này là $f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$. Tổng

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

là một xấp xỉ của “diện tích” của miền bên dưới đồ thị của f bên trên I , được gọi là một **tổng Riemann**¹. Xem Hình 5.1.2.

Ví dụ 5.1.1. Cho hàm số f định bởi $f(x) = x^3 + 1$ trên đoạn $[2, 10]$. Ta muốn tính xấp xỉ diện tích bên dưới đồ thị hàm f .

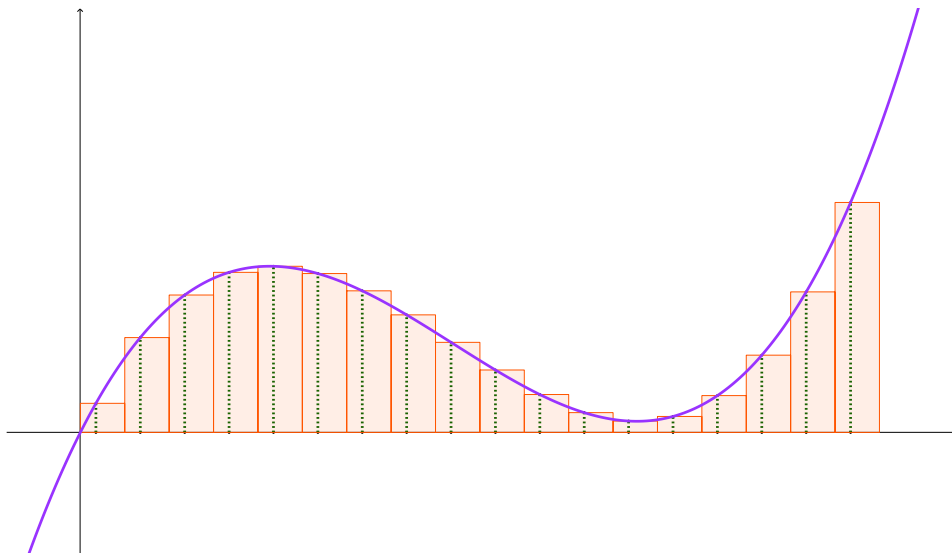
Ta viết biểu thức tổng Riemann của f trên $[2, 10]$ bằng cách chia đoạn này thành 16 đoạn con đều nhau, điểm lấy mẫu là trung điểm của mỗi đoạn con.

Chiều dài mỗi đoạn con là $\Delta x = \frac{10-2}{16} = \frac{1}{2}$. Các điểm chia là $x_i = 2 + \frac{10-2}{16}i = 2 + \frac{1}{2}i$ với $1 \leq i \leq 16$. Trung điểm của mỗi đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$ là $x_i^* = 2 + \frac{10-2}{16}(i-1) + \frac{10-2}{16 \cdot 2} = \frac{9}{4} + \frac{1}{2}i$. Tổng Riemann tương ứng là

$$\sum_{i=1}^{16} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{16} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{9}{4} + \frac{1}{2}i \right)^3 + 1 \right] = 3033,75.$$

Giá trị này xấp xỉ diện tích bên dưới đồ thị hàm $f(x) = x^3 + 1$ trên đoạn $[2, 10]$. ■

¹Bernhard Riemann đã đề xuất một định nghĩa chặt chẽ cho tích phân vào khoảng năm 1854.



Hình 5.1.2: Tổng Riemann.

Ví dụ 5.1.2. Một chiếc xe di chuyển thẳng theo một chiều, với tốc độ tức thời tại thời điểm t là $v(t)$ (đơn vị là km/h). Ta có dữ liệu tốc độ định kì mỗi 30 phút trong bảng sau.

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$v(t)$	0	60	80	70	55	80	60

Hãy ước lượng chiều dài quãng đường đi được.

Với mỗi khoảng thời gian $[t_{i-1}, t_i]$ ta có thể tính chiều dài quãng đường đi được bằng cách tính tốc độ tại thời điểm đầu khoảng thời gian này nhân với chiều dài khoảng thời gian này: $v(t_{i-1})(t_i - t_{i-1})$. Chiều dài quãng đường đi được khi đó được cho bởi

$$0 \cdot 0,5 + 60 \cdot 0,5 + 80 \cdot 0,5 + 70 \cdot 0,5 + 55 \cdot 0,5 + 80 \cdot 0,5 = 172,5 \text{ km}.$$

Với mỗi khoảng thời gian $[t_{i-1}, t_i]$ ta cũng có thể tính quãng đường đi được bằng cách tính tốc độ tại thời điểm cuối khoảng thời gian này nhân với chiều dài khoảng thời gian này: $v(t_i)(t_i - t_{i-1})$. Chiều dài quãng đường đi được khi đó được cho bởi

$$60 \cdot 0,5 + 80 \cdot 0,5 + 70 \cdot 0,5 + 55 \cdot 0,5 + 80 \cdot 0,5 + 60 \cdot 0,5 = 202,5 \text{ km}.$$

Với hai cách tính trên ta được hai giá trị khác nhau. Ta chờ đợi rằng có một giá trị đúng của chiều dài quãng đường đi được, và khi ta dùng những khoảng thời gian nhỏ hơn để tính xấp xỉ thì giá trị xấp xỉ gần hơn tới giá trị đúng này. ■

Ví dụ 5.1.3. Tốc độ hấp thụ CO_2 của cây trong quá trình quang hợp P được cho bằng cách đo thể tích CO_2 được hấp thụ trên một đơn vị diện tích bề mặt lá cây trong một đơn vị thời gian (tính bằng phút). Số liệu thu thập được như sau:

t	0	10	40	55	60
$P(t)$	4,1	6,2	7,7	8,4	9,2

Ta muốn tính tổng lượng CO_2 được cây hấp thụ trong khoảng thời gian này, đo

bằng thể tích CO_2 hấp thụ trên một đơn vị diện tích bề mặt lá cây.

Trên mỗi khoảng thời gian nhỏ hơn, nếu ta lấy số liệu đo ở đầu khoảng thời gian làm giá trị đại diện, thì có ước lượng:

$$4,1 \cdot (10 - 0) + 6,2 \cdot (40 - 10) + 7,7 \cdot (55 - 40) + 8,4 \cdot (60 - 55) = 384,5.$$

Nếu ta lấy số liệu đo ở cuối khoảng thời gian làm giá trị đại diện, thì có ước lượng:

$$6,2 \cdot (10 - 0) + 7,7 \cdot (40 - 10) + 8,4 \cdot (55 - 40) + 9,2 \cdot (60 - 55) = 465.$$

Ta chờ đợi rằng có một giá trị đúng mà hai giá trị trên là giá trị gần đúng. ■

Ví dụ trên minh họa một tình huống mà ta muốn đưa ra một **tổng giá trị** của hàm f trên khoảng $I = [a, b]$. Ta chia nhỏ I thành những khoảng con nhỏ hơn, hi vọng rằng trên mỗi khoảng nhỏ hơn đó giá trị của hàm f thay đổi ít hơn, nhờ đó ta có thể xấp xỉ f bằng một hàm hằng với giá trị là một giá trị đại diện $f(x_i^*)$. Tổng giá trị của f trên khoảng $[x_{i-1}, x_i]$ được xấp xỉ bằng $f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$, vậy tổng giá trị của f trên I được xấp xỉ bằng

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}).$$

Ta chờ đợi rằng khi chia càng mịn thì xấp xỉ càng tốt hơn, và khi qua giới hạn thì được giá trị đúng. Quá trình này hoàn toàn trùng với quá trình tính diện tích ở trên.

Một cách chính xác, giới hạn của tổng Riemann là một số thực mà mọi tổng Riemann gần số thực đó tùy ý khi phép chia là đủ mịn:

Định nghĩa 5.1.4. Giả sử có một số thực L thỏa với mọi số thực $\epsilon > 0$ có số thực $\delta > 0$ sao cho với mọi cách chia

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

mà có chiều dài mỗi đoạn $[x_{i-1}, x_i]$ đều nhỏ hơn δ , thì với mọi cách chọn số thực $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, ta có

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) - L \right| < \epsilon.$$

Số thực L là duy nhất, được gọi là **tích phân** của f trên $[a, b]$, được kí hiệu là

$$\int_a^b f$$

hoặc

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Nếu tích phân tồn tại thì ta nói hàm **có tích phân** hay **khả tích**.

Mở rộng kí hiệu tích phân, với $a < b$ ta định nghĩa

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

và định nghĩa

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

Kí hiệu dx trong tích phân chủ yếu để chỉ tên của biến lấy tích phân chứ không có ý nghĩa độc lập.¹

Khi f khả tích thì ta có thể tính xấp xỉ tích phân của f với độ chính xác tùy ý bằng cách tính tổng Riemann.

Ví dụ 5.1.5. Nếu f là hàm hằng, có số thực c để $\forall x \in [a, b], f(x) = c$, thì mọi tổng Riemann của f rõ ràng đều bằng $c(b - a)$, do đó $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b c dx = c(b - a)$. ■

Từ cách xây dựng tích phân ta có thể thấy, nếu hàm là liên tục, thì khi giá trị của biến thay đổi nhỏ thì giá trị của hàm thay đổi nhỏ, nhờ đó sự xấp xỉ giá trị hàm bằng cách lấy giá trị đại diện có hiệu quả. Như vậy tính liên tục của hàm là thiết yếu để xấp xỉ được tốt, để có tích phân.

Định lý 5.1.6 (Hàm liên tục thì có tích phân). Nếu hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì tích phân $\int_a^b f$ tồn tại.

Một cách sơ lược, có thể chứng minh kết quả trên dựa vào lý luận rằng do tính liên tục, khi chia miền xác định đủ nhỏ thì khác biệt giữa các tổng Riemann nhỏ tùy ý. Chi tiết cần những lý luận vượt quá môn học này, có thể tham khảo ở [Fic77, mục 179], [Kha96, tr. 154, 155], [BMGT2, chương 2].

Với định nghĩa của tích phân có được, ta đưa ra một định nghĩa cho diện tích bên dưới đồ thị, tương thích với lý luận của ta khi xây dựng tích phân:

Định nghĩa 5.1.7. Cho hàm f không âm và liên tục trên đoạn $[a, b]$, ta định nghĩa diện tích của phần mặt phẳng bên dưới đồ thị của f bên trên trục x là

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Ví dụ 5.1.8. Với hàm hằng $f = c > 0$ thì $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b c dx = c(b - a)$, là diện tích của hình chữ nhật $[a, b] \times [0, c]$ bên dưới đồ thị của f bên trên trục x . ■

Sách giáo khoa trung học [SGKTH, Giải tích 12, tr. 102] gọi phần mặt phẳng bên dưới đồ thị của một hàm không âm bên trên trục hoành là một “hình thang cong” và giả định tồn tại “diện tích hình thang cong”.

¹Kí hiệu \int do Gottfried Leibniz đặt ra khi xây dựng phép tính tích phân vào thế kỉ 17, đại diện cho chữ cái “s” trong chữ Latin “summa” (tổng).

5.1.2 Tính chất của tích phân

Các tính chất sau được rút ra từ định nghĩa của tích phân.

Mệnh đề 5.1.9. (a) *Tích phân nếu tồn tại thì là duy nhất.*

(b) *Nếu k là một hằng số thực và f có tích phân thì kf có tích phân và*

$$\int_a^b [kf(x)] dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

(c) *Nếu f có tích phân và g có tích phân thì $f + g$ có tích phân và*

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

(d) *Nếu f có tích phân trên $[a, b]$ và trên $[b, c]$ thì f có tích phân trên $[a, c]$ và*

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f.$$

(e) *Nếu $f \geq g$ trên $[a, b]$ thì*

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

Một số tính chất trên có thể được giải thích và minh họa bằng diện tích.

Tính chất (d): Trong trường hợp hàm f không âm, một cách trực quan diện tích bên dưới đồ thị hàm f trên đoạn $[a, c]$ bằng diện tích bên dưới đồ thị hàm f trên đoạn $[a, b]$ cộng diện tích bên dưới đồ thị hàm f trên đoạn $[b, c]$.

Tính chất (e): Một cách trực quan đồ thị của f cao hơn đồ thị của g , do đó diện tích bên dưới đồ thị của f lớn hơn hay bằng diện tích bên dưới đồ thị của g .

Các tính chất này thể hiện tính cộng của diện tích.

Chứng minh. Ta chứng minh sơ lược một số tính chất dưới đây, chi tiết hơn có thể tham khảo các tài liệu như [TPTT02].

(a) Các tổng Riemann không thể cùng gần tùy ý hai số thực khác nhau.

(b) Đặt $\int_a^b f(x) dx = M$. Tổng Riemann của f gần tùy ý tới M thì tổng Riemann của kf gần tùy ý tới kM .

(c) Đặt $\int_a^b g(x) dx = N$. Ta viết tổng Riemann của $f + g$ như sau, với $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_i (f(x_i^*) + g(x_i^*)) \Delta x_i - (M + N) \right| &= \left| \left(\sum_i f(x_i^*) \Delta x_i - M \right) + \left(\sum_i g(x_i^*) \Delta x_i - N \right) \right| \\ &\leq \left| \sum_i f(x_i^*) \Delta x_i - M \right| + \left| \sum_i g(x_i^*) \Delta x_i - N \right|. \end{aligned}$$

Điều này dẫn tới nếu tổng Riemann của f gần tùy ý tới M đồng thời tổng Riemann của g gần tùy ý tới N thì tổng Riemann của $f + g$ gần tùy ý tới $M + N$.

(e) Nếu $f \geq g$ thì tổng Riemann của f lớn hơn hay bằng tổng Riemann tương ứng của g , tức là $\sum_i f(x_i^*)\Delta x_i \geq \sum_i g(x_i^*)\Delta x_i$. \square

Bài tập

5.1.1. Tốc độ chạy của một vận động viên được ghi nhận trong bảng sau, với t là thời điểm kể từ thời điểm xuất phát và v là tốc độ tại thời điểm t .

t (s)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
v (m/s)	0	2	4	5,5	6	6	5,8

Hãy ước tính chiều dài quãng đường mà vận động viên đã chạy được.

5.1.2. Cho hàm số f liên tục trên $[1, 9]$. Biết một số thông tin giá trị hàm f như bảng sau.

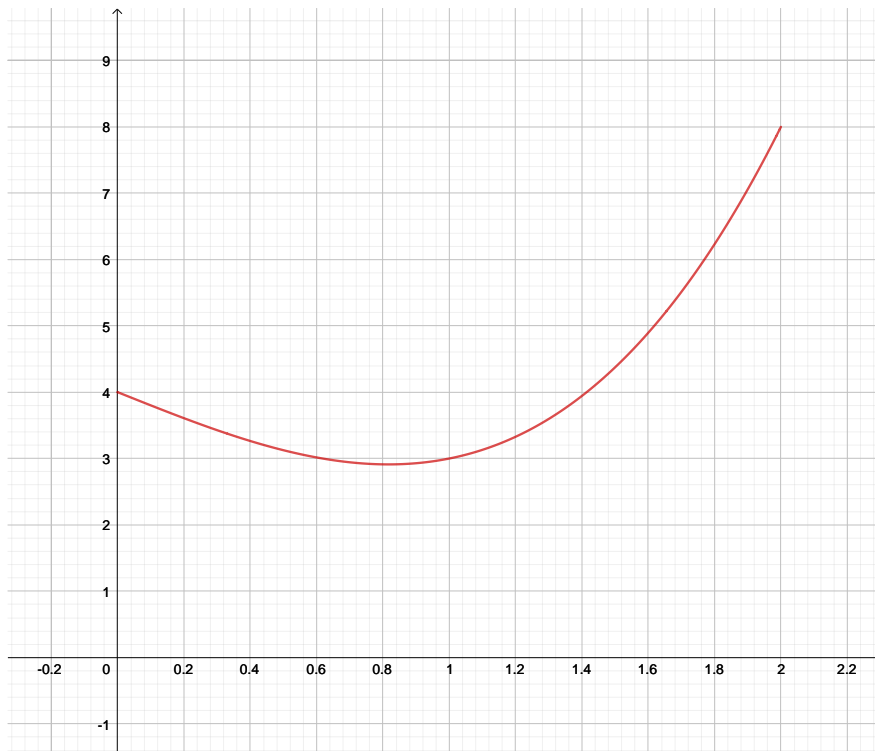
x	1	3	5	7	9
$f(x)$	0,5	1	1,5	2	2,5

Tìm xấp xỉ tích phân $\int_1^9 f(x) dx$ bằng cách tính tổng Riemann tương ứng với phân hoạch đoạn $[1, 9]$ thành 4 đoạn với điểm mẫu (điểm đại diện) là điểm bên trái của mỗi đoạn con.

5.1.3. Hãy tính tổng Riemann của $f(x) = x^4$ trên $[0, 1]$ bằng cách chia đoạn này thành 10 đoạn con đều nhau, điểm lấy mẫu là trung điểm của mỗi đoạn con.

5.1.4. Hãy tính tổng Riemann của $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ trên $[2, 10]$ bằng cách chia đoạn này thành 16 đoạn con đều nhau, điểm lấy mẫu là đầu mút bên trái của mỗi đoạn con.

5.1.5. Hãy ước lượng diện tích bên dưới đồ thị bên trên trục x ở Hình 5.1.3.



Hình 5.1.3

5.1.6. Sử dụng các tính chất của tích phân để chứng minh bất đẳng thức mà không cần tính tích phân.

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx \leq \int_0^1 \sqrt{1+x} dx.$$

5.1.7. Sử dụng tính chất của tích phân để kiểm tra ước lượng

$$2 \leq \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^4} dx \leq 2\sqrt{2}.$$

5.1.8. Tìm chặn trên và chặn dưới cho

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x^4+3}}.$$

5.1.9. * Giả sử f liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(x) \geq 0$ trên $[a, b]$. Hãy giải thích vì sao nếu $\int_a^b f = 0$ thì $f = 0$ trên $[a, b]$.

5.2 Định lý Cơ bản của phép tính vi tích phân

5.2.1 Nguyên hàm

Phép lấy nguyên hàm là phép toán ngược của phép lấy đạo hàm. Nếu f là đạo hàm của F thì ta nói F là một *nguyên hàm* của f .

Ví dụ 5.2.1. Vì $x' = 1$ nên hàm $F(x) = x$ là một nguyên hàm của hàm $f = 1$. Vì $(x+1)' = 1$ nên $G(x) = x+1$ là một nguyên hàm khác của f . ■

Mệnh đề 5.2.2. Nếu F là một nguyên hàm của f trên khoảng (a, b) thì tất cả các nguyên hàm khác có dạng $F + C$ trong đó C là một hằng số thực.

Chứng minh. Giả sử G là một nguyên hàm của f thì

$$(F - G)' = F' - G' = f - f = 0.$$

Do đó $F - G$ là một hàm hằng C trên (a, b) , do Hệ quả 4.1.15. □

Nếu hàm f có nguyên hàm thì *tích phân bất định* của f là tập hợp tất cả các nguyên hàm của f , được kí hiệu bởi

$$\int f$$

hay

$$\int f(x) dx.$$

Người ta có truyền thống viết tập hợp này ở dạng

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

trong đó F là một nguyên hàm của f và C đại diện cho một số thực bất kì.

Ví dụ 5.2.3. Nếu $f(x) = k$ là một hàm hằng thì

$$\int k \, dx = kx + C.$$

■

Ví dụ 5.2.4. Nếu $n \neq -1$ thì

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

■

Ví dụ 5.2.5. Ta có

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},$$

và

$$[\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{x}.$$

Vậy với $x \neq 0$ thì

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}.$$

Ta được

$$\int x^{-1} \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C.$$

■

Ví dụ 5.2.6.

$$\int e^x \, dx = e^x + C.$$

Nếu $k \neq 0$ thì

$$\int e^{kx} \, dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C.$$

■

Ví dụ 5.2.7. Dễ kiểm tra được bằng cách lấy đạo hàm:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C.$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C.$$

■

Dễ kiểm tra được tính chất cơ bản sau của nguyên hàm, được gọi là tính tuyến tính, từ tính tuyến tính của đạo hàm:

Mệnh đề 5.2.8. Nếu f và g có nguyên hàm thì $f + g$ có nguyên hàm, và

$$\int f + g = \int f + \int g.$$

Nếu k là một hằng số thực thì $k \cdot f$ có nguyên hàm và

$$\int k \cdot f = k \cdot \int f.$$

Ví dụ 5.2.9. Dùng tính chất tuyến tính của nguyên hàm ta có thể tính được nguyên hàm của nhiều hàm khác, đặc biệt dễ dàng với hàm đa thức.

$$\begin{aligned} \int (2x^3 - 4) dx &= \int 2x^3 dx + \int -4 dx = 2 \int x^3 dx + (-4x) + C \\ &= 2 \cdot \frac{1}{4}x^4 - 4x + C = \frac{1}{2}x^4 - 4x + C. \end{aligned}$$

■

5.2.2 Công thức Newton-Leibniz

Định lý sau cho một tính chất rất quan trọng về liên hệ giữa vi phân và tích phân.

Định lý 5.2.10 (Định lý cơ bản của phép tính vi tích phân). Nếu hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì hàm F cho bởi

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

là một nguyên hàm của f trên $[a, b]$. Do đó

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

Vậy **hàm liên tục có nguyên hàm**.

Đạo hàm của tích phân của một hàm bằng chính hàm đó, như vậy phép toán vi phân và phép toán tích phân ngược nhau.

Về ý nghĩa hình học, giả sử $f \geq 0$, Định lý nói rằng diện tích bên dưới đồ thị của f từ một điểm a tới giá trị của biến x chính là một nguyên hàm của f .

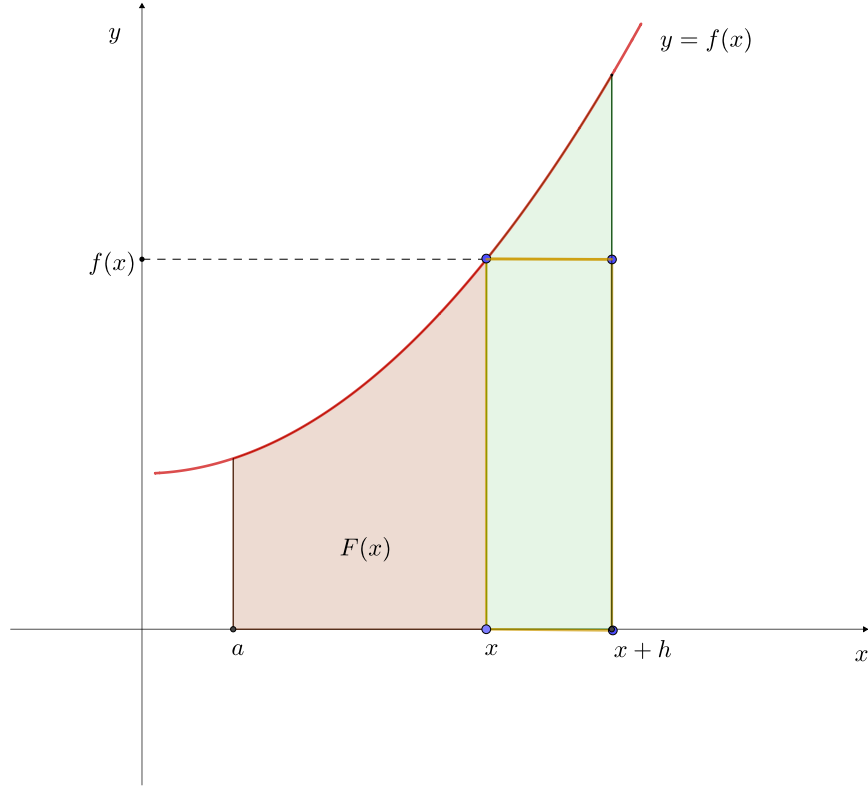
Có thể giải thích định lý trên một cách trực quan như sau, xem Hình 5.2.1. Giá trị $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ là diện tích bên dưới đồ thị của f từ a tới x . Khi h dương “nhỏ” thì phần diện tích từ x tới $x+h$ xấp xỉ bằng chiều cao $f(x)$ nhân với chiều rộng h , tức là $F(x+h) - F(x) \approx f(x)h$, do đó $F'(x) \approx \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx f(x)$.

Chứng minh. Chứng minh dưới đây viết chính xác hóa lý luận trên.

Trước hết, hàm liên tục có tích phân, theo Định lý 5.1.6, nên hàm F được định nghĩa.

Theo định nghĩa đạo hàm

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$



Hình 5.2.1: $F(x+h) - F(x)$ là diện tích dưới đồ thị $y = f(x)$ từ x tới $x+h$, gần bằng diện tích của hình chữ nhật chiều cao $f(x)$ đáy là đoạn $[x, x+h]$.

Giả sử $h > 0$. Do f liên tục trên đoạn $[x, x+h]$ nên trên đó f có giá trị nhỏ nhất $m = f(x_1)$ và giá trị lớn nhất $M = f(x_2)$. Ta đánh giá

$$mh = \int_x^{x+h} m \, dt \leq \int_x^{x+h} f(t) \, dt \leq \int_x^{x+h} M \, dt = Mh. \quad (5.2.1)$$

nên

$$m \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) \, dt \leq M.$$

Khi h tiến về 0 thì x_1 và x_2 tiến về x , nên do f liên tục $f(x_1) = m$ và $f(x_2) = M$ tiến về $f(x)$. Tính chất kẹp của giới hạn 2.1.16 dẫn tới

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) \, dt = f(x).$$

Diễn đạt hình học, đánh giá (5.2.1) có nghĩa là khi $f \geq 0$ thì diện tích bên dưới đồ thị của f trên đoạn $[x, x+h]$ nằm giữa diện tích hình chữ nhật với chiều cao nhỏ nhất và hình chữ nhật có chiều cao lớn nhất trên đoạn đó. Khi chiều rộng h tiến về 0 thì cả hai chiều cao nhỏ nhất và lớn nhất đều tiến về chiều cao tại x .

Trường hợp $h < 0$ là tương tự.

Để tính giới hạn trên, có thể dùng Bài tập 5.4.16 để đưa ra một lý luận khác, và cũng có thể lý luận mà không dùng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất. \square

Ví dụ 5.2.11. Theo Định lý cơ bản của phép tính vi tích phân:

$$\frac{d}{dx} \int_0^x t \, dt = x.$$

■

Ví dụ 5.2.12. Tìm đạo hàm của $h(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{z^2}{z^4+1} \, dz$.

Ta viết

$$y = h(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{z^2}{z^4+1} \, dz.$$

Đặt

$$u = \sqrt{x}$$

thì

$$y = \int_1^u \frac{z^2}{z^4+1} \, dz.$$

Ta tính theo đạo hàm của hàm hợp

$$h'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{u^2}{u^4+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{x}{x^2+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Khi đã thông thạo ta có thể viết gộp các bước trên một cách ngắn gọn:

$$\left(\int_1^{\sqrt{x}} \frac{z^2}{z^4+1} \, dz \right)' = \frac{(\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^4+1} \cdot (\sqrt{x})'.$$

■

Ví dụ 5.2.13. Đây là một ví dụ hàm được định nghĩa bằng tích phân:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \, dt,$$

được gọi là hàm lỗi hay hàm sai số ¹. Theo Định lý cơ bản của phép tính vi tích phân, đạo hàm của hàm này là $\operatorname{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$. Đồ thị của hàm e^{-x^2} thường được gọi là đường hình chuông hay đường cong Gauss, xem Hình 5.2.2. Giá trị của $\operatorname{erf}(x)$ bằng diện tích bên dưới đường cong từ 0 tới x nếu $x > 0$. Hàm này được dùng nhiều trong môn Xác suất và Thống kê.

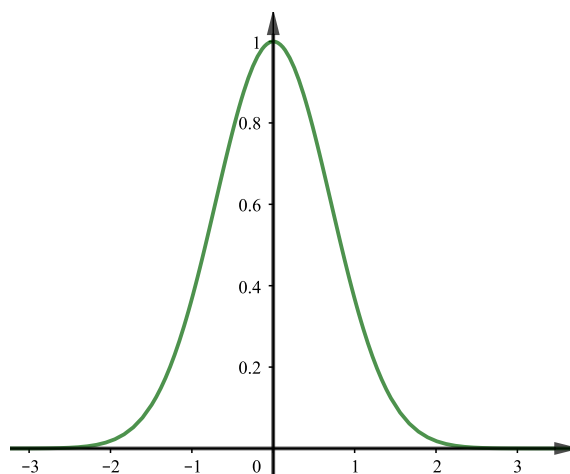
■

Định lý sau cho một công cụ chính để tính tích phân:

Định lý 5.2.14 (Công thức Newton–Leibniz). Nếu f liên tục trên đoạn $[a, b]$ và F là một nguyên hàm của f thì

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

¹error function trong tiếng Anh



Hình 5.2.2: Đường hình chuông, đồ thị của hàm e^{-x^2} .

Dùng Công thức Newton–Leibniz ta có thể tính được một tích phân nếu tìm được một nguyên hàm.

Có thể giải thích gần đúng Công thức Newton–Leibniz bằng tổng Riemann như sau. Với bất kì phép chia nào của đoạn $[a, b]$ bởi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, vì

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) \approx F'(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = f(x_{i-1})\Delta x$$

nên tổng Riemann tương ứng của hàm f là

$$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x \approx \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).$$

Dẫn tới $\int_a^b f(x) dx \approx F(b) - F(a)$.

Giải thích trực quan, giả sử $a < b$ và $f \geq 0$, và lấy $F(x)$ là diện tích bên dưới đồ thị trên đoạn $[a, x]$, thì $F(a) = 0$ và $F(b)$ bằng diện tích bên dưới đồ thị của f bên trên đoạn $[a, b]$, nên hiển nhiên $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. Từ Định lý cơ bản của Phép tính vi tích phân ta đã biết F là một nguyên hàm của f , và vì hai nguyên hàm bất kì của f chỉ khác nhau một hằng số, nên để tính hiệu số $F(b) - F(a)$ ta dùng nguyên hàm nào cũng được.

Chứng minh. Chứng minh này viết lại lý luận trực quan trên. Theo Định lý cơ bản của phép tính vi tích phân 5.2.10,

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

là một nguyên hàm của f . Ta có ngay $F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$, và

$$F(b) - F(a) = F(b) = \int_a^b f(t) dt.$$

Giờ ta chứng tỏ kết quả trên không phụ thuộc vào cách chọn nguyên hàm. Giả sử G là một nguyên hàm khác của f . Khi đó $G = F + C$ với C là một hằng số thực, theo Mệnh đề 5.2.2, và

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt.$$

□

Ví dụ 5.2.15. Ta tính dễ dàng bằng Công thức Newton–Leibniz:

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

■

Ví dụ 5.2.16 (Vị trí, quãng đường, vận tốc, tốc độ). Xét một vật chuyển động trên một đường thẳng. Lấy một điểm nào đó trên đường thẳng làm điểm gốc, và một chiều làm chiều dương, thì vị trí của xe ở thời điểm t cho bởi số thực $x(t)$. Xem Hình 5.2.3.

Vận tốc chuyển động được định nghĩa là đạo hàm của vị trí theo thời gian, $v(t) = x'(t)$ (xem Mục Đạo hàm, trang 61), nên vị trí là một nguyên hàm của vận tốc. Với giả thiết là vận tốc biến đổi liên tục theo thời gian, Công thức Newton–Leibniz cho

$$\int_a^t v(u) du = x(t) - x(a).$$

Vậy tích phân của vận tốc bằng lượng thay đổi vị trí. Điều này khớp với Định lý cơ bản của phép tính vi tích phân:

$$\frac{d}{dt} \int_a^t v(u) du = v(t) = (x(t) - x(a))'.$$

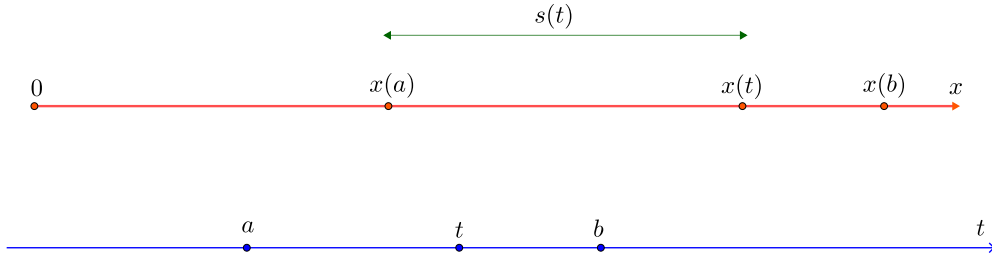
Chiều dài quãng đường đi được từ thời điểm a tới thời điểm t cho bởi tích phân của tốc độ (độ lớn của vận tốc)

$$s(t) = \int_a^t |v(u)| du.$$

Điều này khớp với Ví dụ 5.1.2 khi ta xây dựng tích phân. Theo Định lý cơ bản của phép tính vi tích phân thì $s'(t) = |v(t)|$, vậy tốc độ chuyển động bằng đạo hàm của chiều dài quãng đường đi được.

Nếu chuyển động thẳng chỉ theo chiều dương thì $v \geq 0$, nên $s(t) = x(t) - x(a)$ với mọi t , tức là chiều dài quãng đường đi được đúng bằng lượng thay đổi vị trí.

Đặc biệt nếu vận tốc chuyển động là hằng v (chuyển động thẳng đều) thì $s(b) = x(b) - x(a) = v(b - a)$, tức là chiều dài quãng đường đi được bằng tốc độ đi nhân thời gian đi.



Hình 5.2.3: Vị trí và quãng đường trong chuyển động thẳng một chiều.

Ví dụ 5.2.17. Một vật chuyển động trên một đường thẳng với vận tốc $v(t) = -2t + 6$.

Trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq 3$ thì $v(t) \geq 0$, chiều dài quãng đường đi được đúng bằng lượng thay đổi vị trí, bằng

$$\int_0^3 v(t) dt = \int_0^3 (-2t + 6) dt = -t^2 + 6t \Big|_{t=0}^{t=3} = 9.$$

Trong khoảng thời gian $2 \leq t \leq 4$ thì vận tốc $v(t)$ có đổi dấu, nghĩa là vật có đổi chiều chuyển động. Lượng thay đổi vị trí của vật là tích phân của vận tốc, bằng

$$\int_2^4 v(t) dt = \int_2^4 (-2t + 6) dt = -t^2 + 6t \Big|_{t=2}^{t=4} = 0.$$

Như vậy vật không đổi vị trí. Trong khi đó quãng đường vật đi được là tích phân của tốc độ (độ lớn của vận tốc), bằng

$$\int_2^4 |v(t)| dt = \int_2^3 (-2t + 6) dt + \int_3^4 -(-2t + 6) dt = 2.$$

Ghi chú 5.2.18. Trong sách giáo khoa trung học [SGKTH], tích phân được định nghĩa cho hàm liên tục bằng Công thức Newton–Leibniz, tiện cho tính toán nhưng khó thấy ý nghĩa và ứng dụng.

Bài tập

5.2.1. Tính

- (a) $\int_1^2 \left(\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^5}} + \frac{5}{x} \right) dx.$
- (b) $\int_{-2}^3 |x^2 - 1| dx.$
- (c) $\int_{-1}^2 |x - x^2| dx.$

(d) $\int_{-1}^2 (x - 2|x|) dx.$

(e) $\int_0^2 f(x) dx$ với $f(x) = \begin{cases} x^4, & \text{nếu } 0 \leq x < 1, \\ x^5, & \text{nếu } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$

(f) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ với $f(x) = \begin{cases} x, & \text{nếu } -\pi \leq x \leq 0, \\ \sin x, & \text{nếu } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$

5.2.2. Sử dụng Định lý Cơ bản của Phép tính vi tích phân để tìm đạo hàm của hàm số sau.

(a) $g(x) = \int_1^x \frac{1}{t^3+1} dt.$

(b) $h(x) = e^{2019x} + \int_0^x e^{2019t} dt.$

5.2.3. Tính

(a) $\frac{d}{dx} \int_0^x (1+t^2)^4 dt.$

(d) $\frac{d}{dt} \int_0^{1/t} \frac{dx}{1+x^2}.$

(b) $\frac{d}{dx} \int_x^1 \ln z dz.$

(e) $\frac{d}{dx} \int_x^{2x} s^2 ds.$

(c) $\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{dx}{1+x^2}.$

(f) $\frac{d}{dx} \int_{\ln x}^{\sqrt{x}} e^{t^2} dt.$

5.2.4. Cho $f(x) = \int_x^{x^2} \ln(t^2 + 1) dt$. Tìm $f'(0)$.

5.2.5. Hãy chứng minh công thức là đúng bằng cách lấy đạo hàm.

(a) $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C,$

(b) $\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}} dx = \frac{2}{3b^2} (bx - 2a) \sqrt{a+bx} + C.$

5.2.6. Tính

$$\int_{\int_0^1 x dx}^{\int_1^2 x dx} \left(\int_0^2 x dx \right) dx.$$

5.2.7. Tích phân $\int_0^1 x^n dx$, $n > 0$, thay đổi như thế nào khi n thay đổi? Hãy vẽ phác họa đồ thị của hàm $y = x^n$ với một số giá trị của n để minh họa.

5.2.8. Nước chảy vào một bồn rỗng với vận tốc $3000 + 20t$ lít mỗi giờ, với $t = 0$ là thời điểm ban đầu. Hỏi lượng nước trong bồn sau 5 giờ là bao nhiêu?

5.2.9. Tốc độ tiêu thụ nước của một thành phố được mô hình hóa bằng lượng nước (nghìn lít) tiêu thụ $r(t) = 100 + 70t - 2t^2$ trong một giờ tại thời điểm t kể từ nửa đêm. Hãy ước lượng tổng lượng nước tiêu thụ trong một ngày đêm.

5.2.10. Một virus cúm đang phát tán với tốc độ $\frac{dn}{dt} = 5 + 6\sqrt{t}$ người một ngày, ở đây n là số ngàn người đang nhiễm bệnh và t là thời gian (ngày). Bao nhiêu người sẽ bị nhiễm bệnh trong khoảng từ ngày tám tới ngày mười một?

5.2.11. Tốc độ tiêu thụ điện năng theo thời gian của một thành phố tại một thời điểm t trong ngày (còn gọi là công suất tiêu thụ, tính bằng lượng điện năng tiêu thụ trong một đơn vị thời gian) được mô hình hóa bởi hàm

$$f(t) = 3t^2 + 20,$$

với $t = 0$ ứng với 5 giờ sáng. Hãy tính tổng điện năng tiêu thụ của thành phố trong khoảng thời gian từ 5 giờ sáng tới 15 giờ chiều.

5.2.12. Lượng xe đi qua một con đường tại một thời điểm t trong ngày (còn gọi là dòng giao thông, tính bằng số xe đi qua một điểm trên đường trong một đơn vị thời gian) được mô hình hóa bởi hàm

$$f(t) = -300t^2 + 2000t + 3000,$$

với $t = 0$ ứng với 6 giờ sáng. Hãy tính tổng lượng xe đi qua đường này trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng tới 12 giờ trưa.

5.2.13. Cho hàm số

$$f(x) = \int_0^x \frac{(t-3)^3 e^t}{\sqrt{t^2+16}} dt, \quad x \in [0, 6].$$

Hỏi giá trị nhỏ nhất của f đạt được tại điểm nào?

5.2.14. Một số tính chất cơ bản của tích phân ở Mệnh đề 5.1.9 có thể được chứng minh dễ dàng hơn cho hàm liên tục bằng cách sử dụng Công thức Newton–Leibniz. Hãy thử làm điều này.

5.3 Các phương pháp biến đổi và tính tích phân

5.3.1 Phép đổi biến trong tích phân

Định lý 5.3.1. Giả sử $u = g(x)$ là một hàm khả vi liên tục với tập giá trị chứa trong khoảng I và f liên tục trên I . Khi đó trên I thì

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du.$$

Ta thường nói rằng ta biến đổi tích phân bằng cách thay $g(x)$ bởi u . Việc này được gọi là một **phép thế**. Nếu hơn nữa có thể tính ngược lại x theo u , nói cách khác nếu g có hàm ngược, thì ta nói g là một **phép đổi biến**. Đây là một phương pháp biến đổi tích phân thường gặp, thường được gọi là **phương pháp thế** hay **phương pháp đổi biến**.

Chứng minh. Vì f liên tục trên I nó có nguyên hàm F , do đó $\int f(u) du = F(u) + C$. Mặt khác

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Vậy $F \circ g$ là một nguyên hàm của hàm $x \mapsto f(g(x))g'(x)$, do đó

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + D = F(u) + D = \int f(u) du.$$

□

Dưới đây là phiên bản của phương pháp thế cho tích phân xác định.

Định lý 5.3.2. Giả sử $u = g(x)$ khả vi liên tục trên một khoảng chứa đoạn $[a, b]$ và f liên tục trên một khoảng chứa tập giá trị của g , khi đó

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du. \quad (5.3.1)$$

Công thức 5.3.1 thường được gọi là **công thức đổi biến**.

Chứng minh. Cho F là một nguyên hàm của f . Ta có $F(g(x))$ là một nguyên hàm của $f(g(x))g'(x)$. Vậy theo Định lý cơ bản của Vi tích phân 5.2.10 thì

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = F(g(b)) - F(g(a)) = F(u) \Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

□

Ví dụ 5.3.3. Tính $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

Người ta thường viết như sau. Đặt $x = \sin t$ thì $dx = \cos t dt$, $x = 0$ tương ứng $t = 0$, $x = 1$ tương ứng $t = \pi/2$, và

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt = \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Big|_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

■

Ví dụ 5.3.4. Tính $\int 2x \sin(x^2 + 3) dx$.

Thế $z = x^2 + 3$ thì $dz = d(x^2 + 3) = 2x dx$ nên $\int 2x \sin(x^2 + 3) dx = \int \sin z dz = -\cos z + C$. Vậy

$$\int 2x \sin(x^2 + 3) dx = -\cos(x^2 + 3) + C.$$

■

Ví dụ 5.3.5. Tính $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$.

Thế $u = G(x) = 1 + x^2$. Vì $du = 2x dx$ nên

$$\int \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{\frac{1}{u}} \underbrace{x dx}_{\frac{1}{2}du} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du.$$

Nếu x chạy giữa $x = 0$ và $x = 1$, thì u chạy giữa $u = 1 + 0^2 = 1$ và $u = 1 + 1^2 = 2$,

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln u \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \ln 2.$$

■

Qua các ví dụ trên ta thấy công thức đổi biến được khai thác theo cả hai chiều.

Tổng hợp lại, trong thực tế tính toán người ta thường viết theo các bước như sau để giúp việc đổi biến trở thành một thuật toán:

Phương pháp đổi biến trong tích phân:

Bước 1: Với tích phân $\int_a^b f(g(x))g'(x) dx$ hoặc $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$, đặt $u = g(x)$.

Bước 2: Tính $du = g'(x) dx$.

Bước 3: Tính $x = a \implies u = g(a)$, $x = b \implies u = g(b)$.

Bước 4: Viết $\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$.

Dưới đây là một ứng dụng của công thức đổi biến.

Mệnh đề 5.3.6 (Tính đối xứng). Giả sử hàm f liên tục trên $[-a, a]$.

(a) Nếu f là hàm chẵn, tức $\forall x, f(-x) = f(x)$, thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

(b) Nếu f là hàm lẻ, tức $\forall x, f(-x) = -f(x)$ thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

Giải thích số lượng, nếu hàm có tính đối xứng chẵn thì để tính tổng của hàm chỉ cần tính tổng trên nửa khoảng xác định rồi nhân đôi, còn nếu hàm có tính đối xứng lẻ thì các giá trị triệt tiêu đôi một, nên tổng bằng 0.

Giải thích hình học, mệnh đề nói rằng vì tính đối xứng của hàm f nên với trường hợp f dương và chẵn thì diện tích dưới đồ thị của f từ $-a$ đến 0 đúng bằng diện tích từ 0 tới a , còn với trường hợp f lẻ thì tích phân bằng 0 bởi vì diện tích bên trên trục x đúng bằng diện tích bên dưới trục x . Người đọc có thể thử vẽ hình minh họa.

Chứng minh. Chúng ta chia tích phân thành hai:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

Lấy phép đổi biến $u = -x$:

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-u) (-du) = \int_0^a f(-u) du$$

do đó

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(-u) du + \int_0^a f(x) dx.$$

Nếu f là hàm chẵn thì $f(-u) = f(u)$ nên

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(u) du + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Nếu f là hàm lẻ thì $f(-u) = -f(u)$ nên

$$\int_{-a}^a f(x) dx = - \int_0^a f(u) du + \int_0^a f(x) dx = 0.$$

□

5.3.2 Tích phân từng phần

Ta biết theo quy tắc đạo hàm nếu f và g là các hàm khả vi thì

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

Bây giờ điều này có thể được hiểu là fg là một nguyên hàm của $f'g + fg'$. Do đó sai khác một hằng số ta có

$$\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)] dx = f(x)g(x),$$

hay

$$\int f(x)g'(x) dx + \int g(x)f'(x) dx = f(x)g(x).$$

Vậy

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx. \quad (5.3.2)$$

Công thức (5.3.2) được gọi là **công thức tích phân từng phần**.

Đặt $u = f(x)$ và $v = g(x)$ thì $du = f'(x)dx$ và $dv = g'(x)dx$, do đó công thức tích phân từng phần có dạng ngắn gọn hơn, thường được dùng:

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (5.3.3)$$

Áp dụng lý luận dẫn tới công thức (5.3.2) cho tích phân từ a đến b , với giả thiết f' và g' liên tục, theo Công thức Newton–Leibniz:

$$\int_a^b [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)] dx = f(x)g(x)|_a^b$$

hay

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x) dx. \quad (5.3.4)$$

Ví dụ 5.3.7. Tính $\int x \sin x dx$.

Chọn $f(x) = x$ và $g'(x) = \sin x$. Khi đó, $f'(x) = 1$ và $g(x) = -\cos x$. Áp dụng

công thức tích phân từng phần, ta có

$$\begin{aligned}\int x \sin x \, dx &= f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) \, dx \\ &= x(-\cos x) + \int \cos x \, dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C.\end{aligned}$$

Để nhanh gọn hơn ta thường viết một cách hình thức theo một giải thuật như sau. Đặt

$$u = x, dv = \sin x \, dx$$

thì

$$du = dx, v = -\cos x$$

suy ra

$$\begin{aligned}\int x \sin x \, dx &= \int u \, dv = uv - \int v \, du = x(-\cos x) - \int (-\cos x) \, dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C.\end{aligned}$$

■

Ví dụ 5.3.8. Tính $\int \ln x \, dx$.

Đặt

$$u = \ln x, dv = dx$$

thì

$$du = \frac{1}{x} \, dx, v = x,$$

áp dụng tích phân từng phần, ta có

$$\begin{aligned}\int \ln x \, dx &= x \ln x - \int x \frac{dx}{x} \\ &= x \ln x - \int dx \\ &= x \ln x - x + C.\end{aligned}$$

■

Ví dụ 5.3.9. Tính $\int_0^1 \arctan x \, dx$.

Đặt

$$u = \arctan x, dv = dx$$

thì

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, v = x.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\int_0^1 \arctan x \, dx &= x \arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx\end{aligned}$$

Dùng phép đổi biến $t = 1 + x^2$ thì $dt = 2x dx$, nên $x dx = \frac{1}{2} dt$. Khi $x = 0$ thì $t = 1$, khi $x = 1$ thì $t = 2$. Do đó

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 2\end{aligned}$$

Vậy

$$\int_0^1 \arctan x \, dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

■

5.3.3 Một số phương pháp tính tích phân đặc biệt

Tích phân của hàm lượng giác

Ví dụ 5.3.10. Tính $\int \cos^3 x \, dx$.

Ta tính tích phân bằng cách đổi biến $u = \sin x$, $du = \cos x \, dx$:

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x \, dx &= \int \cos^2 x \cos x \, dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx \\ &= \int (1 - u^2) \, du = u - \frac{1}{3} u^3 + C \\ &= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C.\end{aligned}$$

■

Ví dụ 5.3.11. Tính $\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx$.

Đổi biến $u = \cos x$, ta có $du = -\sin x \, dx$ và

$$\begin{aligned}\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx &= \int (\sin^2 x)^2 \cos^2 x \sin x \, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \sin x \, dx \\ &= \int (1 - u^2)^2 u^2 (-du) = - \int (u^2 - 2u^4 + u^6) \, du \\ &= - \left(\frac{u^2}{3} - 2 \frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} \right) + C \\ &= -\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{2}{5} \cos^5 x - \frac{1}{7} \cos^7 x + C.\end{aligned}$$

■

Ví dụ 5.3.12. Tính $\int \sin^4 x \, dx$.

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \, dx &= \int [(\sin x)^2]^2 \, dx \\ &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{3}{2} - 2 \cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x \right) + C.\end{aligned}$$

■

Các hệ thức lượng giác sau có thể hữu ích:

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A - B) + \sin(A + B)]$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

Các phép đổi biến lượng giác

Một số phép đổi biến lượng giác, với hàm $\sec = \frac{1}{\cos}$:

Biểu thức	Phép đổi biến	Hệ thức
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin \theta$	$1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan \theta$	$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta$	$\sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$

Ví dụ 5.3.13. Tính $\int \sqrt{9 - x^2} \, dx$.

Đặt $x = 3 \sin \theta$, với $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Khi đó $\cos \theta \geq 0$, nhờ đó $\sqrt{9 - 9 \sin^2 \theta} = 3 \cos \theta$, suy ra $\cos \theta = \frac{1}{3} \sqrt{9 - x^2}$, và

$$\begin{aligned}\int \sqrt{9 - x^2} \, dx &= \int 3 \cos \theta \cdot 3 \cos \theta \, d\theta = 9 \int \cos^2 \theta \, d\theta = 9 \int \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \, d\theta \\ &= \frac{9}{2} \theta + \frac{9}{2} \sin(2\theta) + C = \frac{9}{2} \theta + \frac{9}{2} \sin \theta \cos \theta + C \\ &= \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} + \frac{1}{2} x \sqrt{9 - x^2} + C.\end{aligned}$$

■

Tích phân của hàm hữu tỉ

Ta minh họa phương pháp qua một số ví dụ sau.

Ví dụ 5.3.14. Tính $\int \frac{x^3 + x}{x - 1} \, dx$.

Ta có

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 + x}{x - 1} dx &= \int \left(x^2 + x + 2 + \frac{2}{x - 1} \right) dx \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2 \ln |x - 1| + C.\end{aligned}$$

■

Ví dụ 5.3.15. Tính $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} dx$.

Ta có thể phân tích hàm dưới dấu tích phân thành tổng sau

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x(2x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}.$$

Giải đồng nhất thức ta được $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{5}$, và $C = -\frac{1}{10}$, và vì vậy

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx &= \int \left(\frac{1}{2} \frac{1}{x} + \frac{1}{5} \frac{1}{2x - 1} - \frac{1}{10} \frac{1}{x + 2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \ln |x| + \frac{1}{10} \ln |2x - 1| - \frac{1}{10} \ln |x + 2| + K.\end{aligned}$$

■

Ví dụ 5.3.16. Tính $\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x} dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 4} \right) dx \\ &= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{x}{x^2 + 4} dx - \int \frac{1}{x^2 + 4} dx \\ &= \ln |x| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) - \frac{1}{2} \tan^{-1}(x/2) + K.\end{aligned}$$

■

Ví dụ 5.3.17. Tính $\int \frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3} dx$.

Ta chia đa thức và được

$$\frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} = 1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3}.$$

Chú ý rằng

$$4x^2 - 4x + 3 = (2x - 1)^2 + 2,$$

ta đổi biến $u = 2x - 1$ thì $du = 2dx$ và $x = \frac{1}{2}(u + 1)$, vì vậy

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} dx &= \int \left(1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3} \right) dx \\ &= x + \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{2}(u + 1) - 1}{u^2 + 2} du = x + \frac{1}{4} \int \frac{u - 1}{u^2 + 2} du \\ &= x + \frac{1}{4} \int \frac{u}{u^2 + 2} du - \frac{1}{4} \int \frac{1}{u^2 + 2} du \\ &= x + \frac{1}{8} \ln(u^2 + 2) - \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{2}} + C \\ &= x + \frac{1}{8} \ln(4x^2 - 4x + 3) - \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{2}} + C. \end{aligned}$$

■

5.3.4 Sự tồn tại công thức cho tích phân

Theo Định lý cơ bản của Vi tích phân mọi hàm liên tục đều có nguyên hàm cho bởi một tích phân, do đó câu hỏi tính tích phân của một hàm có ý nghĩa thực sự là tìm một công thức tường minh cho tích phân đó. “Công thức tường minh” ở đây có ý nghĩa chính xác là công thức của một hàm sơ cấp. Thế nhưng sau này người ta nhận ra có những hàm liên tục mà nguyên hàm không phải là hàm sơ cấp, và do đó không thể có công thức tường minh.

Ví dụ 5.3.18. Hàm $f(x) = e^{x^2}$ liên tục nên có nguyên hàm, nhưng người ta chứng minh được rằng các nguyên hàm đó không là hàm sơ cấp. Các nguyên hàm sau cũng được biết không phải là hàm sơ cấp:

$$\begin{array}{ccc} \int \frac{e^x}{x} dx & \int \sin(x^2) dx & \int \cos(e^x) dx \\ \int \sqrt{x^3 + 1} dx & \int \frac{1}{\ln x} dx & \int \frac{\sin x}{x} dx \end{array}$$

■

Việc tìm công thức tường minh nói chung vẫn là một bài toán khó mặc dù người ta đã nghiên cứu rất nhiều từ lâu. Trong nhiều trường hợp công thức không có, hoặc nếu có thì quá phức tạp để sử dụng. Người ta có thể dùng các phương pháp khác để khảo sát tích phân, như phân tích thành chuỗi, tính toán xấp xỉ, biến đổi để khảo sát các tính chất, mà không cần công thức tường minh.

Tính tích phân bằng phần mềm máy tính

Chúng ta thấy rằng việc tính toán tích phân nói chung là khó và mỗi loại tích phân cần những phương pháp riêng. Người ta đã nghiên cứu nhiều và đưa ra những phương pháp chuyên biệt để tính tích phân, cũng như soạn những bảng công thức tích phân rất lớn. Rõ ràng ít người có thể nắm hết những phương pháp như vậy, cũng như việc sử dụng chúng hay tìm trong bảng sẽ mất nhiều thời gian và công sức. Các việc này thích hợp để lập trình cho máy tính thực hiện.

Các phần mềm tính toán kí hiệu hay các hệ Đại số máy tính thường có cài đặt các thuật toán tính tích phân, trong đó có một thuật toán phức tạp gọi là thuật toán Risch, cho phép xác định một hàm cho trước có nguyên hàm sơ cấp hay không và nếu có thì cho công thức của hàm đó.

Ví dụ 5.3.19. Tính $\int \sqrt{\tan x} dx$.

Phần mềm Maxima (xem phần Hướng dẫn sử dụng phần mềm máy tính ở cuối tài liệu này, trang 197), cài đặt một phần thuật toán Risch, cho kết quả:

$$-\frac{\ln(\tan x + \sqrt{2}\sqrt{\tan x} + 1)}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{\ln(\tan x - \sqrt{2}\sqrt{\tan x} + 1)}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{\arctan(\sqrt{2}\sqrt{\tan x} + 1)}{\sqrt{2}} + \frac{\arctan(\sqrt{2}\sqrt{\tan x} - 1)}{\sqrt{2}}.$$

■

5.3.5 Tính tích phân bằng phương pháp số

Trong nhiều trường hợp việc tính đúng tích phân là không thể, như đã thấy ở phần trước. Có khi tính đúng cũng không cần thiết. Ngoài ra có những trường hợp hàm số được xác định từ thực nghiệm thông qua các thiết bị đo hay thu thập dữ liệu (một bảng số liệu hay một đường cong chẳng hạn) và có thể không có công thức cho hàm. Khi đó việc tính xấp xỉ tích phân của hàm là mối quan tâm chính.

Phương pháp cơ bản là dùng một tổng Riemann với cách chia khoảng thích hợp và cách chọn điểm đại diện thích hợp.

Dưới đây ta xét phương pháp xấp xỉ dựa trên cách chia đều miền xác định.

Cho hàm f xác định trên đoạn $[a, b]$. Chia $[a, b]$ thành n khoảng bằng nhau mỗi khoảng có chiều dài $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Đặt $x_i = a + i\Delta x$, $0 \leq i \leq n$.

Lấy tổng Riemann với điểm đại diện là trung điểm (điểm giữa) của khoảng con, ta được **Quy tắc điểm giữa**:

$$\int_a^b f(x) dx \approx M_n = [f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)]\Delta x$$

với

$$x_i^* = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i).$$

Ví dụ 5.3.20. Sử dụng Quy tắc điểm giữa với $n = 5$ để xấp xỉ $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$.

Các điểm biên của năm đoạn con là 1; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8 và 2, vì thế các trung điểm là 1,1; 1,3; 1,5; 1,7 và 1,9. Chiều rộng của các đoạn con là $\Delta x = (2 - 1)/5 = \frac{1}{5}$, vì thế

theo Quy tắc điểm giữa:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x} dx &\approx \Delta x [f(1,1) + f(1,3) + f(1,5) + f(1,7) + f(1,9)] \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,3} + \frac{1}{1,5} + \frac{1}{1,7} + \frac{1}{1,9} \right) \\ &\approx 0,691908.\end{aligned}$$

■

Còn có những phương pháp xấp xỉ khác, như phương pháp hình thang, thay vì xấp xỉ bằng hình chữ nhật lại xấp xỉ bằng hình thang, hay phương pháp Simpson, thay vì xấp xỉ bằng hình chữ nhật lại xấp xỉ bằng hình parabol. Đề tài này thường được khảo sát trong môn Phương pháp tính hay môn Giải tích số.

5.3.6 Tích phân suy rộng

Có những câu hỏi đơn giản như diện tích bên dưới đồ thị của hàm $y = \frac{1}{x}$ trên khoảng $(1, \infty)$ bằng bao nhiêu? Để trả lời những câu hỏi như vậy ta xây dựng khái niệm tích phân suy rộng, ở đó cận tích phân có thể là $\pm\infty$.

Định nghĩa 5.3.21. Với $a \in \mathbb{R}$ bất kì ta định nghĩa:

(a)

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$$

(b)

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx$$

(c)

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx$$

(d) Nếu hàm f xác định trên $(a, b]$ thì ta định nghĩa

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

(e) Nếu hàm f xác định trên $[a, b)$ thì ta định nghĩa

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

Ta nói một tích phân suy rộng là hội tụ nếu giới hạn tồn tại (là một số thực), và ta nói tích phân suy rộng là phân kì nếu giới hạn không tồn tại (không bằng một số thực nào).

Ví dụ 5.3.22. Xác định xem tích phân $\int_1^\infty (1/x) dx$ hội tụ hay phân kì?

Theo định nghĩa ta có

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln |x| \Big|_1^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\ln t - \ln 1) = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln t = \infty.\end{aligned}$$

Giới hạn không tồn tại như là một số thực và vì vậy tích phân suy rộng $\int_1^\infty (1/x) dx$ phân kì. ■

Ví dụ 5.3.23. Tích phân

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$$

là hữu hạn khi và chỉ khi $p > 1$.

Ta biết từ ví dụ trên là nếu $p = 1$, thì tích phân phân kì, vì vậy giả sử $p \neq 1$. Khi đó

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x^{-p} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_{x=1}^{x=t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} \left(\frac{1}{t^{p-1}} - 1 \right)\end{aligned}$$

Nếu $p > 1$ thì $p - 1 > 0$, vì vậy khi $t \rightarrow \infty$ thì $t^{p-1} \rightarrow \infty$ và $1/t^{p-1} \rightarrow 0$, do đó

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1} \quad \text{nếu } p > 1$$

và vì vậy tích phân hội tụ. Nhưng nếu $p < 1$, thì $p - 1 < 0$ và vì vậy

$$\frac{1}{t^{p-1}} = t^{1-p} \rightarrow \infty \quad \text{khi } t \rightarrow \infty$$

và tích phân phân kì. ■

Ví dụ 5.3.24. Tính $\int_{-\infty}^0 x e^x dx$.

Từ định nghĩa ta có

$$\int_{-\infty}^0 x e^x dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 x e^x dx.$$

Ta dùng tích phân từng phần với $u = x$, $dv = e^x dx$ có $du = dx$, $v = e^x$:

$$\int_t^0 x e^x dx = x e^x \Big|_t^0 - \int_t^0 e^x dx = -t e^t - 1 + e^t.$$

Ta biết $e^t \rightarrow 0$ khi $t \rightarrow -\infty$. Theo quy tắc l'Hôpital thì

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} t e^t = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t}{e^{-t}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t'}{(e^{-t})'} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-t}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} (-e^t) = 0.$$

Do đó

$$\int_{-\infty}^0 xe^x dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} (-te^t - 1 + e^t) = -0 - 1 + 0 = -1.$$

■

Ví dụ 5.3.25. Tìm $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$.

Tích phân đã cho là suy rộng vì $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\sqrt{x-2}} = \infty$. Theo định nghĩa:

$$\begin{aligned} \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} &= \lim_{t \rightarrow 2^+} \int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2^+} 2\sqrt{x-2} \Big|_t^5 \\ &= \lim_{t \rightarrow 2^+} 2(\sqrt{3} - \sqrt{t-2}) \\ &= 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

■

Ví dụ 5.3.26. Tính $\int_0^1 \ln x dx$.

Ta biết rằng hàm số $f(x) = \ln x$ có tiệm cận đứng tại 0 vì $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$. Do đó tích phân đã cho suy rộng và ta có

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \ln x dx.$$

Bây giờ ta dùng tích phân từng phần với $u = \ln x, dv = dx, du = dx/x$ và $v = x$:

$$\begin{aligned} \int_t^1 \ln x dx &= x \ln x \Big|_t^1 - \int_t^1 1 dx \\ &= 1 \ln 1 - t \ln t - (1 - t) = -t \ln t - 1 + t. \end{aligned}$$

Để tìm giới hạn của số hạng đầu tiên ta dùng quy tắc l'Hôpital:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t}{1/t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} (-t) = 0.$$

Do đó

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} (-t \ln t - 1 + t) = -0 - 1 + 0 = -1.$$

■

Dưới đây ta giới thiệu bằng ví dụ phương pháp so sánh, một phương pháp hiệu quả để xét tính hội tụ của tích phân suy rộng.

Ví dụ 5.3.27. Xét sự hội tụ của tích phân

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx.$$

Ta có

$$0 < \frac{1}{x^4 + 1} \leq \frac{1}{x^4},$$

dẫn tới với mọi $t > 1$ thì

$$0 \leq \int_1^t \frac{1}{x^4 + 1} dx \leq \int_1^t \frac{1}{x^4} dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^4} dx < \infty.$$

Bây giờ ta lý luận rằng hàm $\int_1^t \frac{1}{x^4 + 1} dx$ là hàm tăng theo t và bị chặn trên, nên có giới hạn hữu hạn (là một số thực) khi $t \rightarrow \infty$. (Điều này dựa trên tính chất đầy đủ của tập số thực, khẳng định sự tồn tại của chặn trên nhỏ nhất của một tập khác rỗng các số thực bị chặn trên.) Vậy $\int_1^\infty \frac{1}{x^4 + 1} dx$ hội tụ. ■

Ví dụ 5.3.28. Chứng minh rằng $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ hội tụ.

Ta không thể tính tích phân trực tiếp vì nguyên hàm của e^{-x^2} không phải là một hàm sơ cấp. Ta viết

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^\infty e^{-x^2} dx$$

và thấy rằng tích phân thứ nhất ở vế phải chỉ là một tích phân Riemann thông thường. Trong tích phân thứ hai ta thấy rằng với $x \geq 1$ ta có $x^2 \geq x$, nên $-x^2 \leq -x$, và do đó $e^{-x^2} \leq e^{-x}$, do đó

$$\int_1^\infty e^{-x^2} dx \leq \int_1^\infty e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-1} - e^{-t}) = e^{-1}.$$

Điều này cho phép suy ra $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ hội tụ.

Tích phân này thường xuất hiện trong Xác suất và Thống kê, xem mục 5.4.4. ■

Phương pháp so sánh trong các ví dụ trên xuất hiện lại trong phần tiêu chuẩn so sánh của chuỗi số ở 6.1.21, ở đó người đọc có thể nhận thấy sự tương tự trong sự hội tụ của tích phân suy rộng và sự hội tụ của chuỗi số. Có thể đọc thêm ở các tài liệu như [Kha15].

Bài tập

Tính tích phân

5.3.1. Tính tích phân

(a) $\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2} dx.$

(f) $\int_2^3 \frac{1}{r \ln r} dr.$

(b) $\int_0^a x\sqrt{x^2 + a^2} dx, a > 0.$

(g) $\int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx.$

(c) $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} x^4 \sin x dx.$

(h) $\int \frac{\sin 2x}{1 + \sin x} dx.$

(d) $\int_1^2 x\sqrt{x-1} dx.$

(i) $\int_0^1 z\sqrt{1-z^2} dz.$

(e) $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx.$

(j) $\int_1^2 \frac{\ln 2x}{x} dx.$

(k) $\int \alpha e^{-\alpha^2} d\alpha.$

(m) $\int 1/(2^x + 2^{-x}) dx.$

(l) $\int \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2} dt.$

(n) $\int_1^2 3x^2 \ln x dx.$

5.3.2. Tính tích phân

(a) $\int x \cos 4x dx.$

(g) $\int e^{2\theta} \sin 3\theta d\theta.$

(b) $\int y e^{0,3y} dy.$

(h) $\int z^3 e^z dz.$

(c) $\int t e^{-2t} dt.$

(i) $\int \cos x \ln(\sin x) dx.$

(d) $\int (x^2 + 3x) \cos x dx.$

(j) $\int_4^9 \frac{\ln y}{\sqrt{y}} dy.$

(e) $\int t^3 \ln t dt.$

(k) $\int_1^3 r^3 \ln r dr.$

(f) $\int (\ln x)^2 dx.$

(l) $\int_0^1 \frac{y}{e^{2y}} dy.$

5.3.3. Tính tích phân

(a) $\int \frac{x^4}{x-1} dx.$

(g) $\int_0^1 \frac{x^3-4x-10}{x^2-x-6} dx.$

(b) $\int \frac{3t-2}{t+1} dt.$

(h) $\int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)} dx.$

(c) $\int_0^1 \frac{2}{2x^2+3x+1} dx.$

(i) $\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+2)} dx.$

(d) $\int_0^1 \frac{x-4}{x^2-5x+6} dx.$

(j) $\int \frac{3x^2+x+4}{x^4+3x+2} dx.$

(e) $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx.$

(k) $\int \frac{x^2-3x+7}{(x^2-4x+6)^2} dx.$

(f) $\int_3^4 \frac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2} dx.$

5.3.4. Tính tích phân

(a) $\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx.$

(e) $\int \frac{t^5}{\sqrt{t^2+2}} dt.$

(b) $\int_0^a \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}, a > 0.$

(f) $\int \sqrt{1-4x^2} dx.$

(c) $\int \frac{dt}{t^2 \sqrt{t^2-16}}.$

(g) $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$

(d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}.$

(h) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx.$

5.3.5. Dùng phép đổi biến lượng giác để chứng minh rằng

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

5.3.6. Dùng máy tính (xem Hướng dẫn ở trang 197), hãy thử tính tích phân của hàm:

(a) $(x^5 + 4x^3 + 2x - 4)/(2x^3 - 8x + 6).$

(b) $(x^5 + 4x^3 + 2x - 4)/(2x^3 - 4x + 6).$

(c) $e^{-x^2}.$

(d) $\sin \ln x.$

(e) $\sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}/x.$

(f) $x/\sqrt{x^4 + 10x^2 - 96x - 71}.$

Tính tích phân bằng phương pháp số

5.3.7. Cho hàm số f định bởi $f(x) = x^4$ xác định trên đoạn $[0, 1]$. Hãy viết biểu thức tổng Riemann của f trên $[0, 1]$ bằng cách chia đoạn này thành 10 đoạn con đều nhau, điểm lấy mẫu là trung điểm của mỗi đoạn con. Hãy so sánh giá trị của tổng Riemann này với giá trị đúng của tích phân.

5.3.8. Dùng Quy tắc điểm giữa với $n = 6$ để tính xấp xỉ tích phân $\int_1^3 e^{1/x} dx$.

5.3.9. Dùng Quy tắc điểm giữa với $n = 10$ để ước lượng tích phân $\int_0^1 e^{x^2} dx$.

5.3.10. Dùng Quy tắc điểm giữa với $n = 10$ để ước lượng tích phân $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$.

5.3.11. Dùng Quy tắc điểm giữa với $n = 4$ để tính xấp xỉ tích phân $\int_0^{4\sqrt{\pi}} \cos(x^2) dx$.

5.3.12. Dùng dữ liệu được cho để ước lượng giá trị của tích phân $\int_1^5 f(x) dx$:

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,0	2,4	3,5	4,0
1,5	2,9	4,0	4,1
2,0	3,3	4,5	3,9
2,5	3,6	5,0	3,5
3,0	3,8		

Tích phân suy rộng

5.3.13. Tính diện tích bên dưới đường $y = \frac{2}{x^3}$ bên trên trục x trên khoảng $[3, \infty)$.

5.3.14. Vẽ đồ thị của hàm $y = \frac{1}{1+x^2}$ và tính diện tích bên dưới đồ thị này bên trên trục x .

5.3.15. Xác định tích phân hội tụ hay phân kì.

(a) $\int_0^1 \frac{3}{x^5} dx$.

(f) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

(b) $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx$.

(g) $\int_0^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx$.

(c) $\int_{-2}^{14} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}}$.

(h) $\int_0^5 \frac{w}{w-2} dw$.

(d) $\int_6^8 \frac{4}{(x-6)^3} dx$.

(i) $\int_0^3 \frac{dx}{x^2-6x+5}$.

(e) $\int_{-2}^3 \frac{1}{x^4} dx$.

(j) $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$.

5.3.16. Tìm xem tích phân sau là hội tụ hay phân kì. Nếu tích phân hội tụ hãy tính nó.

(a) $\int_e^\infty \frac{\ln x}{x} dx$.

(b) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3} dx$.

(c) $\int_0^1 \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx$.

(d) $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx$.

5.3.17. Xác định tích phân hội tụ hay phân kì, có thể dùng phương pháp so sánh.

(a) $\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1} dx$.

(c) $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx$.

(b) $\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{x^2+1} dx$.

(d) $\int_1^\infty \frac{2+e^{-x}}{x} dx$.

(e) $\int_2^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4-x}} dx.$

(h) $\int_0^1 \frac{e^{-1/x}}{x^3} dx.$

(f) $\int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}} dx.$

(g) $\int_0^\infty x e^{-x^2/2} dx.$

(i) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2 e^x} dx.$

5.3.18. Tìm các giá trị của p sao cho tích phân hội tụ và tính tích phân với các giá trị đó của p .

(a) $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx.$

(b) $\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p} dx.$

(c) $\int_0^1 x^p \ln x dx.$

Các bài toán khác

5.3.19. Nếu f liên tục trên \mathbb{R} , hãy chứng minh

$$\int_a^b f(-x) dx = \int_{-b}^{-a} f(x) dx.$$

Hãy minh họa hình học đẳng thức này.

5.3.20. Nếu f liên tục trên \mathbb{R} , hãy chứng minh rằng

$$\int_a^b f(x+c) dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x) dx.$$

Hãy minh họa hình học đẳng thức này.

5.3.21. Chứng minh công thức truy hồi, với $n \geq 2$ là một số nguyên:

(a)
$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx.$$

(b)
$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx.$$

5.3.22. Chứng minh rằng với $n \geq 2$ là một số nguyên:

(a)
$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx.$$

(b)
$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}.$$

(c)
$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{\pi}{2}.$$

5.3.23. Chứng minh công thức, với m và n là các số nguyên dương

(a)
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0.$$

$$(b) \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{nếu } m \neq n \\ \pi, & \text{nếu } m = n. \end{cases}$$

$$(c) \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{nếu } m \neq n \\ \pi, & \text{nếu } m = n. \end{cases}$$

5.3.24. Một chuỗi Fourier hữu hạn được định nghĩa bởi

$$f(x) = \sum_{n=1}^N a_n \sin nx = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_N \sin Nx.$$

Chứng minh rằng hệ số a_m được cho bởi công thức

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx.$$

5.3.25. Cho f là một hàm liên tục. Đặt

$$g(x) = \int_0^x (x-t)f(t) \, dt.$$

Đây là một ví dụ của một đối tượng nâng cao hơn trong Giải tích toán học gọi là “tích chập” (convolution).

(a) Tính g nếu $f(x) = x$.

(b) Chứng tỏ

$$g(x) = x \int_0^x f(t) \, dt - \int_0^x t f(t) \, dt.$$

(c) Tính $g'(x)$ và $g''(x)$.

5.4 Ứng dụng của tích phân

Bên cạnh diện tích, tích phân thường xuất hiện trong các mô hình và các khảo sát chung dùng các đại lượng liên tục, trong xấp xỉ dữ liệu lớn, ..., mà ở đó có nhu cầu đưa là một đại lượng đại diện cho tổng.

5.4.1 Diện tích, thể tích

Trước môn Vi tích phân ta chỉ có khái niệm hình học về diện tích của các hình bao bởi những đoạn thẳng, tức các đa giác, và thể tích của những hình bao bởi những mặt phẳng, tức các đa diện. Để xét những hình bao bởi những đường cong và mặt cong ta cần khái niệm giới hạn, do đó cần môn Vi tích phân.

Diện tích giữa hai đồ thị

Nếu f và g là hai hàm liên tục với $f \geq g$ trên $[a, b]$ thì có thể định nghĩa diện tích của phần mặt phẳng nằm giữa hai đồ thị là

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

Chú ý nếu $g = 0$ thì ta thu lại diện tích bên dưới đồ thị hàm f bên trên trục x ở Định nghĩa 5.1.7.

Ví dụ 5.4.1. Diện tích hình chữ nhật $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ là diện tích của phần mặt phẳng nằm giữa hai đồ thị $y = c$ và $y = d$, trên đoạn $a \leq x \leq b$, nên được cho bởi

$$\int_a^b (d - c) dx = (b - a)(d - c).$$

■

Ví dụ 5.4.2. Tìm diện tích nằm giữa hai đường $y = x^2$ và $y = x^3$.

Ta dễ dàng khảo sát được, và có thể dùng thêm hình vẽ để thấy, rằng hai đường này cắt nhau tại $x = 0$ và $x = 1$, và trên $[0, 1]$ thì $x^2 \geq x^3$. Do đó diện tích của phần nằm giữa hai đồ thị bằng

$$\int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \frac{1}{12}.$$

■

Thể tích

Nếu một khối trong \mathbb{R}^3 có diện tích của mặt cắt (tiết diện) vuông góc trục x tại $x \in [a, b]$ là $A(x)$ thì ta có thể định nghĩa thể tích của khối là

$$\int_a^b A(x) dx.$$

Định nghĩa này nói rằng **thể tích của khối bằng tổng diện tích các mặt cắt song song**. Đây còn được gọi là tính thể tích bằng phương pháp cắt lớp.

Ví dụ 5.4.3. Thể tích quả cầu bán kính R là $V = \frac{4\pi}{3} R^3$.

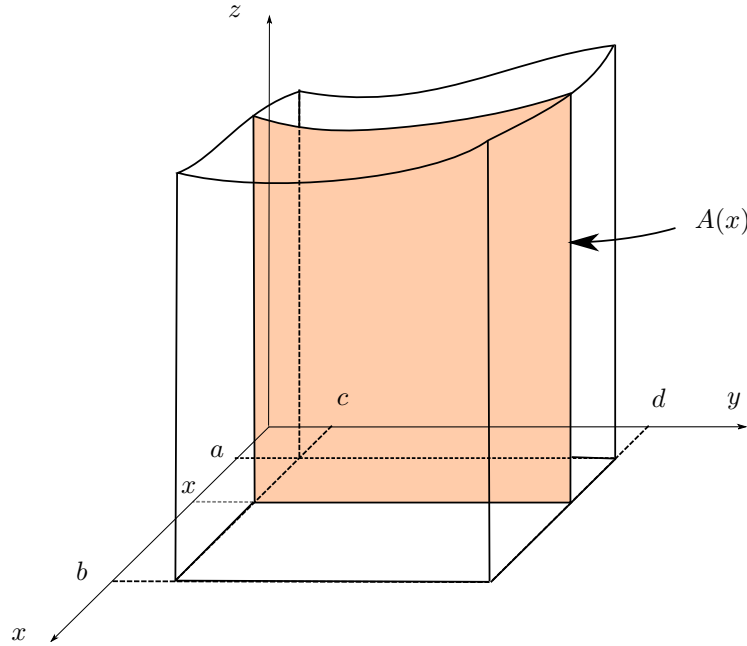
Lấy quả cầu tâm O bán kính R . Lát cắt vuông góc trục x tại x là một hình tròn có bán kính $r = \sqrt{R^2 - x^2}$, nên có diện tích bằng

$$A(x) = \pi r^2 = \pi \left(\sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 = \pi (R^2 - x^2).$$

Vậy thể tích quả cầu bằng

$$V = \int_{-R}^R \pi (R^2 - x^2) dx = \pi R^2 x - \frac{1}{3} \pi x^3 \Big|_{x=-R}^{x=R} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

■



Hình 5.4.1: Thể tích của khối qua diện tích mặt cắt.

Ví dụ 5.4.4. Một khối tròn xoay nhận được bằng cách xoay một miền trong mặt phẳng quanh một đường thẳng trong mặt phẳng đó. Giả sử $f \geq 0$ trên $[a, b]$ và xét khối tròn xoay thu được bằng cách xoay đồ thị của hàm f quanh trục x . Mỗi lát cắt vuông góc tại x của khối tròn xoay là một hình tròn tâm trên trục x với bán kính $f(x)$, có diện tích bằng $\pi f(x)^2$. Vậy thể tích của khối tròn xoay nhận được bằng cách xoay đồ thị của f quanh trục x là

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

■

Ví dụ 5.4.5. Khi xoay đoạn thẳng $y = x$ với $0 \leq x \leq 1$ quanh trục x ta được một mặt nón. Thể tích của khối nón bao bởi mặt nón này bằng

$$\int_0^1 \pi x^2 dx = \frac{\pi}{3}.$$

■

Ở môn Vi tích phân 1 ta chỉ xét một số trường hợp riêng của diện tích và thể tích. Trong môn Vi tích phân 2 [BMGT2, chương 2] ta khảo sát một cách có hệ thống hơn, thấy được khái niệm diện tích và thể tích đưa ra ở đây tương thích với các khái niệm diện tích của đa giác và thể tích của đa diện trước đây, và có các tính chất được trông đợi từ những đại lượng đo lường, như tính cộng và tính không đổi qua phép dời hình.

5.4.2 Giá trị trung bình

Nếu tại các điểm x_i , $1 \leq i \leq n$ có tương ứng các giá trị $f(x_i)$ thì giá trị trung bình tại các điểm này như ta đã biết là $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$. Trong trường hợp miền xác định có vô hạn phần tử, giả sử f được xác định trên $[a, b]$ thì giá trị trung bình của f được cho bằng công thức tương tự, chỉ thay tổng bằng tích phân:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f.$$

Giá trị trung bình của một hàm số trên một miền xác định chính là tổng giá trị của hàm chia cho chiều dài của miền xác định.

Có thể giải thích chi tiết hơn như sau. Chia $[a, b]$ thành n đoạn con có cùng chiều dài Δx

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n = b.$$

Lấy điểm $x_{i-1} \leq x_i^* \leq x_i$. Giá trị trung bình của hàm tính tại các điểm chia trên là:

$$\frac{f(x_1^*) + f(x_2^*) + f(x_3^*) + \dots + f(x_n^*)}{n}.$$

Ta viết

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1^*) + f(x_2^*) + \dots + f(x_n^*)}{n} &= [f(x_1^*) + f(x_2^*) + \dots + f(x_n^*)] \cdot \frac{b-a}{n} \cdot \frac{1}{b-a} \\ &= [f(x_1^*) + f(x_2^*) + \dots + f(x_n^*)] \cdot \Delta x \cdot \frac{1}{b-a} \end{aligned}$$

Số hạng

$$[f(x_1^*) + f(x_2^*) + \dots + f(x_n^*)] \cdot \Delta x$$

chính là một tổng Riemann của f . Qua giới hạn khi $n \rightarrow \infty$ ta được ngay giá trị trung bình của hàm là

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Ví dụ 5.4.6. Nhiệt độ (đo bằng độ C) t giờ kể từ 9 giờ sáng được mô hình hóa bởi

$$T(t) = 30 + 14 \sin \frac{\pi t}{12}.$$

Tìm nhiệt độ trung bình giữa 9 giờ sáng và 9 giờ tối.

Giá trị trung bình của T giữa $t = 0$ và $t = 12$ là

$$\frac{1}{12-0} \int_0^{12} T(t) dt = \frac{1}{12} \int_0^{12} \left(30 + 14 \sin \frac{\pi t}{12} \right) dt \approx 38,9.$$

■

Ví dụ 5.4.7 (Vận tốc trung bình). Tiếp tục Ví dụ 5.2.16, ta xét một vật di chuyển trên một đường thẳng, nhưng giờ ta không giả sử chuyển động chỉ về một

chiều, mà là chuyển động bất kì. Cho đường thẳng này một trục tọa độ, thì vị trí của vật tại thời điểm t được cho bởi một số thực $x(t)$. Vận tốc chuyển động $v(t)$ là tỉ lệ thay đổi tức thời của vị trí theo thời gian, tức là đạo hàm theo thời gian của vị trí, $v(t) = x'(t)$.

Giả sử vật di chuyển trong khoảng thời gian từ a tới b . Giá trị trung bình của vận tốc trong khoảng thời gian này là

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b v(t) dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b x'(t) dt = \frac{1}{b-a} x(t) \Big|_{t=a}^{t=b} = \frac{x(b) - x(a)}{b-a}.$$

Chú ý vận tốc trung bình, bằng lượng thay đổi vị trí chia chiều dài khoảng thời gian, có thể khác với tốc độ trung bình, bằng chiều dài quãng đường đi được chia chiều dài khoảng thời gian, trừ khi chuyển động thẳng chỉ theo chiều dương. ■

5.4.3 Một số ứng dụng trong khoa học

Một ý nghĩa chính của tích phân là tính tổng, vì vậy mỗi khi trong khoa học kỹ thuật có nhu cầu tính tổng của vô hạn giá trị thì tích phân có thể xuất hiện.

Ở đây ta nghiên cứu các ứng dụng chủ yếu qua các ví dụ và bài toán. Người đọc có thể tham khảo thêm nhiều ví dụ ứng dụng trong các tài liệu như [Ste16].

Ví dụ 5.4.8 (Mạch máu). Luật dòng chảy về tốc độ dòng máu chảy trong một mạch máu được xây dựng như sau:

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

trong đó, v là vận tốc dòng máu chảy trong một mạch máu với bán kính R và độ dài l ở một khoảng cách r từ trục ở tâm, P là áp lực khác nhau giữa các điểm cuối của mạch máu và η là độ nhớt của máu. Ta muốn tính thể tích máu đi trong mạch máu theo đơn vị thời gian, hay còn gọi là thông lượng của dòng máu chảy.

Tổng thể tích máu đi qua ở mỗi bán kính cố định trong một đơn vị thời gian là $v(r)(2\pi r)$, trong đó $2\pi r$ chính là chu vi (chiều dài) của đường tròn bán kính r . Vậy tổng thể tích máu đi trong mạch máu trong một đơn vị thời gian là tích phân của lượng trên theo bán kính:

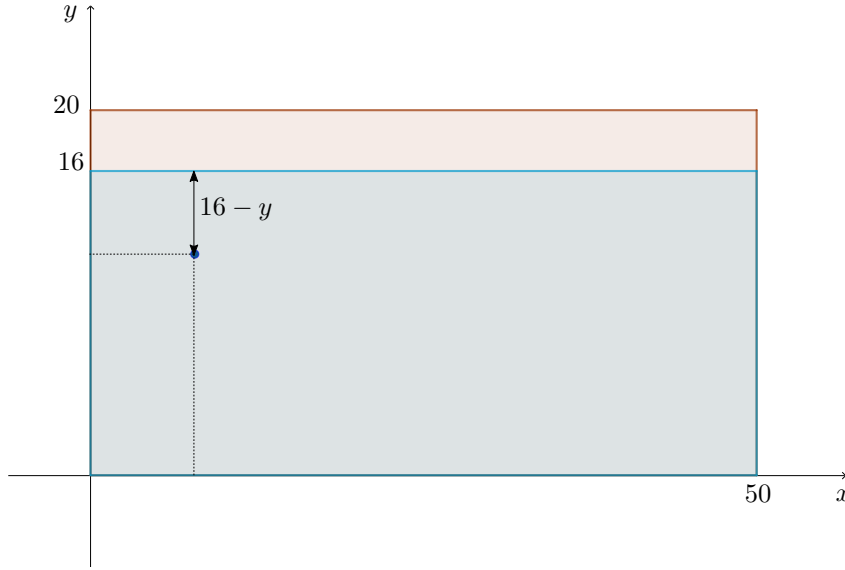
$$\int_0^R v(r)2\pi r dr = \int_0^R \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)2\pi r dr = \frac{\pi PR^4}{8\eta l}.$$

■

Ví dụ 5.4.9 (Thủy lực). Một con đập có dạng hình chữ nhật, thẳng đứng. Độ cao của nó là 20 mét và bề rộng là 50 mét. Tính áp lực nước tác động lên con đập nếu mực nước cách đỉnh đập 4 mét.

Áp lực lên một chất lỏng tĩnh có mật độ khối lượng ρ ở độ sâu d được cho bởi là $\rho g d$ trong đó g là hằng số trọng trường. Một nguyên lý là tại mọi vị trí trong một

chất lỏng tĩnh áp lực là giống nhau theo mọi hướng, nếu không thì chất lỏng sẽ di chuyển theo hướng có áp lực lớn hơn.



Đặt một hệ tọa độ lên mặt phẳng của con đập, chọn gốc tọa độ ở góc dưới bên trái của con đập, trục x nằm ngang và trục y thẳng đứng hướng lên như trong hình. Áp lực nước tĩnh tại một điểm có cao độ y là $\rho g(16 - y)$, với mật độ khối lượng của nước là $\rho = 1000 \text{ (kg/m}^3\text{)}$. Tổng áp lực nước trên đập ở cao độ này là $50\rho g(16 - y)$, và tổng áp lực nước trên toàn đập là

$$\int_0^{16} 50\rho g(16 - y) dy = 50 \cdot 1000 \cdot 9,8 \cdot \left(16y - \frac{1}{2}y^2\right) \Big|_0^{16} = 62720 \cdot 10^3.$$

Đơn vị để đo áp lực là Newton trên mét vuông, còn được gọi là Pascal, với Newton là đơn vị đo lực ($N = \text{kgm/s}^2$). ■

Hàm mật độ

Nếu tại mỗi điểm x_i , $1 \leq i \leq n$ có tương ứng giá trị $f(x_i)$ của một đại lượng thì tổng giá trị của đại lượng dĩ nhiên là $\sum_{i=1}^n f(x_i)$. Nếu tập hợp D các điểm đang xét là vô hạn thì hàm f từ D vào tập các số thực có khi được gọi là **hàm mật độ** của đại lượng, và tổng giá trị của đại lượng là tích phân $\int_D f$ của hàm mật độ.

Trong vật lý, khối lượng của vật là tích phân của hàm mật độ khối lượng trên phần không gian chứa vật.

Ví dụ 5.4.10. Tìm khối lượng của một thanh kim loại thẳng dài 2 mét có mật độ khối lượng $\rho(x) = 1 + x(2 - x) \text{ (kg/m)}$, với x là khoảng cách từ một đầu của thanh tới điểm đang xét.

Khối lượng của thanh bằng tích phân trên thanh của hàm mật độ khối lượng:

$$\int_0^2 \rho(x) dx = \int_0^2 [1 + x(2 - x)] dx = 10/3 \text{ (kg)}.$$

■

Công

Giả sử một vật di chuyển dưới tác dụng của một lực. Công của lực là khái niệm vật lý đại diện cho tác động của lực vào chuyển động. Nếu lực nằm cùng chiều chuyển động của vật thì toàn bộ lực biến thành công. Nếu một vật di chuyển một khoảng cách d trên một đường thẳng dưới tác động của một lực hằng F cùng chiều chuyển động thì công là tổng tác động của lực vào chuyển động, chính bằng tổng của đại lượng F trên đoạn có chiều dài d , do đó được định nghĩa trong vật lý là số $F \cdot d$.

Bây giờ xét trường hợp tổng quát hơn, lực F có thể thay đổi độ lớn, tuy vẫn cùng phương chuyển động. Đặt một trục tọa độ trên phương chuyển động. Vị trí của vật được cho bởi số thực x còn độ lớn lực tác động lên vật tại điểm đó được cho bởi $F(x)$. Giả sử vật di chuyển từ vị trí $x = a$ tới vị trí $x = b$. **Công của lực** F là tổng của hàm F trên đoạn $[a, b]$, cho bởi tích phân

$$\int_a^b F(x) dx.$$

Ví dụ 5.4.11 (Động năng). Giả sử một vật di chuyển dưới tác dụng của tổng lực F . Giả sử vị trí của vật ở thời điểm t là $x(t)$. Vận tốc của vật là $v(t) = x'(t)$ và gia tốc của vật là $a(t) = v'(t) = x''(t)$. Giả sử vị trí ban đầu của vật là $x(t_0) = a$ và vị trí cuối là $x(t_1) = b$. Ta định nghĩa **động năng** (năng lượng có từ chuyển động) của vật là $K(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2 = \frac{1}{2}mx'(t)^2$.

Theo cơ học Newton: $F = ma = mx''$. Do đó công của lực F khi vật di chuyển từ a tới b là

$$\int_a^b F(x) dx = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t))x'(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} mx''(t)x'(t) dt.$$

Chú ý hệ thức $((x')^2)' = 2x'x''$, ta biến đổi

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x) dx &= \int_{t_0}^{t_1} m \frac{1}{2} (x'(t)^2)' dt \\ &= \frac{1}{2} mx'(t_1)^2 - \frac{1}{2} mx'(t_0)^2 = K(t_1) - K(t_0). \end{aligned}$$

Vậy ta thu được bằng phương pháp toán học một định luật vật lý: công của lực tác động đúng bằng biến thiên động năng. ■

5.4.4 Xác suất

Trong lý thuyết xác suất, một biến ngẫu nhiên X là một ánh xạ từ một tập hợp các sự kiện vào tập hợp các số thực.

Trong trường hợp tập giá trị D của X là hữu hạn ta nói X là một biến ngẫu nhiên rời rạc. Với mỗi giá trị $x \in D$ có một số thực $0 \leq f(x) \leq 1$ là xác suất để X có giá trị x (giá trị 1 chính là 100%). Hàm f được gọi là hàm mật độ xác suất của

biến ngẫu nhiên X . Xác suất để X có giá trị trong tập $C \subset D$ được cho bởi

$$\sum_{x \in C} f(x).$$

Một hệ quả là hàm mật độ xác suất phải thỏa $\sum_{x \in D} f(x) = 1$. Giá trị trung bình (mean) hay kì vọng (giá trị trông đợi, expected value) theo xác suất của X được cho bởi:

$$\sum_{x \in D} xf(x).$$

Ví dụ 5.4.12. Xét một trò chơi với con xúc xắc như sau: Người chơi phải trả 20 đồng cho mỗi lần tung xúc xắc. Nếu mặt ngửa là mặt 6 nút thì người chơi được nhận 60 đồng, nếu là các mặt còn lại thì chỉ được nhận 10 đồng. Hỏi trong trò chơi này ai được lợi, người chơi hay người tổ chức trò chơi?

Gọi X là biến xác suất như sau: Mặt 6 nút của xúc xắc ứng với số thực 60, các mặt còn lại ứng với số thực 10. Hàm mật độ xác suất trong trường hợp này là $f(10) = 5/6$ và $f(60) = 1/6$. Câu trả lời cho câu hỏi trên được quyết định bởi giá trị trung bình của biến xác suất X . Ta có kì vọng của X bằng $10 \cdot \frac{5}{6} + 60 \cdot \frac{1}{6} = \frac{110}{6} < 20$, như vậy nếu chơi nhiều lần thì người chơi bị thiệt, còn người tổ chức trò chơi hưởng lợi. ■

Trong trường hợp tập giá trị của biến ngẫu nhiên X là một khoảng số thực D (có thể bằng $(-\infty, \infty)$) ta nói X là một biến ngẫu nhiên liên tục. Tương tự với trường hợp biến ngẫu nhiên rời rạc, có một hàm mật độ xác suất f xác định trên D sao cho $f(x) \geq 0$ và xác suất để X có giá trị trong khoảng C thu được bằng cách thay tổng trong công thức rời rạc bởi tích phân:

$$\int_C f(x) dx.$$

Hàm mật độ xác suất phải thỏa

$$\int_D f(x) dx = 1.$$

Tương tự, trung bình hay kì vọng của biến ngẫu nhiên X thu được bằng cách thay tổng trong công thức rời rạc bởi tích phân:

$$\int_D xf(x) dx.$$

Ví dụ 5.4.13. Gọi T là biến xác suất ứng thời điểm hư hỏng của sản phẩm với số thực $t \geq 0$ là thời gian tính theo năm từ khi sản phẩm được sản xuất. Giả sử hàm mật độ xác suất được cho bởi $f(t) = 0,1e^{-0,1t}$.

Giả sử nhà sản xuất bảo hành sản phẩm trong 2 năm. Xác suất sản phẩm bị hư trong thời gian bảo hành là xác suất để T có giá trị trong khoảng giữa 0 và 2, được

cho bởi

$$\int_0^2 f(t) dt = \int_0^2 0,1e^{-0,1t} dt \approx 18\%.$$

Tập giá trị của biến xác suất là khoảng $[0, \infty)$. Hàm mật độ xác suất thỏa

$$\int_0^\infty 0,1e^{-0,1t} dt = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_0^h 0,1e^{-0,1t} dt = \lim_{h \rightarrow \infty} -e^{-0,1t} \Big|_0^h = \lim_{h \rightarrow \infty} (-e^{-0,1h} + 1) = 1.$$

Thời điểm hư hỏng trung bình của sản phẩm là giá trị trung bình xác suất hay kì vọng cho bởi

$$\int_0^\infty t 0,1e^{-0,1t} dt = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_0^h t 0,1e^{-0,1t} dt.$$

Ta có thể tìm nguyên hàm bằng cách dùng tích phân từng phần hoặc sử dụng máy tính, và thu được

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_0^h t 0,1e^{-0,1t} dt = \lim_{h \rightarrow \infty} -(t + 10)e^{-0,1t} \Big|_0^h = \lim_{h \rightarrow \infty} (-(h + 10)e^{-0,1h} + 10) = 10.$$

Giới hạn trên có thể tìm được bằng cách dùng Quy tắc l'Hôpital. Vậy trung bình sản phẩm hư sau 10 năm. ■

Ví dụ 5.4.14 (Phân bố chuẩn). Nhiều hiện tượng ngẫu nhiên được mô hình hóa bằng hàm mật độ có dạng

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}.$$

Đồ thị của hàm này có dạng trong Hình 5.2.2. Việc đây thực sự là một hàm mật độ xác suất là hệ quả của công thức

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Công thức quan trọng này được rút ra bằng cách dùng tích phân của hàm hai biến trong [BMGT2, chương 2]. ■

Chủ đề này có thể được xem xét chi tiết hơn trong môn học Xác suất Thống kê [NTNM22], [Ros20].

Bài tập

Diện tích, thể tích

5.4.1. Tính diện tích miền được bao bởi các đường cong đồ thị của các hàm số:

- (a) $f(x) = 2x^3 + 3$ và $g(x) = 4x + 3$.
- (b) $f(x) = 4x - 3x^3$ và $g(x) = 2x + 1$.
- (c) $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 2)$ và trục x .

(d) $f(x) = 3x^4 - 24x^2 + 50$ và đường thẳng ℓ cắt đồ thị ở $x = 1$ và $x = 3$.

(e) $y = x(2 - x)$ và $x = 2y$.

(f) $x^2 = 4y$ và $x = 4y - 2$.

(g) $y = x^2$ và $x = y^2$.

(h) $f(x) = x^2$ và $g(x) = 3/(2 + x^2)$.

(i) $y = (1/2)x^2 + 1$ và $y = x + 1$.

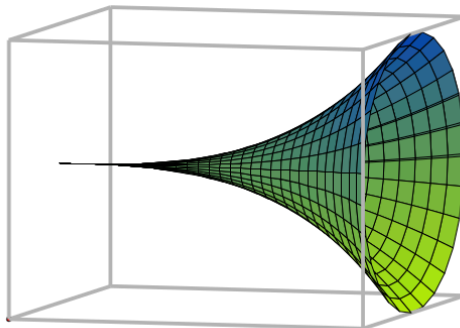
(j) $x^2 + y^2 = 1$ và $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

5.4.2. Sử dụng chương trình máy tính (xem Hướng dẫn ở trang 197) vẽ và tìm diện tích của miền được giới hạn bởi các đường cong $y = x^5 - 5x^3 + 3x$ và $y = 2x + 1$.

5.4.3. Sử dụng chương trình máy tính để vẽ và xấp xỉ diện tích của miền được giới hạn bởi các đường cong $y = |x|$ và $y = \cos x$.

5.4.4. Một máy chụp cắt lớp vi tính theo trục ngang CAT (Computerized Axial Tomography) tạo ra ảnh chụp phần trong của một cơ quan của cơ thể con người nhằm cung cấp thông tin về cơ quan mà không cần phẫu thuật. Giả sử rằng một máy chụp cắt lớp vi tính CAT chụp cắt lớp một lá gan của một người với khoảng cách các mặt cắt cách đều nhau một khoảng là 1,5 cm. Cho biết chiều dài lá gan là 15 cm và diện tích các mặt cắt ngang (đơn vị cm^2) là 0, 14, 50, 70, 90, 100, 110, 120, 70, 40, 0. Hãy ước tính thể tích lá gan.

5.4.5. Tìm thể tích của khối bao bởi mặt tròn xoay nhận được bằng cách xoay đường $y = x^3$ quanh trục x với x từ 0 tới 2, xem Hình 5.4.2.



Hình 5.4.2

5.4.6. Tìm thể tích của khối được tạo bằng cách xoay miền bao bởi đồ thị của hàm $f(x) = x - x^3$ và trục x quanh trục y .

5.4.7. Tìm thể tích của khối nhận được bằng cách xoay quanh trục y phần mặt phẳng bao bởi đường $y = x^2 - 4x + 4$ và đường $y = 1$.

5.4.8. Chứng tỏ phần không gian nhận được bằng cách xoay quanh trục x phần mặt phẳng bên dưới đồ thị của hàm $y = 1/x$ bên trên trục x với $x \geq 1$ có thể tích hữu hạn.

5.4.9. Tính thể tích các khối S được mô tả sau đây.

(a) Một khối nón thẳng đứng đều có chiều cao h và bán kính của hình tròn đáy r .

- (b) Một khối nón cụt thẳng đứng đều có chiều cao h , bán kính mặt đáy dưới là R và bán kính của mặt đáy trên là r .
- (c) Một nắp tròn xoay – khối nhận được bằng cách cắt một quả cầu bằng một mặt phẳng – có bán kính đáy r và chiều cao là h .
- (d) Một khối hình chóp tam giác với chiều cao h và đáy là tam giác đều có cạnh a .
- (e) Một khối hình chóp tứ giác với chiều cao h và đáy hình chữ nhật với chiều rộng b , chiều dài $2b$.
- (f) Một khối hình chóp tứ giác với chiều cao h và đáy có diện tích đáy B .
- (g) Một khối chóp cụt có đáy dưới là hình vuông có cạnh b , đáy trên là hình vuông có cạnh a , và chiều cao khối chóp cụt là h .

5.4.10. Một quả cầu đang được bơm thêm không khí vào. Khi thể tích của quả cầu đang là 30 m^3 thì không khí đang được bơm vào với tốc độ $2\text{ m}^3/\text{s}$. Hỏi lúc đó bán kính quả cầu đang giãn nở với vận tốc bao nhiêu?

Giá trị trung bình

5.4.11. Tính giá trị trung bình của các hàm số trên miền xác định.

- (a) $f(x) = \sin x, x \in [0, \pi]$.
- (b) $f(x) = \sin x, x \in [0, 2\pi]$.
- (c) $f(x) = x^2, x \in [0, 1]$.
- (d) $f(x) = x^2, x \in [-1, 1]$.
- (e) $f(x) = x^3, x \in [-1, 1]$.

5.4.12. Xe chạy với vận tốc $v(t) = t^2 - 2t + 40$ (km/h), $0 \leq t \leq 5$ (h). Hỏi vận tốc trung bình của xe là bao nhiêu?

5.4.13. Xe chạy trên đường thẳng với vận tốc là $v(t) = -10t^2 + 40t - 10$ (km/h), $0 \leq t \leq 3$ (h).

- (a) Tính vận tốc trung bình của xe.
- (b) Tính tốc độ trung bình của xe (tốc độ được hiểu là độ lớn của vận tốc).
- (c) Hai kết quả trên có khác nhau không? Vì sao?

5.4.14. Một thanh kim loại thẳng dài 3 (m) có mật độ khối lượng $\rho(x) = 1 + x^2$ (kg/m), với x là khoảng cách từ một đầu của thanh tới điểm đang xét trên thanh.

- (a) Tìm khối lượng của thanh.
- (b) Tìm mật độ khối lượng trung bình của thanh.

5.4.15 (Định lý giá trị trung bình cho tích phân). Cho f liên tục trên đoạn $[a, b]$.

- (a) Gọi m là giá trị nhỏ nhất của f và M là giá trị lớn nhất của f . Chứng tỏ giá trị trung bình của f phải nằm giữa m và M , tức là

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

- (b) Giải thích vì sao phải có số $c \in [a, b]$ sao cho

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Như vậy giá trị trung bình của một hàm liên tục trên một đoạn đạt được tại một điểm trong đoạn đó.

5.4.16. Áp dụng Định lý giá trị trung bình cho tích phân (Bài tập 5.4.15), hãy giải thích nếu f liên tục và không âm trên đoạn $[a, b]$ thì diện tích bên dưới đồ thị của f đúng bằng diện tích của hình chữ nhật đáy là đoạn $[a, b]$ và chiều cao tại một điểm nào đó trên đồ thị của f .

5.4.17. * Ta tìm hiểu quan hệ giữa Định lý giá trị trung bình cho tích phân (Bài tập 5.4.15) và Định lý giá trị trung bình Lagrange 4.1.12.

- (a) Giả sử f liên tục trên đoạn $[a, b]$. Đặt $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Hãy áp dụng Định lý giá trị trung bình Lagrange cho F để thu được Định lý giá trị trung bình cho tích phân cho f .
- (b) Ngược lại, giả sử f khả vi liên tục (tức có đạo hàm liên tục) trên đoạn $[a, b]$. Hãy áp dụng Định lý giá trị trung bình cho tích phân cho f' để thu được Định lý giá trị trung bình Lagrange cho f .

Ứng dụng trong vật lý

5.4.18. Một chiếc xe đang chạy trên đường thì người lái thấy một vật cản và lập tức áp dụng thắng hãm xe. Tại thời điểm áp dụng thắng xe đang chạy với vận tốc 60 km/h . Xe hãm với gia tốc là 44 m/s^2 .

- (a) Viết công thức cho vận tốc xe t giây sau khi áp dụng thắng. Khi nào xe dừng?
- (b) Viết công thức cho khoảng cách di chuyển của xe t giây sau khi áp dụng thắng. Xe đi bao xa trước khi dừng?

5.4.19. Điện tích phân bố dọc theo một ống thẳng dài 10 cm theo mật độ

$$\rho(x) = 10^{-4} \frac{x}{x^2 + 1}$$

(*coulomb/cm*) với x là khoảng cách tới đầu ống. Hãy tính tổng điện tích trong ống.

5.4.20. Mật độ khối lượng của một thanh kim loại theo vị trí $x \in [0, 2\pi]$ là $\rho(x) = 2 + \sin x$. Tính khối lượng của thanh.

5.4.21. Một cái bồn có dạng hình hộp với chiều rộng 3 mét, chiều dài 4 mét, chiều cao 5 mét chứa đầy nước. Ta cần tính công W – năng lượng cần thiết để bơm hết nước ra khỏi bồn qua mặt trên của bồn.

- (a) Gọi x là khoảng cách từ một chất điểm trong bồn tới mặt trên của bồn. Giải thích vì sao công để đưa chất điểm này ra khỏi bồn là $x\rho g$, với mật độ khối lượng của nước là $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, hằng số trọng lực là $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.
- (b) Thiết lập công thức $W = \int_0^5 x\rho g \cdot 3 \cdot 4 dx$. Tính W .

5.4.22. Một hồ bơi hình tròn có đường kính 24 m , tường bao quanh hồ cao 5 mét, và độ sâu của nước trong hồ là 4 m . Tính công cần thiết để bơm tất cả nước lên trên tường bao quanh và ra khỏi hồ. Khối lượng riêng của nước là 1000 kg/m^3 .

5.4.23. Định luật vạn vật hấp dẫn của Newton phát biểu rằng hai vật có khối lượng m_1 và m_2 sẽ bị hút gần nhau bằng một lực

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

trong đó r là khoảng cách giữa các vật thể G là hằng số hấp dẫn. Nếu một trong hai vật thể được cố định, tính công cần thiết để di chuyển vật còn lại từ $r = a$ đến $r = b$.

Tính công, tức tổng năng lượng được tạo ra từ nhiên liệu tên lửa, cần thiết để phóng một vệ tinh nặng 1000 kg theo chiều thẳng đứng lên đến độ cao 100 km .

Giả sử rằng khối lượng của Trái đất là $5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$ và được tập trung tại tâm Trái đất. Lấy bán kính Trái đất là $6,37 \times 10^6 \text{ m}$ và $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

5.4.24. Điện gia dụng được cung cấp theo hình thức điện xoay chiều có điện thế thay đổi từ 155 V đến -155 V với tần số 60 Hz (chu kỳ mỗi giây), được cho bởi phương trình

$$E(t) = 155 \sin(120\pi t)$$

trong đó t là thời gian tính theo giây. Các vôn kế đọc điện thế hiệu dụng, đó là căn bậc hai của giá trị trung bình của $[E(t)]^2$ trong một chu kỳ.

- (a) Tính điện thế hiệu dụng của dòng điện gia dụng trên.
- (b) Nhiều bếp điện yêu cầu điện thế hiệu dụng 220 V . Tìm biên độ A tương ứng cần thiết cho điện thế $E(t) = A \sin(120\pi t)$.

Ứng dụng trong kinh tế

5.4.25. Hàm chi phí biên (còn gọi là chi phí cận biên – marginal cost) (xấp xỉ bằng chi phí cho mỗi đơn vị sản phẩm, xem Ví dụ 4.2.20) khi x đơn vị sản phẩm được sản xuất là

$$C'(x) = \sqrt{x} - 3e^{2x},$$

trong đó $C(x)$ là chi phí để sản xuất x đơn vị sản phẩm. Chi phí cố định là $C(0) = 1000$. Tìm hàm chi phí $C(x)$.

5.4.26. Hàm chi phí biên khi x đơn vị sản phẩm được sản xuất là

$$C'(x) = e^{0,3x} + 4x^2 + 5.$$

Chi phí cố định là $C(0) = 10$.

- (a) Tìm hàm chi phí $C(x)$.
- (b) Tính chi phí trung bình trong khoảng quy mô sản xuất $0 \leq x \leq 10$.

5.4.27. Hàm doanh thu biên (marginal revenue) từ sản xuất q đơn vị của một sản phẩm là $R'(q) = 5 - e^{7q}$. Không có doanh thu khi không có sản phẩm. Hãy tìm hàm doanh thu $R(q)$.

5.4.28. Hàm cung ứng (supply function) của một sản phẩm là

$$p = S(x) = 5 + 3e^{0,001x}$$

trong đó p là giá bán một đơn vị sản phẩm và x là sản lượng sản phẩm. Tính giá trung bình trong khoảng cung ứng $10 \leq x \leq 20$.

5.4.29. Một công ty sản xuất x đơn vị sản phẩm mỗi tháng. Phương trình liên hệ giá p mỗi đơn vị sản phẩm với sản lượng x là $p = 500 - 0,25x$, $0 \leq x \leq 1000$.

- Chi phí cho mỗi đơn vị sản phẩm là 300, chi phí cố định là 70. Tìm hàm chi phí.
- Tìm hàm doanh thu và hàm lợi nhuận.
- Vẽ đồ thị hàm lợi nhuận.
- Với quy mô sản xuất như thế nào thì công ty có lợi nhuận dương?
- Với quy mô sản xuất như thế nào thì công ty có lợi nhuận tối đa?
- Tìm lợi nhuận bình quân (lợi nhuận trung bình) nếu công ty sản xuất trong khoảng 300 tới 500 đơn vị sản phẩm mỗi tháng.
- Nếu chính quyền đánh thuế 4 đơn vị tiền tệ trên mỗi đơn vị sản phẩm mà công ty sản xuất ra, thì công ty nên bán sản phẩm ở giá bao nhiêu để có lợi nhuận lớn nhất?

5.4.30. Một quỹ tài chính nhận dòng đầu tư $I(t) = 4t^{\frac{1}{2}}$, là lượng tiền gửi thêm vào quỹ ở thời điểm t . Gọi $K(t)$ là lượng tiền có trong quỹ ở thời điểm t , thì $I = \frac{d}{dt}K$. Giả sử quỹ có khoản đầu tư ban đầu là $K(0) = 1$. Vẽ đồ thị của hàm K và tìm lượng tiền trong quỹ ở thời điểm $t = 9$.

Về ứng dụng của tích phân trong kinh tế có thể đọc thêm ở [CW05, tr. 464].

Xác suất

5.4.31. Một biến ngẫu nhiên có hàm mật độ xác suất dạng $f(x) = c(9 - (x - 3)^2)$, với $0 \leq x \leq 6$ và c là một hằng số.

- Tìm giá trị phù hợp của c để f là một hàm mật độ xác suất.
- Vẽ đồ thị của hàm mật độ xác suất.
- Hãy tìm xác suất biến ngẫu nhiên có giá trị giữa 2 và 3.
- Hãy tìm xác suất biến ngẫu nhiên có giá trị lớn hơn 4.
- Tính giá trị trung bình (kì vọng) của biến ngẫu nhiên này.

5.4.32. Quãng đường sử dụng được của một loại vỏ xe (đơn vị nghìn km) được cho bởi hàm mật độ xác suất $f(x) = 0,02e^{-0,02x}$.

- Vẽ đồ thị của hàm mật độ xác suất.
- Hãy kiểm f thỏa yêu cầu của một hàm mật độ xác suất.
- Hãy tìm xác suất để vỏ xe này dùng được ít nhất 60000 km .
- Hãy tìm xác suất vỏ xe hư trước 30000 km .
- Tính quãng đường sử dụng được trung bình của vỏ xe.

5.4.33. Xét biến ngẫu nhiên là tuổi thọ của một người trong một quốc gia. Ta mô hình hóa hàm mật độ xác suất tuổi thọ của một người trong quốc gia này bằng một hàm có dạng $f(x) = cx^3(100 - x)$, với $0 \leq x \leq 100$ và c là một hằng số.

- Tìm giá trị phù hợp của c .
- Vẽ đồ thị của hàm mật độ xác suất.

- (c) Tính tỉ lệ người dân sống trên 80 tuổi.
- (d) Tính tỉ lệ người dân mất trước 18 tuổi.
- (e) Tính tuổi thọ trung bình (tuổi thọ kì vọng) của người dân quốc gia này.
- (f) Hãy nhận xét về sự phù hợp của mô hình.

5.4.34. Tốc độ của xe trên đường cao tốc có giới hạn 100 km/h tuân theo phân phối chuẩn với giá trị trung bình 112 km/h và độ lệch chuẩn 8 km/h .

- (a) Xác suất mà một xe bất kì chạy với tốc độ cho phép là bao nhiêu?
- (b) Nếu cảnh sát phạt những người lái xe chạy quá 125 km/h , bao nhiêu phần trăm người lái xe sẽ bị phạt?

Các bài toán khác

5.4.35. Nhiệt độ trong một nhà kính được điều khiển theo thiết kế $T(t) = 25 - 3 \cos(\frac{\pi}{12}t)$, với t là thời gian tính bằng giờ từ nửa đêm. Tìm nhiệt độ trung bình vào ban ngày (6 giờ sáng tới 6 giờ tối) và ban đêm.

5.4.36. Nhiệt độ trong một ngôi nhà được điều khiển theo thiết kế $T(t) = 2 + 5 \cos(\frac{\pi}{12}t)$, với t là thời gian tính bằng giờ từ nửa đêm. Tìm nhiệt độ trung bình từ 10 giờ tới 15 giờ.

5.4.37. Lượng của một loại thuốc trong máu bệnh nhân t ngày sau khi uống thuốc được mô hình hóa bằng hàm

$$C(t) = 5e^{-0,2t}.$$

Hãy tính lượng thuốc trung bình trong cơ thể bệnh nhân trong 3 ngày đầu sau khi uống thuốc.

5.4.38. Cao huyết áp là do động mạch bị hẹp lại và để đạt được thông lượng dòng chảy bình thường tim phải bơm mạnh hơn, tức là tăng huyết áp. Hãy tìm quan hệ giữa bán kính động mạch và áp lực máu trong điều kiện thông lượng máu không đổi. Nếu bán kính động mạch bị giảm đi $1/4$ thì áp lực máu phải tăng lên bao nhiêu để đảm bảo cung cấp đủ máu cho cơ thể?

5.4.39. Ta đi trên một quãng đường và sau đó đo được vận tốc trung bình là 50 km/h . Hãy giải thích vì sao chắc chắn có thời điểm vận tốc của ta đúng bằng 50 km/h .

5.4.40. Lượng người đang bị mắc một bệnh truyền nhiễm (tính bằng nghìn người) vào thời điểm t (tính bằng ngày kể từ khi bệnh bùng phát) được mô hình hóa bằng hàm

$$f(t) = 30,1 \cdot (10 - t)e^{t-11,4}, \quad 0 \leq t \leq 10.$$

- (a) Vẽ đồ thị của hàm này.
- (b) Tìm thời điểm tại đó số người đang nhiễm bệnh đạt cực đại.
- (c) Khi nào thì số người đang bị nhiễm bắt đầu giảm?
- (d) Khi nào thì tốc độ lây nhiễm bắt đầu giảm?
- (e) Tìm thời điểm bệnh kết thúc, không còn người nhiễm bệnh.
- (f) Tính tổng số lượng người bị nhiễm bệnh trong đợt bệnh này.

Chương 6

Chuỗi

6.1 Chuỗi số

Phép cộng hữu hạn số thực đã rất quen thuộc với chúng ta. Dần dần xuất hiện những trường hợp mà ta cộng vô hạn số thực. Ví dụ khi ta viết

$$\frac{1}{3} = 0,3333 \dots$$

thì có thể hiểu là

$$\frac{1}{3} = 0 + 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \dots,$$

như thế ta đã nghĩ tới việc cộng vô hạn số thực với nhau. Nghĩ thêm một chút về điều này ta có thể thấy ngay những trường hợp mà phép cộng vô hạn số thực không có vẻ cho ra một số thực nào, ví dụ như

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = ?$$

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \dots = ?$$

Vậy khi nào thì có thể cộng vô hạn số thực với nhau?

Ta thường hình dung một chuỗi số thực là tổng của một dãy số thực. Cụ thể hơn, với dãy số $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ thì biểu thức tổng các số trong dãy

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

được gọi là một chuỗi số, được kí hiệu là $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Thành phần u_n được gọi là số hạng thứ n của chuỗi số.

Định nghĩa 6.1.1. Cho dãy số thực $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$. Tổng của n số hạng đầu tiên của dãy, $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, được gọi là **tổng riêng** thứ n của dãy. Dãy các tổng riêng $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ được gọi là một **chuỗi số**.

6.1.1 Sự hội tụ của chuỗi số

Định nghĩa 6.1.2. Cho dãy số $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$. Nếu dãy các tổng riêng $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ hội tụ về một số thực S thì chuỗi là hội tụ và S được gọi là **tổng của chuỗi**. Vậy tổng của chuỗi là

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k.$$

Ngược lại nếu dãy tổng riêng $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ phân kì thì chuỗi được gọi là **phân kì**.

Ví dụ 6.1.3. Xét sự hội tụ của chuỗi

$$1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} 1.$$

Tổng riêng phần của chuỗi này là $S_n = n$ tiến ra vô cùng, nên theo định nghĩa chuỗi là phân kì. ■

Ví dụ 6.1.4. Tìm tổng của chuỗi

$$1 - 1 + 1 - \cdots + 1 - 1 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.$$

Tổng riêng phần của chuỗi này là

$$S_n = \begin{cases} 0, & n \text{ chẵn} \\ 1, & n \text{ lẻ.} \end{cases}$$

Dãy $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ là phân kì nên chuỗi là phân kì. ■

Ví dụ 6.1.5. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Vì

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

nên tổng riêng phần là

$$S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ta có S_n hội tụ về 1, vậy chuỗi hội tụ về 1, tổng của chuỗi bằng 1, và ta viết

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Ví dụ 6.1.6. Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ta có tổng riêng phần của chuỗi này là

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Vì S_n tiến ra vô cùng khi n tiến ra vô cùng nên chuỗi là phân kì. ■

Ví dụ 6.1.7. Chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

thường xuyên xuất hiện, được gọi là **chuỗi hình học**. Đây cũng là tổng của một **cấp số nhân với công bội r** .

Khi $r = 1$ thì chuỗi bằng $a \sum_{n=1}^{\infty} 1$ là hội tụ khi và chỉ khi $a = 0$.

Khi $r = -1$ thì chuỗi bằng $a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ là hội tụ khi và chỉ khi $a = 0$.

Khi $r \neq 1$ thì tổng riêng của chuỗi là

$$S_n = \sum_{i=1}^n ar^{i-1} = a \sum_{i=1}^n r^{i-1} = a \frac{1-r^n}{1-r}.$$

Khi $|r| < 1$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} |r^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |r|^n = 0$ từ Mệnh đề 6.1.47. Do $0 < r^n \leq |r^n|$ nên theo Định lý kẹp 1.1.34 thì $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$. Do đó S_n hội tụ về $a \frac{1}{1-r}$.

Khi $|r| > 1$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} |r^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |r|^n = \infty$ từ Mệnh đề 6.1.47, nên S_n phân kì.

Tóm lại, với $a \neq 0$ thì chuỗi hình học $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ là hội tụ khi và chỉ khi $|r| < 1$, và

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}, \quad |r| < 1.$$

■

Ví dụ 6.1.8. Chuỗi

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}.$$

là một chuỗi hình học với $a = 1$, $r = \frac{1}{2}$. Chuỗi này hội tụ với tổng bằng $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$, vậy

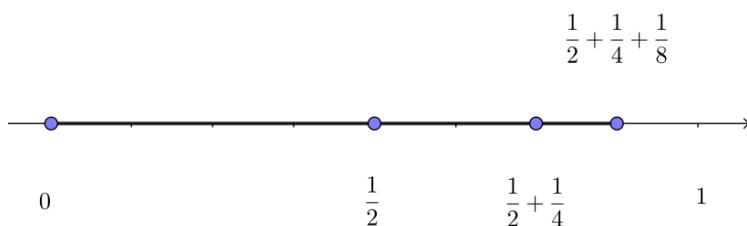
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2.$$

Ta có thể thấy trực quan kết quả này như trong Hình 6.1.1, giải thích tên gọi “chuỗi hình học”. ■

Ví dụ 6.1.9. Chuỗi

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots$$

là một chuỗi hình học với $a = 5$, $r = -\frac{2}{3}$. ■



Hình 6.1.1: Đoạn thẳng có chiều dài 1 có thể chia thành hội của các đoạn thẳng kế tiếp nhau có chiều dài $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$. Rõ ràng tổng chiều dài các đoạn này phải là 1.

Ví dụ 6.1.10. Xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n}.$$

Ta viết lại chuỗi này là

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3 \frac{4^n}{3^n}.$$

Vậy đây là một chuỗi hình học với $a = 3$, $r = \frac{4}{3}$. ■

Ví dụ 6.1.11. Viết số $0,\overline{123} = 0,(123) = 0,123123\dots$ dưới dạng phân số.

Ta viết

$$0,123123\dots = 123 \cdot 10^{-3} + 123 \cdot 10^{-6} + 123 \cdot 10^{-9} + \dots = 123 \cdot 10^{-3} (1 + 10^{-3} + 10^{-6} + \dots)$$

thì đây là một chuỗi hình học và ta tính được ngay tổng của chuỗi này là

$$123 \cdot 10^{-3} \frac{1}{1 - 10^{-3}} = \frac{123}{999}.$$

Vậy

$$0,\overline{123} = 0,123123\dots = \frac{123}{999}. \quad \blacksquare$$

Sau đây ta bắt đầu khảo sát một số tính chất chung về sự hội tụ của chuỗi số.

Một quan sát đơn giản nhưng thường dùng là nếu *bỏ đi hay thêm vào hữu hạn số hạng thì tính hội tụ của chuỗi không thay đổi*, vì các tổng riêng phần với chỉ số đủ lớn chỉ thay đổi bởi một hằng số, do đó tổng nếu tồn tại cũng thay đổi bằng hằng số đó. Khi ta chỉ quan tâm sự hội tụ của một chuỗi thì có thể bắt đầu xét chuỗi này từ số hạng nào trở đi cũng được.

Ghi chú 6.1.12. Mặc dù trong các phát biểu mệnh đề trong chương này để đơn giản trong trình bày các chuỗi thường được lấy bắt đầu từ 1, nhưng *các kết quả về sự hội tụ của chuỗi vẫn đúng với chuỗi bắt đầu từ một chỉ số nào đó*.

Các tính chất sau về phép toán trên chuỗi thu được ngay từ các tính chất tương ứng về giới hạn của dãy:

Mệnh đề 6.1.13. (a) Với số thực a , nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} au_n$ cũng hội tụ và

$$\sum_{n=1}^{\infty} au_n = a \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

(b) Nếu các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì chuỗi tổng $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ và chuỗi hiệu $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)$ cũng hội tụ và

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

Ta có điều kiện cần đơn giản cho sự hội tụ của chuỗi số:

Mệnh đề 6.1.14 (Để chuỗi hội tụ thì số hạng của chuỗi phải tiến về 0).

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Chứng minh. Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$, nghĩa là tổng riêng S_n hội tụ về S . Ta viết được $u_n = S_n - S_{n-1}$. Lấy giới hạn hai vế khi n tiến ra vô cùng, vì S_{n-1} cũng hội tụ về S , nên u_n phải hội tụ về 0. \square

Cần nhấn mạnh là chiều ngược lại (mệnh đề đảo) là không đúng, xem ví dụ sau:

Ví dụ 6.1.15. Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, thường được gọi là **chuỗi điều hòa**. Mặc dù số hạng của chuỗi này dần về 0, ta sẽ thấy ở Ví dụ 6.1.19 rằng chuỗi này là phân kì. \blacksquare

Ta có một mệnh đề tương đương với Mệnh đề 6.1.14 (mệnh đề phản đảo), là một dạng thường dùng:

Mệnh đề 6.1.16 (Nếu số hạng của chuỗi không tiến về 0 thì chuỗi phân kì). Nếu u_n không tiến về 0 thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì.

Ví dụ 6.1.17. Chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2 + 4}$$

là phân kì vì số hạng của nó không dần về 0. \blacksquare

6.1.2 Chuỗi số dương

Chuỗi số dương là chuỗi số mà tất cả các số hạng đều là số thực dương.

Các số hạng bằng 0 không có vai trò gì trong sự hội tụ và tổng của một chuỗi số, vì vậy nhiều kết quả áp dụng cho chuỗi số dương cũng áp dụng được cho chuỗi số không âm.

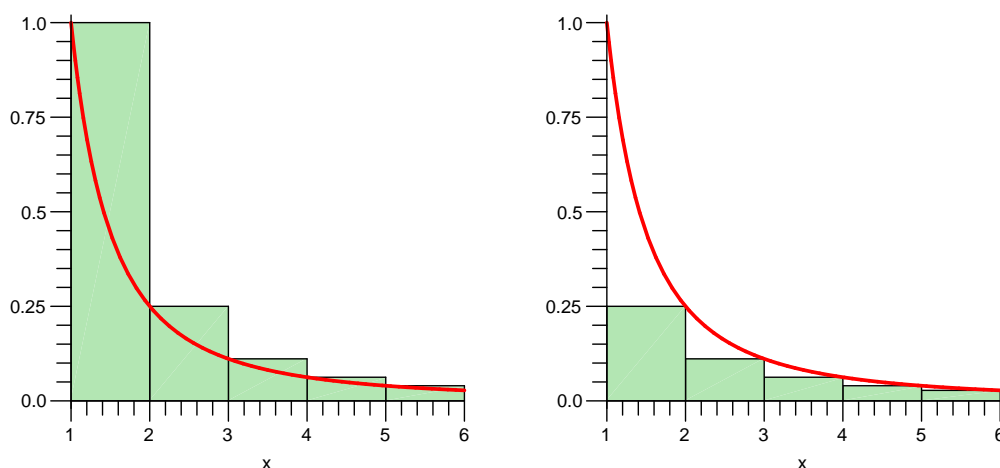
Định lý 6.1.18 (Tiêu chuẩn tích phân). Cho f là một hàm dương, giảm, liên tục trên $[1, \infty)$, và đặt $a_n = f(n)$. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ là hội tụ khi và chỉ khi tích phân

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

tồn tại (nghĩa là bằng một số thực).

Chú ý rằng thực ra ta chỉ cần những giả thiết trên thỏa với hàm f kể từ một giá trị n nào đó trở đi.

Có thể giải thích ý tưởng hình học của tiêu chuẩn này trong Hình 6.1.2.



Hình 6.1.2: Trong hình, tích phân bằng diện tích bên dưới đồ thị, trong khi các tổng riêng phần của chuỗi bằng tổng diện tích các hình chữ nhật, chặn trên và chặn dưới diện tích bên dưới đồ thị. Do đó nếu diện tích bên dưới đồ thị là hữu hạn thì tổng của chuỗi là hữu hạn, và ngược lại.

Chứng minh. Vì f là hàm giảm nên trên đoạn $[i, i+1]$ thì $a_{i+1} = f(i+1) \leq f(x) \leq f(i) = a_i$, dẫn tới

$$a_{i+1} \leq \int_i^{i+1} f(x) dx \leq a_i.$$

Ở đây vì hàm f liên tục nên các tích phân tồn tại. Suy ra

$$\sum_{i=1}^n a_{i+1} \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{i=1}^n a_i.$$

Xem minh họa ở Hình 6.1.2.

Nếu $\int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{n+1} f(x) dx$ hội tụ về một số thực S thì dãy tổng riêng $\sum_{i=1}^n a_{i+1}$ là dãy tăng và bị chặn trên bởi S nên phải hội tụ, do đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ là hội tụ.

Ngược lại nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ về số thực S thì hai tổng riêng $\sum_{i=1}^n a_{i+1}$ và $\sum_{i=1}^n a_i$ đều hội tụ về S , buộc dãy $\int_1^{n+1} f(x) dx$ cũng phải hội tụ về S theo Định lý kẹp, do đó $\int_1^{\infty} f(x) dx = S$. \square

Ví dụ 6.1.19. Ta chứng tỏ chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ là hội tụ nếu và chỉ nếu $p > 1$. Đây là một kết quả quan trọng thường được dùng.

Với $p > 0$, đặt $f(x) = \frac{1}{x^p}$ với $x > 0$ thì f thỏa giả thiết của tiêu chuẩn tích phân. Chuỗi này là hội tụ khi và chỉ khi tích phân suy rộng sau tồn tại

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx.$$

Trong Ví dụ 5.3.23 ta đã tính và thấy tích phân này tồn tại khi và chỉ khi $p > 1$.

Khi $p \leq 0$ thì $\frac{1}{x^p}$ không tiến về 0, do đó chuỗi không hội tụ.

Tóm lại

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ là hội tụ khi và chỉ khi $p > 1$.

■

Ví dụ 6.1.20. Chuỗi điều hòa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ là phân kì.

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ là hội tụ.

■

Định lý 6.1.21 (Tiêu chuẩn so sánh). Cho $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ là các chuỗi dương và $a_n \leq b_n$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(a) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

(b) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kì thì $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kì.

Chứng minh. Nhận xét rằng dãy các tổng riêng của chuỗi số dương là dãy tăng nên chuỗi số hội tụ khi và chỉ khi dãy $(S_n)_n$ bị chặn trên, do Định lý 6.1.45. Ở đây tổng riêng phần S_n của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ luôn nhỏ hơn hay bằng tổng riêng phần T_n của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, do đó nếu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì S_n bị chặn trên, trong khi nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kì thì T_n không thể có chặn trên. □

Ví dụ 6.1.22. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2^n}}$ hội tụ do $\frac{1}{n^{2^n}} < \frac{1}{2^n}$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ.

■

Ví dụ 6.1.23. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n-1}}$ phân kì do $\frac{1}{2\sqrt{n-1}} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kì.

■

Ví dụ 6.1.24. Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Ta so sánh

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$$

với $n \geq 2$. Ở Ví dụ 6.1.5 ta đã biết chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$ hội tụ, do đó chuỗi đã cho hội tụ.

■

Định lý 6.1.25 (Tiêu chuẩn so sánh ở dạng giới hạn). Cho chuỗi dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Giả sử $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$.

(a) Nếu $0 < L < \infty$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

(b) Trường hợp $L = 0$, nếu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ, nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kì thì $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kì.

(c) Trường hợp $L = \infty$, nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ, nếu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kì thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kì.

Chúng minh. Trường hợp $0 < L < \infty$ thì có ϵ sao cho $0 < \epsilon < L$. Với n đủ lớn thì

$$L - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \epsilon.$$

Vậy $0 < (L - \epsilon)b_n < a_n < (L + \epsilon)b_n$. Kết luận thu được từ Tiêu chuẩn so sánh.

Trường hợp $L = 0$, với n đủ lớn thì

$$\frac{a_n}{b_n} < \epsilon.$$

Vậy $0 < a_n < \epsilon b_n$. Kết luận thu được từ Tiêu chuẩn so sánh.

Trường hợp $L = \infty$, cho $M > 0$, với n đủ lớn thì

$$\frac{a_n}{b_n} > M.$$

Vậy $a_n > Mb_n$. Kết luận thu được từ Tiêu chuẩn so sánh. □

Ví dụ 6.1.26. Xét chuỗi

$$\sum_{n=6}^{\infty} \frac{n^2 - 4n - 5}{3n^3 + 5n - 7}.$$

So sánh chuỗi này với chuỗi điều hòa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2 - 4n - 5}{3n^3 + 5n - 7}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3},$$

ta kết luận chuỗi này phân kì theo tiêu chuẩn so sánh ở dạng giới hạn. ■

Ví dụ 6.1.27. Xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

So sánh chuỗi này với chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, vì $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{2^n} = 0$ (xem Mệnh đề 6.1.47) nên theo tiêu chuẩn so sánh ở dạng giới hạn chuỗi này hội tụ. ■

Ví dụ 6.1.28. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{1}{4^n}\right)$ hội tụ bởi so sánh với chuỗi hình học $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \sin\left(\frac{1}{4^n}\right)}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{4^n}\right)}{\frac{1}{4^n}} = 1.$$
■

Ta thấy tiêu chuẩn so sánh ở dạng giới hạn thường tiện hơn ở dạng bất đẳng thức vì ta không cần kiểm tra bất đẳng thức.

6.1.3 Chuỗi số bất kì

Trong phần này ta xét các chuỗi số với số hạng có dấu bất kì, có thể là số thực âm, dương, hay bằng không.

Chuỗi số đan dấu

Trước hết ta xét một loại chuỗi đặc biệt mà số hạng thay phiên âm và dương.

Định nghĩa 6.1.29. Một *chuỗi số đan dấu*, hay *chuỗi thay phiên*, là một chuỗi số mà các phần tử thay phiên nhau có giá trị âm và dương, một số hạng dương sẽ được tiếp ngay theo bởi một số hạng âm rồi lại tới ngay một số hạng dương. Bằng kí hiệu thì một chuỗi đan dấu có dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

trong đó $a_n \geq 0$ với mọi n .

Định lý 6.1.30 (Tiêu chuẩn chuỗi đan dấu hay Tiêu chuẩn Leibniz). Cho chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ với $a_n \geq 0$. Nếu với mọi n ta có $a_n \geq a_{n+1}$, tức dãy $(a_n)_n$ là dãy giảm, và $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, thì chuỗi là hội tụ.

Như vậy nếu các giá trị tuyệt đối của các số hạng của chuỗi đan dấu giảm về 0 thì chuỗi hội tụ.

Chứng minh. Bằng cách viết

$$\begin{aligned} S_{2n} &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \end{aligned}$$

ta thấy dãy $(S_{2n})_{n \geq 1}$ là dãy tăng và bị chặn trên bởi a_1 , do đó hội tụ về một giới hạn L (do Mệnh đề 6.1.45). Vì $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ và a_{2n+1} tiến về 0 nên S_{2n} cũng hội tụ về L . Như thế với n đủ lớn thì cả S_{2n} và S_{2n+1} gần tùy ý L , nên S_n hội tụ về L . \square

Ví dụ 6.1.31. Xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \dots$$

Chuỗi này là đan dấu. Ta có $\frac{1}{2} > \frac{1}{4} > \frac{1}{8} > \dots$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$. Vậy chuỗi này hội tụ theo Tiêu chuẩn Leibniz.

Ta đã biết chuỗi này là một chuỗi hình học, là tổng của một cấp số nhân với công bội $-\frac{1}{2}$, và do $|\frac{1}{2}| < 1$ nên hội tụ. ■

Ví dụ 6.1.32. Xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Chuỗi này là đan dấu. Ta có $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Vậy chuỗi này hội tụ theo Tiêu chuẩn Leibniz. ■

Ví dụ 6.1.33. Xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}.$$

Đây là một chuỗi đan dấu. Giá trị tuyệt đối của số hạng của chuỗi là $\frac{n}{n^2+1}$ tiến về 0. Ta muốn kiểm tra số hạng này có giảm hay không. Ta có thể làm bằng cách trực tiếp kiểm tra tính đúng đắn của bất đẳng thức

$$\frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n+1}{(n+1)^2+1}.$$

Ta còn có thể kiểm tra điều này bằng cách dùng các công cụ của phép tính vi phân. Ta khảo sát tính tăng giảm của hàm thực $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Đạo hàm của hàm này là $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ nhỏ hơn 0 khi $x > 1$. Vậy kể từ $n = 2$ trở đi thì $\frac{n}{n^2+1}$ giảm. Ta biết đối với vấn đề hội tụ những giá trị đầu không có vai trò gì, do đó ta kết luận theo Tiêu chuẩn Leibniz thì chuỗi đã cho hội tụ. ■

Chuỗi số hội tụ tuyệt đối

Định nghĩa 6.1.34. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là **hội tụ tuyệt đối** nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ.

Ví dụ 6.1.35. Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$.

Chuỗi này hội tụ Tiêu chuẩn Leibniz cho chuỗi đan dấu. Chuỗi trị tuyệt đối $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ là chuỗi điều hòa, phân kì. Vậy chuỗi đã cho là hội tụ nhưng không hội tụ tuyệt đối. ■

Mệnh đề 6.1.36. Chuỗi hội tụ tuyệt đối thì hội tụ.

Chứng minh. Cho chuỗi hội tụ tuyệt đối $\sum a_n$. Ta viết

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|.$$

Theo Tiêu chuẩn so sánh cho chuỗi không âm, chuỗi ở vế trái phải hội tụ. Chú ý rằng

$$\sum a_n = \left(\sum (a_n + |a_n|) \right) - \left(\sum |a_n| \right),$$

ở đó vế phải là hiệu của hai chuỗi hội tụ, do đó chuỗi ở vế trái phải hội tụ. □

Ví dụ 6.1.37. Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n^2 + 4n + 5)}{2n^5 - 7n^3 + 1}.$$

Đây là một chuỗi đan dấu nên ta có thể xem xét áp dụng Tiêu chuẩn Leibniz. Tuy nhiên việc kiểm tính giảm của dãy giá trị tuyệt đối của số hạng của chuỗi cần nhiều tính toán khá tốn công nếu không dùng máy tính. Ở đây ta thử một cách khác, xét tính hội tụ tuyệt đối của chuỗi. Từ kinh nghiệm với các chuỗi dương ta có thể thấy ngay chuỗi giá trị tuyệt đối

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 + 4n + 5}{2n^5 - 7n^3 + 1}.$$

là hội tụ, qua so sánh với chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ dùng Tiêu chuẩn so sánh ở dạng giới hạn. Vậy chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối, do đó hội tụ. ■

Tiêu chuẩn tỉ số và Tiêu chuẩn căn số

Định lý 6.1.38 (Tiêu chuẩn tỉ số hay Tiêu chuẩn d'Alembert). Cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Giả sử $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$.

(a) Nếu $L < 1$ thì chuỗi hội tụ.

(b) Nếu $L > 1$ thì chuỗi phân kì.

Chứng minh. Nếu $L < 1$, lấy c sao cho $L < c < 1$, thì có n_0 sao cho với $n \geq n_0$ ta có

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < c.$$

Từ đó

$$|a_{n+1}| < c|a_n| < \cdots < c^{n-n_0+1}|a_{n_0}|.$$

So sánh chuỗi $\sum |a_n|$ với chuỗi hình học $\sum c^{n-n_0}$, ta kết luận chuỗi này hội tụ. Vậy chuỗi $\sum a_n$ hội tụ tuyệt đối, do đó hội tụ.

Nếu $L > 1$, có n_0 sao cho với $n \geq n_0$ thì

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1,$$

dẫn tới $|a_{n+1}| > |a_n| > \cdots > |a_{n_0}| > 0$. Điều này cho thấy a_n không tiến về 0, vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ không hội tụ. □

Ví dụ 6.1.39. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ hội tụ vì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$ phân kì vì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}n}{(n+1)2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2 > 1.$$

■

Ví dụ 6.1.40. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{100^n}{n!}$.

Dùng Tiêu chuẩn tỉ số, tính giới hạn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{100^{n+1}}{(n+1)!}}{(-1)^n \frac{100^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100}{n+1} = 0 < 1.$$

Vậy chuỗi hội tụ.

■

Ví dụ trên cho thấy tiêu chuẩn tỉ số tiện dùng khi số hạng của chuỗi có chứa giai thừa.

Định lý 6.1.41 (Tiêu chuẩn căn số hay Tiêu chuẩn Cauchy). Cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Giả sử $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$.

(a) Nếu $L < 1$ thì chuỗi hội tụ.

(b) Nếu $L > 1$ thì chuỗi phân kì.

Chứng minh. Nếu $L < 1$ ta lấy c sao cho $L < c < 1$, khi đó có n_0 sao cho với $n \geq n_0$ thì $\sqrt[n]{|a_n|} < c$. Điều này dẫn tới $|a_n| < c^n$. Vậy chuỗi $\sum |a_n|$ hội tụ qua so sánh với chuỗi $\sum c^n$, nên chuỗi $\sum a_n$ hội tụ tuyệt đối do đó hội tụ.

Nếu $L > 1$ thì có n_0 sao cho với $n \geq n_0$ ta có $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$, dẫn tới $|a_n| > 1$. Điều này cho thấy a_n không tiến về 0, vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ không hội tụ. □

Ví dụ 6.1.42. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{2n+1} \right)^n$ phân kì vì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n}{2n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2n+1} = \frac{3}{2} > 1.$$

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ hội tụ vì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 < 1.$$

■

Ví dụ 6.1.43. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$.

Dùng Tiêu chuẩn căn số, tính giới hạn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| (-1)^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Vậy chuỗi hội tụ.

■

Ta thấy tiêu chuẩn căn số có thể phù hợp nếu số hạng của chuỗi chứa hàm mũ.

* Bổ sung về dãy số thực

Trong phần này ta khảo sát sâu hơn về dãy số, tiếp theo Mục 1.1.4. Một số kết quả ở đây đã được dùng trong phần chuỗi số.

Mệnh đề 6.1.44. *Một dãy số hội tụ thì bị chặn.*

Ta có thể giải thích kết quả trên như sau: nếu dãy là hội tụ thì các phần tử của dãy, có thể trừ ra hữu hạn phần tử đầu, sẽ đủ gần giới hạn, điều này dẫn tới toàn bộ dãy được chứa trong một khoảng đủ lớn. Chứng minh dưới đây chẳng qua là viết lại chi tiết lý luận này.

Chứng minh. Giả sử dãy $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ hội tụ về L . Có $N \in \mathbb{Z}^+$ sao cho nếu $n \geq N$ thì $|a_n - L| < 1$. Như thế với $n \geq N$ thì $|a_n| \leq L + 1$. Đặt $M = \max\{a_n, L + 1 \mid 1 \leq n \leq N - 1\}$ thì $\forall n \in \mathbb{Z}^+, |a_n| \leq M$. \square

Mệnh đề 6.1.45. *Một dãy số tăng và bị chặn trên thì hội tụ. Một dãy số giảm và bị chặn dưới thì hội tụ.*

Kết quả trên có thể được rút ra từ tính đầy đủ của tập hợp các số thực, Mệnh đề 1.1.14: trong trường hợp dãy tăng và bị chặn trên thì chặn trên nhỏ nhất chính là giới hạn, còn trong trường hợp dãy giảm và bị chặn dưới thì chặn dưới lớn nhất chính là giới hạn.

Trong nhiều trường hợp dãy là thu hẹp của một hàm biến thực, cụ thể số hạng của dãy là $a_n = f(n)$ với một hàm $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Từ sự giống nhau trong định nghĩa giới hạn của dãy và giới hạn của hàm ta thu được ngay kết quả sau, nói rằng giới hạn của dãy đúng bằng giới hạn của hàm:

Mệnh đề 6.1.46. *Giả sử $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ và $\forall n \in \mathbb{Z}^+, a_n = f(n)$. Nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ (có thể bằng $\pm\infty$) thì $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.*

Đây có thể coi là một trường hợp riêng của Mệnh đề 2.1.18. Nhờ kết quả này ta có thể áp dụng được những phương pháp và kết quả của Vi tích phân trên hàm số thực vào dãy số thực.

Sau đây là một số giới hạn của dãy liên quan tới hàm lũy thừa và hàm mũ thường gặp:

Mệnh đề 6.1.47. (a) Với $r > 0$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} = 0$.

(b) Với $1 > r > 0$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$. Với $r > 1$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$.

(c) Với $r > 0$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{r} = 1$.

(d) Với $r > 1$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{r^n} = 0$.

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(f) Với $r > 0$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{n!} = 0$.

Chứng minh. Có thể có những cách chứng minh khác, ở đây ta đưa ra một số cách sử dụng các thành tựu của phép tính vi phân.

(a) Ta có thể sử dụng định nghĩa giới hạn của dãy. Với $r > 0$, cho $\epsilon > 0$ bất kỳ thì $\frac{1}{n^r} < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{r}}}$ từ tính chất của hàm mũ. Từ định nghĩa sự hội tụ của dãy ta kết luận $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} = 0$.

Một cách tiếp cận mới là dùng hàm số thực và Mệnh đề 6.1.46. Bài toán là tính $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r$, nhưng ta sẽ tính $\lim_{x \rightarrow \infty} x^r$. Ta có ngay từ các tính chất cơ bản của hàm mũ và hàm log:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^r = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln x^r} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{r \ln x} = \infty.$$

Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r = \infty$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} = 0$.

(b) Dùng Mệnh đề 6.1.46, ta đi tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow \infty} r^x$. Ta có

$$\lim_{x \rightarrow \infty} r^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln r^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln r}.$$

Với $0 < r < 1$ thì $\ln r < 0$, suy ra $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln r} = 0$. Với $r > 1$ thì $\ln r > 0$ nên $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln r} = \infty$.

(c) Cũng như trên, dùng Mệnh đề 6.1.46, ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln r^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln r} = e^0 = 1.$$

(d) Cũng như trên, thay vì tính giới hạn dãy ta tính giới hạn hàm $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{r^x}$. Trước hết ta viết

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{r^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{(r^{\frac{1}{\alpha}})^x} \right)^\alpha.$$

Áp dụng quy tắc l'Hôpital, với $r > 1$, ta tính được

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(r^{\frac{1}{\alpha}})^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x'}{\left((r^{\frac{1}{\alpha}})^x\right)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(r^{\frac{1}{\alpha}})^x \ln(r^{\frac{1}{\alpha}})} = 0.$$

Sử dụng cách lý luận ở phần (a), ta suy ra

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{(r^{\frac{1}{\alpha}})^x} \right)^\alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln \left(\frac{x}{(r^{\frac{1}{\alpha}})^x} \right)^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\alpha \ln \left(\frac{x}{(r^{\frac{1}{\alpha}})^x} \right)} = 0.$$

(e) Thay vì tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ ta tính $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$. Lại dùng hàm ln, ta viết

$$x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{1}{x} \ln x}.$$

Áp dụng quy tắc l'Hôpital ta được ngay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$.

(f) Lấy $n_0 > r$, ta có thể viết cho $n > n_0$:

$$\frac{r^n}{n!} = \frac{r^{n_0}}{n_0!} \cdot \frac{r}{n_0 + 1} \cdots \frac{r}{n-1} \cdot \frac{r}{n} < \frac{r^{n_0}}{n_0!} \cdot \frac{r}{n}.$$

Vì $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{n} = 0$ nên dùng Định lý kẹp 1.1.34 ta được kết quả. \square

Bài tập

6.1.1. Hãy viết số thập phân sau dưới dạng phân số. Nói cách khác, số thập phân này biểu diễn số hữu tỉ nào?

(a) $1,73737373 \dots$

(b) $3,715715715 \dots$

(c) $0,454545 \dots$

(d) $1,523523 \dots = 1,5\overline{23}$.

6.1.2. Hãy viết và rút gọn biểu thức của tổng riêng phần của chuỗi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

Tìm tổng của chuỗi này nếu nó hội tụ.

6.1.3. Hãy viết và rút gọn biểu thức của tổng riêng phần của chuỗi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{k} - \frac{3}{k+1} \right).$$

Tìm tổng của chuỗi này nếu nó hội tụ.

6.1.4. Bằng cách rút gọn tổng riêng phần, tìm tổng của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(8n-3)(8n+5)}.$$

6.1.5. Xét sự hội tụ của các chuỗi sau.

(a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100} \right)^n.$$

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n^2-7n+6}.$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \cos 1)^n.$$

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n^2}.$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{7n+2}.$$

(f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n^2}.$$

(g)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}.$$

(h)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}.$$

(i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}}.$$

(j)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n+2}}.$$

(k)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n+1}.$$

(l)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{e^n}$$

(m)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}.$$

(n)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdots 4n}.$$

6.1.6. Xét sự hội tụ của các chuỗi sau.

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{3^n - 2}.$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 2^n}{1 + 3^n}.$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n3^{n+1}}.$$

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n}.$$

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2021^n}{n!}.$$

(f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!^2}{(2n)!}.$$

(g)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

(h)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

(i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n.$$

(j)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{3n+1}\right)^{2n+1}.$$

(k)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n.$$

(l)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

(m)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{e^n}.$$

(n)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n (n)!^2}{(2n)!}.$$

(o)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, a > 0.$$

(p)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}, a > 0.$$

(q)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n^2}{n! + n}.$$

6.1.7. Xét sự hội tụ của các chuỗi sau.

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{3} - 1).$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1).$$

(c)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

(d)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

(e)

$$\frac{1}{2 \ln 3} + \frac{1}{3 \ln 4} + \frac{1}{4 \ln 5} + \cdots.$$

6.1.8. Xét sự hội tụ và hội tụ tuyệt đối của các chuỗi sau.

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{2n^3 - 7n + 6}.$$

(f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-2)^{n+1}}{3^n}.$$

(b)

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{2n^2 - 7n + 6}.$$

(g)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n(n+1)}}$$

(h)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(3n)}{n!}.$$

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{e^{n^2}}.$$

(i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n (n!)^2}{(2n)!}.$$

(e)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 \cos n\pi}{1 + n^4}.$$

6.1.9. Dưới đây là một cách khác để thấy sự phân kì của chuỗi điều hòa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Ta viết

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\ &\quad + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^n-1} + \frac{1}{2^n}\right) + \cdots \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\ &\quad + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right) + \cdots. \end{aligned}$$

Giải thích vì sao tính toán trên có thể dẫn tới kết luận chuỗi điều hòa là phân kì.

6.1.10. * Xem xét chứng minh của Tiêu chuẩn Leibniz, Định lý 6.1.30, hãy chứng tỏ ta có đánh giá sai số giữa tổng S của chuỗi và tổng riêng phần S_n là

$$|S - S_n| \leq a_{n+1}.$$

Ứng dụng, ở Ví dụ 6.1.32 ta đã dùng Tiêu chuẩn Leibniz để thấy chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

là hội tụ. Với chuỗi này, nếu ta tính tổng riêng phần tới số hạng thứ 10 thì sai số với tổng đúng tối đa là bao nhiêu?

6.1.11. * Xem xét chứng minh của Tiêu chuẩn tích phân, Định lý 6.1.18, hãy chứng tỏ ta có một đánh giá sai số giữa tổng S của chuỗi và tổng riêng phần S_n là

$$S - S_n \leq \int_n^{\infty} f(x) dx.$$

Ứng dụng, người ta có công thức nổi tiếng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Nếu ta tính tổng ở vế trái tới số hạng thứ 10 thì sai số tối đa là bao nhiêu?

6.1.12. * Trong bài này ta khảo sát việc tính số π bằng chuỗi.

(a) Năm 1910 Srinivasa Ramanujan cho công thức sau cho π :

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26390k)}{(k!)^4 396^{4k}} \quad (6.1.1)$$

Chúng tỏ chuỗi ở vế phải của công thức (6.1.1) là hội tụ.

(b) Một trong những phương pháp nhanh nhất để tính π bằng máy tính hiện nay dùng công thức

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)!(13591409 + 545140134k)}{(3k)!(k!)^3 640320^{3k+3/2}} \quad (6.1.2)$$

Chúng tỏ chuỗi ở vế phải của công thức (6.1.2) hội tụ.

(c) Hãy viết các dòng lệnh máy tính để tính π bằng cách tính các tổng riêng phần trong các công thức trên.

Dãy số

6.1.13. Hãy tìm các giới hạn sau.

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}.$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n+2}.$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos^2 n - \sin^2 n}{n}.$

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{n}.$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}.$

(g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2+1}.$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+2}.$

(h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2+n+1}.$

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n(n-2)}.$

(j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{99}{n}\right)^n.$

6.1.14. Cho dãy số (a_n) được định nghĩa như sau: $a_1 = \sqrt{2}$ và $\forall n \geq 1, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.

- (a) Dùng quy nạp, chứng minh rằng dãy $(a_n)_n$ bị chặn trên bởi 2.
- (b) Dùng quy nạp, chứng minh rằng dãy $(a_n)_n$ là dãy tăng.
- (c) Lấy giới hạn hai vế đẳng thức $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ để thu được giới hạn của dãy $(a_n)_n$.

Người ta hay viết giới hạn của dãy này là $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$.

6.1.15. Cho dãy số (a_n) được định nghĩa như sau: $a_1 = \frac{5}{2}$ và $\forall n \geq 1, a_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n^2 + 6)$.

- (a) Hãy tính một số giá trị ban đầu của dãy.
- (b) Giả thiết dãy hội tụ, hãy tính giới hạn của dãy.
- (c) Từ dự đoán giới hạn của dãy, hãy dự đoán tính bị chặn và dự đoán tính đơn điệu của dãy.
- (d) Hãy chứng minh dãy là hội tụ và tìm giới hạn của dãy.

6.1.16. Xét tính hội tụ và tìm giới hạn của dãy $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ thỏa $a_1 = 0, a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$.

6.1.17. Xét tính hội tụ và tìm giới hạn của dãy $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ thỏa $a_1 = 0, a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4}$.

6.2 Chuỗi hàm

Ở phần này ta phát triển khái niệm tổng của một dãy số (chuỗi số) thành khái niệm tổng của một dãy hàm số (chuỗi hàm).

Giả sử ta có một dãy $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ các hàm số thực có cùng một miền xác định. Với mỗi x trong miền xác định ta có một dãy số thực tương ứng là $(u_n(x))_{n \in \mathbb{Z}^+}$, và có một chuỗi số thực tương ứng là $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Nếu với mỗi x chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ về một số thực, thì ta có thể nói tới một hàm số thực mới mà giá trị tại x là $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ và viết là

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Vậy $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ là một hàm số thực mà giá trị tại x là

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)(x) = (u_1 + u_2 + \dots)(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

Vậy một **chuỗi hàm** là dãy tổng riêng phần của một dãy hàm. Giá trị của một chuỗi hàm tại một điểm là một chuỗi số.

Ví dụ 6.2.1. Xét chuỗi hàm

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

với biến $x \in \mathbb{R}$.

Với mỗi x thì là một chuỗi số hình học. Ta biết chuỗi số này hội tụ khi và chỉ khi $|x| < 1$ và giới hạn bằng $\frac{1}{1-x}$ (xem Ví dụ 6.1.7). Chẳng hạn giá trị của chuỗi hàm này tại $x = \frac{1}{2}$ là $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$. Vậy miền xác định của chuỗi hàm này là khoảng $(-1, 1)$, và ta hiểu chuỗi hàm hội tụ về hàm số thực $x \mapsto \frac{1}{1-x}$:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}.$$

■

Ví dụ 6.2.2. Hàm

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

được xác định nếu $x > 1$. Hàm này có tên là hàm zeta Riemann.

■

6.2.1 Chuỗi Taylor và chuỗi Maclaurin

Trong phần này ta xét việc xấp xỉ một hàm bằng các hàm đa thức.

Định lý 6.2.3. Nếu hàm f có đạo hàm đến cấp $n+1$ trong một khoảng mở chứa a và x thì có **công thức Taylor**:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (6.2.1)$$

trong đó θ là một số thực giữa a và x .

Trong trường hợp riêng $a = 0$ thì công thức Taylor thường được gọi là **công thức Maclaurin**¹:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (6.2.2)$$

với θ là một số thực giữa 0 và x .

Công thức Taylor có thể cho phép ta thay việc xét một hàm phức tạp bằng việc xét các hàm đa thức, có thể giúp vấn đề đơn giản hơn.

Ví dụ 6.2.4. Với $n = 0$, công thức Taylor chính là công thức trong Định lý giá trị trung bình Lagrange 4.1.12

$$f(x) = f(a) + f'(\theta)(x-a).$$

Với $n = 1$, công thức Taylor cho xấp xỉ tuyến tính (4.2.3)

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$

¹Maclaurin là tên một nhà toán học sống vào thế kỉ thứ 18 ở Scotland, có thể đọc tựa Mác-lo-rôn.

hơn nữa còn cho công thức chính xác cho sai số của xấp xỉ này là $\frac{f''(\theta)}{2!}(x-a)^2$. ■

Đặt

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

thì đây là một đa thức bậc n xấp xỉ hàm f . Định lý 6.2.3 trên khẳng định rằng **phần dư** hay **sai số** của phép xấp xỉ này là

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Đây thường được gọi là phần dư dạng Lagrange.

Chứng minh Định lý 6.2.3. Ta chứng minh bằng quy nạp toán học.

Khi $n = 0$, công thức Taylor chính là công thức trong Định lý giá trị trung bình Lagrange, như đã nói ở trên.

Giả sử công thức Taylor đúng với $n = k - 1$, nghĩa là với mọi hàm f có đạo hàm tới cấp $k - 1$ tồn tại θ ở khoảng giữa a và x để phần dư $R_{k-1}(x)$ của hàm f , mà trong phần tiếp theo được kí hiệu là $R_{k-1}(x, f)$ cho rõ hơn, được cho bởi

$$R_{k-1}(x, f) = \frac{f^{(k)}(\theta)}{k!}(x-a)^k.$$

Ta xét $n = k$. Theo công thức Cauchy về giá trị trung bình (4.1.4), tồn tại c trong khoảng a và x để

$$\frac{R_k(x, f)}{(x-a)^{k+1}} = \frac{R_k(x, f) - R_k(a, f)}{(x-a)^{k+1} - (a-a)^{k+1}} = \frac{R'_k(c, f)}{(k+1)(c-a)^k}. \quad (6.2.3)$$

Ta thu được bằng tính toán trực tiếp:

$$R'_k(x, f) = f'(x) - [f'(a) + f''(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1}] = R_{k-1}(x, f').$$

Áp dụng giả thiết quy nạp cho hàm f' , tồn tại θ ở giữa a và c sao cho

$$R'_k(c, f) = R_{k-1}(c, f') = \frac{f'^{(k)}(\theta)}{k!}(c-a)^k.$$

Thay vào (6.2.3) ta thu được

$$R_k(x, f) = \frac{f^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}.$$

Vậy công thức phần dư đúng khi $n = k$. □

Ví dụ 6.2.5. Xét $n = 1$. Giả sử hàm f khả vi tại a . Khi đó $P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$, và

$$R_1(x) = f(x) - P_1(x) = f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)]$$

chính là sai số của phép xấp xỉ tuyến tính tại a , mà ta đã xét ở Mục 4.2.3, Công thức (4.2.5). Ở đó ta đã thấy

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_1(x)}{x - a} = 0.$$

Người ta thường nói phần dư R_1 là một “vô cùng bé” so với $(x - a)$, kí hiệu là $o(x - a)$. ■

Tổng quát hóa ví dụ trên, từ công thức phần dư dạng Lagrange với giả thiết đạo hàm cấp $(n + 1)$ liên tục do đó bị chặn trên mỗi đoạn số thực (giả thiết về tính khả vi này thực ra có thể được giảm nhẹ hơn), ta có thể rút ra tính chất

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

Người ta thường viết $R_n(x) = o((x - a)^n)$, với kí hiệu $o((x - a)^n)$ chỉ một “vô cùng bé” so với $(x - a)^n$ khi x tiến về a , gọi là phần dư ở dạng Peano ¹.

Chuỗi

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n \quad (6.2.4)$$

được gọi là **chuỗi Taylor** cho hàm f tại a (hay quanh a , hay tâm a). Trường hợp đặc biệt $a = 0$ chuỗi Taylor trở thành **chuỗi Maclaurin**:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (6.2.5)$$

Viết ra công thức Taylor của một hàm thường được gọi là viết khai triển Taylor của hàm đó.

Ví dụ 6.2.6. Tìm khai triển Maclaurin của hàm số $f(x) = e^x$.

Ta có

$$(e^x)^{(n)} = e^x,$$

do đó $f(0) = 1, f'(0) = 1, \dots, f^{(n)}(0) = 1$. Khai triển Maclaurin của f là

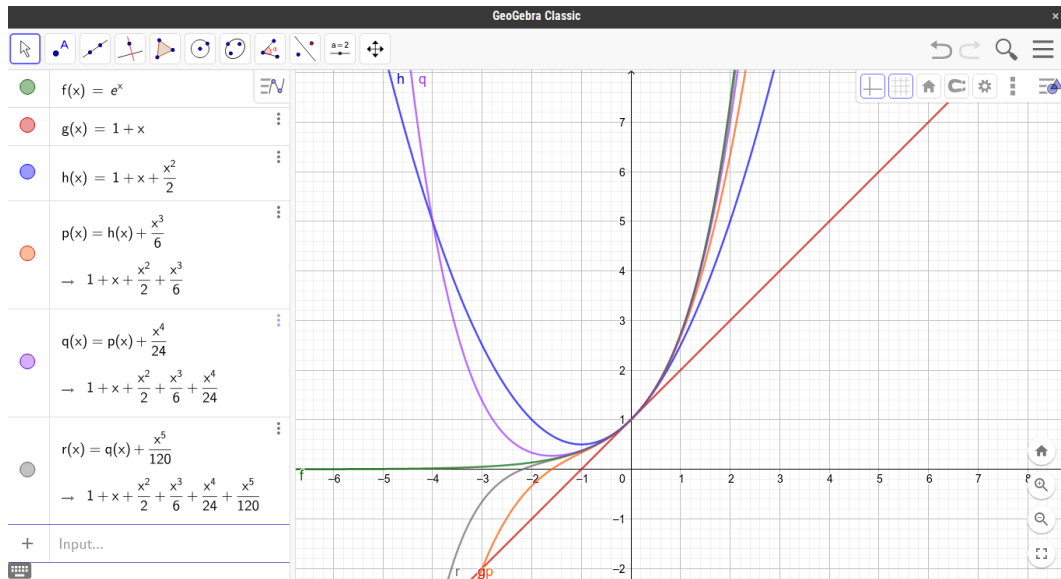
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}x^{n+1},$$

với θ là một số thực nào đó nằm giữa x và 0 . Xem minh họa ở Hình 6.2.1.

Ta có thể đi xa hơn và đánh giá sai số. Với mỗi $x \in \mathbb{R}$ ta có đánh giá phần dư $R_n(x) = \frac{e^\theta}{(n+1)!}x^{n+1}$:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^\theta}{(n+1)!}x^{n+1} \right| < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1}.$$

¹Kí hiệu chữ cái “o nhỏ” được dùng phổ biến trong ước lượng so sánh sai số và tốc độ hội tụ, chú ý trong các tài liệu còn có một kí hiệu chữ cái “O lớn” với ý nghĩa khác.



Hình 6.2.1: Vẽ đồ thị hàm số e^x và 5 xấp xỉ đầu tiên bằng phần mềm máy tính.

Vì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

(Mệnh đề 6.1.47) nên theo Định lý kẹp $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. Điều này có nghĩa là chuỗi Maclaurin của e^x hội tụ về e^x với mọi x . Vậy ta có công thức

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

■

Ví dụ 6.2.7. Bằng phương pháp trong ví dụ trên ta có thể kiểm tra được sự hội tụ của các khai triển Taylor của một số hàm thường gặp sau (được đề ở Bài tập 6.2.3):

(a) Với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

(b) Với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

■

Ta có thể dùng khai triển Taylor và Maclaurin để tính xấp xỉ giá trị của số $f(x)$ sau khi chọn n đủ lớn để phần dư $R_n(x)$ có trị tuyệt đối không vượt quá sai số cho phép.

Ví dụ 6.2.8. Tính e chính xác đến 0,00001.

Dùng khai triển Maclaurin của hàm số e^x ta được

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^\theta$$

với θ giữa 0 và x . Lấy $x = 1$ ta được

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}e^\theta$$

với một θ giữa 0 và 1. Ta cần đảm bảo giá trị tuyệt đối của sai số $\frac{1}{(n+1)!}e^\theta$ không vượt quá 0,00001 bằng cách lấy n đủ lớn. Vì $0 < \frac{1}{(n+1)!}e^\theta < \frac{e}{(n+1)!}$ nên ta chọn n đủ lớn sao cho $\frac{e}{(n+1)!} < 10^{-5}$ tức $(n+1)! > e \cdot 10^5$ là được. Ta có thể chọn $n = 8$ và thu được

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{8!} = 2,71828 \dots$$

■

Ví dụ 6.2.9. Tính $\sin 20^\circ$ chính xác đến 0,0001.

Chú ý $\sin 20^\circ = \sin \frac{\pi}{9}$. Dùng khai triển Maclaurin của hàm \sin , lấy $x = \frac{\pi}{9}$, chọn $n = 3$, ta đánh giá được phần dư Lagrange

$$|R_3(x)| \leq \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^5 < 0,0001.$$

Vậy $\sin 20^\circ \approx \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^3 \approx 0,34197 \dots$

■

Ví dụ 6.2.10. Để đảm bảo công thức xấp xỉ $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ có sai số không quá 0,0001 thì có thể lấy x có giá trị trong khoảng nào?

Công thức Maclaurin cho hàm \sin tới bậc 3 có sai số là

$$\frac{\sin^{(4)}(\theta)}{4!}x^4.$$

Sai số này có độ lớn không quá $\frac{|x|^4}{4!}$. Để đảm bảo sai số của công thức xấp xỉ không quá 0,0001, ta đảm bảo $\frac{|x|^4}{4!} \leq 0,0001$ là đủ. Vậy ta có thể lấy $|x| \leq \sqrt[4]{24} \cdot 10^{-1}$, hay đơn giản hơn là lấy $|x| \leq 0,1$.

■

Sau đây là một ví dụ khai triển Taylor tại một điểm khác 0.

Ví dụ 6.2.11. Viết công thức Taylor của hàm $f(x) = e^x$ quanh điểm $a = 2$ đến cấp n .

Ta có $f^{(n)}(2) = e^2$. Vậy

$$e^x = e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2!}(x-2)^2 + \cdots + \frac{e^2}{n!}(x-2)^n + \frac{e^\theta}{(n+1)!}(x-2)^{n+1}$$

với θ nằm giữa x và 2.

Mặt khác ta cũng có thể thu được công thức này từ khai triển Maclaurin của e^x

đã biết:

$$\begin{aligned} e^x &= e^2 e^{x-2} = e^2 \left(1 + (x-2) + \frac{1}{2!}(x-2)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(x-2)^n + \frac{e^\theta}{(n+1)!}(x-2)^{n+1} \right) \\ &= e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2!}(x-2)^2 + \cdots + \frac{e^2}{n!}(x-2)^n + \frac{e^{2+\theta}}{(n+1)!}(x-2)^{n+1} \end{aligned}$$

với θ nằm giữa $x-2$ và 0 . ■

6.2.2 Chuỗi lũy thừa

Ở phần này ta thảo luận một dạng chung của chuỗi hàm mà chuỗi Taylor là một trường hợp riêng, gọi là chuỗi lũy thừa. Chuỗi lũy thừa là chuỗi mà các số hạng là các hàm lũy thừa, có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots \quad (6.2.6)$$

trong đó x là biến số và các hằng số C_n được gọi là các hệ số của chuỗi. Với mỗi x cho trước, chuỗi (6.2.6) là một chuỗi số. Một chuỗi lũy thừa có thể hội tụ với một giá trị của x và phân kỳ với một giá trị khác của x . Tổng của chuỗi là hàm

$$f(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots + C_n x^n + \cdots$$

có miền xác định là tập hợp tất cả giá trị của x để cho chuỗi số hội tụ. Ta thấy tổng của chuỗi giống như một đa thức, nhưng có vô hạn số hạng.

Tổng quát hơn, một chuỗi có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n = C_0 + C_1 (x-a) + C_2 (x-a)^2 + \cdots \quad (6.2.7)$$

được gọi là một **chuỗi lũy thừa tâm a** , hay chuỗi lũy thừa xung quanh a .

Ta quan tâm vấn đề với những x nào thì chuỗi (6.2.7) hội tụ. Rõ ràng chuỗi luôn hội tụ khi $x = a$.

Ví dụ 6.2.12. Với giá trị nào của x thì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ hội tụ?

Từ Mệnh đề 6.1.47 nếu $x \neq 0$ thì số hạng $n! x^n$ tiến ra vô cùng. Suy ra chuỗi phân kỳ khi $x \neq 0$ và chỉ hội tụ khi $x = 0$. ■

Mệnh đề 6.2.13. (a) Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$ hội tụ tại $x = x_0$ thì nó hội tụ tại mọi điểm x thỏa mãn $|x-a| < |x_0-a|$.

(b) Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$ phân kỳ tại $x = x_1$ thì nó phân kỳ tại mọi điểm x thỏa mãn $|x-a| > |x_1-a|$.

Chứng minh. (a) Xét $x \neq a$. Vì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x_0-a)^n$ hội tụ nên $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n (x_0-a)^n = 0$

$a)^n = 0$. Với n đủ lớn ta có

$$|C_n(x-a)^n| = |C_n(x_0-a)^n| \left| \frac{(x-a)^n}{(x_0-a)^n} \right| < \left| \frac{(x-a)^n}{(x_0-a)^n} \right| = \left| \frac{x-a}{x_0-a} \right|^n.$$

Áp dụng Tiêu chuẩn so sánh của chuỗi số, so sánh với chuỗi hình học $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x-a}{x_0-a} \right|^n$, ta kết luận chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối, do đó hội tụ.

(b) Giả sử ngược lại, $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ hội tụ, thì theo phần (a), $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x_1-a)^n$ cũng phải hội tụ, mâu thuẫn. \square

Do tính chất trên với một chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ chỉ có một trong ba khả năng sau xảy ra:

- (i) chuỗi hội tụ chỉ khi $x = a$,
- (ii) chuỗi hội tụ với mọi x ,
- (iii) có một số thực dương R sao cho chuỗi hội tụ nếu $|x-a| < R$ và phân kì nếu $|x-a| > R$.

Số thực R trong trường hợp (iii) được gọi là **bán kính hội tụ** của chuỗi lũy thừa. Ta quy ước rằng bán kính hội tụ trong trường hợp (i) là $R = 0$ và trong trường hợp (ii) là $R = \infty$.

Tập hợp tất cả các điểm (các giá trị của biến) mà tại đó chuỗi lũy thừa hội tụ được gọi là **miền hội tụ**. Trong trường hợp (i) ở trên, miền hội tụ chỉ chứa một điểm a . Trong trường hợp (ii), miền hội tụ là $(-\infty, \infty)$. Trong trường hợp (iii), tại hai điểm đầu mút $a-R$ và $a+R$ chuỗi có thể hội tụ hoặc phân kì, do đó miền hội tụ của chuỗi có thể là $(a-R, a+R)$, $(a-R, a+R]$, $[a-R, a+R)$, $[a-R, a+R]$, và ta phải xét cụ thể tại hai đầu mút mới kết luận được. Vì đặc điểm này miền hội tụ còn được gọi là **khoảng hội tụ**¹.

Ví dụ 6.2.14. Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ (tập điểm tại đó chuỗi hội tụ) của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Để áp dụng Tiêu chuẩn căn số, ta tính

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|x^n|}{n}} = |x|.$$

Theo Tiêu chuẩn căn số, nếu $|x| < 1$ thì chuỗi hội tụ, nếu $|x| > 1$ thì chuỗi phân kì. Vậy bán kính hội tụ là 1.

Ở phần chuỗi số ta đã biết chuỗi này với $x = -1$ là hội tụ, và chuỗi này với $x = 1$ là chuỗi điều hòa, phân kì. Vậy miền hội tụ của chuỗi là $[-1, 1)$. \blacksquare

¹Tài liệu tiếng Anh [Ste16] gọi đây là “interval of convergence”. Nhắc lại trong tài liệu này “khoảng” có thể gồm hoặc không gồm đầu mút, tức là có thể đóng hoặc không đóng, phù hợp với từ tiếng Anh “interval”.

Ví dụ 6.2.15. Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}.$$

Ta áp dụng Tiêu chuẩn tỉ số. Đặt $a_n = n(x+2)^n/3^{n+1}$ thì

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n} \right| \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{|x+2|}{3} \rightarrow \frac{|x+2|}{3} \quad \text{khi } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Theo Tiêu chuẩn tỉ số chuỗi đã cho là hội tụ nếu $|x+2|/3 < 1$ và là phân kì nếu $|x+2|/3 > 1$. Do đó chuỗi hội tụ nếu $|x+2| < 3$ và phân kì nếu $|x+2| > 3$, vậy bán kính hội tụ là 3.

Ta xét tại hai đầu mút của khoảng hội tụ $|x+2| < 3$. Khi $x = -5$ chuỗi trở thành

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$$

là chuỗi phân kì do $(-1)^n n$ không hội tụ về 0. Khi $x = 1$ chuỗi trở thành

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} n$$

cũng phân kì. Vậy chuỗi đã cho hội tụ khi và chỉ khi $-5 < x < 1$, miền hội tụ là khoảng $(-5, 1)$. ■

Ví dụ 6.2.16. Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{n^n}.$$

Để áp dụng Tiêu chuẩn căn số, ta tính:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-6)^n}{n^n} \right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x-6}{n} \right| = 0.$$

Theo Tiêu chuẩn căn số, chuỗi đã cho luôn hội tụ, bán kính hội tụ là ∞ , và khoảng hội tụ là $(-\infty, \infty)$. ■

Từ các ví dụ trên ta có thể rút ra công thức bán kính hội tụ sau đây.

Mệnh đề 6.2.17 (Công thức bán kính hội tụ). Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| = \rho$ hay

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|} = \rho$ thì bán kính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ là

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho} & \text{nếu } 0 < \rho < \infty, \\ 0 & \text{nếu } \rho = \infty, \\ \infty & \text{nếu } \rho = 0. \end{cases}$$

Chứng minh. Áp dụng Tiêu chuẩn tỉ số vào chuỗi này, ta tính được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1}(x-a)^{n+1}}{C_n(x-a)^n} \right| = |x-a| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right|.$$

Giả sử $0 < \rho < \infty$ thì giới hạn trên bằng $\rho|x-a|$. Nếu $\rho|x-a| < 1$, tức $|x-a| < \frac{1}{\rho}$, thì chuỗi đã cho hội tụ, và nếu $\rho|x-a| > 1$, tức $|x-a| > \frac{1}{\rho}$, thì chuỗi phân kì. Vậy bán kính hội tụ là $R = \frac{1}{\rho}$. Khi $\rho = 0$ thì chuỗi hội tụ với mọi x , và khi $\rho = \infty$ thì chuỗi hội tụ chỉ khi $x = a$.

Nếu áp dụng Tiêu chuẩn căn số vào chuỗi này, ta tính được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n(x-a)^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|} |x-a| = \rho|x-a|.$$

Tới đây vấn đề y như trường hợp áp dụng Tiêu chuẩn tỉ số ở trên. \square

Có thể nhớ công thức bán kính hội tụ là $\frac{1}{\rho}$ với quy ước $\frac{1}{0} = \infty$ và $\frac{1}{\infty} = 0$. Mặt khác công thức bán kính hội tụ này thực ra chỉ là kết quả áp dụng Tiêu chuẩn tỉ số hoặc Tiêu chuẩn căn số, nên với mỗi bài toán cụ thể ta có thể áp dụng trực tiếp các tiêu chuẩn hội tụ này như các ví dụ trước thay vì dùng công thức bán kính hội tụ.

Ví dụ 6.2.18. Ta trở lại các ví dụ trên, áp dụng công thức bán kính hội tụ 6.2.17.

Xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Với $C_n = \frac{1}{n}$ thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Vậy bán kính hội tụ là $\frac{1}{1} = 1$ với tâm tại 0.

Xét chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}.$$

Với $C_n = \frac{n}{3^{n+1}}$ thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{3^{n+2}}}{\frac{n}{3^{n+1}}} = \frac{1}{3}.$$

Vậy bán kính hội tụ là $\frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$ với tâm tại -2 .

Xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{n^n}.$$

Với $C_n = \frac{1}{n^n}$ thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Vậy bán kính hội tụ là $\frac{1}{0} = \infty$ với tâm tại 0. ■

6.2.3 * Chuỗi Fourier

Khác với việc xấp xỉ hàm bằng các hàm đa thức để thu được các chuỗi lũy thừa, ở phần này ta xấp xỉ hàm bằng các hàm lượng giác. Phương pháp xấp xỉ này phù hợp cho các hàm có tính tuần hoàn.

Hàm f được gọi là một **hàm tuần hoàn** nếu tồn tại một hằng số dương T , gọi là chu kỳ của hàm, sao cho $f(x+T) = f(x)$ với mọi x . Ta biết các hàm $\sin x$, $\cos x$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π .

Định nghĩa 6.2.19. Cho hàm f là hàm tuần hoàn có chu kỳ 2π , chuỗi hàm

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \quad (6.2.8)$$

với

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n \geq 1$$

được gọi là **chuỗi Fourier** của hàm f .

Trong trường hợp tổng quát, cho hàm f với chu kỳ T , chuỗi hàm

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) \quad (6.2.9)$$

với các hệ số

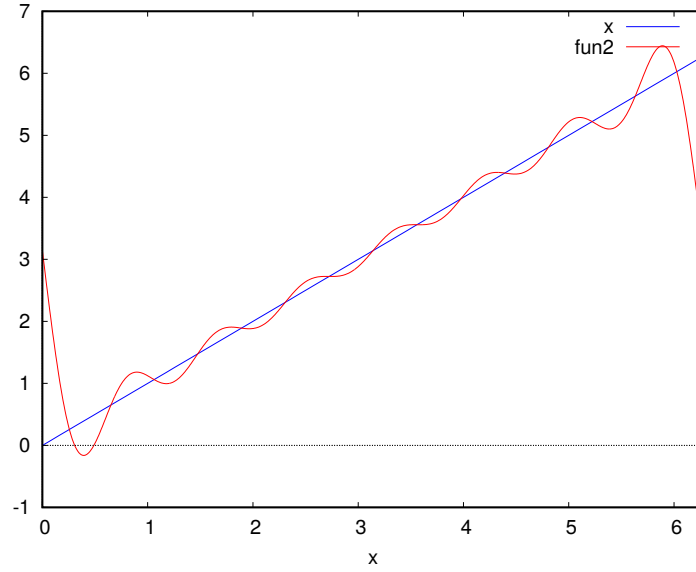
$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) dx, \quad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) dx, \quad n \geq 1$$

được gọi là **chuỗi Fourier** của f .

Ví dụ 6.2.20. Tìm chuỗi Fourier của hàm số sau:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } -\pi \leq x < 0 \\ 1 & \text{nếu } 0 \leq x < \pi, \end{cases} \quad \text{và } f(x+2\pi) = f(x).$$



Hình 6.2.2: Hàm $f(x) = x$, $x \in [0, 2\pi]$, và tổng 8 phần tử đầu của chuỗi Fourier của hàm này.

Hàm f là một hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π . Sử dụng công thức tính hệ số Fourier, ta có

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 0 dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 1 dx = \frac{1}{2},$$

và với $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} = -\frac{1}{n\pi} (\cos(n\pi) - \cos(0)) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{nếu } n \text{ lẻ.} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy chuỗi Fourier của f là

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k-1} \sin(2k-1)x = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)x.$$

■

Chuỗi Fourier cho phép xấp xỉ một hàm tuần hoàn bằng những hàm lượng giác đơn giản, từ đó có ứng dụng vào trong khoa học kỹ thuật, như trong xử lý tín hiệu.

Bài tập

6.2.1. Hãy tìm xấp xỉ bình phương (nghĩa là $n = 2$ trong khai triển Taylor) của hàm số $\sqrt{1+x^2}$ tại $x = 0$.

6.2.2. Hãy tìm xấp xỉ lập phương (nghĩa là $n = 3$ trong khai triển Taylor) của hàm số $\sqrt[3]{\sin x + x^2}$ tại $x = 0$.

6.2.3. Hãy kiểm tra các khai triển thường gặp trong Ví dụ 6.2.7.

6.2.4. Tìm khai triển Maclaurin của các hàm số sau.

(a) $f(x) = \sin \pi x$.

(b) $f(x) = e^{-2x}$.

6.2.5. Tìm khai triển Taylor của các hàm số sau tại các điểm a tương ứng.

(a) $f(x) = \ln x, a = 2$.

(b) $f(x) = 1/x, a = -3$.

(c) $f(x) = e^{2x}, a = 3$.

(d) $f(x) = \sin x, a = \pi/2$.

(e) $f(x) = \cos x, a = \pi$.

(f) $f(x) = \sqrt{x}, a = 16$.

(g) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5, a = 2$.

6.2.6. Chứng tỏ khai triển Taylor của $\ln x$ tại 1 là

$$\frac{(x-1)}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}$$

với $0 < x < 2$. Hãy vẽ đồ thị của hàm \ln và đồ thị của tổng 5 số hạng đầu của khai triển Taylor trên cùng một mặt phẳng tọa độ và nhận xét.

6.2.7. Công thức gần đúng

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 2 + \frac{86}{120}$$

có sai số tối đa là bao nhiêu?

6.2.8. Dùng xấp xỉ $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ để tính $\sin(0,1)$. Hãy ước lượng sai số.

6.2.9. Hãy tính gần đúng giá trị $\cos 91^\circ$ bằng khai triển Taylor cấp 5.

6.2.10. Hãy tính gần đúng giá trị $\cos 61^\circ$, với sai số so với giá trị chính xác không vượt quá 10^{-6} .

6.2.11. Xét hàm số f cho bởi $f(x) = (\sin x)^2$. Hãy tìm khai triển Taylor của f đến bậc 3 xung quanh điểm $a = \frac{\pi}{2}$. Sau đó tính gần đúng $f(91^\circ)$ từ khai triển này và cho biết sai số của $f(91^\circ)$ so với giá trị gần đúng không quá bao nhiêu?

6.2.12. Tìm một khoảng chứa x sao cho khi áp dụng phép xấp xỉ $\ln x$ bằng công thức Taylor tới bậc 9 thì sai số không quá 0,01.

6.2.13. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^5 + 4}$.

- (a) Viết khai triển Taylor của hàm số f tới cấp 3 quanh điểm $x = 2$.
 (b) Áp dụng, hãy tính gần đúng số $\sqrt{2,001^5 + 4}$.

6.2.14. Hãy kiểm tra các công thức gần đúng sau đây khi x gần bằng 0.

- (a) $\sin(\frac{\pi}{4} + x) \approx \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + x - \frac{x^2}{2})$.
 (b) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$.
 (c) $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$.

6.2.15. Hãy tìm khai triển Maclaurin của hàm $(1+x)^k$, với $k \in \mathbb{R}$, và khảo sát sự hội tụ.

6.2.16. Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của chuỗi lũy thừa.

- | | |
|---|---|
| <p>(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^3 + 1}.$</p> <p>(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2 + n - 1}{3n + 4} x^n.$</p> <p>(c) $\sum_{n=0}^{\infty} n x^{2n}.$</p> <p>(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!} x^n.$</p> <p>(e) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5}{3^n n} (x-4)^n.$</p> | <p>(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n 3^n}.$</p> <p>(g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(-2020)^n}.$</p> <p>(h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{2^n}.$</p> <p>(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2020} (x-1)^n}{(-2020)^{n+1}}.$</p> |
|---|---|

6.2.17. Chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n(n+1)}} (3x+6)^n$$

là chuỗi lũy thừa xung quanh điểm nào? Hãy tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa này.

6.2.18. Hãy tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-2023)^{2n}}{n(\ln n)^2}.$$

6.2.19. Tìm chuỗi Fourier của hàm:

- (a) $f(x) = x, x \in [0, 2\pi]$.
 (b) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$
 (c) $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}, \\ 0, & \frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi. \end{cases}$

$$(d) \quad f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}, \\ x - 2\pi, & \frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Hướng dẫn sử dụng phần mềm máy tính

Mục này giới thiệu và hướng dẫn sơ lược cách sử dụng các phần mềm máy tính để phục vụ cho môn Vi tích phân 1. Môn “Thực hành Vi tích phân 1B” có phần thực hành phần mềm Matlab, tuy nhiên môn này không bắt buộc hoặc không có trong chương trình đào tạo của một số ngành.

Matlab

Phần mềm MATLAB <https://www.mathworks.com> đang được dùng phổ biến trong giảng dạy và nghiên cứu.

Hướng dẫn riêng cho Vi tích phân: <https://www.mathworks.com/help/symbolic/calculus.html>

Để chạy mỗi lệnh, nhấn Enter.

Phần mềm Octave <https://octave.org> miễn phí và phần lớn tương thích với Matlab, các lệnh dưới đây đều chạy được trên Octave. Có thể chạy Octave trên web không cần cài đặt: <https://cocalc.com/features/octave>. Hướng dẫn gói tính toán kí hiệu: https://wiki.octave.org/Symbolic_package.

Thông báo biến x là một biến kí hiệu (symbolic):

```
syms x
```

Nhập vào hàm f , ví dụ $f(x) = x^2 - 3x + 1$:

```
f=x^2-3*x+1
```

Tính giá trị của f tại một điểm, chẳng hạn tại $x = 2$:

```
subs(f,x,2)
```

Tính đạo hàm của hàm f theo biến x :

```
diff(f,x)
```

Vẽ đồ thị hàm f , chẳng hạn với x từ 1 tới 2:

```
ezplot(f,[1,2])
```

Tính tích phân không xác định của hàm f theo biến x :

```
int(f,x)
```

Tính tích phân xác định của hàm f theo biến x , với x từ 1 tới 2:

```
int(f,x,1,2)
```

Tính xấp xỉ tích phân của hàm $f(x)$ với x từ a tới b , thì đây không còn là phép toán kí hiệu nữa mà là phép toán số (numerical), có thể chuyển f thành một dạng hàm khác, gọi là `inline`.

Nhập hàm $f(x) = e^{x^2}$ ở dạng inline:

```
f=inline('exp(x.^2)')
```

Tính xấp xỉ tích phân của f từ 0 tới 1:

```
quad(f,0,1)
```

Gần đây Matlab đang thôi không sử dụng lệnh `inline` nữa, có thể chuyển sang dùng lệnh như sau.

Nhập hàm $f(x) = e^{x^2}$:

```
f=@(x) exp(x.^2)
```

Tính xấp xỉ tích phân của f từ 0 tới 1:

```
integral(f,0,1)
```

Python

Python là một ngôn ngữ lập trình cùng với các gói mở đang được sử dụng phổ biến.

Cài đặt:

- Có thể dùng bản cài đặt Anaconda <https://www.anaconda.com>. Trên hệ điều hành Linux có thể cài python cùng trình biên tập Jupyter từ kho, mở terminal gõ lệnh `jupyter notebook`, để chạy mỗi câu lệnh trên Jupyter nhấn Shift Enter.
- Chạy trên web, không cần cài đặt: <https://cocalc.com/doc/python.html>

Khi cần có thể cài thêm các gói như tính toán kí hiệu sympy, tính toán số numpy, vẽ hình matplotlib.pyplot.

Hướng dẫn chung: <https://problemsolvingwithpython.com>.

Hướng dẫn dùng gói tính toán kí hiệu sympy trong Vi tích phân: <https://docs.sympy.org/latest/tutorial/calculus.html>.

Nhập gói tính toán kí hiệu:

```
from sympy import *
```

Khai báo biến kí hiệu, ví dụ như biến x :

```
x=symbols('x')
```

Tính đạo hàm của hàm x^3 :

```
diff(x**3)
```

Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$:

```
limit(sin(x)/x,x,0)
```

Tính tích phân $\int e^{2x} dx$:

```
integrate(exp(2*x))
```

Tính tích phân $\int_0^1 x^2 dx$:

```
integrate(x**2,(x,0,1))
```

Giải phương trình $x^2 = 1$:

```
solveset(x**2-1)
```

Nhập gói tính toán số numpy:

```
from numpy import *
```

Nhập gói vẽ hình:

```
from matplotlib.pyplot import *
```

Vẽ đồ thị của hàm $y = e^x$ với x thuộc đoạn $[-2, 3]$, chia thành 100 điểm:

```
x = linspace(-2,3,100)
y = exp(x)
plot(x,y)
```

Các phần mềm khác

Còn có những phần mềm khác có tính năng tương tự, như:

GeoGebra Phần mềm miễn phí, <https://www.geogebra.org>, có phiên bản trên web, cho máy tính, cho điện thoại. Phần mềm này phổ biến ở bậc trung học, dễ sử dụng để vẽ đồ thị. Kho tài nguyên có nhiều minh họa cho môn Vi tích phân: <https://www.geogebra.org/t/calculus>.

Maxima Phần mềm miễn phí, <http://maxima.sourceforge.net>, có giao diện thực đơn dễ dùng. Nên cài thêm giao diện đồ họa wxmaxima. Để chạy mỗi lệnh, nhấn Shift Enter.

Wolfram Alpha Giao diện web miễn phí ở <https://www.wolframalpha.com>.

Tài liệu tham khảo

- [Apo67] Tom Apostol, *Calculus*, 2nd ed., John Wiley and Sons, 1967.
- [BMGT2] Bộ môn Giải tích, *Giáo trình Vi tích phân 2*, Khoa Toán–Tin học Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, <https://sites.google.com/view/math-hcmus-edu-vn-giaitich>
- [BLG14] Erin N. Bodine, Suzanne Lenhart, Louis J. Gross, *Mathematics for the life sciences*, Princeton University Press, 2014.
- [CW05] Alpha C. Chiang, Kevin Wainwright, *Fundamental methods of mathematical economics*, 4ed., McGraw-Hill, 2005.
- [Duc06] Dương Minh Đức, *Giáo trình Toán Giải Tích 1 (Toán vi tích phân A1)*, NXB Thống kê, Tp. Hồ Chí Minh, 2006.
- [Fic77] G. M. Fichtengôn, *Cơ sở Giải tích toán học*, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, 1977. Bản tiếng Anh: G. M. Fichtengolt's, *The fundamentals of Mathematical Analysis*, Pergamon Press, 1965.
- [Kha15] Đỗ Công Khanh, Nguyễn Minh Hằng, Ngô Thu Lương, *Toán cao cấp*, NXB Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, 2015.
- [Kha96] Phan Quốc Khánh, *Phép tính vi tích phân*, tập 1, NXB Giáo dục, 1996.
- [Lan97] Serge Lang, *Undergraduate analysis*, 2nd ed., Springer, 1997.
- [NTNM22] Nguyễn Thị Mộng Ngọc, Nguyễn Văn Thìn, Nguyễn Thị Hồng Nhung, Nguyễn Đăng Minh, *Giáo trình bài tập Xác suất Thống kê*, NXB Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, 2022.
- [Pis69] N. Piskunov, *Differential and Integral Calculus*, Mir, 1969.
- [Ros20] Sheldon Ross, *A first course in probability*, 10th ed., Pearson, 2020.
- [Rud76] Walter Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1976.
- [SGKTH] Bộ Giáo dục và Đào tạo, *Sách giáo khoa các môn Đại số, Giải tích, Hình học lớp 10, 11, 12*, NXB Giáo dục, 2019.

- [Spi94] Michael Spivak, *Calculus*, 3rd ed., Publish or Perish, 1994.
- [Ste16] James Stewart, *Calculus*, Brooks-Cole, 8th ed., 2016. Bản dịch tiếng Việt: Giải tích 1, 2, xuất bản lần thứ 7, NXB Hồng Đức, 2016.
- [SH12] Gilbert Strang, Edwin “Jed” Herman, *Calculus*, OpenStax, 2016,
Vol 1: <https://openstax.org/details/books/calculus-volume-1>
Vol 2: <https://openstax.org/details/books/calculus-volume-2>
- [TPTT02] Đinh Ngọc Thanh, Nguyễn Đình Phư, Nguyễn Công Tâm, Đặng Đức Trọng, *Giải tích hàm một biến*, NXB Giáo dục, 2002.
- [Tri07] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học cao cấp*, NXB Giáo dục, 2007.
- [Zor04] Vladimir A. Zorich, *Mathematical Analysis I*, Springer, 2004.
- [Wu20] Hung-Hsi Wu, *Pre-calculus, Calculus, and Beyond*, AMS, 2020.

Chỉ mục

- inf, 12
- ln, 26
- sup, 12
- e , 26
- ánh xạ, 6
 - toàn ánh, 6
 - ánh xạ ngược, 6
 - đơn ánh, 6
- ánh xạ hợp, 7
- bài toán tối ưu hoá, 79
- bán kính hội tụ, 189
- bị chặn
 - bị chặn dưới, 11
 - bị chặn trên, 11
 - bị chặn, giới nội, 11
- chi phí cận biên, 100
- chuỗi
 - phân kì, 165
 - tổng, 165
- chuỗi Fourier, 192
- chuỗi hàm, 182
- chuỗi hình học, 166
- chuỗi lũy thừa, 188
- chuỗi Maclaurin, 185
- chuỗi số, 164
- chuỗi số dương, 168
- chuỗi số đan dấu, 172
- chuỗi Taylor, 185
- chuỗi điều hòa, 168
- chặn
 - chặn dưới, 11
 - chặn trên, 11
- công của lực, 155
- công thức Maclaurin, 183
- Công thức Newton–Leibniz, 127
- Công thức Taylor
 - phần dư, 184
 - sai số, 184
- công thức Taylor, 183
- công thức đổi biến, 133
- cực trị, 79
- Định lý cơ bản của phép tính vi tích phân, 125
- Định lý Fermat, 81
- Định lý giá trị trung bình Cauchy, 87
- Định lý giá trị trung gian, 52
- Định Lý Rolle, 85
- điểm cực trị, 79
- điểm dừng, 82
- điểm giới hạn, 35
- điểm tới hạn, 82
- điểm tụ, 35
- điểm uốn, 95
- đoạn, 11
- đường thẳng, 21
- đạo hàm, 59
- đạo hàm bên phải, 63
- đạo hàm bên trái, 63
- đạo hàm của hàm số ngược, 70
- đồ thị, 21
- độ nghiêng, 21
- động năng, 155
- dãy

- bị chặn, 12
- giới hạn, 14
- giới nội, 12
- hội tụ, 13
- phân kì, 13
- tiến về, 13
- tập giá trị, 12
- dãy giảm, 13
- dãy tăng, 13
- dãy đơn điệu, 13
- dạng vô định, 101
- gia tốc, 76
- giá trị cực tiểu địa phương, 79
- giá trị cực tiểu toàn cục, 79
- giá trị cực đại toàn cục, 79
- giá trị cực đại địa phương, 79
- gián đoạn, 48
- giới hạn bên phải, 40
- giới hạn bên trái, 40
- giới hạn hàm số, 35
- giới nội, 11
- hàm giảm, 89
- hàm giảm ngặt, 89
- hàm hiện, 74
- hàm hằng, 21
- hàm logistic, 110
- hàm lõm, 93
- hàm lồi, 93
- hàm mật độ, 154
- hàm sigmoid, 110
- hàm số, 21
- hàm số sơ cấp, 26
- hàm trơn, 91
- Hàm tuần hoàn, 192
- hàm tăng, 89
- hàm tăng ngặt, 89
- hàm ẩn, 74
- hệ số góc, 21
- hệ số góc của tiếp tuyến, 61
- hội tụ tuyệt đối, 173
- khoảng, 11
- khoảng hội tụ, 189
- khoảng mở, 11
- khả tích, 119
- khả vi, 59, 63
- liên tục, 48
- lãi nhập vốn, 25
- lãi nhập vốn liên tục, 106
- miền hội tụ, 189
- miền xác định, 6
- mệnh đề phản đảo, 8
- mệnh đề đảo, 8
- nguyên hàm, 123
- nguyên lý quy nạp toán học, 9
- phân kì ra vô cùng, 15
- phép quy nạp, 9
- phép thế, 132
- phép đổi biến, 132
- phương pháp thế, 132
- phương pháp đổi biến, 132
- phần nguyên, 56
- phần tử lớn nhất, 11
- phần tử nhỏ nhất, 11
- Quy tắc xích, 69
- Quy tắc điểm giữa, 141
- song song, 22
- tích phân, 119
- tích phân bất định, 123
- Tính chất kẹp, 18
- tập hợp
 - hợp, 5
 - miền giá trị, 6
 - phần bù, 5
 - tích, 5
- tập hợp rỗng, 4
- tổng Riemann, 117
- tổng riêng, 164
- vô cùng, 16, 42
- vô cùng bé, 101, 185

vô cực, 16, 42

vô hạn, 9, 16, 42

vận tốc, 61