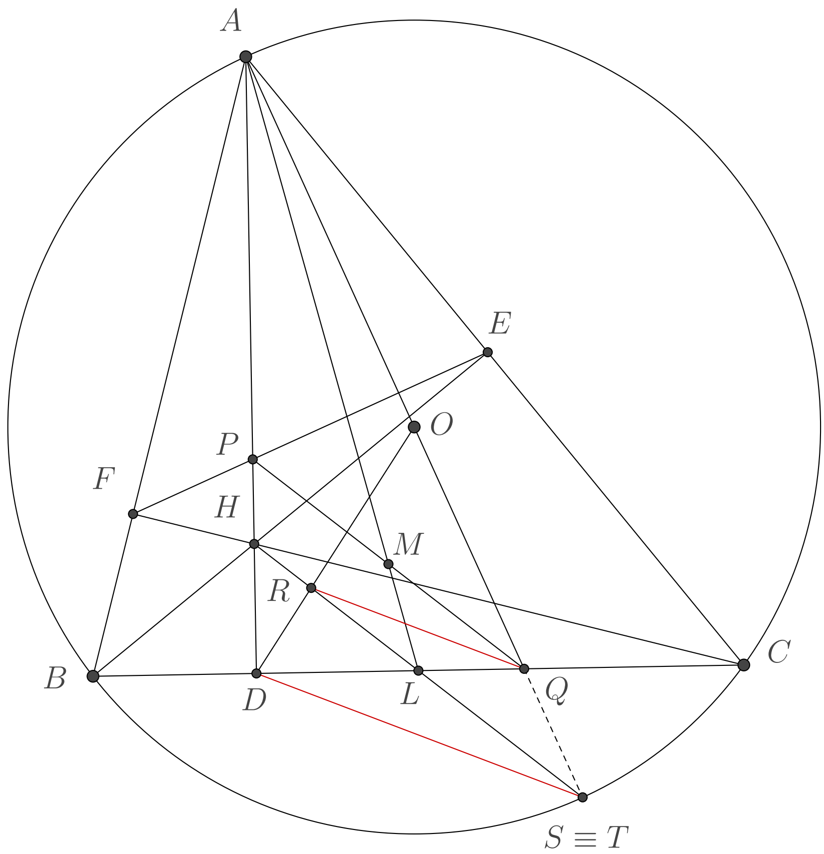
Bài 5 (Tuần 3): Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định, A thay đổi trên đường tròn (O). H là trực tâm của tam giác ABC. AH, BH, CH cắt AB, BC, CA theo thứ tự tại D, E, F. AH cắt EF tại P. AO cắt BC tại Q. M là trung điểm PQ.

a) Chứng minh: AM luôn đi qua một điểm cố định gọi là L.

b) DO cắt HL tại R. Đường thẳng qua D song song QR cắt HL tại S. Chứng minh S di chuyển trên một đường tròn cố định.

Solution.



a) Kẻ đường kính AT của (O). Khi đó ta có $\triangle AFH \sim \triangle ACT \Rightarrow \dfrac{AH}{AT} = \dfrac{AF}{AC}$ (1)

Ta có $\widehat{AFP} = \widehat{ACQ} \Rightarrow \triangle APF \sim \triangle AQC \Rightarrow \dfrac{AP}{AQ} = \dfrac{AF}{AC}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{AH}{AT} = \dfrac{AP}{AQ} \Rightarrow \dfrac{AP}{AH} = \dfrac{AQ}{AT} \Rightarrow PQ \parallel HT$. Suy ra $PQTH$ là hình thang.

Gọi L là trung điểm HT. Theo bổ đề hình thang, ta có A, M, L thẳng hàng. Mà $BHCT$ là hình bình hành do đó L là trung điểm của BC (không đổi).

b) Ta nhận thấy rằng nếu chứng minh điểm S trùng điểm T thì bài toán được giải quyết, vậy cần chỉ ra $RQ \parallel DT$.

Có $AD \perp BC$. L là trung điểm BC nên $OL \perp BC \Rightarrow OL \parallel BC$

Từ đó, có: $\dfrac{OQ}{OT} = \dfrac{OQ}{OA} = \dfrac{LQ}{LD}$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ODQ với bộ 3 điểm R, L, T thẳng hàng nằm trên các cạnh của tam giác:

$$\frac{LQ}{LD} \cdot \frac{RD}{RO} \cdot \frac{TO}{TQ} = 1$$

$\Rightarrow \dfrac{OQ}{TO} \cdot \dfrac{RD}{RO} \cdot \dfrac{TO}{TQ} = 1 \Rightarrow \dfrac{QO}{QT} \cdot \dfrac{RD}{RO} = 1 \Rightarrow \dfrac{RO}{RD} = \dfrac{QO}{QT}$

Theo định lý Thales ta có $RQ \parallel DT$ Do đó $T \equiv S$. Vậy điểm S di chuyển trên đường tròn (O) cố định.