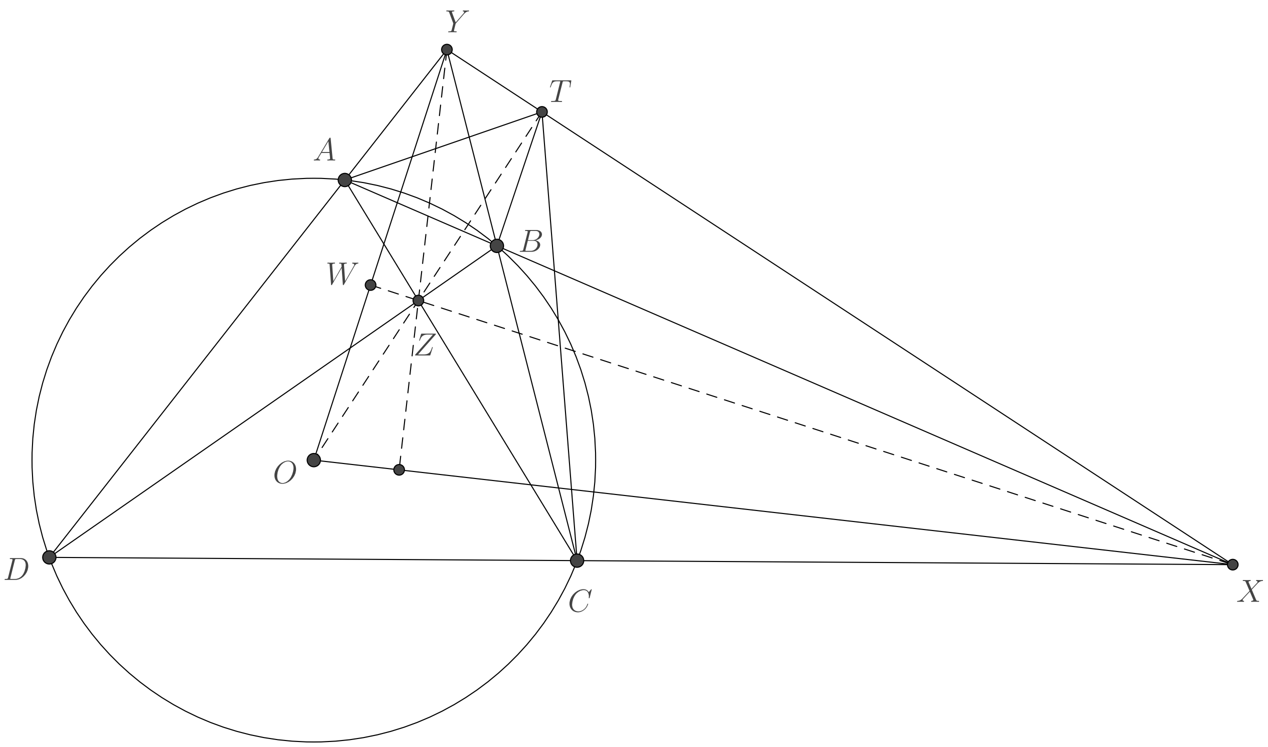
Chứng minh định lý Brocard bằng kiến thức THCS

Phát biểu định lý: Cho tứ giác toàn phần $ABCDXY$ nội tiếp đường tròn (O); Z là giao điểm của AC, DB. Chứng minh rằng O là trực tâm của tam giác XYZ.



Solution.

Gọi T là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCDXY$. Bằng cộng góc ta dễ chứng minh T thuộc XY.

Ta có các tứ giác nội tiếp $AYTB, TBCX, YTCD$ từ đó có các biến đổi sau:
$\angle ATC = 180° - (\angle YTA + \angle XTC) = 180° - (2\angle ADC) = 180° - \angle AOC \Rightarrow$ Tứ giác $ATCO$ nội tiếp.
$\angle DTB = 180° - (\angle BTX + \angle DTY) = 180° - (2\angle BCD) = 180° - \angle BOD \Rightarrow$ Tứ giác $BTDO$ nội tiếp.

Ta có OT là trục đẳng phương của $(ATCO)$ và $(TBOD)$.

Có: $\mathcal{P}_{Z/(TBOD)} = ZB.ZD = ZA.ZC = \mathcal{P}_{Z/(ATCO)}$ Suy ra Z thuộc trục đẳng phương của $(ATCO)$ và $(TBOD)$. Do đó O, Z, T thẳng hàng.

Tứ giác $ATCO$ nội tiếp có $OA = OC \Rightarrow TO$ là phân giác $\angle ATC \Rightarrow \angle ATO = \angle CTO$; có $\angle YTA = \angle XTC \Rightarrow \angle OTY = \angle OTX \Rightarrow ZT \perp XY.$ $\quad (*)$

Đường tròn ngoại tiếp các tam giác AZB, DZC cắt nhau tại W.

Ta có: $\angle BWC = \angle BWZ + \angle CWZ = \angle ZAB + \angle ZDC = 2\angle BDC = \angle BOC \Rightarrow$ Tứ giác $BWOC$ nội tiếp. Tương tự có tứ giác $AWOD$ nội tiếp.

Có: $\mathcal{P}_{Y/(AWOD)} = YA.YD = YB.YC = \mathcal{P}_{Y/(BWOC)} \Rightarrow Y, W, O$ thẳng hàng. Tương tự: X, Z, W thẳng hàng.

Ta có $\angle ZWO = \angle CWZ + \angle CWO = \angle BDC + \angle OBC = \dfrac{(180° - \angle BOC)}{2} + \dfrac{\angle BOC}{2} = 90°$
$\Rightarrow YW \perp OY.$ Kết hợp $(*)$ ta hoàn tất chứng minh.