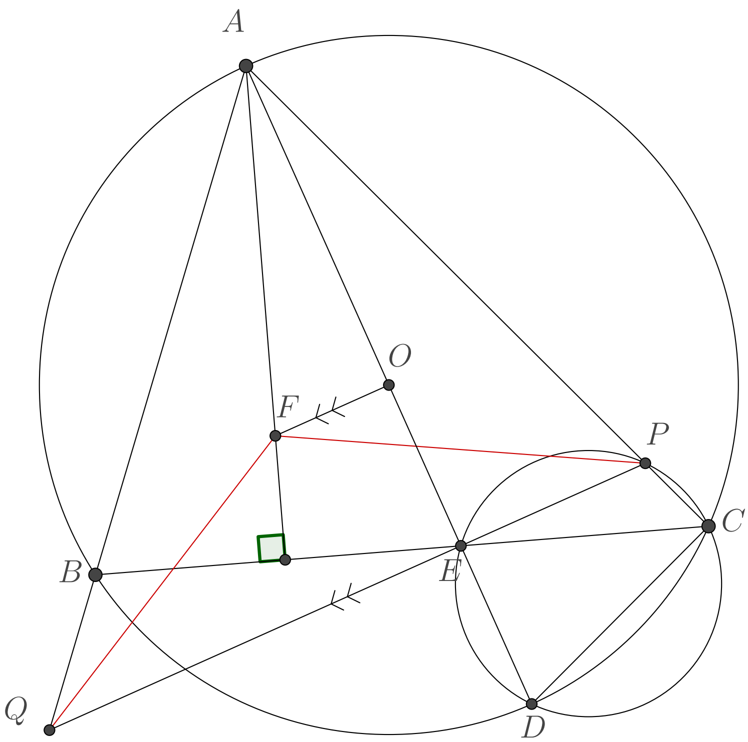
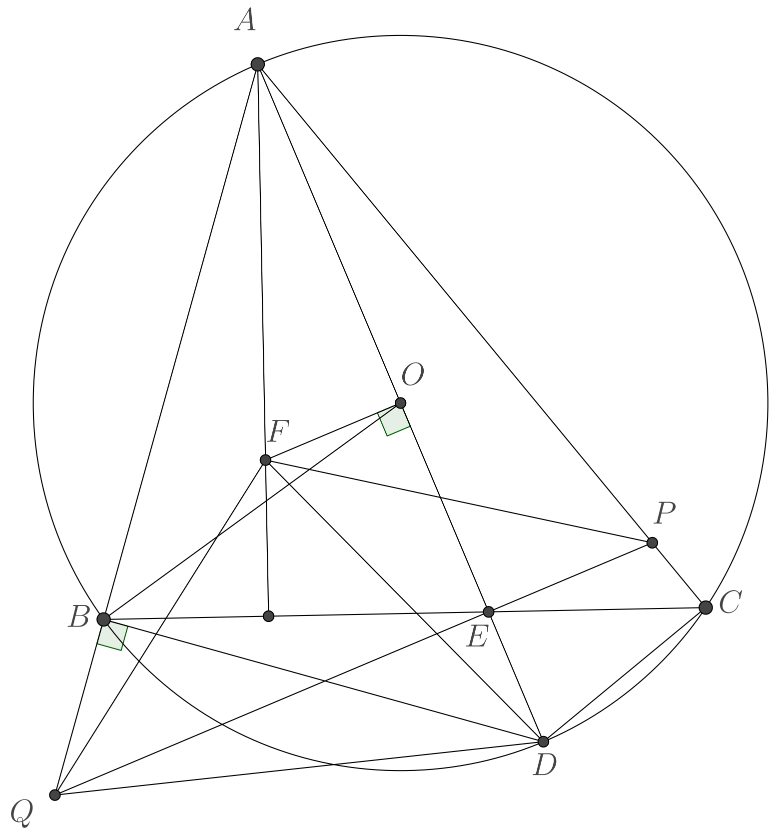
(MEMO 2016 T-5 G) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường kính AD của đường tròn (O) cắt BC tại E. Đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE cắt AC tại điểm thứ hai là P. PE cắt AB tại Q. Đường thẳng qua O song song với PE cắt đường cao của tam giác ABC hạ từ A tại điểm F. Chứng minh $FB = FQ$.



Solutions.



Dễ có các tứ giác $ABDC, CPED$ nội tiếp.

Ta có: $\widehat{QAD} \equiv \widehat{BAD} = \widehat{BCD} \equiv \widehat{ECD} = \widehat{EPD} \equiv \widehat{QPD} \Rightarrow$ Tứ giác $QACD$ nội tiếp.

$\widehat{ACD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{AEP} = 90^\circ$ Hay $AD \perp PQ$. Mà $OF \parallel PQ \Rightarrow OF \perp AD$. Ta lại có O là trung điểm AD, do đó OF là trung trực của $AD \Rightarrow FA = FD$.

$\Rightarrow \triangle FAD$ cân tại F. $\Rightarrow \widehat{FAD} = \widehat{FDA}$.

Ta có $\widehat{ABD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) và $\widehat{QDE} = 90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $BEDQ$ nội tiếp.

Ta có: $\widehat{FAD} + \widehat{AEB} = 90^\circ (AF \perp BC)$; $\widehat{QDB} + \widehat{AQD} = 90^\circ$. Mà $\widehat{AEB} = \widehat{AQD}$ (Tứ giác $BEDQ$ nội tiếp). Nên $\widehat{FAO} = \widehat{QDB} \Rightarrow \widehat{ODF} = \widehat{BDQ}$.

Xét $\triangle ODF$ và $\triangle BDQ$:

$\widehat{ODF} = \widehat{BDQ}$

$\widehat{DOF} = \widehat{DBQ} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \triangle ODF \sim \triangle BDQ \Rightarrow \frac{DO}{DB} = \frac{DF}{DQ} \Rightarrow \frac{DQ}{DB} = \frac{DF}{DO} \qquad (1)$$

Có $\widehat{ODF} = \widehat{BDQ} \Rightarrow \widehat{ODF} + \widehat{FDB} = \widehat{BDQ} + \widehat{FDB} \Rightarrow \widehat{FDQ} = \widehat{ODB} \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle FDQ \sim \triangle ODB$. Mà $\triangle ODB$ cân nên $\triangle FDQ$ cân. Do đó $FD = FQ$ mà ta lại có $FD = FA$ kết hợp với tứ giác $APDQ$ nội tiếp nên F là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $APDQ$. Từ đó ta có $FP = FQ$