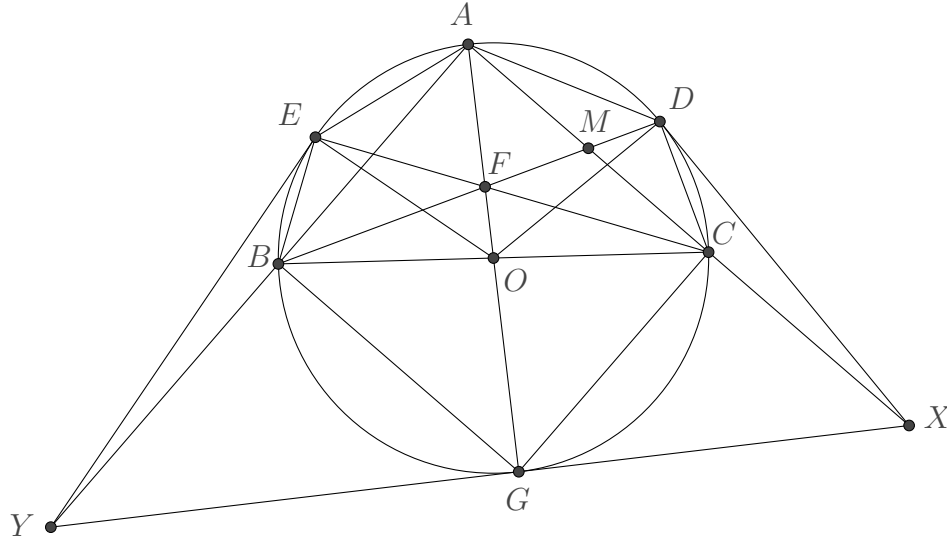


MEMO 2022 Team Competition: Problem 5.

Let ω be the circumcircle of a triangle ABC with $\angle CAB = 90^\circ$. The medians through B and C meet ω again at D and E , respectively. The tangent to ω at D intersects the line AC at X and the tangent to ω at E intersects the line AB at Y . Prove that the line XY is tangent to ω .

Viết hoá: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính BC . Trung tuyến từ B và C cắt đường tròn (O) lần lượt tại 2 điểm D và E . Tiếp tuyến của (O) tại D cắt AC tại X , tiếp tuyến tại E của (O) cắt AB tại Y . Chứng minh XY tiếp xúc với đường tròn (O) .



Solution 1.

Lấy điểm G là đối xứng của A qua O , đặt M là trung điểm BC . Tiếp tuyến tại G và D của (O) cắt nhau tại X' .

Ta có: $\angle GOX' = \frac{1}{2}\angle GOD = \angle GBD = \angle AMB$ ($AC \parallel BC$). Từ đây suy ra $\triangle GOX' \sim \triangle AMB$.

Mặt khác lần lượt có O và M là trung điểm AG và AC . Suy ra $\triangle GAX' \sim \triangle ACB$
 $\Rightarrow \angle GAX' = \angle ACB = \angle GAC$. Ta có ngay $X' \equiv X$.

Ta định nghĩa Y' và chứng minh $Y' \equiv Y$ tương tự. Hoàn tất chứng minh.

Solution 2.

Kẻ AG là đường kính của (O) . BD cắt AC tại M .

Ta có $BG \parallel AC$, M là trung điểm AC .

$\Rightarrow -1 = B(AC, MG) = B(AC, DG)$ (Xét phép chiếu tâm B)

Suy ra $(AC, DG) = -1$ vậy có tứ giác $ADCG$ là tứ giác điều hoà. Do đó tiếp tuyến tại D, G và AC đồng quy. Vậy XG là tiếp tuyến tại G của (O) .

Tương tự, ta chứng minh đường YG là tiếp tuyến tại G của (O) .

Vậy XY tiếp xúc với đường tròn (O) .