(Morocco 2011). Cho tam giác ABC có p là nửa chu vi, S là diện tích. Chứng minh:

$$\cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C \geq 3\left(9\frac{R^2}{p^2} - 1\right)$$

Solutions

Gọi a, b, c lần lượt là cách cạnh BC, CA, AB.

Ta viết lại điều cần chứng minh:

$$\cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C + 3 \geq 27\frac{R^2}{p^2}$$

Ta có: $VT = \cot^2 A + 1 + \cot^2 B + 1 + \cot^2 C + 1 = \dfrac{1}{\sin^2 A} + \dfrac{1}{\sin^2 B} + \dfrac{1}{\sin^2 C}$

Áp dụng liên tiếp bất đẳng thức Bunhiacopxki, Cauchy–Schwarz:

$$\begin{aligned} VT = \frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} \geq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right)^2 &\geq \frac{1}{3}\left[\frac{(1+1+1)^2}{\sin A + \sin B + \sin C}\right]^2 \\ &= 27\left(\frac{1}{\sin A + \sin B + \sin C}\right)^2 (1) \end{aligned}$$

Theo định lý sin và tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R &= \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} \\ \Rightarrow R &= \frac{\frac{a+b+c}{2}}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{p}{\sin A + \sin B + \sin C} \\ \Rightarrow \frac{R}{p} &= \frac{1}{\sin A + \sin B + \sin C} \end{aligned}$$

Thay vào (1), ta có ngay điều cần chứng minh