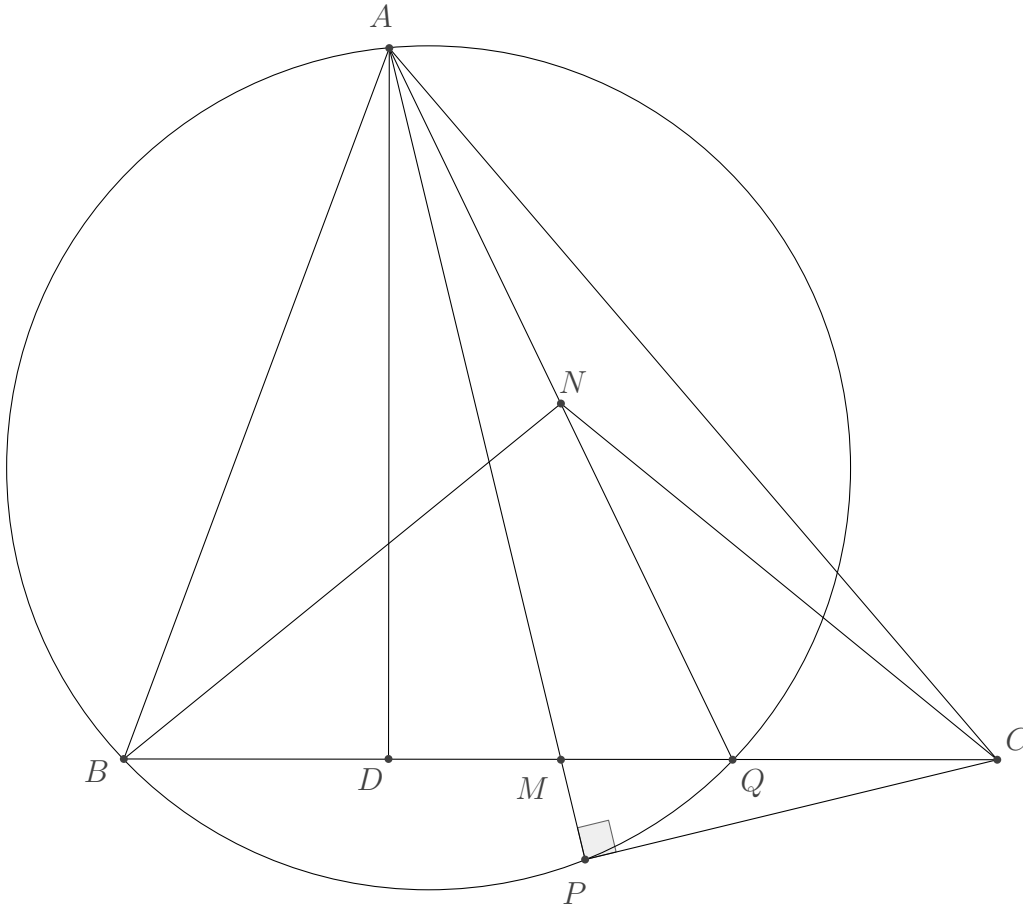


(USAMO 2023 P1). Cho tam giác  $ABC$  có  $M$  là trung điểm cạnh  $BC$ .  $P$  là chân đường vuông góc hạ từ  $C$  tới  $AM$ . Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABP$  cắt  $BC$  tại điểm thứ hai  $Q$ .  $N$  là trung điểm  $AQ$ . Chứng minh rằng  $NB = NC$ .

**Solutions.**



Từ  $A$  hạ đường cao  $AD$  tới  $BC$  ( $D \in BC$ ).

Ta có các tứ giác  $AQPB, CPDA$  nội tiếp.

Điểm  $M$  thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn  $(AQP B), (CPDA)$ . Ta có:

$$MB \cdot MQ = MP \cdot MA = MD \cdot MC$$

Mà  $MB = MC \Rightarrow MD = MQ$ . Như vậy  $M$  là trung điểm  $DQ \Rightarrow NM$  là đường trung bình của tam giác  $ADQ$ . Do đó  $NM \parallel AD$ . Mà  $AD \perp BC \Rightarrow NM \perp BC$ . Mặt khác  $M$  là trung điểm  $BC$  nên  $NM$  là trung trực  $BC$ . Vì vậy  $NB = NC$ .

Ghi chú: Có rất nhiều lời giải cho bài này nhưng đây là cách ngắn gọn và dễ hiểu hơn hết.