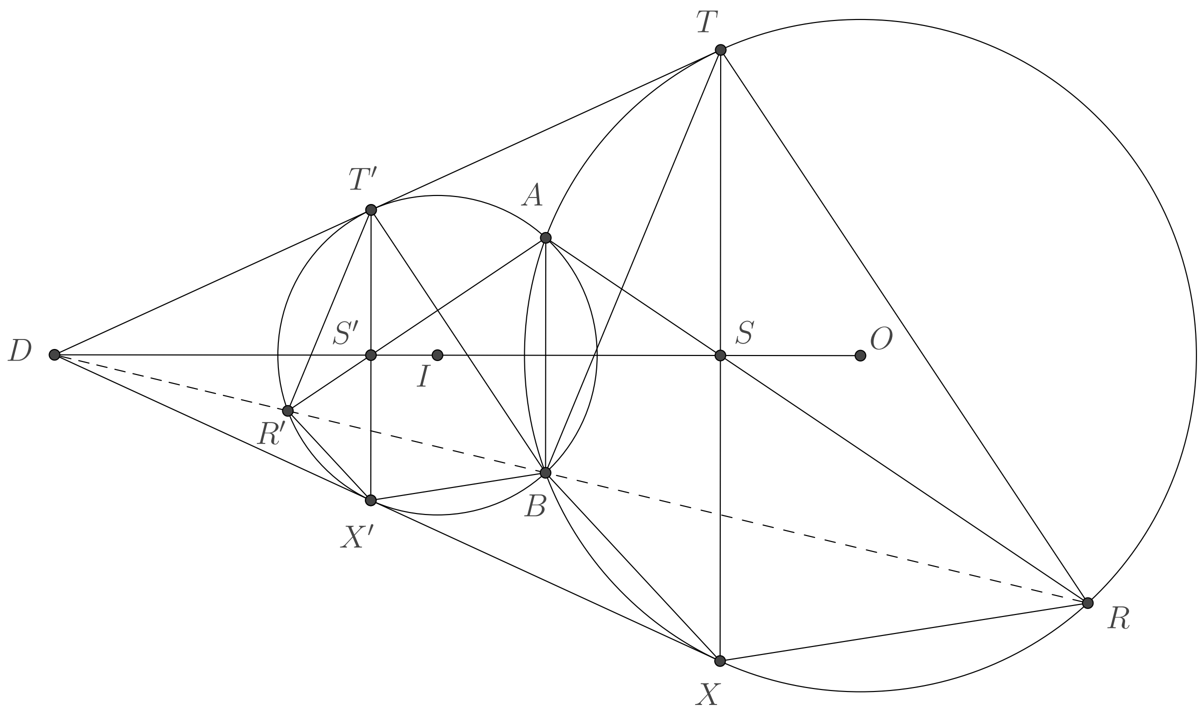
(VMO 2000) Cho hai đường tròn tâm I và O cắt nhau tại A, B phân biệt. TT' là tiếp tuyến chung ngoài bất kỳ của hai đường tròn sao cho T thuộc (O), T' thuộc (I). Đường thẳng qua T, T' vuông góc với OI lần lượt tại S, S'. Tia AS cắt đường tròn (O) tại R, tia AS' cắt đường tròn (I) tại R'. Chứng minh B, R, R' thẳng hàng.



Solution.

Tiếp tuyến chung ngoài TT' cắt OI tại D. Lấy X, X' lần lượt là đối xứng của T, T' qua OI.
Khi đó OI, TT', XX' đồng quy tại D. Để ý rằng B, R, R' thẳng hàng khi và chỉ khi D, B, R, R' thẳng hàng. Như vậy bài toán sẽ được giải quyết nếu ta chứng minh các tứ giác $T'R'X'B, TRXB$ là tứ giác điều hoà. Khi đó tiếp tuyến tại T', X' của (I) và BR' đồng quy; tiếp tuyến tại T, R của (O) và BR đồng quy.

Ta có $AB \perp OI$; $T'X' \perp OI$; $TX \perp OI \Rightarrow TX \parallel AB \parallel OI$. Cũng có S', S lần lượt là trung điểm của $T'X', TX$.

Suy ra: $\begin{cases} -1 = A(T'X'S'B) = (T'X'R'B) \\ -1 = A(TXSB) = (TXRB) \end{cases}$ (Xét phép chiếu xuyên tâm A)

Vậy các tứ giác $T'R'X'B, TRXB$ là tứ giác điều hoà. Hoàn tất chứng minh.