Catégories de foncteurs en grassmanniennes et filtration de Krull

Aurélien DJAMENT*†‡

Novembre 2006

Résumé : Soit $\mathcal{F}$ la catégorie des foncteurs entre espaces vectoriels sur le corps à deux éléments. À l'aide des *catégories de foncteurs en grassmanniennes*, nous avons émis dans [Dja06a] une conjecture décrivant la filtration de Krull de la catégorie $\mathcal{F}$. Nous démontrons une forme affaiblie de cette conjecture, avec comme application la détermination de la structure du produit tensoriel entre le foncteur projectif standard $P_{\mathbb{F}_2{}^2}$ et un foncteur fini de $\mathcal{F}$, dont on établit le caractère noethérien. Nous étudions également le morphisme induit par le foncteur d'intégrale en grassmanniennes entre anneaux de Grothendieck.

Abstract ***(Grassmannian functor categories and Krull filtration)*** *:* Let $\mathcal{F}$ be the category of functors between vector spaces over the field $\mathbb{F}_2$. With the help of *grassmannian functor categories*, we formulated in [Dja06a] a conjecture which describes the Krull filtration of the category $\mathcal{F}$. We prove a weak form of this conjecture, which applies to show the noetherian character of the tensor product between the standard projective functor $P_{\mathbb{F}_2{}^2}$ and a finite functor of $\mathcal{F}$. We study also the morphism induced by the grassmannian integral functor between Grothendieck rings.

Classification mathématique par sujets : 16P60, 18A25, 20C33 ; secondaire : 16E20, 16P40, 18E35, 18G05, 55S10.

Mots clefs : Catégories de foncteurs, filtration de Krull, objets noethériens, algèbre homologique, foncteur différence et filtration polynomiale, grassmanniennes, représentations modulaires.

*djament@math.univ-paris13.fr

†http://www.math.univ-paris13.fr/ djament/

‡LAGA, Institut Galilée, université Paris 13, 99 avenue J.-B. Clément, 93430 VILLETANEUSE, FRANCE

Table des matières

Introduction

Soient $\mathcal{E}$ la catégorie des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{F}_2$ à deux éléments, $\mathcal{E}^f$ la sous-catégorie pleine des espaces de dimension finie et $\mathcal{F} = \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f, \mathcal{E})$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{E}^f$ vers $\mathcal{E}$. Cette catégorie joue un rôle important en algèbre et en topologie ; de nombreuses investigations sur sa structure ont été menées (cf. [FFPS03]). Pour autant, on ignore si $\mathcal{F}$ est une catégorie localement noethérienne. Ce problème connu sous le nom de *conjecture artinienne*, discuté dans [Pow00a] et [Dja06a] par exemple, n'est qu'une illustration des questions qui demeurent ouvertes dans le domaine.

Cet article expose des avancées sur la conjecture artinienne et précise sensiblement les obstacles à surmonter pour parvenir à une compréhension globale satisfaisante de la catégorie $\mathcal{F}$. Il combine deux outils essentiels dans l'étude de la catégorie $\mathcal{F}$: les foncteurs $\tilde{\nabla}_n : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ de Powell et les *catégories de foncteurs en grassmanniennes*, introduites dans [Dja06a], dont ce travail constitue la continuation. Tous les termes ou notations non définis ici sont introduits dans la première partie du présent article, ou à défaut dans [Dja06a].

Définis dans [Pow98b], les foncteurs $\tilde{\nabla}_n$ constituent une filtration décroissante de sous-foncteurs du foncteur différence $\Delta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ obtenue à partir de la filtration polynomiale de l'injectif standard $I_{\mathbb{F}_2}$. Ils ont permis à Powell de donner les premiers renseignements profonds connus sur la structure *globale* de la catégorie $\mathcal{F}$: son *théorème de simplicité* (établi dans [Pow98c]) procure des informations sur *tous* les projectifs standard de la catégorie $\mathcal{F}$. De plus, Powell a déterminé la structure du projectif $P_{\mathbb{F}_2^2}$, dont il a montré le caractère noethérien de type 2, à l'aide du foncteur $\tilde{\nabla}_2$ (cf. [Pow98a]). La préservation des monomorphismes et des épimorphismes par les foncteurs $\tilde{\nabla}_n$ et le contrôle précis de leur effet sur les foncteurs simples de $\mathcal{F}$ permettent de fait de mener efficacement des raisonnements à la fois explicites (en termes d'éléments) et généraux dans la catégorie $\mathcal{F}$.

D'un autre côté, les catégories de foncteurs en grassmanniennes fournissent un cadre puissant pour mener des calculs cohomologiques dans la catégorie $\mathcal{F}$, à l'aide du foncteur d'intégrale $\omega : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r} \to \mathcal{F}$. On rappelle que $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ est la catégorie des foncteurs de but $\mathcal{E}$ et de source la catégorie des objets de $\mathcal{E}^f$ munis d'un sous-espace, et que ω est donné sur les objets par

$$\omega(X)(V) = \bigoplus_{W \subset V} X(V, W).$$

Ainsi, le théorème d'annulation cohomologique principal de [Dja06a] contient les lemmes techniques employés dans [Pow98a] pour contrôler des groupes d'extensions apparaissant dans l'étude du foncteur $P_{\mathbb{F}_2^2}$. De surcroît, le foncteur ω nous a permis, à l'aide des catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$, de donner une description conjecturale, la *conjecture artinienne extrêmement forte*, de la filtration de Krull $(\mathcal{K}_n(\mathcal{F}))$ de la catégorie $\mathcal{F}$, définie par $\mathcal{K}_{-1}(\mathcal{F}) = \{0\}$ et par le fait que, pour $n \geq 0$, $\mathcal{K}_n(\mathcal{F})/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{F})$ est la plus petite sous-catégorie épaisse et stable par colimites de $\mathcal{F}/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{F})$ qui en contient les objets simples. Le cœur du présent article est constitué par le résultat suivant, où $(\mathcal{N}il_{\tilde{\nabla}_n})$ est une filtration de la catégorie $\mathcal{F}$ par des sous-catégories épaisses définies à partir des foncteurs $\tilde{\nabla}_n$.

Théorème 1 (Théorème de simplicité généralisé)**.** *Pour tout entier $n \geq 0$, le foncteur $\omega_n : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \to \mathcal{F}$ induit une équivalence entre la sous-catégorie* *pleine des objets localement finis de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ et une sous-catégorie épaisse de $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_{n+1}}/\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$.*

Le théorème de simplicité de Powell énonce pour sa part que si X est un objet simple pseudo-constant de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$, alors l'image de $\omega_n(X)$ dans la catégorie $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_{n+1}}/\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$ est simple. Nous gagnons donc essentiellement le passage à un objet simple quelconque de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ et le contrôle des groupes d'extensions dans la catégorie quotient à partir des groupes d'extensions dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$.

La démonstration du théorème 1 utilise deux types d'ingrédients. D'une part apparaissent des considérations explicites relatives aux foncteurs $\tilde{\nabla}_n$, qui procèdent des mêmes idées que le théorème de simplicité de Powell. D'autre part, des propriétés d'annulation cohomologique du foncteur ω, fournies par le théorème principal de [Dja06a] et une variante en termes des foncteurs $\tilde{\nabla}_n$ établie dans la section 7, jouent un rôle significatif.

Une grande part de la riche structure de la catégorie de foncteurs en grassmanniennes $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ intervient dans le théorème de simplicité généralisé. Ainsi, la filtration par les sous-catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,\leq n}$ est omniprésente ; les propriétés cohomologiques du foncteur ω utilisées dans la démonstration reposent sur la description fonctorielle de ces catégories.

On emploie également de manière décisive la description en termes de comodules des catégories de foncteurs en grassmanniennes, dans un argument de stabilisation qui constitue la partie la plus concrète de la démonstration. Cet argument généralise de manière conceptuelle des considérations déjà utilisées par Powell. Quant à la description monadique des catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$, elle apparaît en filigrane dans les estimations des foncteurs composés $\tilde{\nabla}_n \omega_n$ (pour $n = 1$, c'est essentiellement le début de la résolution canonique qui intervient).

Comme conséquence du théorème de simplicité généralisé et des résultats de Powell sur les foncteurs annihilés par $\tilde{\nabla}_2$ (utilisés pour déterminer la structure de $P_{\mathbb{F}_2{}^2}$), nous donnons la contribution suivante à la conjecture artinienne :

Théorème 2. *Pour tout foncteur fini F de $\mathcal{F}$, le foncteur $P_{\mathbb{F}_2{}^2} \otimes F$ est noethérien de type 2 (i.e. noethérien et dans $\mathcal{K}_2(\mathcal{F})$).*

Plus généralement, grâce au théorème 1, la conjecture artinienne extrêmement forte est ramenée à un problème plus concret : montrer que les quotients de la filtration par $\tilde{\nabla}_n$-nilpotence de certains foncteurs sont oméga-adaptés d'une certaine hauteur, selon la terminologie introduite dans [Dja06a]. Cette filtration est définie par le noyau de flèches entièrement explicites (cf. [Pow98b]) ; son étude se trouve étroitement liée à des questions fines de représentations des groupes symétriques ou linéaires (sur $\mathbb{F}_2$). En effet, les partitions associées aux facteurs de composition des quotients de cette filtration sont contrôlées, le problème consiste donc d'une certaine façon à maîtriser les extensions entre les différents facteurs de composition possibles. Ce problème dérive essentiellement de la théorie des représentations ; c'est une sorte de générisation de la question (beaucoup plus élémentaire) suivante : déterminer les sous-représentations maximales d'un produit tensoriel de puissances extérieures de la représentation régulière d'un groupe symétrique dont tous les facteurs de composition correspondent à des partitions de longueur inférieure à un entier fixé.

Un autre résultat issu de l'étude conjointe des foncteurs $\tilde{\nabla}_n$ et ω, donné dans la section 8, s'exprime en termes de groupes de Grothendieck. On peut le formuler explicitement comme suit. Les facteurs de composition sont implicitement comptés avec multiplicité. On remarquera qu'un foncteur de type fini de $\mathcal{F}$ (ou plus généralement, prenant des valeurs de dimension finie) a en général un nombre infini de facteurs de composition, mais que chacun y a une multiplicité finie.

Théorème 3. *Soient X et Y deux objets finis de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$. Supposons que les objets $\omega(X)$ et $\omega(Y)$ de $\mathcal{F}$ ont les mêmes facteurs de composition. Alors X et Y ont les mêmes facteurs de composition.*

Ce théorème revêt une double importance. D'une part, il donne une description du groupe de Grothendieck $G_0^{tf}(\mathcal{F})$ des objets de type fini de la catégorie $\mathcal{F}$, en admettant la conjecture artinienne extrêmement forte. On en déduit ainsi le corollaire ci-dessous, où les catégories de foncteurs en grassmanniennes n'apparaissent pas. Ce corollaire illustre la puissance de la conjecture artinienne extrêmement forte, puisque le résultat qu'elle implique semble de la plus haute difficulté à atteindre même en admettant les formes renforcées de la conjecture artinienne émises avant la forme extrêmement forte.

Corollaire 4. *Si la conjecture artinienne extrêmement forte est vraie, alors la classe d'un objet de type fini de $\mathcal{F}$ dans le groupe de Grothendieck $G_0^{tf}(\mathcal{F})$ est déterminée par ses facteurs de composition.*

D'autre part, l'intérêt de la détermination de facteurs de composition significatifs dans des foncteurs du type $\omega(X)$, où X est un objet fini de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$, dépasse le seul cadre des groupes de Grothendieck : des considérations analogues sont utilisées dans l'article [Dja06a], qui établit le théorème 2 dans le cas particulier des puissances extérieures, sans recours aux catégories de foncteurs en grassmanniennes. Plus précisément, le principe du théorème 3, similaire à certains arguments de [Dja06a], consiste à étudier des facteurs de composition « significatifs » et raisonnablement détectables dans des foncteurs du type $\omega(X)$, où X est un objet fini de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$. Il s'agit de facteurs de composition associés à des partitions de longueur maximale présentant une certaine périodicité (une partition s'obtenant à partir d'une autre en ajoutant ou retranchant un entier à toutes ses parts). En effet, les foncteurs $\tilde{\nabla}_n$ sont adaptés à l'étude de ces facteurs de composition d'un foncteur $\omega(X)$, et ceux-ci caractérisent essentiellement l'objet X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$.

Les problèmes de représentations modulaires auxquels est liée la démarche du théorème 3 participent de la richesse de la structure globale de la catégorie $\mathcal{F}$. De fait, le résultat d'injectivité du théorème 3 s'obtient par des arguments qualitatifs hautement non explicites, de sorte que les facteurs de composition des foncteurs $\omega(X)$ restent difficiles à étudier de manière générale, même en se limitant aux facteurs « significatifs » évoqués plus haut.

Ce travail ne considère que le corps à deux éléments, d'une part pour en simplifier la partie technique (notamment en évitant le recours à la décomposition scalaire), d'autre part parce que les considérations non formelles relatives aux foncteurs annihilés par $\tilde{\nabla}_2$ ne se généralisent pas clairement : nous ne pouvons pas encore démontrer l'analogue du théorème 2 sur un corps fini arbitraire.

La plupart des résultats de cet article sont contenus dans la thèse de doctorat de l'auteur ([Dja]).

Notations, conventions et rappels utilisés dans tout l'article

Les notations et conventions générales de l'article [Dja06a] sont conservées ; nous ne rappelons que les plus usitées. D'autres notations sont rappelées dans la partie I.

1. Une *catégorie de Grothendieck* est une catégorie abélienne avec générateurs et colimites exactes. Une telle catégorie possède des enveloppes injectives.
2. Soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie localisante, i.e. épaisse et stable par colimites, d'une catégorie de Grothendieck $\mathcal{A}$.
   (a) La catégorie quotient [1] $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ est une catégorie de Grothendieck ; le foncteur canonique $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{C}$ est exact et commute aux colimites. On le notera quelquefois $\mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{C}$ sans plus de précisions.
   (b) Ce foncteur canonique possède un adjoint à droite, appelé *foncteur section*.
   (c) On dit qu'un objet X de $\mathcal{A}$ est $\mathcal{C}$*-fermé* si $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(C, X) = 0$ pour $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ et $i \in \{0, 1\}$.
   (d) On dit qu'un objet X de $\mathcal{A}$ est $\mathcal{C}$*-parfait* si $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{A}}(C, X) = 0$ pour tout objet C de $\mathcal{C}$. Le cas échéant, le foncteur canonique $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{C}$ induit un isomorphisme $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{A}}(A, X) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{A}/\mathcal{C}}(\pi(A), \pi(X))$ pour tout objet A de $\mathcal{A}$. Ce fait sera utilisé abondamment dans cet article, sans plus de précision.
3. La catégorie $\mathcal{F}$ est une catégorie de Grothendieck ; elle est monoïdale symétrique. Cela vaut plus généralement pour toute catégorie de foncteurs dont la source est essentiellement petite et le but est la catégorie d'espaces vectoriels $\mathcal{E}$.
4. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie monoïdale symétrique et X un objet de $\mathcal{A}$. Lorsqu'ils existent, les adjoints à droite et à gauche à l'endofoncteur $- \otimes X$ de $\mathcal{A}$ sont notés respectivement $\mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$ et $(- : X)_{\mathcal{A}}$; l'indice $\mathcal{A}$ sera souvent omis. Ces adjoints sont appelés respectivement *foncteur hom interne* et *foncteur de division* par X.
5. On note $\mathcal{F}^f$, $\mathcal{F}^{tf}$ et $\mathcal{F}^{df}$ respectivement les sous-catégories pleines des foncteurs finis (i.e. de longueur finie), de type fini et à valeurs de dimension finie de $\mathcal{F}$.
6. Dans la catégorie $\mathcal{F}$ (ou plus généralement une catégorie du type indiqué dans 3), le foncteur $\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F, -)$ est toujours défini, et $(- : F)_{\mathcal{F}}$ l'est dès que F appartient à $\mathcal{F}^{df}$.
7. Si G est un groupe fini et M un $\mathbb{F}_2[G]$-module fini [2], $\mathbf{Hom}(M, -)$ et $(- : M)$ existent et sont naturellement isomorphes au produit tensoriel par le module contragrédient M^* de M.
8. Si $\mathcal{A}$ est une catégorie de Grothendieck, on note $G_0^f(\mathcal{A})$ le groupe de Grothendieck des objets finis de $\mathcal{A}$.
9. L'espace vectoriel $\mathbb{F}_2{}^{\oplus n}$ est noté E_n.

[1] Nous renvoyons à [Gab62] pour ce qui concerne les catégories abéliennes quotients.

[2] Pour ce qui concerne la terminlogie et les propriétés élémentaires de théorie des représentations, nous renvoyons le lecteur à [CR90].

Première partie

Rappels

Nous rappelons succinctement quelques propriétés utiles des différentes catégories de foncteurs qui interviendront dans cet article.

1 La catégorie $\mathcal{F}$ et les endofoncteurs $\tilde{\nabla}_n$

Soit V un espace vectoriel de dimension finie. On rappelle que l'objet projectif (resp. injectif) standard de $\mathcal{F}$ associé à V est noté P_V (resp. I_V) ; le foncteur de décalage par V se note Δ_V, et Δ désigne le *foncteur différence* de $\mathcal{F}$. On a $\Delta_V \simeq \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(P_V, -) \simeq (- : I_V)_{\mathcal{F}}$, et $\Delta \simeq \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(\bar{P}, -) \simeq (- : \bar{I})_{\mathcal{F}}$, où $\bar{P}$ (resp. $\bar{I}$) désigne la partie sans terme constant de $P_{\mathbb{F}_2}$ (resp. $I_{\mathbb{F}_2}$).

1.1 Foncteurs polynomiaux et filtration polynomiale

On rappelle qu'un foncteur F de $\mathcal{F}$ est dit *polynomial* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta^n F = 0$, et *analytique* s'il est colimite de foncteurs polynomiaux. On note $\mathcal{F}^n$ la sous-catégorie pleine des foncteurs polynomiaux de degré au plus n de $\mathcal{F}$ (i.e. des foncteurs F tels que $\Delta^{n+1}F = 0$), et $\mathcal{F}_\omega$ la sous-catégorie pleine des foncteurs analytiques de $\mathcal{F}$. Un résultat de base de la théorie est que tous les foncteurs finis de $\mathcal{F}$ sont polynomiaux (cf. [Kuh94a]). Les considérations élémentaires que nous rappelons dans la suite de ce paragraphe sont détaillées dans [Pow98b], par exemple.

Le foncteur d'inclusion $\mathcal{F}^n \hookrightarrow \mathcal{F}$ admet un adjoint à droite noté $p_n : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^n$; explicitement, $p_n(F)$ est le plus grand sous-foncteur polynomial de $F \in \operatorname{Ob}\mathcal{F}$ de degré au plus n.

La filtration polynomiale du foncteur injectif standard $I_{\mathbb{F}_2}$, noté simplement I par la suite, est explicite : si l'on note

$$t_n = \sum_{l \in E_n^*} [l] \in \mathbb{F}_2[\hom(E_n, \mathbb{F}_2)] \tag{1}$$

et $t_n^* : I \to I_{E_n}$ le morphisme de $\mathcal{F}$ induit, la suite suivante est exacte :

$$0 \to p_{n-1}(I) \to I \xrightarrow{t_n^*} I_{E_n}. \tag{2}$$

Le résultat suivant joue un rôle fondamental dans le comportement des foncteurs $\tilde{\nabla}_n$ de Powell et des variantes que nous introduirons.

Lemme 1.1. *L'espace vectoriel* $(I/p_{n-1}(I))(E_i)$ *est de dimension* 0 *si* $i < n$ *et* 1 *si* $i = n$.

Dualement, le foncteur d'inclusion $\mathcal{F}^n \hookrightarrow \mathcal{F}$ admet un adjoint à gauche noté $q_n : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^n$; il envoie un foncteur sur son plus grand quotient polynomial de degré au plus n. Nous noterons $k_n(F)$, pour $F \in \operatorname{Ob}\mathcal{F}$, le noyau de l'épimorphisme canonique $F \twoheadrightarrow q_{n-1}(F)$. Le cas qui nous intéresse ici est dual de la filtration polynomiale de I : pour le projectif standard $P_{\mathbb{F}_2}$, noté simplement P par la suite, on peut décrire $k_n(P)$ de la façon suivante.

Si V est un objet de $\mathcal{E}^f$ et W un sous-espace de V, notons

$$s_W = \sum_{v \in W} [v] \in P(V).$$

Alors $k_n(P)(V)$ est le sous-espace vectoriel de $P(V)$ engendré par les éléments s_W, où W parcourt les sous-espaces de dimension n de V.

1.2 Les foncteurs simples de $\mathcal{F}$

Une manière classique de décrire les objets simples de la catégorie $\mathcal{F}$ consiste à employer les partitions d'un entier, qui apparaissent dans la théorie des représentations des groupes symétriques[3] (cf. [Jam78] à ce sujet).

Définition 1.2. 1. Une *partition* est une suite décroissante d'entiers $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ qui stationne en 0.

2. La *longueur* $l(\lambda)$ d'une partition λ est le plus grand entier tel que $\lambda_{l(\lambda)} > 0$. Si λ est identiquement nulle, on convient que $l(\lambda) = 0$. Par la suite, on identifiera une partition λ et le n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ si $n \geq l(\lambda)$.
3. Une partition λ est dite 2-*régulière* si $\lambda_i > \lambda_{i+1}$ pour $1 \leq i < l(\lambda)$; le corps de base étant fixé à $\mathbb{F}_2$, nous parlerons par la suite simplement de partition *régulière*.

   Nous désignerons par $\mathfrak{p}$ l'ensemble des partitions régulières.
4. Le *degré* d'une partition λ est l'entier positif $|\lambda| = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \lambda_i$. Une partition de $n \in \mathbb{N}$ est par définition une partition de degré n.
5. Si λ et μ sont deux partitions de même degré, nous noterons $\lambda \leq \mu$ si

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leq \sum_{i=1}^{n} \mu_i.$$

On rappelle que les foncteurs simples de $\mathcal{F}$ peuvent se paramétriser par les partitions régulières, à partir des représentations des groupes symétriques. Nous suivons ici les notations de [Pow00b], par exemple ; une présentation détaillée des foncteurs simples est donnée dans [PS98], mais cet article indexe les foncteurs simples de manière différente (par la partition *duale* de celle que nous utilisons).

Notation 1.3. On désigne par S_λ le foncteur simple associé à une partition régulière λ. On note I_λ l'enveloppe injective du foncteur S_λ.

Ainsi, S_λ est un foncteur polynomial de degré $|\lambda|$.

Une des propriétés fondamentales des objets simples de la catégorie $\mathcal{F}$ est la suivante :

Proposition 1.4. *Les corps d'endomorphismes des foncteurs simples S_λ sont réduits à $\mathbb{F}_2$: on dit que $\mathbb{F}_2$ est un* corps de décomposition *de la catégorie $\mathcal{F}$.*

[3] Une autre approche, suivie dans [Kuh94b], consiste à s'appuyer sur la théorie des représentations des groupes linéaires.

Cette proposition est démontrée dans [Kuh94b] à partir du résultat classique (que nous utiliserons également) selon lequel $\mathbb{F}_2$ est un corps de décomposition de la catégorie des GL_n-modules (on note GL_n pour $GL_n(\mathbb{F}_2)$).

Une conséquence formelle de la proposition 1.4 est qu'on peut calculer la multiplicité, notée $m_\lambda(F)$, d'un foncteur simple S_λ dans un foncteur F, supposé à valeurs de dimension finie (pour assurer la finitude de cette multiplicité), par la formule

$$m_\lambda(F) = \dim_{\mathbb{F}_2} \hom_{\mathcal{F}}(F, I_\lambda).$$

Notation 1.5. Étant donnés une partition régulière λ et un foncteur $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}$, nous abrégerons l'assertion S_λ *est facteur de composition* (i.e. sous-quotient) *de* F en $\lambda \vdash F$.

Le théorème suivant résume les propriétés fondamentales des facteurs de composition du produit tensoriel, noté Λ^λ, des puissances extérieures Λ^{λ_i}. Il est l'analogue de propriétés classiques des modules de Specht dans le contexte des groupes symétriques (cf. [Jam78]) ; une démonstration dans le cadre de la catégorie $\mathcal{F}$ est donnée dans l'article [Kuh94b] de Kuhn (on prendra garde au fait que cet article emploie des conventions différentes des nôtres dans l'indexation des foncteurs simples).

Théorème 1.6. *Les facteurs de composition de Λ^λ, où λ est une partition de longueur r de $n \in \mathbb{N}$, sont :*
- *les S_μ, où μ parcourt les partitions régulières de n telles que $\mu \geq \lambda$,*
- *des simples du type S_μ avec $|\mu| < n$, $l(\mu) < r$, $\mu_1 \geq \lambda_1$ et $\mu_{r-1} \leq \lambda_r$.*

En outre, S_λ est facteur de composition unique de Λ^λ.

Nous rappelons maintenant un résultat fondamental dont on dispose sur les produits tensoriels.

Définition 1.7. Soient λ et μ deux partitions de longueurs respectives n et r. Nous appellerons *partition concaténée* de λ et μ la partition obtenue en réordonnant la suite d'entiers $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_r)$; elle sera notée (λ, μ).

Proposition 1.8 (Kuhn)**.** *Soient λ et μ des partitions régulières telles que la partition (λ, μ) soit régulière. Alors $m_{(\lambda,\mu)}(S_\lambda \otimes S_\mu) = 1$.*

Cette proposition est le théorème 6.17.2 de [Kuh94b].

La proposition suivante, également démontrée dans [Kuh94b], établit le lien entre les objets simples de $\mathcal{F}$ et les représentations simples des groupes linéaires.

Proposition 1.9 (Kuhn)**.** *Soient λ une partition régulière et $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Si $n = \lambda_1$, alors $S_\lambda(E_n)$ est un $\mathbb{F}_2[GL_n]$-module à gauche simple ; nous le noterons R_λ.*
2. *Les R_μ forment un système complet de représentants des $\mathbb{F}_2[GL_n]$-modules simples lorsque μ parcourt les éléments de $\mathfrak{p}$ tels que $\mu_1 = n$.*
3. *Le $\mathbb{F}_2[GL_n]$-module $S_\lambda(E_n)$ est nul si $\lambda_1 > n$, égal à R_λ si $\lambda_1 = n$ et isomorphe à $R_{(n,\lambda_1,\lambda_1,\ldots,\lambda_r)}$ (où $r = l(\lambda)$) si $\lambda_1 < n$.*

Nous conserverons, dans la suite, la notation R_λ ; nous désignerons par $m_{R_\lambda}(M)$ la multiplicité de ce module simple dans un GL_n-module M.

1.3 Les foncteurs $\tilde{\nabla}_n : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ de Powell

On prendra garde que les foncteurs notés $\tilde{\nabla}_n$ sont les **duaux** de ceux introduits dans [Pow98b] par Powell, à qui sont dus tous les résultats de ce paragraphe : si l'on note $\tilde{\nabla}_n^{Pow}$ les foncteurs $\tilde{\nabla}_n$ de [Pow98b], nos foncteurs $\tilde{\nabla}_n$ satisfont des isomorphismes de dualité $D\circ\tilde{\nabla}_n \simeq \tilde{\nabla}_n^{Pow}\circ D$ et $D\circ\tilde{\nabla}_n^{Pow} \simeq \tilde{\nabla}_n\circ D$, où D désigne le foncteur de dualité de $\mathcal{F}$. Il n'en résultera aucune confusion par la suite, car nous n'utiliserons jamais les foncteurs $\tilde{\nabla}_n^{Pow}$, adaptés à l'étude de foncteurs analytiques, tandis que nous traiterons de foncteurs co-analytiques.

Définition 1.10. Étant donné un entier $n > 0$, on note $\tilde{\nabla}_n$ l'endofoncteur de $\mathcal{F}$ noyau de la transformation naturelle $\Delta_{\mathbb{F}_2} \simeq (- : I) \twoheadrightarrow (- : p_{n-1}(I))$ induite par l'inclusion $p_{n-1}(I) \hookrightarrow I$.

Remarque 1.11. Le foncteur $\tilde{\nabla}_n$ préserve les foncteurs à valeurs de dimension finie et les foncteurs de type fini.

Proposition 1.12.
1. *Le foncteur $\tilde{\nabla}_n$ est additif ; il conserve les injections et les surjections.*
2. *Deux foncteurs $\tilde{\nabla}_n$ et $\tilde{\nabla}_m$ (où $m \in \mathbb{N}$) commutent toujours (à isomorphisme naturel près) ; en particulier, le foncteur $\tilde{\nabla}_n$ commute au foncteur différence.*

Proposition 1.13. *Il existe dans $\mathcal{F}$ un isomorphisme $\tilde{\nabla}_n(P_V) \simeq k_n(P)(V^*) \otimes P_V$ naturel en l'espace vectoriel de dimension finie V. En particulier, $\tilde{\nabla}_n(P_{E_n}) \simeq P_{E_n}$ et $\tilde{\nabla}_n(P_{E_k}) = 0$ pour $k < n$.*

Les propositions 1.12 et 1.13 sont démontrées dans [Pow98b].

Notation 1.14.
1. Si λ est une partition de longueur r, nous noterons λ_- la partition de longueur $\leq r$ définie par $(\lambda_-)_i = \lambda_i - 1$ pour $1 \leq i \leq r$.
2. Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ est une suite finie d'entiers et $a \in \mathbb{N}$, on notera $\alpha_{+a} = (\alpha_1 + a, \dots, \alpha_k + a)$. Cette notation est étendue au cas où α est une partition, en prenant $k = l(\alpha)$ (longueur de la partition α).

L'un des grands intérêts des foncteurs $\tilde{\nabla}_n$, qui explique leur efficacité dans de nombreux calculs explicites sur les foncteurs simples, réside dans le résultat suivant, établi dans le § 4.3 de [Pow98b].

Proposition 1.15. *Soit λ une partition régulière.*
1. *Le foncteur $\tilde{\nabla}_n(S_\lambda)$ est nul si et seulement si $l(\lambda) < n$.*
2. *Supposons λ de longueur n. On a $\tilde{\nabla}_n(S_\lambda) \simeq S_{\lambda_-}$.*

Proposition et définition 1.16. *La sous-catégorie pleine des foncteurs $\tilde{\nabla}_n$-nilpotents de $\mathcal{F}$ (i.e. des foncteurs F tels qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $(\tilde{\nabla}_n)^k(F) = 0$) est épaisse. On la note $\mathcal{N}il_{\tilde{\nabla}_n}$.*

Nous désignerons par $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$ la plus petite sous-catégorie localisante de $\mathcal{F}$ contenant $\mathcal{N}il_{\tilde{\nabla}_n}$.

C'est le théorème 4.2.3 de [Pow98b] (l'hypothèse d'analycité imposée par Powell aux foncteurs $\tilde{\nabla}_n$-nilpotents n'intervient pas dans la démonstration).

La conjecture suivante, discutée par Powell dans [Pow00a], § 3, est une variante forte de la conjecture artinienne.

Conjecture 1.17. *Un objet de type fini de $\mathcal{F}$ est noethérien de type $n-1$ si et seulement s'il est $\tilde{\nabla}_n$-nilpotent.*

Nous terminons ce paragraphe par un résultat concernant les produits tensoriels. Il est démontré dans [Pow01] (théorème 1), article qui précise en quoi la notion de $\tilde{\nabla}_n$-nilpotence fournit une « bonne » notion de dimension dans $\mathcal{F}$.

Proposition 1.18. *Le produit tensoriel d'un foncteur $\tilde{\nabla}_n$-nilpotent et d'un foncteur $\tilde{\nabla}_m$-nilpotent (où $m \in \mathbb{N}$) est $\tilde{\nabla}_{n+m-1}$-nilpotent. En particulier, le produit tensoriel d'un foncteur $\tilde{\nabla}_n$-nilpotent et d'un foncteur fini est $\tilde{\nabla}_n$-nilpotent.*

2 La catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ et le foncteur ω

Nous rappelons ici les définitions et propriétés des catégories de foncteurs en grassmanniennes que nous utiliserons le plus fréquemment par la suite. Nous renvoyons le lecteur à [Dja06a] pour les détails.

On rappelle qu'une convention générale consiste à omettre les indices ou exposants désignant une partie de $\mathbb{N}$ lorsque celle-ci est égale à $\mathbb{N}$ tout entier.

2.1 Définitions

Une première famille de catégories et de foncteurs auxiliaires est donnée comme suit.

Définition 2.1.
1. La catégorie $\mathcal{E}^f_{surj}$ est la sous-catégorie de $\mathcal{E}^f$ qui a les mêmes objets et dont les morphismes sont les épimorphismes de $\mathcal{E}^f$.
2. La catégorie $\mathcal{F}_{surj}$ est la catégorie de foncteurs $\mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f_{surj}, \mathcal{E})$.
3. On note $o : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{surj}$ le foncteur d'oubli, i.e. de précomposition par l'inclusion $\mathcal{E}^f_{surj} \hookrightarrow \mathcal{E}^f$.
4. Le foncteur $\varpi : \mathcal{F}_{surj} \to \mathcal{F}$ est donné sur les objets par
$$\varpi(X)(V) = \bigoplus_{W \in \mathcal{G}r(V)} X(W).$$
5. Si I est une partie de $\mathbb{N}$, on note $\mathcal{E}^I_{surj}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}^f_{surj}$ des espaces vectoriels dont la dimension appartient à I, et l'on pose $\mathcal{F}^I_{surj} = \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^I_{surj}, \mathcal{E})$.

Lorsque I est une partie réduite à un élément n, la catégorie $\mathcal{F}^n_{surj}$ est équivalente à celle des $\mathbb{F}_2[GL_n]$-modules à gauche, notée ${}_{\mathbb{F}_2[GL_n]}\mathbf{Mod}$; nous utiliserons souvent cette identification tacitement.

Rappelons que l'on dispose d'un foncteur de prolongement par zéro ${}_{\mathbb{F}_2[GL_n]}\mathbf{Mod} \simeq \mathcal{F}^n_{surj} \to \mathcal{F}_{surj}$; l'image par le foncteur composé ${}_{\mathbb{F}_2[GL_n]}\mathbf{Mod} \to \mathcal{F}_{surj} \xrightarrow{\varpi} \mathcal{F}$ d'un GL_n-module simple R_λ, où λ est une partition régulière telle que $\lambda_1 = n$ (cf. proposition 1.9) sera notée Q_λ et est appelée *foncteur de Powell* associé à λ. Un cas particulier fondamental est celui d'une partition à un terme (n) ; $Q_{(n)}$ est noté aussi $\bar{G}(n)$.

Nous introduisons maintenant les catégories de foncteurs en grassmanniennes.

Définition 2.2. 1. La catégorie $\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r}$ est la catégorie dont les objets sont les couples (V, W), où $V \in \operatorname{Ob}\mathcal{E}^f$ et $W \in \mathcal{G}r(V)$, et dont les morphismes $(V, W) \to (V', W')$ sont les applications linéaires $f : V \to V'$ telles que $f(W) = W'$.

2. On note $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ la catégorie de foncteurs $\mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r}, \mathcal{E})$.

3. Si I est une partie de $\mathbb{N}$, on note $\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r,I}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r}$ dont les objets sont les couples (V, W) pour lesquels $\dim W \in I$, et l'on note $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$ la catégorie $\mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r,I}, \mathcal{E})$.

Les catégories de type $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$ que nous utiliserons seront surtout les $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ et les $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,\leq n}$. On rappelle que celles-ci peuvent se voir comme des sous-catégories épaisses de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ via le foncteur de prolongement par zéro. En général, lorsqu'il est défini, le foncteur de prolongement par zéro $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I} \to \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,J}$ (pour $I \subset J \subset \mathbb{N}$) est noté $\mathcal{P}_{I,J}$, tandis que le foncteur de restriction $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,J} \to \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$ est noté $\mathcal{R}_{J,I}$.

Les objets projectifs et injectifs standard de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,J}$ sont notés à l'aide des symboles $P^{\mathcal{G}r,J}_A$ et $I^{\mathcal{G}r,J}_A$ respectivement, où A est l'objet de $\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r,J}$ auquel ils sont associés. Dans la catégorie $\mathcal{F}_{surj}$, on emploie des notations du type P^{surj}_V et I^{surj}_V.

Définition 2.3. On appelle *niveau* d'un objet X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$ l'élément

$$\operatorname{niv}(X) = sup\,\{\dim W \mid (V, W) \in \operatorname{Ob}\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r,I}\ \ X(V, W) \neq 0\}$$

de $I \cup \{-\infty, +\infty\}$. On dit que X est de *niveau fini* si $\operatorname{niv}(X) < +\infty$.

On définit de même le *coniveau* de X comme l'élément

$$\operatorname{coniv}(X) = inf\,\{\dim W \mid (V, W) \in \operatorname{Ob}\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r,I}\ \ X(V, W) \neq 0\}$$

de $I \cup \{+\infty\}$.

Nous donnons à présent une liste de foncteurs exacts fondamentaux entre les catégories précédentes. Soit $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}^I_{surj}$ la catégorie $\mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f \times \mathcal{E}^I_{surj}, \mathcal{E})$. On note :

- $\iota_I : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$ le foncteur donné par $\iota_I(F)(V, W) = F(V)$;
- $\kappa_I : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$ le foncteur donné par $\kappa_I(F)(V, W) = F(V/W)$;
- $\rho_I : \mathcal{F}^I_{surj} \to \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$ le foncteur donné par $\rho_I(A)(V, W) = A(W)$;
- $\varepsilon_I : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I} \to \mathcal{F}^I_{surj}$ le foncteur donné par $\varepsilon_I(X)(V) = X(V, V)$;
- $\xi_I : \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}^I_{surj} \to \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$ le foncteur donné par $\xi_I(F)(V, W) = F(V, W)$;
- $\theta_I : \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}^I_{surj} \to \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$ le foncteur donné par $\theta_I(F)(V, W) = F(V/W, W)$;
- $\sigma_I : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I} \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}^I_{surj}$ le foncteur donné par $\sigma_I(X)(A, B) = X(A \oplus B, B)$;
- $\omega : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r} \to \mathcal{F}$ le foncteur d'*intégrale en grassmanniennes*, donné par

$$\omega(X)(V) = \bigoplus_{W \in \mathcal{G}r(V)} X(V, W).$$

On a ainsi des isomorphismes canoniques $\omega \circ \rho \simeq \varpi$ et $\varepsilon \circ \iota \simeq o$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\omega_n : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \to \mathcal{F}$ le foncteur composé du prolongement par zéro $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \to \mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ et de $\omega : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r} \to \mathcal{F}$.

Les *foncteurs de décalage* de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$ sont les endofoncteurs $\Delta^{\mathcal{G}r,I}_V$ de cette catégorie, où $V \in \operatorname{Ob}\mathcal{E}^f$, donnés par $\Delta^{\mathcal{G}r,I}_V(X)(A, B) = X(V \oplus A, B)$.

Le *foncteur différence* $\Delta^{\mathcal{G}r,I}$ de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$ est donné par le scindement naturel $\Delta^{\mathcal{G}r,I}_{\mathbb{F}_2} \simeq \Delta^{\mathcal{G}r,I} \oplus id$; son noyau égale l'image essentielle de $\rho_I : \mathcal{F}^I_{surj} \to \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$, ses objets sont appelés *foncteurs pseudo-constants*.

On définit comme dans $\mathcal{F}$ la notion de *foncteur polynomial* ou *analytique*.

2.2 Propriétés

Dans la proposition fondamentale suivante, on note **Comod** les catégories de comodules ; la structure comultiplicative sur $\mathbb{F}_2[\mathcal{G}r]$ est duale de celle d'une algèbre de Boole.

Proposition 2.4. *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Le foncteur ω est adjoint à gauche à ι. Il induit une équivalence de catégories entre $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ et la sous-catégorie $\mathbf{Comod}_{\Bbbk[\mathcal{G}r]}$ de $\mathcal{F}$.*
2. *Le foncteur ω_n induit une équivalence de catégories entre $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ et la sous-catégorie $\mathbf{Comod}^{fid}_{\bar{G}(n)}$ de $\mathcal{F}$ des $\bar{G}(n)$-comodules* fidèles, *i.e. dont la comultiplication est injective.*
3. *On a un isomorphisme*
$$\omega_I(X \otimes \iota_I(F)) \simeq \omega_I(X) \otimes F$$
naturel en les objets X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$ et F de $\mathcal{F}$, où $I = \mathbb{N}$ ou n.

Les deux propositions qui suivent donnent les résultats fondamentaux sur les objets finis des catégories de foncteurs en grassmanniennes.

Proposition 2.5. *Les foncteurs finis de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$ sont polynomiaux.*

Proposition 2.6. *Soit I une partie non vide de $\mathbb{N}$.*

1. *Étant donné un objet X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$, les assertions suivantes sont équivalentes :*
   (a) *l'objet X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$ est simple ;*
   (b) *l'objet $\sigma_I(X)$ de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}^I_{surj}$ est simple ;*
   (c) *il existe un objet simple F de $\mathcal{F}$ et un objet simple R de $\mathcal{F}^I_{surj}$ tel que X est isomorphe à $\kappa_I(F) \otimes \rho_I(R)$.*
2. *Les foncteurs exacts $\sigma_I : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I} \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}^I_{surj}$ et θ_I induisent des isomorphismes d'anneaux (sans unité si I est infini) entre $G^f_0(\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I})$ et $G^f_0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}^I_{surj}) \simeq G^f_0(\mathcal{F}) \otimes G^f_0(\mathcal{F}^I_{surj})$ réciproques l'un de l'autre.*
3. *Le foncteur exact $\xi_I : \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}^I_{surj} \to \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$ induit un isomorphisme entre les groupes $G^f_0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}^I_{surj})$ et $G^f_0(\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I})$.*

Nous donnons maintenant des propriétés relatives aux foncteurs de division.

Proposition 2.7. *Soit I une partie de $\mathbb{N}$.*

1. *Le foncteur $\rho_I : \mathcal{F}^I_{surj} \to \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$ est adjoint à gauche à ε_I.*
2. *Il existe dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$ un isomorphisme canonique $(\rho_I(A) : X) \simeq \rho_I(A : \varepsilon_I(X))$ pour $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}^I_{surj}$, et $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$ à valeurs de dimension finie.*

Proposition 2.8. *Il existe dans $\mathcal{F}$ un isomorphisme $\omega(X : \iota(F)) \simeq (\omega(X) : F)$ naturel en les objets X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ et F de $\mathcal{F}^{df}$. On a un résultat analogue dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,\leq n}$.*

Une partie de la structure élémentaire de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ dépend de l'isomorphisme naturel suivant :

$$\iota(I_V) \simeq \bigoplus_{W \in \mathcal{G}r(V)} I^{\mathcal{G}r}_{(V,W)} \qquad (V \in \operatorname{Ob} \mathcal{E}^f). \tag{3}$$

Proposition 2.9. *Il existe un isomorphisme*

$$(X : \iota(I_V))(A,B) \simeq \bigoplus_{\substack{C \in \mathcal{G}r(V \oplus A) \\ im\,(C \hookrightarrow V \oplus A \twoheadrightarrow A) = B}} X(V \oplus A, C)$$

naturel en les objets V de $\mathcal{E}^f$, (A,B) de $\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r}$ et X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$.

De plus, pour tout $W \in \mathcal{G}r(V)$, le monomorphisme scindé naturel $(X : I^{\mathcal{G}r}_{(V,W)}) \hookrightarrow (X : \iota(I_V))$ induit par l'épimorphisme scindé $\iota(I_V) \twoheadrightarrow I^{\mathcal{G}r}_{(V,W)}$ fourni par l'isomorphisme (3) *identifie $(X : I^{\mathcal{G}r}_{(V,W)})(A,B)$ au sous-espace*

$$\bigoplus_{\substack{C \in \mathcal{G}r(V \oplus A) \\ im\,(C \hookrightarrow V \oplus A \twoheadrightarrow A) = B \\ im\,(C \hookrightarrow V \oplus A \twoheadrightarrow W) = W}} X(V \oplus A, C)$$

de $(X : \iota(I_V))(A,B)$.

Cette proposition est sous-tendue par l'isomorphisme naturel suivant :

$$I^{\mathcal{G}r}_{(A,B)} \otimes I^{\mathcal{G}r}_{(A',B')} \simeq \bigoplus_{C \in Gr(B,B')} I^{\mathcal{G}r}_{(A \oplus A', C)}, \tag{4}$$

où (A,B) et (A',B') sont des objets de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$, et l'on a noté $Gr(B,B')$ l'ensemble des $C \in \mathcal{G}r(B \oplus B')$ tels que les applications linéaires $C \hookrightarrow B \oplus B' \twoheadrightarrow B$ et $C \hookrightarrow B \oplus B' \twoheadrightarrow B'$ soient surjectives.

Lemme 2.10. *Soient (V,W) et (A,B) deux objets de $\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r}$. L'unique morphisme non nul $i_{(A,B)} : \mathbb{F}_2 \to I^{\mathcal{G}r}_{(A,B)}$ induit, par tensorisation par $I^{\mathcal{G}r}_{(V,W)}$, un morphisme*

$$I^{\mathcal{G}r}_{(V,W)} \to I^{\mathcal{G}r}_{(V,W)} \otimes I^{\mathcal{G}r}_{(A,B)} \simeq \bigoplus_{W' \in Gr(W,B)} I^{\mathcal{G}r}_{(V \oplus A, W')}$$

(cf. isomorphisme (4)*) dont les composantes $I^{\mathcal{G}r}_{(V,W)} \to I^{\mathcal{G}r}_{(V \oplus A, W')}$ sont induites par la projection $V \oplus A \twoheadrightarrow V$.*

Démonstration. La composante $I^{\mathcal{G}r}_{(V,W)} \to I^{\mathcal{G}r}_{(V \oplus A, W')}$ de $i_{(A,B)} \otimes I^{\mathcal{G}r}_{(V,W)}$ s'obtient par application du foncteur $E \mapsto \mathbb{F}_2{}^E : \mathbf{Ens}^{op} \to \mathcal{E}$ à la transformation naturelle

$$\hom_{\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r}}(\cdot,(V \oplus A, W')) \hookrightarrow \hom_{\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r}}(\cdot,(V,W)) \times \hom_{\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r}}(\cdot,(A,B)) \twoheadrightarrow \hom_{\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r}}(\cdot,(V,W)),$$

qui est induite par la projection $V \oplus A \twoheadrightarrow V$, d'où le lemme. □

Nous utiliserons le théorème d'annulation cohomologique fondamental de [Dja06a] via sa conséquence suivante :

Proposition 2.11. *Soient k et n deux entiers naturels, X un objet analytique de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,k}$ et Y un objet quelconque de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$.*

1. *Si $k < n$, alors $\operatorname{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\omega_k(X), \omega_n(Y)) = 0$.*
2. *Si $k = n$, alors le morphisme naturel $\operatorname{Ext}^*_{\mathcal{G}r,n}(X,Y) \to \operatorname{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\omega_n(X), \omega_n(Y))$ induit par ω_n est un isomorphisme.*

2.3 Foncteurs oméga-adaptés

Soit $n \in \mathbb{N}$. La sous-catégorie pleine des foncteurs *oméga-adaptés de hauteur au plus n* de $\mathcal{F}$, notée $\mathcal{F}^{\omega-ad(n)}$ est la plus petite sous-catégorie qui contient tous les foncteurs du type $\omega(X)$, où $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ est fini et de niveau au plus n, et qui vérifie la propriété suivante : si $0 \to F \to G \to H \to 0$ est une suite exacte de $\mathcal{F}$ telle que deux des foncteurs F, G et H appartiennent à $\mathcal{F}^{\omega-ad(n)}$, il en est de même pour le troisième.

Conjecture 2.12 (Conjecture artininenne extrêmement forte)**.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la sous-catégorie $\mathcal{F}^{\omega-ad(n)}$ de $\mathcal{F}$ est stable par quotients.*

Cet énoncé revient à dire que le foncteur ω_n induit une équivalence entre la sous-catégorie pleine $\mathcal{F}^{lf}_{\mathcal{G}r,n}$ des objets localement finis de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ et le sous-quotient $\mathcal{K}_n(\mathcal{F})/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{F})$ de la filtration de Krull de $\mathcal{F}$.

La proposition suivante constitue une variante des arguments de la section 12 de [Dja06a].

Proposition 2.13. *Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que les sous-catégories $\mathcal{F}^{\omega-ad(i)}$ de $\mathcal{F}$ sont stables par quotient pour $i \leq n$. Alors le foncteur ω_n induit une équivalence entre la sous-catégorie pleine $\mathcal{F}^{f}_{\mathcal{G}r,n}$ des objets finis de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ et la catégorie quotient $\mathcal{F}^{\omega-ad(n)}/\mathcal{F}^{\omega-ad(n-1)}$. De plus, si X est un objet de $\mathcal{F}^{f}_{\mathcal{G}r,n}$, alors $\omega_n(X)$ est un objet noethérien de type n de $\mathcal{F}$.*

En termes des foncteurs $\tilde{\nabla}_n$, la conjecture naturelle relative aux foncteurs oméga-adaptés est la suivante.

Conjecture 2.14. *Un objet de type fini de $\mathcal{F}$ est oméga-adapté de hauteur au plus $n-1$ si et seulement s'il est $\tilde{\nabla}_n$-nilpotent.*

Cette conjecture est équivalente à la conjecture artinienne extrêmement forte. Cela provient de l'épaisseur de $\mathcal{N}il_{\tilde{\nabla}_n}$, de la non $\tilde{\nabla}_n$-nilpotence des foncteurs $\omega_n(X)$ pour $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ non nul et de la $\tilde{\nabla}_n$-nilpotence des foncteurs $\omega_i(X)$ pour $i < n$ et $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,i}$ fini, que nous démontrerons à la section 6.

Les conjectures 2.12 et 2.14 impliquent également la conjecture 1.17.

Deuxième partie
La catégorie $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$

Cette partie démontre une forme partielle de la conjecture artinienne extrêmement forte, pour le quotient $\mathcal{K}_1(\mathcal{F})/\mathcal{K}_0(\mathcal{F})$ (section 3), qui est ensuite discutée dans la section 4.

L'essentiel des résultats de ce paragraphe ont été déjà établis par un biais différent par Powell, dans [Pow00b], généralisant les théorèmes obtenus par Piriou dans [Pir97] à l'aide de méthodes plus directes.

La démarche présentée dans cette partie présente un double intérêt : d'une part, elle précise les résultats de Powell, d'autre part, elle constitue une introduction à la démonstration du théorème de simplicité généralisée (théorème 9.7), dont elle contient toutes les idées conceptuelles, hormis l'emploi des foncteurs $\tilde{\nabla}_n$, remplacés par le foncteur exact Δ, ce qui en simplifie nettement la partie technique.

3 Le théorème principal

On rappelle que $\mathcal{F}^{lf}_{\mathcal{G}r,1} = \mathcal{K}_0(\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1})$ est la sous-catégorie pleine des objets localement finis de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}$. Le fait que les objets finis de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}$ soient de présentation finie (cf. [Dja06a]) implique en effet formellement que la sous-catégorie des objets localement finis de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}$ est épaisse ; de même, $\mathcal{F}_\omega = \mathcal{K}_0(\mathcal{F})$.

Le but de cette section est d'établir le résultat suivant :

Théorème 3.1. *Le foncteur*

$$\overline{\omega}_1 : \mathcal{F}^{lf}_{\mathcal{G}r,1} \hookrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1} \xrightarrow{\omega_1} \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$$

induit une équivalence entre la catégorie $\mathcal{F}^{lf}_{\mathcal{G}r,1}$ et une sous-catégorie localisante de $\mathcal{K}_1(\mathcal{F})/\mathcal{K}_0(\mathcal{F}) = \mathcal{K}_1(\mathcal{F})/\mathcal{F}_\omega$. En particulier, il envoie un foncteur simple de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}$ sur un objet simple de $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$.

En termes de foncteurs oméga-adaptés, ce théorème prend la forme suivante :

Corollaire 3.2. *La sous-catégorie $\mathcal{F}^{\omega-ad(1)}$ de $\mathcal{F}$ est épaisse ; ses objets sont des foncteurs noethériens de type* 1.

De plus, le foncteur ω_1 induit une équivalence entre la sous-catégorie pleine des objets finis de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}$ et la catégorie $\mathcal{F}^{\omega-ad(1)}/\mathcal{F}^f$.

Le théorème 3.1 redonne les résultats principaux de l'article [Pow00b] de Powell et les précise. Nous y reviendrons dans la section 4.

Remarque 3.3. Il semble en revanche très difficile de prouver que tous les objets simples de $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$ sont oméga-adaptés de hauteur 1 sans avoir démontré une version forte de la conjecture artinienne.

Avant de démontrer le théorème 3.1, nous établissons des résultats préliminaires décrivant le comportement du foncteur différence sur l'image par ω_1 d'un foncteur fini de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}$.

Notation 3.4. Soit X un objet de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}$. Nous désignerons par $\pi_X : \Delta\omega_1(X) \to \omega_1(X)$ le morphisme donné sur $V \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{E}^f$ par la composée

$$\Delta\omega_1(X)(V) \hookrightarrow \widetilde{\Delta}\omega_1(X)(V) = \omega_1(X)(V \oplus \mathbb{F}_2) = \bigoplus_{(v,t)\in(V\oplus\mathbb{F}_2)\setminus\{0\}} X(V\oplus\mathbb{F}_2, (v,t))$$

$$\twoheadrightarrow \bigoplus_{v\in V\setminus\{0\}} X(V \oplus \mathbb{F}_2, (v,1)) \twoheadrightarrow \bigoplus_{v\in V\setminus\{0\}} X(V,v) = \omega_1(X)(V),$$

où la dernière flèche est induite par la projection $V \oplus \mathbb{F}_2 \twoheadrightarrow V$.

Si k est un entier naturel et X un objet de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}$, nous noterons $\pi^k_X : \Delta^k\omega_1(X) \to \omega_1(X)$ le morphisme $\pi_X \circ \Delta\pi_X \circ \cdots \circ \Delta^{k-1}\pi_X$; par convention, $\pi^0_X = id_X$.

Ces notations seront utilisées uniquement dans cette section.

Dans la suite de cette section, la catégorie $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}^1_{surj}$ but de σ_1 est identifiée à $\mathcal{F}$.

Lemme 3.5. *Soit X un objet de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}$.*

1. *On a un isomorphisme naturel* $\Delta\omega_1(X) \simeq \sigma_1(X) \oplus \omega_1(\Delta^{\mathcal{G}r,1}X) \oplus \omega_1\iota_1\sigma_1(X)$.

2. *À travers cet isomorphisme, $\pi_X : \Delta\omega_1(X) \to \omega_1(X)$ se lit comme la composée de la projection $\sigma_1(X) \oplus \omega_1(\Delta^{\mathcal{G}r,1}X) \oplus \omega_1\iota_1\sigma_1(X) \twoheadrightarrow \omega_1\iota_1\sigma_1(X)$ et du morphisme obtenu en appliquant ω_1 à la coünité de l'adjonction $\iota_1\sigma_1(X) \to X$.*
3. *Le morphisme π_X est surjectif.*
4. *Si X est fini de degré $d \geq 0$, $\ker \pi_X$ est la somme directe d'un objet fini de $\mathcal{F}$ et de l'image par ω_1 d'un objet fini de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}$ de degré strictement inférieur à d.*
5. *Soient V un espace vectoriel de dimension finie, l une forme linéaire non nulle sur V et $x = (x_v)_{v \in V \setminus \{0\}}$ ($x_v \in X(V, v)$) un élément de $\omega_1(X)(V)$. Notons $a_x : P_V \to \omega_1(X)$ le morphisme de $\mathcal{F}$ représenté par x. Alors l'élément (y_v) de $\omega_1(X)(V)$ représenté par le morphisme*
$$P_V \xrightarrow{u \mapsto [l] \otimes u} \mathbb{F}_2[V^* \setminus \{0\}] \otimes P_V \simeq \Delta P_V \xrightarrow{\Delta a_x} \Delta\omega_1(X) \xrightarrow{\pi_X} \omega_1(X)$$
est donné par $y_v = l(v)x_v$.

Démonstration. La décomposition ensembliste
$$\mathcal{G}r_1(V \oplus \mathbb{F}_2) = \{(0,1)\} \sqcup \{(v,0) \,|\, v \in V \setminus \{0\}\} \sqcup \{(v,1) \,|\, v \in V \setminus \{0\}\}$$
et l'isomorphisme naturel
$$\bigoplus_{v \in V \setminus \{0\}} X(V \oplus \mathbb{F}_2, (v,1)) \simeq \bigoplus_{v \in V \setminus \{0\}} X(V \oplus \mathbb{F}_2, (0,1))$$
induit par les isomorphismes $(V \oplus \mathbb{F}_2, (v,1)) \xrightarrow{\simeq} (V \oplus \mathbb{F}_2, (0,1))$, $\quad (x,t) \mapsto (x + tv, t)$ fournissent un isomorphisme naturel
$$\widetilde{\Delta}\omega_1(X) \simeq \sigma_1(X) \oplus \omega_1(\widetilde{\Delta}^{\mathcal{G}r,1}X) \oplus \omega_1\iota_1\sigma_1(X).$$
L'inclusion canonique $\omega_1(X) \hookrightarrow \widetilde{\Delta}\omega_1(X)$ se lit dans cet isomorphisme comme $\omega_1(X) \hookrightarrow \omega_1(\widetilde{\Delta}^{\mathcal{G}r,1}X) \hookrightarrow \sigma_1(X) \oplus \omega_1(\widetilde{\Delta}^{\mathcal{G}r,1}X) \oplus \omega_1\iota_1\sigma_1(X)$, d'où le premier point.

Pour tout $v \in V \setminus \{0\}$, la composée $X(V \oplus \mathbb{F}_2, (0,1)) \xrightarrow{\simeq} X(V \oplus \mathbb{F}_2, (v,1)) \to X(V, v)$, où la première flèche est l'inverse de l'isomorphisme utilisé précédemment et la seconde est induite par la projection, est induite par $V \oplus \mathbb{F}_2 \to V, \quad (x,t) \mapsto x + tv$. Cela montre l'assertion 2.

La suite exacte $\iota_1\sigma_1\Delta^{\mathcal{G}r,1}(X) \to \iota_1\sigma_1(X) \to X \to 0$ (début de la résolution canonique de X — cf. [Dja06a], § 7.2), et l'exactitude du foncteur ω_1 permettent d'en déduire les assertions 3 et 4, puisque les foncteurs ι_1 et σ_1 respectent le degré.

Pour établir la dernière assertion, notons z l'élément de $\Delta\omega_1(X)(V) \subset \omega_1(X)(V \oplus \mathbb{F}_2)$ représenté par le morphisme
$$P_V \xrightarrow{u \mapsto [l] \otimes u} \mathbb{F}_2[V^* \setminus \{0\}] \otimes P_V \simeq \Delta P_V \xrightarrow{\Delta a_x} \Delta\omega_1(X).$$
On a $z = \big(\omega_1(X)(i)\big)(x) + \big(\omega_1(X)(i_l)\big)(x)$, où $i : V \to V \oplus \mathbb{F}_2$ est l'inclusion canonique et $i_l : V \to V \oplus \mathbb{F}_2$ le morphisme de composantes id_V et l.

On en déduit que la composante $z_{v,1}$ ($v \in V \setminus \{0\}$) de z égale $X(i_l)(z_v)$ si $l(v) = 1$, 0 sinon. La conclusion provient donc de ce que la composition $V \xrightarrow{i_l} V \oplus \mathbb{F}_2 \twoheadrightarrow V$ est l'identité. □

La proposition suivante fournit un argument de stabilisation décisif relatif aux morphismes π_X^k.

Proposition 3.6. *Soient X un objet de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}$ et F un sous-objet de $\omega_1(X)$. Pour tout entier $k \geq 0$, on note $C_k = \pi_X^k(\Delta^k F)$.*

1. *La suite $(C_k)_{k>0}$ de sous-objets de $\omega_1(X)$ est croissante ; nous noterons C_∞ sa réunion. Si X est un objet noethérien de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}$, cette suite stationne.*
2. *Pour tout $k \geq 0$, le foncteur C_k est engendré par les éléments du type*
$$(l_1(v) \ldots l_k(v) x_v)_{v \in V \setminus \{0\}} \in \omega_1(X)(V),$$
où V parcourt les espaces vectoriels de dimension finie, $x = (x_v)_{v \in V \setminus \{0\}}$ les éléments de $F(V)$ et $(l_1, \ldots, l_k)$ les k-uplets de formes linéaires sur V.
3. *Le foncteur C_∞ est le plus petit sous-$\bar{P}$-comodule de $\omega_1(X)$ contenant F. Si F est lui-même un sous-$\bar{P}$-comodule de $\omega_1(X)$, on a $C_k = F$ pour tout $k \geq 0$.*
4. *Si X est localement fini, on a $\hom(C_\infty/F, \omega_1(U)) = 0$ pour tout objet U de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}$.*

Démonstration. L'assertion 5 du lemme 3.5 et la préservation des épimorphismes par le foncteur différence montrent le second point pour $k = 1$. Le cas général s'en déduit aussitôt par récurrence.

On en déduit que la suite $(C_k)_{k>0}$ est croissante. Si v est un élément non nul d'un espace vectoriel de dimension finie V, soient $l_1, \ldots, l_n$ les éléments de V^* tels que $l_i(v) = 1$. Alors la fonction polynomiale $l_1 \ldots l_n : V \to \mathbb{F}_2$ est égale à l'indicatrice de $\{v\}$. Si l'on note $F^{gr}(V)$ le plus petit sous-espace vectoriel $V \setminus \{0\}$-gradué de $\omega_1(X)(V)$ contenant $F(V)$, ce qui précède montre que C_∞ est le plus petit sous-foncteur de $\omega_1(X)$ tel que $F^{gr}(V) \subset C_\infty(V)$ pour tout $V \in \operatorname{Ob} \mathcal{E}^f$; en particulier, $C_\infty \supset F$.

Soit Y le plus petit sous-objet de X tel que $Y(V, v)$ contienne les composantes dans $X(V, v)$ des éléments de $F(V) \subset \omega_1(X)(V)$. La proposition 2.4 montre d'une part que $\omega_1(Y)$ est le plus petit sous-$\bar{P}$-comodule de $\omega_1(X)$ contenant F. Le paragraphe précédent de la démonstration montre d'autre part que $C_\infty = \omega_1(Y)$, d'où le troisième point.

Soit $f : C_\infty/F \to \omega_1(U)$ un morphisme de $\mathcal{F}$. Si X est localement fini, il en est de même pour Y, donc la proposition 2.11 montre que la composée $g : \omega_1(Y) = C_\infty \twoheadrightarrow C_\infty/F \xrightarrow{f} \omega_1(U)$ est induite par un morphisme $u : Y \to U$ de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}$. Comme la composée $F \hookrightarrow \omega_1(Y) \xrightarrow{g} \omega_1(U)$ est nulle et que ω_1 est exact, F est inclus dans $\omega_1(ker\, u)$. D'après le troisième point, on en déduit $ker\, u = Y$, donc $u = 0$, puis $g = 0$ et $f = 0$, d'où la dernière assertion.

Par ailleurs, si X est noethérien, alors Y est de type fini, donc $C_\infty = \omega_1(Y)$ est de type fini. Cela montre que la suite $(C_k)_{k>0}$ est stationnaire, et achève la démonstration. □

Début de la démonstration du théorème 3.1. La proposition 2.11 entraîne la pleine fidélité de $\overline{\omega}_1 : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}^{lf} \to \mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$ et la stabilité par extensions de son image. Comme le foncteur $\overline{\omega}_1$ commute aux colimites, il suffit donc d'établir qu'un sous-objet d'un objet de l'image $\mathcal{C}$ de sa restriction à la sous-catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}^f$ des objets finis de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}$ est isomorphe à un objet de $\mathcal{C}$. Pour cela, on procède par récurrence sur le degré polynomial (cf. proposition 2.5).

On se donne donc un objet fini X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}$ de degré $d \geq 0$ et l'on suppose que l'hypothèse suivante est satisfaite.

Hypothèse 3.7 (Hypothèse de récurrence)**.** L'image par le foncteur $\overline{\omega}_1 : \mathcal{F}^{lf}_{\mathcal{G}r,1} \to \mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$ du théorème 3.1 de la sous-catégorie $(\mathcal{F}^{f}_{\mathcal{G}r,1})^{d-1}$ des foncteurs de degré $< d$ de $\mathcal{F}^{f}_{\mathcal{G}r,1}$ est une sous-catégorie épaisse de $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$.

Notation 3.8. Dans cette section, nous noterons $\mathcal{A}_d$ cette sous-catégorie épaisse de $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$, et $\mathcal{Q}_d$ la catégorie quotient de $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$ par $\mathcal{A}_d$. Nous noterons également $\mathcal{X}$ la sous-catégorie pleine des objets T de $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$ tels que $\hom(T, \overline{\omega}_1(U)) = 0$ pour tout objet U de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}$.

Lemme 3.9.
1. *Le foncteur différence Δ induit un endofoncteur exact et fidèle de la catégorie $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$. Il induit également un endofoncteur exact des catégories $\mathcal{A}_d$ et $\mathcal{Q}_d$.*
2. *La sous-catégorie $\mathcal{X}$ de $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$ est stable par le foncteur induit par le foncteur différence.*
3. *L'intersection des sous-catégories $\mathcal{X}$ et $\mathcal{A}_d$ de $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$ est réduite à* 0.
4. *Pour tout entier $k > 0$, le morphisme π^k_X induit un isomorphisme dans la catégorie $\mathcal{Q}_d$.*

Démonstration du lemme. Le foncteur Δ est exact et conserve $\mathcal{F}_\omega$, il induit donc un endofoncteur exact de $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$. La suite exacte $0 \to p_0(F) = F(0) \to F \to \bar{I} \otimes \Delta F$ naturelle en l'objet F de $\mathcal{F}$ montre la fidélité de ce foncteur exact. En effet, le foncteur constant $F(0)$ est analytique, et, comme $\bar{I}$ est analytique, si ΔF est objet de $\mathcal{F}_\omega$, il en est de même pour $\bar{I} \otimes \Delta F$.

Le lemme 3.5 montre que Δ préserve l'image $\mathcal{A}_d$ de $(\mathcal{F}^{f}_{\mathcal{G}r,1})^{d-1}$ par $\overline{\omega}_1$, il induit donc un endofoncteur exact de $\mathcal{A}_d$ et $\mathcal{Q}_d = (\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega)/\mathcal{A}_d$. Cela achève de prouver le premier point. Le lemme 3.5 montre également que le noyau de l'épimorphisme π_X appartient à $\mathcal{A}_d$, puisque X est supposé de degré d. Cela établit, par récurrence sur k, la dernière assertion.

L'isomorphisme d'adjonction $\hom_{\mathcal{F}}(\Delta F, \omega_1(U)) \simeq \hom_{\mathcal{F}}(F, \omega_1(U \otimes \iota_1(\bar{I})))$ donne le second point, puisque la proposition 2.11 permet de remplacer les ensembles de morphismes considérés dans $\mathcal{F}$ par des ensembles de morphismes analogues dans $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$.

Le troisième point résulte de la définition de la sous-catégorie $\mathcal{A}_d$. □

Fin de la démonstration du théorème 3.1. — Soit F un sous-objet de $\omega_1(X)$; on conserve les notations de la proposition 3.6, et l'on se donne $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $C_\infty = C_k$ (qui est donc de la forme $\omega_1(Y)$ pour un sous-objet Y de X). Alors $\Delta^k F$ et $\Delta^k C_\infty$ ont la même image C_∞ par π^k_X, qui induit un isomorphisme dans $\mathcal{Q}_d$ (dernière assertion du lemme 3.9), donc l'inclusion $\Delta^k F \hookrightarrow \Delta^k C_\infty$ induit un isomorphisme dans $\mathcal{Q}_d$. Ainsi, l'image dans $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$ de $\Delta^k(C_\infty/F)$ est objet de $\mathcal{A}_d$. Mais c'est aussi un objet de $\mathcal{X}$ par la dernière assertion de la proposition 3.6 et la deuxième assertion du lemme 3.9. La troisième assertion de ce lemme montre alors que l'image de $\Delta^k(C_\infty/F)$ dans $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$ est nulle, donc aussi l'image de C_∞/F (par la première assertion du lemme). Cela achève la démonstration. □

4 Remarques et conjecture

- Comme l'article [Pow00b], le théorème 3.1 signifie que les foncteurs $P \otimes F$ (avec F fini) sont noethériens de type 1 et donne des renseignements sur leur structure. La méthode qu'emploie Powell dans [Pow00b] repose fortement sur les propriétés des foncteurs $\tilde{\nabla}_n$ et certaines considérations explicites sur les représentations des groupes symétriques. La nôtre reste très générale et clarifie les calculs d'algèbre homologique entre les différents objets dont on démontre le caractère simple noethérien de type 1, entièrement ramenés à des calculs d'algèbre homologique sur des objets finis de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}$, qui peuvent théoriquement se comprendre à partir des représentations d'algèbres de dimension finie sur $\mathbb{F}_2$.
Le théorème 3.1 fournit également une construction de l'objet simple noethérien de type 1 et $\mathcal{F}_\omega$-parfait associé à une partition régulière λ différente de celle de Powell. Nous pouvons aussi montrer, sans calcul, l'égalité $X_\lambda = K_\lambda$ conjecturée dans [Pow00b], § 4.5 : avec nos notations, elle se réduit à dire que l'image de l'unique morphisme non nul $\iota_1(S_\lambda) \to \iota_1(S_{\hat{\lambda}})$, où $\hat{\lambda} = (\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_r + 1)$ si λ est de longueur r, est $\kappa_1(S_\lambda)$. En effet, cette image contient $\kappa_1(S_\lambda) = \operatorname{cosoc} \iota_1(S_\lambda)$ (cf. [Dja06a]), et lorsqu'on applique le foncteur exact et fidèle σ_1 au morphisme précédent, on obtient l'unique morphisme non nul (cf. théorème B.3 de [PS98]) $S_\lambda \oplus \Delta S_\lambda \to S_{\hat{\lambda}} \oplus \Delta S_{\hat{\lambda}}$, dont l'image est $S_\lambda = \sigma_1 \kappa_1(S_\lambda)$.
- On peut généraliser le théorème 3.1 au cas d'un corps fini quelconque $\Bbbk$. Il convient pour cela de remplacer le foncteur différence par la composée $\mathcal{F}(\Bbbk) \xrightarrow{\Delta} \mathcal{F}(\Bbbk) \xrightarrow{(-)_i} \mathcal{F}(\Bbbk)$, où la dernière flèche provient de la décomposition scalaire, pour tout entier $i \in \{1, \dots, q-1\}$, où $q = \operatorname{Card} \Bbbk$.
- Les objets finis de la catégorie $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$ donnés par le théorème 3.1 (il n'y en a pas d'autres si la conjecture artinienne extrêmement forte est vraie) possèdent un représentant $\mathcal{F}_\omega$-parfait dans $\mathcal{F}$, du type $\omega_1(X)$ (avec $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}$). Il n'en est pas de même pour tous les objets de $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$. Considérons par exemple le noyau A de l'unique morphisme non nul $\bar{P}^{\otimes 2} \to \bar{P}$. À partir de la suite exacte
$$0 \to A \to \bar{P}^{\otimes 2} \to \bar{P} \to \Lambda^1 \to 0$$
et de la proposition 2.11, on obtient un isomorphisme naturel $\operatorname{Ext}^i(F, A) \simeq \operatorname{Ext}^{i-2}(F, \Lambda^1)$ pour $F \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}_\omega$. Ainsi, A est $\mathcal{F}_\omega$-fermé, mais non $\mathcal{F}_\omega$-parfait.
- L'absence de représentants parfaits pour certains foncteurs équivaut à l'inexactitude du foncteur section $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega \to \mathcal{F}$. Notons néanmoins la conséquence suivante de la proposition 2.11, dans laquelle nous notons r^i le i-ème foncteur dérivé droit de l'endofoncteur de $\mathcal{F}$ composé du foncteur canonique $\mathcal{F} \to \mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$ et du foncteur section : pour tout foncteur oméga-adapté F, on a $r^i(F) = 0$ pour i assez grand. Ainsi, la conjecture artinienne extrêmement forte permettrait de contrôler le défaut d'exactitude du foncteur section.
- Même en admettant la conjecture artinienne extrêmement forte, certains aspects de la structure globale de la catégorie $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$ demeurent mystérieux. Par exemple, la description de l'enveloppe injective de l'image du foncteur $\bar{P}$ dans cette catégorie quotient, qui en est l'objet simple le plus

élémentaire, pose des problèmes très difficiles.

En général, les injectifs indécomposables de $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$ sont les images par le foncteur section des injectifs indécomposables sans sous-objet fini non nul de $\mathcal{F}$ (cf. [Gab62]), i.e. des injectifs indécomposables « pathologiques[4] » de $\mathcal{F}$.

Nous conjecturons notamment le résultat suivant :

Conjecture 4.1. *Tout foncteur injectif indécomposable de la catégorie $\mathcal{F}$ est à valeurs de dimension finie.*

Les difficultés inhérentes à ce problème, liées à la compréhension générique des représentations des groupes linéaires, sont conceptuellement analogues à celles que l'on rencontre pour la conjecture artinienne extrêmement forte. Cependant, même en admettant la conjecture artinienne extrêmement forte, l'auteur ignore comment démontrer la conjecture 4.1, y compris pour la seule enveloppe injective de $\bar{P}$, notée $I_{\bar{P}}$.

Remarque 4.2.
1. On a immédiatement $I_{\bar{P}}(0) = 0$ et $I_{\bar{P}}(\mathbb{F}_2) \simeq \hom_{\mathcal{F}}(\bar{P}, I_{\bar{P}}) \simeq \mathbb{F}_2$. Les résultats de Powell (cf. [Pow98a]) fournissent $\hom_{\mathcal{F}}(Q_{(2)}, I_{\bar{P}}) \simeq \mathbb{F}_2$ et $\hom_{\mathcal{F}}(Q_{(2,1)}, I_{\bar{P}}) \simeq \mathbb{F}_2$, d'où l'on déduit, compte-tenu de la filtration de P_{E_2} donnée dans [Pow98c], que $I_{\bar{P}}(E_2)$ est de dimension 7.
2. Si la conjecture artinienne extrêmement forte est vraie au rang 1 (i.e. pour $\mathcal{K}_1(\mathcal{F})/\mathcal{K}_0(\mathcal{F})$), alors il est facile de décrire l'enveloppe injective $I_{\bar{P}}^{\mathcal{K},1}$ de $\bar{P}$ dans la catégorie $\mathcal{K}_1(\mathcal{F})$: c'est l'image par le foncteur ω_1 de l'enveloppe injective $I^{\mathcal{G}r,1}_{(\mathbb{F}_2,\mathbb{F}_2)}$ (qui est localement finie) du foncteur constant $\mathbb{F}_2$ de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1}$. Le foncteur $I_{\bar{P}}^{\mathcal{K},1}$ ainsi obtenu est l'un des deux facteurs indécomposables de $\bar{P} \otimes \bar{I}$, dont le scindement est donné par application du foncteur ω_1 au scindement $\iota_1(\bar{I}) \simeq \kappa_1(\bar{I}) \oplus I^{\mathcal{G}r,1}_{(\mathbb{F}_2,\mathbb{F}_2)}$ déduit de l'isomorphisme (3) du § 2.2. Mais le foncteur $I_{\bar{P}}^{\mathcal{K},1}$ est beaucoup moins gros que l'enveloppe injective $I_{\bar{P}}$ de $\bar{P}$ dans $\mathcal{F}$, ne serait-ce que parce que cette dernière contient le foncteur $\overline{\mathbb{F}_2[\mathcal{G}r]}$ (l'article [Dja06a], § 6.3, montre en effet que $\overline{\mathbb{F}_2[\mathcal{G}r]}$ est une extension essentielle de $\bar{P}$).

La proposition élémentaire suivante va nous aider à discuter la conjecture 4.1.

Proposition 4.3. *Le produit tensoriel de deux objets injectifs de la catégorie $\mathcal{F}$ dont l'un est à valeurs de dimension finie est injectif.*

Démonstration. Le produit tensoriel entre un injectif de $\mathcal{F}$ et un injectif standard I_V est injectif, car l'adjoint à gauche Δ_V à l'endofoncteur $- \otimes I_V$ de $\mathcal{F}$ est exact.

Si J est un injectif à valeurs de dimension finie, le foncteur $- \otimes J$ commute aux produits. Comme tout injectif de $\mathcal{F}$ est facteur direct d'un produit d'injectifs standard, l'injectivité des $J \otimes I_V$ établie précédemment donne la conclusion. □

Corollaire 4.4. *Supposons que la conjecture artinienne et la conjecture 4.1 sont satisfaites. Alors le produit tensoriel de deux injectifs de la catégorie $\mathcal{F}$ est injectif.*

[4] Remarquons qu'il n'existe aucun objet projectif « pathologique » dans la catégorie $\mathcal{F}$: tous les projectifs indécomposables de $\mathcal{F}$ sont de type fini, et tout projectif de $\mathcal{F}$ est somme directe de projectifs indécomposables. Cela provient de la théorie classique de Krull-Schmidt (cf. [Pop73]), parce que les projectifs indécomposables de type fini engendrent $\mathcal{F}$ et ont des anneaux d'endomorphismes locaux.

Démonstration. Si la catégorie $\mathcal{F}$ est localement noethérienne, tout injectif de $\mathcal{F}$ est isomorphe à une somme directe d'injectifs indécomposables (cf. [Gab62]). La conclusion résulte donc de la proposition 4.3 et de la distributivité du produit tensoriel par rapport à la somme directe. □

Notons $G_0^{inj}(\mathcal{F})$ le groupe de Grothendieck des objets injectifs de $\mathcal{F}$ à valeurs de dimension finie de $\mathcal{F}$. Sous les hypothèses du corollaire 4.4, ce groupe hérite d'une structure d'anneau commutatif induite par le produit tensoriel. Noter que, comme une somme directe infinie non triviale d'objets injectifs à valeurs de dimension finie peut être encore à valeurs de dimension finie, $G_0^{inj}(\mathcal{F})$ est naturellement un anneau topologique non discret. Une autre question naturelle (toujours en admettant la conjecture artinienne et la conjecture 4.1) consiste à savoir si le produit tensoriel de deux injectifs indécomposables est une somme directe *finie* d'injectifs indécomposables, ce qui permettrait essentiellement de réduire l'étude de $G_0^{inj}(\mathcal{F})$ au sous-groupe discret engendré par les classes des injectifs indécomposables (qui en serait alors un sous-anneau).

Nous verrons dans la section 8 que la conjecture artinienne extrêmement forte donnerait une description assez explicite de l'anneau de Grothendieck $G_0^{tf}(\mathcal{F})$ des foncteurs de type fini de $\mathcal{F}$. Même en admettant la conjecture 4.1 et la conjecture artinienne extrêmement forte, la structure de l'anneau $G_0^{inj}(\mathcal{F})$ reste obscure.

Troisième partie

Préliminaires relatifs aux foncteurs ω et $\tilde{\nabla}_n$

Nous donnons dans cette partie le substrat technique nécessaire à la généralisation des arguments de la section 3 au foncteur ω_n, où n est un entier supérieur à 1. Il s'agit d'une part d'étendre le lemme 3.5, en remplaçant le foncteur différence par le foncteur $\tilde{\nabla}_n$, ce que nous accomplissons dans la section 6. Nous aurons besoin d'autre part d'un résultat d'annulation cohomologique relatif aux foncteurs $\tilde{\nabla}_n$-nilpotents (généralisant le cas des foncteurs finis) ; c'est l'objet de la section 7. Les deux facettes de ce programme reposent sur des arguments élémentaires issus de la structure des injectifs des catégories de foncteurs en grassmanniennes ; le lemme 1.1 relatif à la structure de l'injectif I de $\mathcal{F}$ constitue pratiquement leur seul ingrédient non formel.

Convention 4.5. Dans toute cette partie, on se donne un entier $n > 0$.

5 Les foncteurs $\nabla_n^{\mathcal{G}r}$

Nous introduisons l'outil interne à la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ qui permettra, dans les sections suivantes, de mener à bien nos investigations relatives aux foncteurs ω et $\tilde{\nabla}_n$.

Définition 5.1. On définit un endofoncteur $\nabla_n^{\mathcal{G}r}$ de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ par

$$\nabla_n^{\mathcal{G}r} = ker\left((- : \iota(I)) \to (- : \iota(p_{n-1}(I)))\right)$$

où la transformation naturelle est induite par l'inclusion $p_{n-1}(I) \hookrightarrow I$.

Le lien avec le foncteur $\tilde{\nabla}_n$ est donné par la proposition suivante.

Proposition 5.2. *Il existe un isomorphisme*

$$\omega \circ \nabla_n^{\mathcal{G}r} \simeq \tilde{\nabla}_n \circ \omega$$

de foncteurs $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r} \to \mathcal{F}$.

Démonstration. Grâce à la proposition 2.8 et à l'exactitude du foncteur ω, il existe un diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \omega \circ \nabla_n^{\mathcal{G}r} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\simeq"] & \omega \circ (- : \iota(I)) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \omega \circ (- : \iota(p_{n-1}(I))) \arrow[d, "\simeq"] \\ 0 \arrow[r] & \tilde{\nabla}_n \circ \omega \arrow[r] & (- : I) \circ \omega \arrow[r] & (- : p_{n-1}(I)) \circ \omega \end{tikzcd}$$

dans lequel les flèches verticales sont des isomorphismes. □

Nous donnons maintenant des propriétés formelles du foncteur $\nabla_n^{\mathcal{G}r}$, analogues à celles du foncteur $\tilde{\nabla}_n$.

La première d'entre elle est une conséquence directe de la suite exacte (2) de la section 1.1. On rappelle que $t_n^* : I \to I_{E_n}$ désigne le morphisme induit par $t_n \in \mathbb{F}_2[\hom(E_n, \mathbb{F}_2)]$.

Proposition 5.3. *Le foncteur $\nabla_n^{\mathcal{G}r}$ est l'image de la transformation naturelle $(t_n)_* = (- : \iota(t_n^*)) : (- : \iota(I_{E_n})) \to (- : \iota(I))$.*

Comme les foncteurs $(- : \iota(I_{E_n}))$ et $(- : \iota(I))$ sont exacts (cf. proposition 2.9), on en déduit :

Corollaire 5.4. *Le foncteur $\nabla_n^{\mathcal{G}r}$ est additif ; il préserve les monomorphismes et les épimorphismes.*

Nous utiliserons souvent le foncteur $\nabla_n^{\mathcal{G}r}$ sur des foncteurs appartenant à une sous-catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,k}$ de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$. Pour ramener son étude à des considérations internes à la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,k}$, nous emploierons la proposition suivante.

Proposition 5.5. *Soient $k \in \mathbb{N}$, X un objet de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,k}$ et $\tilde{X}$ l'objet de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ image de X par le foncteur de prolongement par zéro. Il existe un isomorphisme naturel entre la restriction de $\nabla_n^{\mathcal{G}r}(\tilde{X})$ à $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,k}$ et l'image de $(t_n)_* = (X : \iota_k(t_n^*)) : (X : \iota_k(I_{E_n})) \to (X : \iota_k(I))$.*

De plus, le niveau du foncteur $\nabla_n^{\mathcal{G}r}(\tilde{X})$ est inférieur ou égal à k.

Démonstration. Cela résulte de la proposition 5.3 et de l'isomorphisme naturel $\mathcal{R}_{\leq k,k}(\mathcal{P}_{k,\leq k}(X) : \iota_{\leq k}(F)) \simeq (X : \iota_k(F)$ (pour $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}$) de la proposition 9.2 de [Dja06a], et de l'isomorphisme naturel $(\tilde{X} : \iota(F)) \simeq \mathcal{P}_{\leq k,\mathbb{N}}(\mathcal{P}_{k,\leq k}(X) : \iota_{\leq k}(F))$ qui s'établit par un argument formel d'adjonction analogue. □

La proposition suivante découle de la commutativité du produit tensoriel de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ et de ce que ses foncteurs de décalage et son foncteur différence sont isomorphes à des foncteurs de division.

Proposition 5.6. *Le foncteur $\nabla_n^{\mathcal{G}r}$ commute aux foncteurs de décalage et au foncteur différence de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$, à isomorphisme naturel près.*

Nous en venons maintenant à des propriétés élémentaires du foncteur $\nabla_n^{\mathcal{G}r}$ qui diffèrent du comportement de $\tilde{\nabla}_n$. Elles reposent sur la proposition suivante.

Proposition 5.7. *Il existe dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}_2 \arrow[r] \arrow[d] & \iota(I) \arrow[d, "\iota(t_n^*)"] \\ I^{\mathcal{G}r}_{(E_n,E_n)} \arrow[r, hook] & \iota(I_{E_n}) \end{tikzcd} \tag{5}$$

qui induit dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}_2 \arrow[r] \arrow[d, hook] & \iota_n(I) \arrow[d, "\iota_n(t_n^*)"] \\ I^{\mathcal{G}r,n}_{(E_n,E_n)} \arrow[r, hook] & \iota_n(I_{E_n}). \end{tikzcd} \tag{6}$$

Démonstration. Le morphisme $\mathbb{F}_2 \to I^{\mathcal{G}r}_{(E_n,E_n)}$ du diagramme (5) est l'unique flèche non nulle ; le morphisme $\mathbb{F}_2 \to \iota(I)$ est la composée de l'unique morphisme non nul $\mathbb{F}_2 \to I^{\mathcal{G}r}_{(\mathbb{F}_2,\mathbb{F}_2)}$ et du monomorphisme scindé $I^{\mathcal{G}r}_{(\mathbb{F}_2,\mathbb{F}_2)} \hookrightarrow \iota(I)$ donné par l'isomorphisme (3) de la section 2.2 ; le monomorphisme non spécifié provient de cet isomorphisme également.

Comme $\mathbb{F}_2 \simeq \rho(\mathbb{F}_2)$, par adjonction entre les foncteurs ρ et ε (proposition 2.7), la commutation du diagramme (5) se ramène au lemme 5.8 ci-dessous, puisque $\varepsilon \circ \iota \simeq o$ et $\varepsilon(I^{\mathcal{G}r}_{(V,V)}) \simeq I^{surj}_V$.

Dans le diagramme (6) qu'on déduit de (5) par application du foncteur de restriction, la flèche verticale $\mathbb{F}_2 \to I^{\mathcal{G}r,n}_{(E_n,E_n)}$ est l'unique morphisme non nul, qui est injectif parce que le foncteur constant $\mathbb{F}_2$ de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ est simple. $\square$

Lemme 5.8. *Le diagramme suivant de $\mathcal{F}_{surj}$ commute*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}_2 \arrow[r] \arrow[d] & I^{surj}_{\mathbb{F}_2} \arrow[r, hook] & o(I) \arrow[d, "o(t_n^*)"] \\ I^{surj}_{E_n} \arrow[rr, hook] & & o(I_{E_n}) \end{tikzcd}$$

où les deux flèches de source $\mathbb{F}_2$ sont les uniques morphismes non nuls et les deux injections non spécifiées les monomorphismes scindés donnés par l'isomorphisme canonique $o(I_V) \simeq \bigoplus_{W \in \mathcal{G}r(V)} I^{surj}_W$.

Démonstration. Soit W un sous-espace de E_n. Le morphisme

$$\mathbb{F}_2 \to I^{surj}_{\mathbb{F}_2} \hookrightarrow o(I) \xrightarrow{o(t_n^*)} o(I_{E_n}) \twoheadrightarrow I^{surj}_W$$

est la somme sur les formes linéaires $l \in E_n^*$ telles que $l(W) \neq 0$ des composées

$$\mathbb{F}_2 \to I^{surj}_{\mathbb{F}_2} \xrightarrow{l^*} I^{surj}_W,$$

qui sont toutes égales à l'unique morphisme non nul. Comme le cardinal de l'ensemble $\{l \in E_n^* \,|\, l(W) \neq 0\} = E_n^* \setminus W^\perp$ est $2^n - 2^{n-\dim W}$, qui est impair si et seulement si $\dim W = n$, on en conclut que le morphisme $\mathbb{F}_2 \to I_W^{surj}$ que l'on étudie est non nul si et seulement si $W = E_n$, d'où l'on déduit le lemme. $\square$

Notation 5.9. On désigne par $q_n^\nabla : \nabla_n^{\mathcal{G}r} \to id$ la transformation naturelle composée de l'inclusion canonique $\nabla_n^{\mathcal{G}r} \hookrightarrow (- : \iota(I))$ et de la transformation naturelle $(- : \iota(I)) \to (- : \mathbb{F}_2) \simeq id$ induite par le morphisme $\mathbb{F}_2 \to \iota(I)$ du diagramme (5).

Ainsi, les propositions 5.7 et 5.3 procurent un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\nabla_n^{\mathcal{G}r} \arrow[dd, hook] \arrow[rrdd, bend left, "q_n^\nabla"] & & \\
& (- : \iota(I_{E_n})) \arrow[ul] \arrow[dl, "(t_n)_*"'] \arrow[dr] & \\
(- : \iota(I)) \arrow[rr] & & id.
\end{tikzcd}$$

6 Estimation de $\tilde{\nabla}_n \, \omega_n$

Il n'est pas difficile de voir que, pour $i < n$, le foncteur $\tilde{\nabla}_i$ a tendance à faire exploser la taille des foncteurs du type $\omega_n(X)$. La proposition suivante montre que le comportement de $\tilde{\nabla}_i$ sur $\omega_n(X)$ est tout-à-fait différent pour $i > n$, lorsque X est un foncteur fini de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$.

Proposition 6.1. *Si F est un foncteur oméga-adapté de hauteur strictement inférieure à n, alors F est $\tilde{\nabla}_n$-nilpotent.*

Démonstration. Si $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,k}$ est simple, il existe un objet simple F de $\mathcal{F}$ et un GL_k-module simple S tels que $X \simeq \kappa_k(F) \otimes \rho_k(S)$ (cf. proposition 2.6), d'où un épimorphisme

$$P_{E_k} \otimes F \twoheadrightarrow \omega_k \rho_k(S) \otimes F \simeq \omega_k(\iota_k(F) \otimes \rho_k(S)) \twoheadrightarrow \omega_k(X).$$

Les propositions 1.13 et 1.18 montrent que $P_{E_k} \otimes F$, donc $\omega_k(X)$, est $\tilde{\nabla}_n$-nilpotent si $k < n$. On conclut grâce à la proposition 1.16. $\square$

Nous nous attachons, dans la suite de cette section, à montrer que $\tilde{\nabla}_n \, \omega_n(X)$ et $\omega_n(X)$ sont en quelque sorte du même ordre de grandeur pour X fini. Dans le cas où X est un foncteur simple pseudo-constant, Powell a calculé exactement, dans [Pow98c], $\tilde{\nabla}_n \, \omega_n(X)$ (qui est alors isomorphe à $\omega_n(X)$, sauf dans un cas) ; nous n'en aurons pas usage.

Notation 6.2. Dans cette section, on note $\tilde{X}$ le prolongement par zéro à $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ d'un foncteur X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$. On désigne également par $q_{n,X}^\nabla$ le morphisme naturel $(q_n^\nabla)_{\tilde{X}} : \nabla_n^{\mathcal{G}r}(\tilde{X}) \to \tilde{X}$.

On remarque que la proposition 5.2 entraîne l'existence d'un isomorphisme naturel

$$\tilde{\nabla}_n\, \omega_n(X) \simeq \omega \nabla_n^{\mathcal{G}r}(\tilde{X}). \tag{7}$$

En appliquant le foncteur ω au morphisme naturel $q^{\nabla}_{n,X}$, on en déduit un morphisme naturel

$$\pi_{n,X} : \tilde{\nabla}_n\, \omega_n(X) \to \omega_n(X). \tag{8}$$

Pour $n = 1$, on retrouve le morphisme π_X de la section 3.

Une description explicite du morphisme $\pi_{n,X}$ sera donnée dans la section 9 (lemme 9.3).

Proposition 6.3. *Pour tout foncteur X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$, le morphisme $(q^{\nabla}_n)_{\tilde{X}} : \nabla_n^{\mathcal{G}r}(\tilde{X}) \to \tilde{X}$ est surjectif.*

Démonstration. Par la proposition 5.5, cela découle de la surjectivité de la flèche en pointillé du diagramme

$$\begin{tikzcd} X & (X : \iota_n(I)) \arrow[l] \\ (X : I^{\mathcal{G}r,n}_{(E_n,E_n)}) \arrow[u, twoheadrightarrow] & (X : \iota_n(I_{E_n})) \arrow[l, twoheadrightarrow] \arrow[u, "(t_n)_*"'] \arrow[ul, dashed, twoheadrightarrow] \end{tikzcd}$$

induit par le diagramme (6) de la proposition 5.7. □

Corollaire 6.4. *La transformation naturelle $\pi_n : \tilde{\nabla}_n\, \omega_n \to \omega_n$ est surjective.*

Lemme 6.5. *Si X est un foncteur pseudo-constant de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$, la restriction à $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ du morphisme $(q^{\nabla}_n)_{\tilde{X}} : \nabla_n^{\mathcal{G}r}(\tilde{X}) \to \tilde{X}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. La proposition 9.9 de [Dja06a] fournit des isomorphismes $(\rho_n(M) : \iota(F)) \simeq \rho_n(M : F(E_n)) \simeq \rho_n(M \otimes F(E_n)^*)$ naturels en le GL_n-module M et le foncteur F de $\mathcal{F}^{df}$. On en déduit, par la proposition 5.5, des isomorphismes naturels

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mathbb{N},n} \nabla_n^{\mathcal{G}r}(\tilde{X}) &\simeq ker\left(\rho_n(M \otimes I(E_n)^*) \xrightarrow{(t_n)_*} \rho_n(M \otimes p_{n-1}(I)(E_n)^*)\right) \\ &\simeq \rho_n(M \otimes (I/p_{n-1}(I))(E_n))^*) \end{aligned}$$

où $X = \rho_n(M)$ est un foncteur pseudo-constant de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$. La conclusion provient alors de ce que $(I/p_{n-1}(I))(E_n) = \mathbb{F}_2$ (lemme 1.1). □

Proposition 6.6. *Soit X un objet fini de degré $i \geq 0$ de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$. Il existe dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ une suite exacte $0 \to Y \to ker\, q^{\nabla}_{n,X} \to Z \to 0$ dans laquelle :*
- *Y est un foncteur fini de niveau strictement inférieur à n et de degré au plus i ;*
- *Z est un foncteur fini de degré strictement inférieur à i, de niveau au plus n et de coniveau au moins n.*

Démonstration. On pose $Y = \mathcal{P}_{\leq n-1,\mathbb{N}}\, \mathcal{R}_{\mathbb{N},\leq n-1} \nabla_n^{\mathcal{G}r}(\tilde{X})$ — c'est un sous-foncteur de $ker\, q^{\nabla}_{n,X}$ puisque la restriction à $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,\leq n-1}$ de $\tilde{X}$ est nulle — et $Z = (ker\, q^{\nabla}_{n,X})/Y$. La proposition 5.5 montre que la condition de niveau sur Z est vérifiée ; la condition de niveau sur Y et celle de coniveau sur Z le sont pour des raisons formelles.

La proposition 5.6 montre que le foncteur $ker\, q_n^{\nabla} : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \to \mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ commute au foncteur différence à isomorphisme naturel près. On en déduit en particulier $\deg Y \leq \deg ker\, q_{n,X}^{\nabla} \leq \deg X = i$, par récurrence sur i. L'inégalité $\deg Z < i$ s'obtient de même, par récurrence sur i, à partir du lemme 6.5. Comme les foncteurs Y et Z sont, comme $\nabla_n^{\mathcal{G}r}(X)$, à valeurs de dimension finie, ce qui précède montre qu'ils sont finis, ce qui achève la démonstration. $\square$

Notation 6.7. Dans la proposition suivante, $\mathcal{F}_{\tilde{\nabla}_n,<i}$ désigne la plus petite sous-catégorie épaisse de $\mathcal{F}$ contenant $\mathcal{N}il_{\tilde{\nabla}_n}$ et les objets $\omega_n(Y)$, pour Y objet fini de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ de degré strictement inférieur à i.

Intuitivement, cette catégorie contient tous les objets qui sont « moins gros » que les foncteurs du type $\omega_n(A)$, où $A \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ est de degré i (la proposition 6.1 montre que $\mathcal{F}_{\tilde{\nabla}_n,<i}$ contient déjà tous les objets du type $\omega_k(X)$ avec $k < n$ et $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,k}$ fini).

Corollaire 6.8. *Soient $i \in \mathbb{N}$ et X un objet fini de degré i de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$.*

Le noyau de $\pi_{n,X} : \tilde{\nabla}_n\, \omega_n(X) \to \omega_n(X)$ appartient à $\mathcal{F}_{\tilde{\nabla}_n,<i}$.

Démonstration. Soit $0 \to Y \to ker\, q_{n,X}^{\nabla} \to Z \to 0$ la suite exacte donnée par la proposition 6.6 : par exactitude du foncteur ω, on en déduit une suite exacte $0 \to \omega(Y) \to ker\, \pi_{n,X} \to \omega(Z) \to 0$. Le foncteur $\omega(Y)$ est $\tilde{\nabla}_n$-nilpotent, donc objet de $\mathcal{F}_{\tilde{\nabla}_n,<i}$, par la proposition 6.1, et $\omega(Z)$ est objet de $\mathcal{F}_{\tilde{\nabla}_n,<i}$ parce que $\deg Z < i$, d'où la proposition. $\square$

7 Théorème d'annulation cohomologique relatif à la ∇-nilpotence

La section précédente précisait le comportement du foncteur $\tilde{\nabla}_n$ sur l'image du foncteur ω_n en terme de « taille » des objets ; nous allons donner l'aspect cohomologique de la comparaison entre $\tilde{\nabla}_n$ et ω_n.

Tensorisons le diagramme (6) de la proposition 5.7 par un objet X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ et appliquons le foncteur ω_n : on obtient un diagramme commutatif naturel

$$\begin{tikzcd} \omega_n(X) \arrow[r, "a_{n,X}"] \arrow[dr, hook, "b_{n,X}"'] & \omega_n(X) \otimes I \arrow[d, "\omega_n(X)\otimes t_n^*"] \\ & \omega_n(X) \otimes I_{E_n}. \end{tikzcd} \tag{9}$$

Par adjonction entre les endofoncteurs Δ_V et $-\otimes I_V$ de $\mathcal{F}$, on en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \Delta_{\mathbb{F}_2}\omega_n(X) \arrow[dr, "\alpha_{n,X}"] & \\ \Delta_{E_n}\omega_n(X) \arrow[u, "(t_n)_*"] \arrow[r, "\beta_{n,X}"'] & \omega_n(X). \end{tikzcd} \tag{10}$$

Le théorème fondamental suivant constitue une variation sur la proposition 2.11 adaptée au contexte de la $\tilde{\nabla}_n$-nilpotence. Nous y reviendrons à la remarque 7.2.

Théorème 7.1. *Pour tout objet X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$, le foncteur $\omega_n(X)$ est $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$-parfait : pour tout foncteur F de $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$, on a $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(F,\omega_n(X))=0$.*

Démonstration. Un argument de colimite montre qu'il suffit d'établir la nullité des groupes d'extensions $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}(F,\omega_n(X))$ lorsque F est $\tilde{\nabla}_n$-nilpotent, assertion que l'on établit par récurrence sur i.

La naturalité de la transformation $(t_n)_* : \Delta_{E_n} \to \Delta_{\mathbb{F}_2}$ se traduit par la commutation des diagrammes

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathcal{F}}(F,G) \arrow[r, "(\Delta_{E_n})_*"] \arrow[d, "(\Delta_{\mathbb{F}_2})_*"'] & \hom_{\mathcal{F}}(\Delta_{E_n}F,\Delta_{E_n}G) \arrow[d, "t_n(G)_*"] \\
\hom_{\mathcal{F}}(\Delta_{\mathbb{F}_2}F,\Delta_{\mathbb{F}_2}G) \arrow[r, "t_n(F)^*"] & \hom_{\mathcal{F}}(\Delta_{E_n}F,\Delta_{\mathbb{F}_2}G)
\end{tikzcd}$$

pour tous objets F et G de $\mathcal{F}$, où l'on a noté $t_n(F)$ pour $((t_n)_*)_F$, pour simplifier les écritures. Comme les foncteurs Δ_{E_n} et $\Delta_{\mathbb{F}_2}$ sont exacts, ce diagramme s'étend en un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}(F,G) \arrow[r, "(\Delta_{E_n})_*"] \arrow[d, "(\Delta_{\mathbb{F}_2})_*"'] & \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}(\Delta_{E_n}F,\Delta_{E_n}G) \arrow[d, "t_n(G)_*"] \\
\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}(\Delta_{\mathbb{F}_2}F,\Delta_{\mathbb{F}_2}G) \arrow[r, "t_n(F)^*"] & \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}(\Delta_{E_n}F,\Delta_{\mathbb{F}_2}G)
\end{tikzcd}$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$.

On forme alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}(F,\omega_n(X)) \arrow[r, "(\Delta_{E_n})_*"] \arrow[d, "(\Delta_{\mathbb{F}_2})_*"'] & \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}(\Delta_{E_n}F,\Delta_{E_n}\omega_n(X)) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "t_n(\omega_n(X))_*"] & \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}(F,\Delta_{E_n}\omega_n(X)\otimes I_{E_n}) \arrow[d, "(t_n(\omega_n(X))\otimes I_{E_n})_*"] \\
\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}(\Delta_{\mathbb{F}_2}F,\Delta_{\mathbb{F}_2}\omega_n(X)) \arrow[r, "t_n(F)^*"] \arrow[d, "(pl_F^{\nabla,n})^*"'] & \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}(\Delta_{E_n}F,\Delta_{\mathbb{F}_2}\omega_n(X)) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "(\alpha_{n,X})_*"] & \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}(F,\Delta_{\mathbb{F}_2}\omega_n(X)\otimes I_{E_n}) \arrow[d, "(\alpha_{n,X}\otimes I_{E_n})_*"] \\
\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}(\tilde{\nabla}_nF,\Delta_{\mathbb{F}_2}\omega_n(X)) \arrow[ur, "(pr_F^{\nabla,n})^*"'] \arrow[d, "(\alpha_{n,X})_*"'] & \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}(\Delta_{E_n}F,\omega_n(X)) \arrow[r, "\simeq"] & \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}(F,\omega_n(X)\otimes I_{E_n}) \\
\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}(\tilde{\nabla}_nF,\omega_n(X)) \arrow[ur, "(pr_F^{\nabla,n})^*"'] & &
\end{tikzcd} \tag{11}$$

où $pr_F^{\nabla,n}$ désigne la projection canonique $\Delta_{E_n}F \twoheadrightarrow \tilde{\nabla}_nF$, et $pl_F^{\nabla,n} : \tilde{\nabla}_nF \hookrightarrow \Delta_{\mathbb{F}_2}F$ l'inclusion canonique, et où les isomorphismes de droite dérivent de l'adjonction entre les endofoncteurs exacts Δ_V et $-\otimes I_V$ de $\mathcal{F}$.

Le morphisme $u : \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}(F,\omega_n(X)) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}(F,\omega_n(X)\otimes I_{E_n})$ obtenu en suivant le diagramme est induit par le monomorphisme $b_{n,X} : \omega_n(X) \hookrightarrow \omega_n(X)\otimes I_{E_n}$. En effet, la composée horizontale supérieure est induite par l'unité $\omega_n(X) \to \Delta_{E_n}\omega_n(X)\otimes I_{E_n}$ de l'adjonction, tandis que la composée verticale de droite est induite par $\beta_{n,X}\otimes I_{E_n}$ (par la commutation du diagramme (10)) ; on conclut par adjonction entre les morphismes $b_{n,X}$ et $\beta_{n,X}$.

Comme $b_{n,X}$ provient par application du foncteur ω_n à un monomorphisme $X \hookrightarrow X \otimes \iota_n(I_{E_n})$, il existe un objet Y de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ et une suite exacte courte

$$0 \to \omega_n(X) \xrightarrow{b_{n,X}} \omega_n(X) \otimes I_{E_n} \to \omega_n(Y) \to 0\,.$$

La suite exacte longue de cohomologie associée et l'hypothèse de récurrence $\mathrm{Ext}^{i-1}_{\mathcal{F}}(F, \omega_n(Y)) = 0$ (on rappelle que F est supposé $\tilde{\nabla}_n$-nilpotent) montrent que le morphisme $u : \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}(F, \omega_n(X)) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}(F, \omega_n(X) \otimes I_{E_n})$ est *injectif.* On en déduit, en considérant la colonne de gauche du diagramme (11), un *monomorphisme* $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}(F, \omega_n(X)) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}(\tilde{\nabla}_n F, \omega_n(X))$, ce pour tous objets F de $\mathcal{N}il_{\tilde{\nabla}_n}$ et X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$. Cela fournit, par récurrence sur l'indice de $\tilde{\nabla}_n$-nilpotence de F, la nullité du groupe d'extensions $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}(F, \omega_n(X))$, ce qui achève la démonstration. □

Remarque 7.2. La proposition 6.1 montre que le théorème 7.1 est une généralisation du résultat d'annulation cohomologique de la proposition 2.11 (dont elle ne fournit toutefois pas l'isomorphisme obtenu pour $k = n$). Pour $n = 1$, ces deux résultats sont identiques. La démonstration du théorème 7.1 est une conséquence formelle de l'injectivité du morphisme $b_{n,X}$ du diagramme (9) ; la seule difficulté technique réside dans l'inexactitude du foncteur $\tilde{\nabla}_n$, qui oblige à transiter par les foncteurs exacts $\Delta_{\mathbb{F}_2}$ et Δ_{E_n} pour passer aux groupes d'extensions. Conceptuellement, cette démonstration procède d'idées très voisines de celles employées dans [Dja06a] pour établir la proposition 2.11, reposant sur des adjonctions entre foncteurs décalages et produits tensoriels convenables.

Quatrième partie

Résultats fondamentaux

Nous nous consacrons désormais aux applications des résultats de la partie précédente à la structure de la catégorie $\mathcal{F}$. La première d'entre elle, présentée dans la section 8, est le théorème 3 de l'introduction. Des catégories de foncteurs, elle n'utilise les estimations de la section 6 que dans le cas des foncteurs pseudo-constants (déjà traité dans [Pow98c]), et les propriétés de base des objets finis des catégories $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$. Un autre ingrédient essentiel provient de la théorie des représentations : la représentation de Steinberg (modulaire) des groupes linéaires occupe une place privilégiée, parce que les facteurs de composition du foncteur de Powell qui lui est associé s'avèrent bien plus faciles à contrôler à l'aide des foncteurs $\tilde{\nabla}_n$ que dans le cas général. Outre cette observation assez directe, qui repose uniquement sur le fait que la partition régulière associée à la représentation de Steinberg a une longueur égale à son premier terme, nous emploierons une propriété profonde de la classe de cette représentation dans l'anneau de Grothendieck de l'algèbre du groupe linéaire, qui caractérise l'idéal qu'elle engendre.

Le reste de cette partie consiste en la démonstration du théorème de simplicité généralisé (théorème 1 de l'introduction) et de ses conséquences sur la conjecture artinienne extrêmement forte (notamment le théorème 2). Grâce aux préliminaires de la partie III, nous pourrons emprunter une voie tout-à-fait analogue à celle de la partie II.

Outre qu'ils reposent sur l'emploi des foncteurs ω et $\tilde{\nabla}_n$, les deux volets principaux de cette dernière partie se rejoignent dans l'observation suivante : la compréhension fine de la catégorie $\mathcal{F}$ nécessite un contrôle du comportement générique des représentations des groupes linéaires (ou symétriques). L'application du théorème de simplicité généralisé à la structure de $P^{\otimes 2} \otimes F$ (pour F fini) comme la propriété d'injectivité du morphisme induit par le foncteur $\omega : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r} \to \mathcal{F}$ entre groupes de Grothendieck ne peuvent s'établir par les seules méthodes fonctorielles ; une partie du substrat non formel sous-jacent à la catégorie $\mathcal{F}$ réside manifestement dans des propriétés intrinsèques des groupes linéaires.

8 Le morphisme $\omega_* : G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}) \to G_0^{tf}(\mathcal{F}) \to \widehat{G}_0^f(\mathcal{F})$

On rappelle que les notations relatives aux groupes de Grothendieck ont été données à la fin de l'introduction de cet article, et que les notations liées aux partitions et facteurs de compositions ont été introduites au paragraphe 1.2.

Notation 8.1. Nous désignerons par $\widehat{G}_0^f(\mathcal{F})$ le groupe abélien $\mathbb{Z}^{\mathfrak{p}}$ produit de copies de $\mathbb{Z}$ indexées par les partitions régulières.

Pour toute partition régulière λ, la fonction de multiplicité $m_\lambda : \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}^{tf} \to \mathbb{Z}$ est *additive* en ce sens que si $0 \to A \to B \to C \to 0$ est une suite exacte courte de $\mathcal{F}$, alors $m_\lambda(B) = m_\lambda(A) + m_\lambda(C)$. Elle induit donc un morphisme de groupes, encore noté m_λ par abus, de $G_0^{tf}(\mathcal{F})$ vers $\mathbb{Z}$.

Notation 8.2. Nous noterons, dans cette section, $j_G : G_0^{tf}(\mathcal{F}) \to \widehat{G}_0^f(\mathcal{F})$ le morphisme de groupes dont les composantes sont données par les m_λ ($\lambda \in \mathfrak{p}$). Nous l'appellerons *morphisme canonique*.

Remarque 8.3. La composée $\mathbb{Z}[\mathfrak{p}] \simeq G_0^f(\mathcal{F}) \to G_0^{tf}(\mathcal{F}) \xrightarrow{j_G} \widehat{G}_0^f(\mathcal{F}) = \mathbb{Z}^{\mathfrak{p}}$ (où le premier morphisme est induit par l'inclusion $\mathrm{Ob}\,\mathcal{F}^f \hookrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}^{tf}$) coïncide avec l'inclusion canonique. Via cette inclusion, on peut voir le groupe $\widehat{G}_0^f(\mathcal{F})$ comme un complété convenable de $G_0^f(\mathcal{F})$.

Le foncteur $\omega : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r} \to \mathcal{F}$ est exact, respecte la structure tensorielle, en prenant à la source le produit tensoriel total $\tilde{\otimes}$ (introduit dans [Dja06a]), et transforme un objet fini de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ en un objet de type fini de $\mathcal{F}$. Par conséquent, il induit un morphisme d'anneaux $\omega_* : G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}) \to G_0^{tf}(\mathcal{F})$. Nous noterons encore, par abus, $\omega_* : G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}) \to \widehat{G}_0^f(\mathcal{F})$ le morphisme de groupes composé du morphisme précédent et du morphisme canonique $j_G : G_0^{tf}(\mathcal{F}) \to \widehat{G}_0^f(\mathcal{F})$. Notre objectif consiste à démontrer que ce morphisme ω_* est injectif.

Cette section utilise lourdement certaines propriétés de la *représentation de Steinberg* de GL_n. Avec nos conventions d'indexation des représentations simples de GL_n, $R_{<n>}$ est la représentation de Steinberg, où $< n >$ désigne la partition régulière « triangulaire » $(n, n-1, \dots, 1)$ de $n(n+1)/2$. On pourra se reporter à [Mit86] pour la démonstration de l'identité entre la définition fonctorielle $R_{<n>}$ et des approches plus classiques de la représentation de Steinberg.

Le lecteur pourra également consulter [Hum87] pour un survol des propriétés de cette représentation.

La suite de cette section fait usage de la notation Q_λ introduite au paragraphe 2.1, et du symbole λ_{+i} (où λ est une partition) introduit dans la notation 1.14.

Lemme 8.4. *Soient $n > 0$ et $i \geq 0$ des entiers et λ une partition régulière telle que $\lambda_1 = n$. Si $\lambda =< n >$, alors $m_{<n>_{+i}}(Q_\lambda) = 1$, sinon $m_{<n>_{+i}}(Q_\lambda) = 0$.*

Démonstration. Notons $f_\lambda(i) = m_{<n>_{+i}}(Q_\lambda)$. Le lemme découle des quatre points suivants.

1. La fonction $f_\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est décroissante pour toute partition régulière λ telle que $\lambda_1 = n$.
2. On a $f_\lambda(0) = 1$ si $\lambda =< n >$, 0 sinon.
3. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $m_{<n>_{+i}}(P_{E_n}) > 0$.
4. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $m_{<n>_{+i}}(P_{E_n})$ est une combinaison linéaire des $f_\lambda(i)$, λ parcourant les partitions régulières telles que $\lambda_1 = n$.

On commence par remarquer que si μ est une partition régulière telle que $\mu_1 < n$, alors le foncteur de Powell Q_μ, qui est un quotient de $P^{\otimes \mu_1}$, n'a pas de facteur de composition S_ν, si ν est une partition régulière de longueur n.

Comme le noyau de l'épimorphisme (corollaire 6.4) $\pi_{n,\rho_n(R_\lambda)} : \tilde{\nabla}_n Q_\lambda \twoheadrightarrow Q_\lambda$ de la section 6 admet une filtration finie dont les quotients sont des foncteurs de ce type (cf. proposition 6.6), on a $f_\lambda(i) = m_{<n>_{+i}}(\tilde{\nabla}_n Q_\lambda)$. Mais $m_{<n>_{+i}}(\tilde{\nabla}_n Q_\lambda) \geq m_{<n>_{+i+1}}(Q_\lambda)$ par les propositions 1.15 et 1.12. 1, d'où le premier point.

Le second vient des égalités

$$f_\lambda(0) = \dim \hom_{\mathcal{F}}(Q_{<n>}, Q_\lambda) = \dim \hom_{GL_n}(R_{<n>}, R_\lambda)$$

(cf. [Pow98c]).

Quant au troisième, c'est une conséquence du théorème 1.6.

Le dernier provient de ce que $P_{E_n} \simeq \varpi(P_{E_n}^{surj})$ admet une filtration finie dont les quotients sont des foncteurs de Powell Q_μ avec $\mu_1 \leq n$ et de la remarque précédente sur les Q_μ pour $\mu_1 < n$. $\square$

Lemme 8.5. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme du groupe de Grothendieck $G_0^f({}_{\mathbb{F}_2[GL_n]}\mathbf{Mod})$ induit par le produit tensoriel par la représentation de Steinberg $R_{<n>}$ est injectif.*

Démonstration. D'après un théorème de Ballard et Lusztig, l'idéal de l'anneau $G_0^f({}_{\mathbb{F}_2[GL_n]}\mathbf{Mod})$ engendré par $R_{<n>}$ est égal à l'image canonique de $K_0({}_{\mathbb{F}_2[GL_n]}\mathbf{Mod})$ dans $G_0^f({}_{\mathbb{F}_2[GL_n]}\mathbf{Mod})$. Pour une démonstration de ce résultat, voir [CR87], chapitre 8, théorème 72.10 (la proposition 9.3 de cet ouvrage montre que les groupes linéaires sur $\mathbb{F}_2$ vérifient les hypothèses dudit théorème). On en déduit, par la théorie générale des représentations modulaires (cf. théorème 21.22 de [CR90]), que le conoyau de l'endomorphisme de $G_0^f({}_{\mathbb{F}_2[GL_n]}\mathbf{Mod})$ induit par le produit tensoriel par $R_{<n>}$ est *fini*. Comme $G_0^f({}_{\mathbb{F}_2[GL_n]}\mathbf{Mod})$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini, cet endomorphisme est injectif. $\square$

Notation 8.6. Étant donnés des entiers n et i, nous noterons $\mathfrak{p}_{n,i} = \{\lambda \in \mathfrak{p} \mid \lambda_n \geq i\}$ (où l'on convient que $\lambda_n = +\infty$ si $n \leq 0$), et $\widehat{G}_0^f(\mathcal{F})_{n,i} = \mathbb{Z}^{\mathfrak{p}_{n,i}}$. C'est donc un quotient du groupe $\widehat{G}_0^f(\mathcal{F})$.

Si d est un autre entier, nous poserons $\mathfrak{p}_{n,i,\leq d} = \{\lambda \in \mathfrak{p}_{n,i} \,|\, |\lambda| \leq d\}$ et $\widehat{G}_0^f(\mathcal{F})_{n,i,\leq d} = \mathbb{Z}^{\mathfrak{p}_{n,i,\leq d}}$.

Nous noterons enfin $\mathfrak{p}_{<i} = \{\lambda \in \mathfrak{p} \,|\, \lambda_1 < i\}$, $\mathfrak{p}_{n,i}^{\leq n} = \{\lambda \in \mathfrak{p}_{n,i} \,|\, l(\lambda) = n\}$ et $\mathfrak{p}_{n,i,\leq d}^{\leq n} = \mathfrak{p}_{n,i}^{\leq n} \cap \mathfrak{p}_{n,i,\leq d}$.

Lemme 8.7. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le morphisme*

$$\alpha : \mathbb{Z}[\mathfrak{p}_{<n+1}] \to G_0^f({}_{\mathbb{F}_2[GL_n]}\mathbf{Mod}) \qquad [\lambda] \mapsto [I_\lambda(E_n)]$$

a un conoyau fini.

Démonstration. Notons $M = (M_{\lambda,\mu})_{\lambda,\mu \in \mathfrak{p}_{<n+1}}$ la matrice définie par le fait que I_λ possède une filtration finie dont les sous-quotients sont les duaux J_μ de Q_μ, chacun apparaissant avec la multiplicité $M_{\lambda,\mu}$. L'analyse effectuée dans le § 4 de l'article [Pow98c] (où la matrice M est notée $(\alpha_{\lambda,\mu})$) montre que M est une matrice inversible sur $\mathbb{Q}$, car il en est de même pour les matrices de Cartan des groupes finis GL_i.

Les colonnes de la matrice M^{-1} ont pour images par $\alpha \otimes \mathbb{Q}$ les images des $J_\lambda(E_n)$ (où $\lambda \in \mathfrak{p}_{<n+1}$) dans $G_0^f({}_{\mathbb{F}_2[GL_n]}\mathbf{Mod}) \otimes \mathbb{Q}$. Comme $J_\lambda(E_n) \simeq R_\lambda$ si $\lambda_1 = n$, cela montre que le morphisme $\alpha \otimes \mathbb{Q}$ est surjectif, d'où la conclusion. □

Notation 8.8. Dans la suite de cette section, si α est une partition régulière telle que $\alpha_1 = n$, nous noterons $P_\alpha^{GL_n}$ la couverture projective de R_α dans ${}_{\mathbb{F}_2[GL_n]}\mathbf{Mod}$.

Nous désignerons par Δ_μ, pour $\mu \in \mathfrak{p}$, l'endofoncteur exact $(\cdot : I_\mu)$ de $\mathcal{F}$. C'est un facteur direct de Δ_{E_n}, où $n = \mu_1$.

Proposition 8.9. *Le morphisme*

$$\beta : G_0^f({}_{\mathbb{F}_2[GL_n]}\mathbf{Mod}) \to \mathbb{Z}^{\mathfrak{p}_{<n+1}} \qquad [M] \mapsto (m_{<n>+i}(\Delta_\mu \omega_n \rho_n(M)))_\mu$$

est injectif.

Démonstration. Par la proposition 2.8 et la proposition 9.2 de [Dja06a] (cf. démonstration de la proposition 5.5), il existe un épimorphisme

$$\Delta_\mu Q_\lambda \twoheadrightarrow \omega_n(\rho_n(R_\lambda) : \iota_n(I_\mu))$$

dont le noyau est l'image par $\omega_{\leq n-1}$ d'un foncteur fini pseudo-constant de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,\leq n-1}$. On en déduit (cf. démonstration du lemme 8.4) l'égalité

$$m_{<n>+i}(\Delta_\mu Q_\lambda) = m_{<n>+i}(\omega_n(\rho_n(R_\lambda) : \iota_n(I_\mu))).$$

On a $(\rho_n(R_\lambda) : \iota_n(I_\mu)) \simeq \rho_n(R_\lambda : I_\mu(E_n))$ par la proposition 2.7. Le lemme 8.4 donne alors

$$m_{<n>+i}(\Delta_\mu Q_\lambda) = m_{R_{<n>}}(R_\lambda \otimes I_\mu(E_n)^*).$$

On a donc, puisque $\mathbb{F}_2$ est un corps de décomposition de $\mathbb{F}_2[GL_n]$,

$$m_{<n>+i}(\Delta_\mu Q_\lambda) = \dim \hom_{GL_n}(R_{<n>}, R_\lambda \otimes I_\mu(E_n)^*).$$

Le lemme 8.7 montre alors que le noyau du morphisme β est inclus dans le noyau du morphisme

$$G_0^f({}_{\mathbb{F}_2[GL_n]}\mathbf{Mod}) \to \mathbb{Z} \qquad \dim \hom_{GL_n}(R_{<n>}, R_\lambda \otimes M^*)$$

pour tout GL_n-module M.

Or on a

$$\dim \hom_{GL_n}(R_{<n>}, R_\lambda \otimes (P_\mu^{GL_n})^*) = \dim \hom_{GL_n}(R_{<n>} \otimes P_\mu^{GL_n}, R_\lambda)$$

$$= \dim \hom_{GL_n}(P_\mu^{GL_n}, R_\lambda \otimes R_{<n>}) = m_{R_\mu}(R_\lambda \otimes R_{<n>})\,,$$

où l'on a utilisé l'auto-dualité et la projectivité de la représentation de Steinberg (cf. [Jan03], chapitre 10, (10.1) et (10.2)).

L'injectivité du morphisme β découle maintenant du lemme 8.5 $\square$

Lemme 8.10. *Soient n et i deux entiers positifs. Il existe un entier d tel que le morphisme de groupes*

$$G_0^f({}_{\mathbb{F}_2[GL_n]}\mathbf{Mod}) \xrightarrow{(\omega_n\rho_n)_*} G_0^{tf}(\mathcal{F}) \xrightarrow{j_G} \widehat{G}_0^f(\mathcal{F}) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}^{\mathfrak{p}^{\leq n}_{n,i,\leq d}}$$

est injectif.

Démonstration. Soit $\mu \in \mathfrak{p}_{<n+1}$. Pour tout GL_n-module fini M, on a

$$m_{<n>_{+i}}(\Delta_\mu \omega_n\rho_n(M)) = \sum_{\lambda\in\mathfrak{p}} m_{<n>_{+i}}(\Delta_\mu S_\lambda)\, m_\lambda(\omega_n\rho_n(M))$$

(somme dont seul un nombre fini des termes sont non nuls). Si $\lambda \in \mathfrak{p}$ est telle que $\lambda \vdash \omega_n\rho_n(M)$ et $<n>_{+i} \vdash \Delta_\mu S_\lambda$, on a $l(\lambda) \leq n$ parce que $\omega_n\rho_n(M)$ s'obtient par extensions de quotients de P_{E_n} ; en appliquant $(\tilde{\nabla}_n)^i$ à la relation $<n>_{+i} \vdash \widetilde{\Delta}^n S_\lambda$, on obtient, compte-tenu des propositions 1.12 et 1.15, $(\tilde{\nabla}_n)^i S_\lambda \neq 0$, puis $\lambda_n \geq i$. Par ailleurs, comme $l(\lambda) = n$, si $\nu \vdash \widetilde{\Delta}^n S_\lambda$ et $l(\nu) = n$, alors $|\nu| \geq |\lambda| - n^2$ grâce à la proposition 4.3.1.2 de [Pow00b] et au théorème 1.6, donc $n(n+1)/2 + ni = |<n>_{+i}| \geq |\lambda| - n^2$.

Par conséquent, si $d \geq n(n+1)/2 + ni + n^2$, on peut compléter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
G_0^f({}_{\mathbb{F}_2[GL_n]}\mathbf{Mod}) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\beta"'] & \mathbb{Z}^{\mathfrak{p}^{\leq n}_{n,i,\leq d}} \arrow[dl, dashed] \\
\mathbb{Z}^{\mathfrak{p}_{<n+1}} &
\end{tikzcd}$$

où β est le morphisme de la proposition 8.9. L'injectivité de β donnée par cette proposition implique donc celle de γ. $\square$

Lemme 8.11. *Pour tous entiers $n, i \geq 0$, le morphisme de groupes*

$$\mathbb{Z}[\mathfrak{p}^{\leq n}_{n,i}] \otimes \mathbb{Z}[\mathfrak{p}_{<i}] \hookrightarrow G_0^f(\mathcal{F}) \otimes G_0^f(\mathcal{F}) \to G_0^f(\mathcal{F}) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}[\mathfrak{p}_{n,i}]$$

composé de l'inclusion déduite de l'isomorphisme $G_0^f(\mathcal{F}) \simeq \mathbb{Z}[\mathfrak{p}]$, du produit de l'anneau $G_0^f(\mathcal{F})$ et de la projection $G_0^f(\mathcal{F}) \simeq \mathbb{Z}[\mathfrak{p}] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}[\mathfrak{p}_{n,i}]$ déduite de l'inclusion $\mathfrak{p}_{n,i} \hookrightarrow \mathfrak{p}$, est injectif.

Démonstration. Si $\lambda \in \mathfrak{p}^{\leq n}_{n,i}$ et $\mu \in \mathfrak{p}_{<i}$, alors la partition (λ, μ) est régulière et appartient à $\mathfrak{p}_{n,i}$. De plus, la fonction $f : \mathfrak{p}^{\leq n}_{n,i} \times \mathfrak{p}_{<i} \to \mathfrak{p}_{n,i}$ associant aux partitions λ et μ la partition (λ, μ) est injective, ce qui permet d'identifier cette partition au couple (λ, μ).

Soit $a : \mathfrak{p}_{n,i}^{\leq n} \times \mathfrak{p}_{<i} \to \mathbb{N}$ une bijection telle que $a(\alpha) < a(\beta)$ si $|\alpha| < |\beta|$ ou $|\alpha| = |\beta|$ et $\alpha > \beta$, et définissons une matrice $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ par l'égalité $u_{a(\lambda,\mu),a(\nu)} = m_\nu(S_\lambda \otimes S_\mu)$: c'est la matrice dans la base canonique (indexée par a) du morphisme

$$\mathbb{Z}[\mathfrak{p}_{n,i}^{\leq n} \times \mathfrak{p}_{<i}] \simeq \mathbb{Z}[\mathfrak{p}_{n,i}^{\leq n}] \otimes \mathbb{Z}[\mathfrak{p}_{<i}] \to \mathbb{Z}[\mathfrak{p}_{n,i}] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}[\mathfrak{p}_{n,i}^{\leq n} \times \mathfrak{p}_{<i}]$$

où la flèche centrale est celle de l'énoncé et le dernier épimorphisme est induit par f.

Le théorème 1.6 montre que la matrice $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est triangulaire, et la proposition 1.8 que ses coefficients diagonaux valent 1, ce qui achève la démonstration. $\square$

Lemme 8.12. *Soient n et i des entiers naturels. Le morphisme*

$$G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}) \hookrightarrow G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}) \xrightarrow{\omega_*} \widehat{G}_0^f(\mathcal{F}) \twoheadrightarrow \widehat{G}_0^f(\mathcal{F})_{n,i}$$

est injectif.

Démonstration. Soient $j \in \mathbb{N}$ et $G(j)_n$ le sous-groupe de $G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n})$ engendré par les classes d'objets simples de degré au plus j ; nous noterons simplement $G(j)$ pour $G(j)_0$. Comme $G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n})$ est la réunion croissante des sous-groupes $G(j)_n$, il suffit de montrer que la restriction à $G(j)_n$ du morphisme de l'énoncé est injective pour tout j.

La proposition 2.6 montre que le foncteur $\xi_n : \mathcal{F} \otimes {}_{\mathbb{F}_2[GL_n]}\mathbf{Mod} \to \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ induit un isomorphisme

$$G_0^f({}_{\mathbb{F}_2[GL_n]}\mathbf{Mod}) \otimes G(j) \xrightarrow{\simeq} G(j)_n.$$

Par la proposition 2.4. 4, on en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
G_0^f({}_{\mathbb{F}_2[GL_n]}\mathbf{Mod}) \otimes G(j) \arrow[r, hook] \arrow[d, "(\omega_n\rho_n)_*\otimes G(j)"'] & G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}) \arrow[d, "(\omega_n)_*"] \\
G_0^{tf}(\mathcal{F}) \otimes G(j) \arrow[r] \arrow[d, "j_G\otimes G(j)"'] & G_0^{tf}(\mathcal{F}) \arrow[d, "j_G"] \\
\widehat{G}_0^f(\mathcal{F}) \otimes G(j) \arrow[d] & \widehat{G}_0^f(\mathcal{F}) \arrow[d, two heads] \\
\mathbb{Z}[\mathfrak{p}_{n,i,\leq d}^{\leq n}] \otimes \mathbb{Z}[\mathfrak{p}_{<i}] \arrow[r, hook] & \widehat{G}_0^f(\mathcal{F})_{n,i}
\end{tikzcd}$$

pour $i > j$ et un entier d convenable, dans lequel :

- les flèches horizontales sont induites par le produit tensoriel — celle du bas est injective par le lemme 8.11 ;
- les flèches verticales inférieures sont induites par les projections canoniques et l'inclusion $G(j) \subset \mathbb{Z}[\mathfrak{p}_{<i}]$ déduite de l'inégalité $i > j$ (on note que $\mathbb{Z}[\mathfrak{p}_{n,i,\leq d}^{\leq n}] \otimes \mathbb{Z}[\mathfrak{p}_{<i}] \simeq \mathbb{Z}^{\mathfrak{p}_{n,i,\leq d}^{\leq n}} \otimes \mathbb{Z}^{\mathfrak{p}_{<i}}$ par finitude des ensembles $\mathfrak{p}_{n,i,\leq d}^{\leq n}$ et $\mathfrak{p}_{<i}$) ;

– l'entier d est choisi, conformément au lemme 8.10, pour que la composée verticale de gauche soit injective.

La composée $G_0^f({}_{\mathbb{F}_2[GL_n]}\mathbf{Mod}) \otimes G(j) \to \widehat{G}_0^f(\mathcal{F})_{n,i}$ obtenue en suivant le diagramme est donc injective (suivre la moitié gauche) ; elle s'identifie à la restriction à $G(j)_n$ du morphisme de l'énoncé (suivre la moitié droite). Celle-ci est donc injective si $i > j$, donc pour tout i, ce qui achève la démonstration. □

Nous pouvons désormais établir le résultat principal de cette section.

Théorème 8.13. *Le morphisme de groupes $\omega_* : G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}) \to \widehat{G}_0^f(\mathcal{F})$ est injectif.*

Démonstration. Il suffit d'établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la composée

$$G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,\leq n}) \hookrightarrow G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}) \xrightarrow{\omega_*} \widehat{G}_0^f(\mathcal{F})$$

est injective, ou encore que pour tout n et tout $j \in \mathbb{N}$, la restriction $f_{n,j}$ de ce morphisme au sous-groupe $G(j)_{\leq n}$ de $G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,\leq n})$ engendré par les classes de foncteurs simples de degré au plus j est injective.

Pour $i > j$, la composée $G(j)_{\leq n-1} \hookrightarrow G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}) \to \widehat{G}_0^f(\mathcal{F}) \twoheadrightarrow \widehat{G}_0^f(\mathcal{F})_{n,i}$ est nulle : si $\lambda \vdash P^{\otimes k} \otimes F$ avec $k < n$ et $\deg F < i$, alors $\lambda \notin \mathfrak{p}_{n,i}$). Le lemme précédent permet d'en déduire que le noyau de $f_{n,j}$ est inclus dans $G(j)_{\leq n-1}$, d'où $ker\, f_{n,j} = ker\, f_{n-1,j}$. On conclut par récurrence sur n. □

Corollaire 8.14. *1. Le morphisme d'anneaux $\omega_* : G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}) \to G_0^{tf}(\mathcal{F})$ est injectif.*

2. Si la conjecture artinienne extrêmement forte est vérifiée, c'est un isomorphisme, et le morphisme de groupes $j_G : G_0^{tf}(\mathcal{F}) \to \widehat{G}_0^f(\mathcal{F})$ est injectif.

Démonstration. Comme la conjecture artinienne extrêmement forte implique que le morphisme $\omega_* : G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}) \to G_0^{tf}(\mathcal{F})$ est surjectif, la conclusion découle du théorème précédent. □

9 Théorème de simplicité généralisé

Le but de cette section est d'établir le théorème 9.7, qui constitue un succédané de la conjecture artinienne extrêmement forte, où la filtration de Krull est remplacée par la filtration par ∇-nilpotence de $\mathcal{F}$. Nous suivons la même marche qu'à la section 3, où les assertions 3 et 4 du lemme 3.5 sont remplacées par les corollaires 6.4 et 6.8 respectivement, et la proposition 2.11. 1 par le théorème 7.1.

Convention 9.1. Dans toute cette section, on se donne un entier strictement positif n.

On rappelle que le morphisme $\pi_{n,X} : \tilde{\nabla}_n\omega_n(X) \to \omega_n(X)$ a été défini dans la section 6.

Notation 9.2. Si k est un entier naturel et X un objet de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$, nous désignerons par $\pi_{n,X}^k : (\tilde{\nabla}_n)^k\omega_n(X) \to \omega_n(X)$ le morphisme $\pi_{n,X} \circ \tilde{\nabla}_n\, \pi_{n,X} \circ \cdots \circ (\tilde{\nabla}_n)^{k-1}\pi_{n,X}$.

Afin de mener des estimations explicites à l'aide de ces morphismes, nous identifions le morphisme $\pi_{n,X}$ sur les objets grâce au lemme suivant, qui emploie le morphisme $\beta_{n,X}$ du diagramme (10) de la section 6.

Lemme 9.3. *Soit $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$.*

1. *Le morphisme $\beta_{n,X} : \Delta_{E_n}\omega_n(X) \to \omega_n(X)$ est la composée de la projection canonique $\Delta_{E_n}\omega_n(X) \twoheadrightarrow \tilde{\nabla}_n\, \omega_n(X)$ et du morphisme $\pi_{n,X} : \tilde{\nabla}_n\, \omega_n(X) \to \omega_n(X)$.*
2. *Étant donnés $V \in \operatorname{Ob} \mathcal{E}^f$ et $W \in \mathcal{G}r_n(V)$, le morphisme*

$$X(V \oplus E_n, W) \hookrightarrow \omega_n(X)(V \oplus E_n) = \Delta_{E_n}\omega_n(X)(V) \xrightarrow{(\beta_{n,X})_V} \omega_n(X)(V)$$

est nul si l'une des deux applications linéaires $W \hookrightarrow V \oplus E_n \twoheadrightarrow E_n$ et $W \hookrightarrow V \oplus E_n \twoheadrightarrow V$ est de rang $< n$, et est induite par la projection $V \oplus E_n \twoheadrightarrow V$ sinon.

Démonstration. La vérification de la première assertion est immédiate. La seconde résulte des observations suivantes, où l'on note $\tilde{X}$ le prolongement par zéro à $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ de X :

1. le morphisme $\beta_{n,X}$ s'obtient en prenant la restriction à $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ du morphisme $(\tilde{X} : \iota_n(I_{E_n})) \to (\tilde{X} : I^{\mathcal{G}r}_{(E_n,E_n)}) \to \tilde{X}$ induit par le diagramme (5) de la proposition 5.7 puis en appliquant le foncteur ω_n ;
2. par la proposition 2.9, évalué sur un objet (V, B) de $\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r}$, le morphisme $(\tilde{X} : \iota_n(I_{E_n})) \to (\tilde{X} : I^{\mathcal{G}r}_{(E_n,E_n)})$ est donné par la projection

$$\bigoplus_{\substack{W \in \mathcal{G}r(V \oplus E_n) \\ im\,(W \hookrightarrow V \oplus E_n \twoheadrightarrow V) = B}} \tilde{X}(V \oplus E_n, W) \twoheadrightarrow \bigoplus_{\substack{W \in \mathcal{G}r(V \oplus E_n) \\ im\,(W \hookrightarrow V \oplus E_n \twoheadrightarrow V) = B \\ im\,(W \hookrightarrow V \oplus E_n \twoheadrightarrow E_n) = E_n}} \tilde{X}(V \oplus E_n, W);$$

3. le morphisme $(\tilde{X} : I^{\mathcal{G}r}_{(E_n,E_n)}) \to \tilde{X}$, évalué sur un objet (V, B), est donné par l'application linéaire

$$\bigoplus_{\substack{W \in \mathcal{G}r(V \oplus E_n) \\ im\,(W \hookrightarrow V \oplus E_n \twoheadrightarrow V) = B \\ im\,(W \hookrightarrow V \oplus E_n \twoheadrightarrow E_n) = E_n}} \tilde{X}(V \oplus E_n, W) \to \tilde{X}(V, B)$$

dont chaque composante est induite par la projection $V \oplus E_n \twoheadrightarrow V$. Cela provient du lemme 2.10 et du lemme de Yoneda.

$\square$

Lemme 9.4. *Soient V un espace vectoriel de dimension finie, X un objet de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$, H un sous-espace vectoriel de dimension n de V^* et x un élément de $\omega_n(X)(V)$. Notons $a_x : P_V \to \omega_n(X)$ le morphisme de $\mathcal{F}$ représenté par x, et $s_H = \sum_{h \in H}[h] \in k_n P(V^*) \subset \mathbb{F}_2[V^*]$.*

Le morphisme

$$P_V \xrightarrow{t \mapsto s_H \otimes t} k_n P(V^*) \otimes P_V \simeq \tilde{\nabla}_n\, P_V \xrightarrow{\tilde{\nabla}_n(a_x)} \tilde{\nabla}_n\, \omega_n(X) \xrightarrow{\pi_{n,X}} \omega_n(X)$$

représente l'élément $\Pi^{\omega}_{X,V,H}(x)$ de $\omega_n(X)(V)$, où $\Pi^{\omega}_{X,V,H}$ désigne la projection de $\omega_n(X)(V)$ sur les facteurs directs $X(V, W)$, où $W \in \mathcal{G}r_n(V)$ est tel que $H \cap W^{\perp} = \{0\}$.

Démonstration. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \Delta_{E_n} P_V \arrow[r, "\Delta_{E_n} a_x"] \arrow[d, two heads] & \Delta_{E_n} \omega_n(X) \arrow[d, two heads] \arrow[dr, "\beta_{n,X}"] & \\
P_V \arrow[ur, "{[(l_1,\dots,l_n)]\otimes\cdot}"] \arrow[r, "s_H \otimes \cdot"'] & \tilde{\nabla}_n P_V \arrow[r, "\tilde{\nabla}_n(a_x)"'] & \tilde{\nabla}_n \omega_n(X) \arrow[r, "\pi_{n,X}"'] & \omega_n(X)
\end{tikzcd}$$

commute, où :

– $\{l_1, \dots, l_n\}$ désigne une base de H (on a noté $(l_1, \dots, l_n)$ l'élément de $\hom_{\mathcal{E}}(V, E_n)$ dont les composantes sont les l_i) ;

– l'on a identifié $\Delta_{E_n} P_V$ à $\mathbb{F}_2[\hom_{\mathcal{E}}(V, E_n)] \otimes P_V$ (et $\tilde{\nabla}_n P_V$ à $k_n P(V^*) \otimes P_V$) ;

L'élément $[(l_1, \dots, l_n)] \otimes [id_V]$ de $\Delta_{E_n} P_V(V)$ s'envoie par $\Delta_{E_n} a_x$ sur l'élément de $\Delta_{E_n} \omega_n(X)(V) = \omega_n(X)(V \oplus E_n)$ image par $f = (id_V, l_1, \dots, l_n) : V \to V \oplus E_n$ de x.

Soit $W \in \mathcal{G}r_n(V)$. Le lemme 9.3 montre que la composée

$$X(V,W) \hookrightarrow \omega_n(X)(V) \xrightarrow{f_*} \omega_n(X)(V \oplus E_n) \xrightarrow{\beta_{n,X}} \omega_n(X)(V)$$

est nulle si la projection de $f(W)$ sur E_n en est un sous-espace strict, condition équivalente à la non-inversibilité de la restriction à W de $(l_1, \dots, l_n)$, ou encore à $H \cap W^\perp \neq \{0\}$, et que sinon elle est égale à l'inclusion $X(V,W) \hookrightarrow \omega_n(X)(V)$, puisque la composée de $f : V \to V \oplus E_n$ et de la projection $V \oplus E_n \twoheadrightarrow V$ est l'identité. Cela établit le lemme. $\square$

Notation 9.5. Dans cette section, si V est un espace vectoriel de dimension finie, W un sous-espace de dimension n de V et H un sous-espace de dimension n de V^*, nous noterons $< H, W >$ l'élément de $\mathbb{F}_2$ égal à 1 si $H \cap W^\perp = \{0\}$, 0 sinon. Autrement dit, si $(w_1, \dots, w_n)$ (resp. $(l_1, \dots, l_n)$) est une base de W (resp. H), on a $< H, W >= \det(l_i(w_j))$.

La propriété de stabilisation suivante, qui fournit la partie « concrète » de la démonstration du théorème 9.7, généralise la proposition 3.6.

Proposition 9.6. *Soient X un objet de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ et F un sous-objet de $\omega_n(X)$. Pour tout entier $k \geq 0$, on note $C_k = \pi^k_{n,X}((\tilde{\nabla}_n)^k F)$.*

1. *La suite $(C_k)_{k>0}$ de sous-objets de $\omega_n(X)$ est croissante ; nous noterons C_∞ sa réunion. Si X est un objet noethérien de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$, cette suite stationne.*
2. *Pour tout $k \geq 0$, le foncteur C_k est engendré par les éléments du type*
$$(< H_1, W > \cdots < H_k, W > x_W)_{W \in \mathcal{G}r_n(V)} \in \omega_n(X)(V),$$
où V parcourt les espaces vectoriels de dimension finie, $x = (x_W)_{W \in \mathcal{G}r_n(V)}$ les éléments de $F(V)$ et $(H_1, \dots, H_k)$ les k-uplets d'éléments de $\mathcal{G}r_n(V^*)$.
3. *Le foncteur C_∞ est le plus petit sous-$\bar{G}(n)$-comodule de $\omega_n(X)$ contenant F. Si F est lui-même un sous-$\bar{G}(n)$-comodule de $\omega_n(X)$, on a $C_k = F$ pour tout $k \geq 0$.*
4. *Si X est localement fini, alors $\hom(C_\infty/F, \omega_n(T)) = 0$ pour tout objet T de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$.*

Démonstration. Le lemme 9.4 et la préservation des épimorphismes par le foncteur $\tilde{\nabla}_n$ montrent le second point pour $k = 1$. Le cas général s'en déduit aussitôt par récurrence.

On en déduit que la suite $(C_k)_{k>0}$ est croissante. Si W est un sous-espace de dimension n d'un espace vectoriel de dimension finie V, soient $H_1, \dots, H_k$ les éléments de $\mathcal{G}r_n(V^*)$ tels que $< H_i, W >= 1$. Alors la fonction $< H_1, \cdot > \cdots < H_k, \cdot >: \mathcal{G}r_n(V) \to \mathbb{F}_2$ est égale à l'indicatrice de $\{W\}$. Si l'on note $F^{gr}(V)$ le plus petit sous-espace vectoriel $\mathcal{G}r_n(V)$-gradué de $\omega_n(X)(V)$ contenant $F(V)$, ce qui précède montre que C_∞ est le plus petit sous-foncteur de $\omega_n(X)$ tel que $F^{gr}(V) \subset C_\infty(V)$ pour tout $V \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{E}^f$; en particulier, $C_\infty \supset F$.

Soit Y le plus petit sous-objet de X tel que $Y(V, W)$ contienne les composantes dans $X(V, W)$ des éléments de $F(V) \subset \omega_n(X)(V)$. La proposition 2.4 montre d'une part que $\omega_n(Y)$ est le plus petit sous-$\bar{G}(n)$-comodule de $\omega_n(X)$ contenant F. Le paragraphe précédent montre d'autre part que $C_\infty = \omega_n(Y)$, d'où le troisième point.

Soit $f : C_\infty/F \to \omega_n(T)$ un morphisme de $\mathcal{F}$. Si X est localement fini, il en est de même pour Y, donc la proposition 2.11 montre que la composée $g : \omega_n(Y) = C_\infty \twoheadrightarrow C_\infty/F \xrightarrow{f} \omega_n(T)$ est induite par un morphisme $u : Y \to T$ de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$. Comme la composée $F \hookrightarrow \omega_n(Y) \xrightarrow{g} \omega_n(T)$ est nulle, F est inclus dans $\omega_n(ker\, u)$. D'après le troisième point, on en déduit $ker\, u = Y$, puis $f = 0$, d'où la dernière assertion.

Par ailleurs, si X est noethérien, alors Y est de type fini, donc $C_\infty = \omega_n(Y)$ est de type fini. Cela montre que la suite $(C_k)_{k>0}$ est stationnaire, et achève la démonstration. □

On rappelle que la notation $\mathcal{F}^{lf}_{\mathcal{G}r,n}$ utilisée dans le théorème fondamental suivant désigne la sous-catégorie localisante des objets localement finis de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$.

Théorème 9.7 (Théorème de simplicité généralisé)**.** *Le foncteur*

$$\overline{\omega}_n : \mathcal{F}^{lf}_{\mathcal{G}r,n} \hookrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \xrightarrow{\omega_n} \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}/\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$$

induit une équivalence entre la catégorie $\mathcal{F}^{lf}_{\mathcal{G}r,n}$ et une sous–catégorie localisante de $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_{n+1}}/\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$. En particulier, il envoie un foncteur simple de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ sur un objet simple de $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$.

Démonstration. La proposition 6.1 montre que la restriction à $\mathcal{F}^{lf}_{\mathcal{G}r,n}$ du foncteur ω_n est bien à valeurs dans $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_{n+1}}$. La proposition 2.11 et le théorème 7.1 entraînent la pleine fidélité de $\overline{\omega}_n$ et la stabilité par extensions de son image. Notons $\mathcal{C}_n$ l'image de la restriction de ce foncteur aux objets *finis* de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$: comme $\overline{\omega}_n$ commute aux colimites, il suffit d'établir qu'un sous-objet d'un objet de $\mathcal{C}_n$ est isomorphe à un objet de $\mathcal{C}_n$. On procède par récurrence sur le degré polynomial. On se donne donc un objet fini X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ de degré $d \geq 0$ et l'on suppose que l'hypothèse suivante est satisfaite.

Hypothèse 9.8 (Hypothèse de récurrence)**.** L'image par le foncteur $\overline{\omega}_n$ de la sous-catégorie $(\mathcal{F}^{f}_{\mathcal{G}r,n})^{d-1}$ des foncteurs de degré $< d$ de $\mathcal{F}^{f}_{\mathcal{G}r,n}$ est une sous-catégorie épaisse de $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$.

Notation 9.9. Dans cette section, nous noterons $\mathcal{A}_{n,d}$ cette sous-catégorie épaisse, et $\mathcal{Q}_{n,d}$ la catégorie quotient de $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$ par $\mathcal{A}_{n,d}$. Nous noterons également $\mathcal{X}_n$ la sous-catégorie pleine des objets A de $\mathcal{F}$ tels que $\hom(A, \omega_n(T)) = 0$ pour tout objet T de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$.

Lemme 9.10. *1. Si F est un objet de $\mathcal{F}$ tel que $\tilde{\nabla}_n(F)$ appartienne à $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$, alors F appartient à $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$.*

2. La sous-catégorie $\mathcal{X}_n$ de $\mathcal{F}$ est stable par le foncteur $\tilde{\nabla}_n$.

3. Un objet de $\mathcal{X}_n$ dont l'image dans $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$ appartient à $\mathcal{A}_{n,d}$ est objet de $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$.

4. Pour tout entier $k > 0$, le morphisme $\pi^k_{n,X}$ induit un isomorphisme dans la catégorie $\mathcal{Q}_{n,d}$.

Démonstration du lemme. Soit F est un objet de $\mathcal{F}$ tel que $\tilde{\nabla}_n F$ appartienne à $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$. Si F est de type fini, $\tilde{\nabla}_n F$ est aussi de type fini (car c'est un quotient de $\Delta^n F$), donc $\tilde{\nabla}_n$-nilpotent puisqu'objet de $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$. Par conséquent, F est $\tilde{\nabla}_n$-nilpotent. Dans le cas général, on montre que F est objet de $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$ en écrivant F comme colimite de ses sous-objets de type fini.

Pour le deuxième point, on remarque que la sous-catégorie $\mathcal{X}_n$ est stable par quotient et préservée par le foncteur Δ_{E_n}, en raison de l'isomorphisme $\hom_{\mathcal{F}}(\Delta_{E_n} A, \omega_n(T)) \simeq \hom_{\mathcal{F}}(A, \omega_n(T \otimes \iota_n(I_{E_n})))$.

Le troisième point résulte de la définition de la sous-catégorie $\mathcal{A}_{n,d}$.

La proposition 6.8 montre que le noyau de l'épimorphisme $\pi_{n,X}$ (corollaire 6.4) appartient à $\mathcal{A}_{n,d}$ (on rappelle que X est de degré d). Pour en déduire, par récurrence sur k, la dernière assertion, il suffit de noter que l'image par le foncteur $\tilde{\nabla}_n$ d'un morphisme f de $\mathcal{F}$ qui induit un isomorphisme dans $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$ vérifie encore la même propriété. Ce résultat s'obtient en notant que les endofoncteurs *exacts* Δ et Δ^n de $\mathcal{F}$ préservent $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$ (par la dernière assertion de la proposition 1.12), de sorte que $\mathit{ker}\,(\Delta f) \simeq \Delta(\mathit{ker}\, f)$, dont $\mathit{ker}\,\tilde{\nabla}_n(f)$ est un sous-objet, et $\mathit{coker}\,(\Delta^n f) \simeq \Delta^n(\mathit{coker}\, f)$, dont $\mathit{coker}\,\tilde{\nabla}_n(f)$ est un quotient, sont objets de $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$. □

Fin de la démonstration du théorème 9.7. — Soit F un sous-objet de $\omega_n(X)$; on conserve les notations de la proposition 9.6, et l'on se donne $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $C_\infty = C_k$ (qui est donc de la forme $\omega_n(Y)$ pour un sous-objet Y de X). Alors $(\tilde{\nabla}_n)^k F$ et $(\tilde{\nabla}_n)^k C_\infty$ ont la même image C_∞ par π^k_X, qui induit un isomorphisme dans $\mathcal{Q}_{n,d}$ (dernière assertion du lemme 9.10), donc l'inclusion $(\tilde{\nabla}_n)^k F \hookrightarrow (\tilde{\nabla}_n)^k C_\infty$ induit un isomorphisme dans $\mathcal{Q}_{n,d}$. Ainsi, l'image dans $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$ de $(\tilde{\nabla}_n)^k C_\infty/(\tilde{\nabla}_n)^k F$ est objet de $\mathcal{A}_{n,d}$. Il en est de même pour $(\tilde{\nabla}_n)^k(C_\infty/F)$, qui est un quotient de $(\tilde{\nabla}_n)^k C_\infty/(\tilde{\nabla}_n)^k F$ (parce que $\tilde{\nabla}_n$ préserve injections et surjections). Mais $(\tilde{\nabla}_n)^k(C_\infty/F)$ est aussi un objet de $\mathcal{X}_n$ par la dernière assertion de la proposition 9.6 et la deuxième assertion du lemme 9.10. Il montre alors que $(\tilde{\nabla}_n)^k(C_\infty/F)$ appartient à $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$ (troisième assertion), donc aussi C_∞/F (première assertion). Cela achève la démonstration. □

On démontre de manière similaire la variante suivante du théorème 9.7 :

Théorème 9.11. *Le foncteur ω_n induit une équivalence entre la sous-catégorie pleine des objets finis de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ et une sous-catégorie épaisse de $\mathcal{N}il_{\tilde{\nabla}_{n+1}}/\mathcal{N}il_{\tilde{\nabla}_n}$.*

Remarque 9.12. L'une des conséquences principales de ce théorème est le fait que l'image d'un $\bar{G}(n)$-comodule simple dans la catégorie quotient $\mathcal{F}/\mathcal{N}il_{\tilde{\nabla}_n}$ est simple. Pour un $\bar{G}(n)$-comodule simple associé à un objet simple pseudo-constant de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ (i.e. pour un foncteur de Powell), ce résultat est dû à Powell (cf. [Pow98c], théorème 6.0.1, et son corollaire, la proposition 6.1.1), qui l'a nommé *théorème de simplicité*. Cela justifie la terminologie employée.

La démonstration du théorème 9.7 repose exactement sur le même principe que le théorème de simplicité de Powell, à savoir la considération explicite d'éléments dans les foncteurs, rendue raisonnable par le calcul aisé du foncteur $\tilde{\nabla}_n$ sur les projectifs standard, adapté aux catégories de foncteurs en grassmanniennes par les résultats préliminaires de la section 6.

Le théorème 9.7 (ou 9.11) est un résultat *global* sur la structure de la catégorie $\mathcal{F}$ (il donne des informations sur tous ses objets de type fini) ; comme le théorème 3.1, qui en constitue le cas particulier $n = 1$, il n'utilise pas la théorie des représentations linéaires (la généralisation à tous les $\bar{G}(n)$-comodules simples du théorème de simplicité de Powell fait disparaître les quelques considérations explicites sur les représentations de GL_n utilisées dans [Pow98c]).

Remarque 9.13. On peut généraliser le théorème 9.7 à un corps fini quelconque, mais il convient de remplacer les foncteurs $\tilde{\nabla}_n$ par $\tilde{\nabla}_{(q-1)n}$, où q désigne le cardinal du corps considéré. D'autres variantes sont possibles, en utilisant également la décomposition scalaire (cf. section 4, pour le cas $n = 1$).

10 Foncteurs $\tilde{\nabla}_n$-adaptés

Convention 10.1. Comme dans la section précédente, n désigne un entier strictement positif.

La notion de foncteur $\tilde{\nabla}_n$-adapté que nous introduisons ci-dessous est destinée à faciliter certains raisonnements de récurrence pour progresser dans l'étude de la conjecture artinienne extrêmement forte.

Définition 10.2. Soit F un objet de $\mathcal{F}$. On dit que F est un *foncteur* $\tilde{\nabla}_n$*-adapté* si tout quotient $\tilde{\nabla}_n$-nilpotent de F est oméga-adapté de hauteur strictement inférieure à n (cf. § 2.3).

Le théorème de simplicité généralisé montre que la conjecture artinienne extrêmement forte équivaut à dire que tout foncteur de type fini est $\tilde{\nabla}_i$-adapté pour tout entier $i > 0$.

La définition 10.2 est très difficile à vérifier si l'on ignore si un quotient d'un foncteur oméga-adapté de hauteur strictement inférieure à n est encore oméga-adapté de hauteur strictement inférieure à n : elle est maniable lorsque l'hypothèse suivante est satisfaite (le but étant de démontrer l'épaisseur de $\mathcal{F}^{\omega-ad(n)}$).

Hypothèse 10.3. La sous-catégorie $\mathcal{F}^{\omega-ad(i)}$ de $\mathcal{F}$ est épaisse pour $i < n$.

Proposition 10.4. *Soient $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{F}$ et F un objet* **fini** *de $\mathcal{F}$. On suppose que l'hypothèse 10.3 est satisfaite.*

1. *Si A est un foncteur $\tilde{\nabla}_n$-adapté, il en est de même pour tous ses quotients.*
2. *Si A est un foncteur $\tilde{\nabla}_n$-adapté, alors $A \otimes F$ est $\tilde{\nabla}_n$-adapté.*

3. Si A est $\tilde{\nabla}_n$-adapté, alors $(A : F)$ est $\tilde{\nabla}_n$-adapté.

Démonstration. Le premier point est formel.

Pour le second, considérons un épimorphisme $f : A \otimes F \twoheadrightarrow Q$, où Q est $\tilde{\nabla}_n$-nilpotent. Soit $g : A \to \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F, Q)$ le morphisme adjoint à f. Comme F est quotient d'une somme directe finie de projectifs standard, $\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F, Q)$ est un sous-foncteur d'une somme directe finie de $\Delta_V Q$, il est donc $\tilde{\nabla}_n$-nilpotent par la proposition 1.12. 2. Par conséquent, $im\, g$ est un quotient $\tilde{\nabla}_n$-nilpotent de A, c'est donc, par hypothèse, un foncteur oméga-adapté de hauteur strictement inférieure à n. Il en est de même pour $im\, g \otimes F$, puisque F est fini (cf. [Dja06a], § 12.1).

Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & A \otimes F \arrow[dl, "g\otimes F"'] \arrow[d, "f"] \\ \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F, Q) \otimes F \arrow[r] & Q \end{tikzcd}$$

(dont la flèche horizontale est la coünité de l'adjonction) montre que Q est un quotient de $im\, g \otimes F$; Q est donc objet de $\mathcal{F}^{\omega-ad(n-1)}$ grâce à ce qui précède et à l'hypothèse 10.3.

Le troisième point s'établit par un argument d'adjonction analogue, grâce aux deux remarques suivantes.

1. Le foncteur $\cdot \otimes F$ préserve $\mathcal{N}il_{\tilde{\nabla}_n}$, par la proposition 1.18.
2. Le foncteur de division par F préserve $\mathcal{F}^{\omega-ad(n-1)}$. En effet, comme F est de co-type fini, ce foncteur est un quotient d'une somme directe finie de foncteurs de décalage, et la sous-catégorie $\mathcal{F}^{\omega-ad(n-1)}$ de $\mathcal{F}$ est stable par les foncteurs de décalage (cf. [Dja06a], § 12.1).

□

Avant d'appliquer cette propriété à la proposition 10.6, nous mentionnons un lemme élémentaire qui se déduit des résultats de [Kuh94b], § 4.

Lemme 10.5. *Soit M un GL_n-module fini. Il existe un foncteur* **fini** *F de $\mathcal{F}$ tel que $F(E_n)$ est isomorphe à M comme GL_n-module.*

La proposition suivante permet de réduire les vérifications nécessaires pour démontrer que $\mathcal{F}^{\omega-ad(n)}$ est épaisse.

Proposition 10.6. *Soit λ une partition régulière telle que $\lambda_1 = n$. On suppose l'hypothèse 10.3 vérifiée. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *La sous-catégorie $\mathcal{F}^{\omega-ad(n)}$ de $\mathcal{F}$ est épaisse.*
2. *Pour tout objet fini X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$, le foncteur $\omega_n(X)$ est $\tilde{\nabla}_n$-adapté.*
3. *Pour tout objet simple S de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$, le foncteur $\omega_n(S)$ est $\tilde{\nabla}_n$-adapté.*
4. *Le foncteur de Powell Q_λ est $\tilde{\nabla}_n$-adapté.*

Lorsqu'elles sont vérifiées, pour tout foncteur fini (resp. simple) X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,k}$, où $k \leq n$, le foncteur $\omega_k(X)$ est noethérien (resp. simple noethérien) de type k.

Démonstration. Supposons l'assertion 4 vérifiée. On commence par montrer que pour tout GL_n-module simple S, le foncteur de Powell $\omega_n\rho_n(S)$ est $\tilde{\nabla}_n$-adapté. Pour cela, on se donne, conformément au lemme 10.5, un foncteur fini F de $\mathcal{F}$ tel que le GL_n-module $F(E_n)$ est isomorphe à $\mathbb{F}_2[GL_n]$. Le foncteur $\omega_n(\rho_n(R_\lambda) : \iota_n(F))$ est $\tilde{\nabla}_n$-adapté, car c'est un quotient, par la proposition 9.2 de [Dja06a], de $\omega_{\leq n}(\mathcal{P}_{n,\leq n}\,\rho_n(R_\lambda) : \iota_{\leq n}(F)) \simeq (\omega_n\rho_n(R_\lambda) : F) = (Q_\lambda : F)$ (cet isomorphisme venant de la proposition 9.8 de [Dja06a]), de sorte que la proposition 10.4 prouve ce premier point.

Par ailleurs, $(\rho_n(R_\lambda) : \iota_n(F)) \simeq \rho_n(R_\lambda : \mathbb{F}_2[GL_n])$ par la proposition 2.7, et $(R_\lambda : \mathbb{F}_2[GL_n]) \simeq R_\lambda \otimes \mathbb{F}_2[GL_n] \simeq \mathbb{F}_2[GL_n]^{\oplus i}$, où $i = \dim_{\mathbb{F}_2} R_\lambda \in \mathbb{N}^*$. Par conséquent, tout GL_n-module simple S est quotient de $(R_\lambda : \mathbb{F}_2[GL_n])$, donc le quotient $\omega_n\rho_n(S)$ de $\omega_n(\rho_n(R_\lambda) : \iota_n(F))$ est $\tilde{\nabla}_n$-adapté.

Si X est un objet simple de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$, il existe un GL_n-module simple S et un objet simple F de $\mathcal{F}$ tels que $X \simeq \kappa_n(F) \otimes \rho_n(S)$ (proposition 2.6), donc $\omega_n(X)$ est quotient de $\omega_n(\iota_n(F) \otimes \rho_n(S)) \simeq \omega_n\rho_n(S) \otimes F$. La proposition 10.4 montre à nouveau que ce foncteur est $\tilde{\nabla}_n$-adapté.

On a ainsi démontré que 4 implique 3.

Si l'assertion 3 est vérifiée, le théorème 9.7 prouve que tout sous-quotient de $\omega_n(S)$, où S est un objet simple de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$, est objet de $\mathcal{F}^{\omega-ad(n)}$. Comme la sous-catégorie pleine $\mathcal{A}$ des objets de $\mathcal{F}$ dont tous les sous-quotients sont dans $\mathcal{F}^{\omega-ad(n)}$ vérifie l'hypothèse que pour toute suite exacte courte $0 \to A \to B \to C \to 0$ de $\mathcal{F}$, si deux des objets A, B, C appartiennent à $\mathcal{A}$, il en est de même du troisième, on en déduit l'assertion 1.

Il est clair que 2 entraîne 4.

Si l'assertion 1 est vérifiée, le foncteur ω_n induit une équivalence entre les catégories $\mathcal{F}^f_{\mathcal{G}r,n}$ et $\mathcal{F}^{\omega-ad(n)}/\mathcal{F}^{\omega-ad(n-1)}$, donc l'assertion 2 est satisfaite.

Ainsi, les assertions de l'énoncé sont équivalentes.

La fin de la proposition découle de la proposition 2.13. □

11 Structure de $P^{\otimes 2} \otimes F$ pour un foncteur fini F

Dans l'article [Pow98a] (proposition 7.4) est établi le résultat suivant [5].

Proposition 11.1 (Powell)**.** *Soit F un foncteur de type fini de $\mathcal{F}$ tel que $\tilde{\nabla}_2(F) = 0$ et que $\hom_{\mathcal{F}}(F, \bar{P}) = 0$. Alors F est un foncteur fini.*

En étudiant une filtration explicite du foncteur $\bar{G}(2)$ construite à partir de la filtration co-polynomiale de $\bar{P}$, [Pow98a] déduit de la proposition précédente le corollaire suivant (c'est sa proposition 7.5).

Corollaire 11.2 (Powell)**.** *Le foncteur $\bar{G}(2)$ est $\tilde{\nabla}_2$-adapté.*

Nous aurons également besoin de la conséquence facile suivante de la proposition 11.1 (qui est implicite dans [Pow98a]).

Corollaire 11.3. *Si F est un foncteur de type fini de $\mathcal{F}$ tel que $\tilde{\nabla}_2(F) = 0$, alors F est oméga-adapté de hauteur au plus 1. Plus précisément, F est isomorphe dans $\mathcal{F}/\mathcal{F}^f$ à une somme directe finie de copies de $\bar{P}$.*

[5] On rappelle que l'on travaille avec des conventions duales de celles de Powell.

Démonstration. Comme F est de type fini, l'ensemble $\hom_{\mathcal{F}}(F, \bar{P})$ est fini. Soient N et C le noyau et le conoyau, respectivement, du morphisme canonique $F \to \bar{P}^{\hom_{\mathcal{F}}(F,\bar{P})}$. Alors C est fini (car $\hom_{\mathcal{F}}(C, \bar{P}) = 0$) ; comme $\bar{P}$ est $\mathcal{F}^f$-parfait, on en déduit $\hom_{\mathcal{F}}(N, \bar{P}) = 0$. Mais $\tilde{\nabla}_2(N) = 0$, car N est un sous-foncteur de F, donc N est fini par la proposition 11.1, d'où le corollaire. □

Remarque 11.4. La démonstration de la proposition 11.1 repose sur des considérations explicites issues de la théorie des représentations — essentiellement, Powell s'appuie sur le fait qu'il existe peu d'extensions non triviales entre les puissances extérieures (cf. [Fra96]), qui sont les seuls foncteurs simples de $\mathcal{F}$ annihilés par $\tilde{\nabla}_2$. Malheureusement, la complexité des problèmes posés par la généralisation de cette approche aux foncteurs $\tilde{\nabla}_n$ croît très rapidement avec n.

Du reste, la seule obstruction sérieuse à la généralisation des résultats présentés dans cette section se trouve concentrée à la proposition 11.1.

La satisfaction de l'hypothèse 10.3 de la section précédente pour $n = 2$ (corollaire 3.2) et le corollaire 11.2 permettent de déduire de la proposition 10.6 le théorème suivant, qui constitue le résultat « concret » le plus important de cet article.

Théorème 11.5. *1. La sous-catégorie $\mathcal{F}^{\omega-ad(2)}$ de $\mathcal{F}$ est épaisse.*

2. Tout $\bar{G}(2)$-comodule fidèle fini (resp. simple) est noethérien (resp. simple noethérien) de type 2.

3. En particulier, pour tout objet fini F de $\mathcal{F}$, le foncteur $P^{\otimes 2} \otimes F$ est noethérien.

Ce théorème semble le meilleur résultat actuellement connu concernant la conjecture artinienne. Dans le cas où F est constant, il est dû à Powell (cf. [Pow98a]) ; nous avons traité le cas où F est une puissance extérieure par d'autres méthodes dans [Dja06b].

Nous pouvons maintenant préciser le corollaire 11.3 en montrant que la conjecture 2.14 est vérifiée pour $n = 2$.

Proposition 11.6. *Tout foncteur $\tilde{\nabla}_2$-nilpotent et de type fini F est oméga-adapté de hauteur au plus* 1.

Démonstration. On établit la proposition par récurrence sur l'indice de $\tilde{\nabla}_2$-nilpotence i de F. On suppose donc la propriété vérifiée pour tous les foncteurs de type fini annihilés par $(\tilde{\nabla}_2)^{i-1}$.

Il existe une suite exacte

$$\bar{P} \otimes \tilde{\nabla}_2(F) \to F \to Q \to 0$$

où $\tilde{\nabla}_2(Q) = 0$ (cf. [Pow98b], § 5). Comme Q est de type fini, on en déduit que Q est oméga-adapté de hauteur au plus 1 par le corollaire 11.3. Le foncteur de type fini $\tilde{\nabla}_2(F)$ étant annulé par $(\tilde{\nabla}_2)^{i-1}$, l'hypothèse de récurrence montre qu'il est également oméga-adapté de hauteur au plus 1, donc $\bar{P} \otimes \tilde{\nabla}_2(F)$, puis F, sont oméga-adaptés de hauteur au plus 2 (cf. [Dja06a], § 12.1 et le théorème 11.5). En conséquence, comme le foncteur ω_2 induit une équivalence entre les catégories $\mathcal{F}^f_{\mathcal{G}r,2}$ et $\mathcal{F}^{\omega-ad(2)}/\mathcal{F}^{\omega-ad(1)}$, il existe une suite exacte

$$0 \to A \to F \to \omega_2(X) \to B \to 0$$

avec $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}^f_{\mathcal{G}r,2}$ et $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}^{\omega-ad(1)}$. Vu que la sous-catégorie $\mathcal{N}il_{\tilde{\nabla}_2}$ de $\mathcal{F}$ est épaisse (proposition 1.16) et que A, B et F sont $\tilde{\nabla}_2$-nilpotents, cela entraîne que $\omega_2(X)$ est $\tilde{\nabla}_2$-nilpotent, donc que $X = 0$ par la proposition 7.1.

Par conséquent, F est oméga-adapté de hauteur au plus 1, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Remerciements

L'auteur exprime sa chaleureuse gratitude envers Geoffrey Powell pour l'attention qu'il a portée à cet article. Il remercie également Lionel Schwartz pour ses conseils.

Références

[CR87] C. W. Curtis & I. Reiner – *Methods of representation theory. Vol. II*, Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons Inc., New York, 1987, With applications to finite groups and orders, A Wiley-Interscience Publication.

[CR90] — , *Methods of representation theory. Vol. I*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1990, With applications to finite groups and orders, Reprint of the 1981 original, A Wiley-Interscience Publication.

[Dja] A. Djament – « Représentations génériques des groupes linéaires : catégories de foncteurs en grassmanniennes, avec applications à la conjecture artinienne », Thèse, Université Paris 13, en préparation.

[Dja06a] — , « Catégories de foncteurs en grassmanniennes », arXiv :math.AT/0610598, 2006.

[Dja06b] — , « Foncteurs de division et structure de $I^{\otimes 2} \otimes \Lambda^n$ dans la catégorie $\mathcal{F}$ », arXiv :math.RT/0607595, 2006.

[FFPS03] V. Franjou, E. M. Friedlander, T. Pirashvili & L. Schwartz – *Rational representations, the Steenrod algebra and functor homology*, Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses], vol. 16, Société Mathématique de France, Paris, 2003.

[Fra96] V. Franjou – « Extensions entre puissances extérieures et entre puissances symétriques », *J. Algebra* **179** (1996), no. 2, p. 501–522.

[Gab62] P. Gabriel – « Des catégories abéliennes », *Bull. Soc. Math. France* **90** (1962), p. 323–448.

[Hum87] J. E. Humphreys – « The Steinberg representation », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **16** (1987), no. 2, p. 247–263.

[Jam78] G. D. James – *The representation theory of the symmetric groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 682, Springer, Berlin, 1978.

[Jan03] J. C. Jantzen – *Representations of algebraic groups*, second éd., Mathematical Surveys and Monographs, vol. 107, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[Kuh94a] N. J. Kuhn – « Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. I », *Amer. J. Math.* **116** (1994), no. 2, p. 327–360.

[Kuh94b] — , « Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. II », *K-Theory* **8** (1994), no. 4, p. 395–428.

[Mit86] S. Mitchell – « On the Steinberg module, representations of the symmetric groups, and the Steenrod algebra », *J. Pure Appl. Algebra* **39** (1986), no. 3, p. 275–281.

[Pir97] L. Piriou – « Sous-objets de $\overline{I} \otimes \Lambda^n$ dans la catégorie des foncteurs entre $\mathbf{F}_2$-espaces vectoriels », *J. Algebra* **194** (1997), no. 1, p. 53–78.

[Pop73] N. Popescu – *Abelian categories with applications to rings and modules*, Academic Press, London, 1973, London Mathematical Society Monographs, No. 3.

[Pow98a] G. M. L. Powell – « The Artinian conjecture for $I^{\otimes 2}$ », *J. Pure Appl. Algebra* **128** (1998), no. 3, p. 291–310, With an appendix by Lionel Schwartz.

[Pow98b] — , « Polynomial filtrations and Lannes' T-functor », *K-Theory* **13** (1998), no. 3, p. 279–304.

[Pow98c] — , « The structure of indecomposable injectives in generic representation theory », *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), no. 10, p. 4167–4193.

[Pow00a] — , « On Artinian objects in the category of functors between $\mathbf{F}_2$-vector spaces », in *Infinite length modules (Bielefeld, 1998)*, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2000, p. 213–228.

[Pow00b] — , « The structure of the tensor product of $\mathbf{F}_2[-]$ with a finite functor between $\mathbf{F}_2$-vector spaces », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **50** (2000), no. 3, p. 781–805.

[Pow01] — , « The tensor product theorem for $\widetilde{\nabla}$-nilpotence and the dimension of unstable modules », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **130** (2001), no. 3, p. 427–439.

[PS98] L. Piriou & L. Schwartz – « Extensions de foncteurs simples », *K-Theory* **15** (1998), no. 3, p. 269–291.