PREUVE SIMPLIFIÉE DU THÉORÈME DE SERRET SUR LES NOMBRES ÉQUIVALENTS

A. BAUVAL

RÉSUMÉ. Si les fractions continues de deux irrationnels x et y ont un quotient complet commun alors x et y sont équivalents, c'est-à-dire qu'il existe $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ tels que $ad-bc=\pm 1$ et $y=\frac{ax+b}{cx+d}$. La réciproque, due à Serret, est désormais classique, mais on en donne une preuve plus simple et purement algébrique.

1. Préliminaires

Un irrationnel x, décrit par sa fraction continue

$$x = [a_0, a_1, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$
 (avec $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_n \in \mathbb{N}^*$ si $n \ge 1$),

la suite (a_n) de ses quotients partiels, et la suite (x_n) de ses quotients complets, sont liés par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x = [a_0, \dots, a_{n-1}, x_n] \quad \text{et} \quad x_n = [a_n, a_{n+1}, \dots].$$

De plus, si (p_n) et (q_n) sont les deux suites d'entiers définies par

$$\begin{array}{lll} p_{-2}=0, & p_{-1}=1, & p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2},\\ q_{-2}=1, & q_{-1}=0, & q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}, \end{array}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$[a_0, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}, \quad x = \frac{p_{n-1}x_n + p_{n-2}}{q_{n-1}x_n + q_{n-2}} \quad \text{et} \quad p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1} = (-1)^n.$$

En particulier, x est équivalent à tous les x_n , c'est-à-dire dans la même orbite pour l'action du groupe $G := PGL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ par homographies, ce que l'on notera : $x \in Gx_n$.

On notera d'autre part \sim la relation d'équivalence sur les irrationnels "avoir un quotient complet commun". Autrement dit, pour tous irrationnels $x = [a_0, a_1, \dots]$ et $y = [b_0, b_1, \dots]$:

$$\begin{array}{cccc} x \sim y & \Leftrightarrow & \exists i,j \in \mathbb{N} & x_i = y_j \\ & \Leftrightarrow & \exists i,j \in \mathbb{N} & \forall k \in \mathbb{N} & a_{i+k} = b_{j+k} \\ & \Leftrightarrow & \exists i,j \in \mathbb{N} & \forall k \in \mathbb{N} & x_{i+k} = y_{j+k}. \end{array}$$

Ces deux relations d'équivalence sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont en fait la même :

Théorème 1. [Serret 1866] Deux irrationnels x et y sont équivalents si et seulement si $x \sim y$.

Il est clair que $x \sim y \Rightarrow y \in Gx$. Nous proposons une preuve de la réciproque, inspirée de [Lachaud 1988] et plus simple que la démonstration originelle reproduite dans tous les manuels ([Perron 1913, Hardy et Wright 1938, Lang 1966, Rockett et Szüsz 1992, Vorobiev 1992, Borwein et al. 2014], etc.).

2. Démonstration

Lemme 1. Pour tout irrationnel x, on $a - x \sim x$.

Démonstration. ([Perron 1913])

$$-[a_0, a_1, x_2] = \begin{cases} [-a_0 - 1, 1, a_1 - 1, x_2] & \text{si } a_1 > 1\\ [-a_0 - 1, x_2 + 1] & \text{si } a_1 = 1. \end{cases}$$

Lemme 2. Pour tout irrationnel x, on a $1/x \sim x$.

 $D\'{e}monstration.$

$$1/[a_0, x_1] = \begin{cases} [0, a_0, x_1] & \text{si } a_0 \ge 1\\ x_1 & \text{si } a_0 = 0 \end{cases}$$

([Lang 1966]), ce qui démontre le cas x > 0. Le cas x < 0 s'en déduit grâce au lemme précédent.

Anne Bauval, bauval@math.univ-toulouse.fr, IMT, UMR 5219, Université Toulouse III. 2010 Mathematics Subject Classification : 11A55.

2 A. BAUVAL

Proposition 1. Si deux irrationnels x et y sont équivalents alors $x \sim y$.

Démonstration. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $ad - bc = \pm 1$ et $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Quitte à remplacer si nécessaire (a,b,c,d) par son opposé (ce qui ne modifie pas y), on peut de plus supposer que (c,d)=(0,1) ou c>0. Dans le premier cas, $y=\pm x+b\sim \pm x\sim x$ d'après le lemme 1. Supposons maintenant c>0. Le rationnel a/c admet deux développements en fraction continue finie, chacun se déduisant de l'autre en raccourcissant ou rallongeant artificiellement ce dernier de 1. Choisissons celui,

$$\frac{a}{c} = [a_0, \dots, a_{n-1}]$$

(avec $n \ge 1$), pour lequel la parité de n est telle que $ad - bc = (-1)^n$. Les suites $(p_i), (q_i)_{i < n}$ étant définies comme dans la section 1, on a $\frac{a}{c} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ et même (puisque ces deux fractions sont irréductibles et de dénominateurs positifs)

$$a = p_{n-1} \quad \text{et} \quad c = q_{n-1}.$$

Puisque de plus $ad - bc = (-1)^n = p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1}$, il existe un entier r tel que

$$b = rp_{n-1} + p_{n-2}$$
 et $d = rq_{n-1} + q_{n-2}$

donc

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{p_{n-1}(x+r)+p_{n-2}}{q_{n-1}(x+r)+q_{n-2}}=[a_0,\ldots,a_{n-1},x+r].$$
 On conclut grâce au lemme 2 et à l'invariance de \sim par translations entières :

$$y \sim [a_1, \dots, a_{n-1}, x+r] \sim [a_2, \dots, a_{n-1}, x+r] \sim \dots \sim x+r \sim x.$$

Remarque 1. On vient en fait de redémontrer le théorème suivant, classique 1 et un peu plus fort que la proposition 1 :

le groupe $PGL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par les trois éléments T, U, V^2 correspondant respectivement aux homographies

$$t: x \mapsto 1+x, \quad u: x \mapsto 1/x \quad et \quad v: x \mapsto -x,$$

tout en le précisant :

tout élément de $PGL_2(\mathbb{Z})$ s'écrit sous la forme

$$V^eT^{a_0}UT^{a_1}U\dots UT^{a_n}$$

où tous les a_i sont strictements positifs sauf éventuellement le premier et le dernier, et e est égal à 0, ou éventuellement à 1 si n = 0.

De plus, cette écriture est unique.

Références

[Borwein et al. 2014] Jonathan Borwein, Alf van der Poorten, Jeffrey Shallit et Wadim Zudilin, Neverending Fractions - An Introduction to Continued Fractions, Cambridge University Press, 2014, p. 38-39

[Coxeter et Moser 1957] Harold S. M. Coxeter et William O. J. Moser, Generators and Relations for Discrete Groups, Springer, 1957, chap. 7, §2

[Hardy et Wright 1938] Godfrey H. Hardy et Edward M. Wright (trad. de l'anglais par F. Sauvageot), Introduction à la théorie des nombres [« An Introduction to the Theory of Numbers », 1938], Vuibert-Springer, 2007, théorèmes 172 p. 179-180 et 175 p. 182-183

[Lachaud 1988] Gilles Lachaud, « Continued fractions, binary quadratic forms, quadratic fields, and zeta functions », in Algebra and Topology 1988, Korea Inst. Tech., Taejon, 1988, p. 1-56: propositions 4 et 5, p. 8-10

[Lang 1966] Serge Lang, Introduction to Diophantine Approximations, Addison-Wesley, 1966, chap. 1

[Perron 1913] Oskar Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Teubner, 1913, Satz 13 p. 47 et Satz 23 p. 63-65

[Rockett et Szüsz 1992] Andrew M. Rockett et Peter Szüsz, Continued Fractions, World Scientific, 1992, th. 1 et 2 p. 5-7

[Serret 1866] Joseph-Alfred Serret, Cours d'algèbre supérieure, vol. 1, Gauthier-Villars, 1866, 3e éd., p. 34-37

[Vorobiev 1992] Nicolai N. Vorobiev (trad. du russe par M. Martin), Fibonacci Numbers [« Chisla Fibonacci », 1992], Springer, 2002, p. 115-118

Anne Bauval, bauval@math.univ-toulouse.fr

Institut de Mathématiques de Toulouse

Université Toulouse III

118 Route de Narbonne, 31400 Toulouse - France

1. Plus précisément ([Coxeter et Moser 1957]) :

$$PGL_2(\mathbb{Z}) = \langle T, U, V \mid U^2 = V^2 = (TV)^2 = (UV)^2 = (TUV)^3 = 1 \rangle.$$

2. Ou même seulement par T et U, puisque – cf. preuve du lemme $1 - UV = T^{-1}UTUT^{-1}$. Plus précisément :

$$PGL_2(\mathbb{Z}) = \langle T, U \mid U^2 = (UTUT^{-2})^2 = (UTUT^{-1})^3 = 1 \rangle.$$

П