

# Les hypersurfaces cubiques sont séparablement rationnellement connexes

David A. Madore

4 juillet 2018

CVS : \$Id: freecurve.tex,v 1.11 2006-05-25 14:03:16 david Exp \$

## Abstract

This note (which makes no claim to novelty) presents a proof of the separable rational connectedness of smooth cubic hypersurfaces, in any characteristic, by showing how to explicitly construct very free curves (of degree 3) on them.

## Résumé

Cette note (qui ne prétend pas à l'originalité) démontre la séparable rationnelle connexité des hypersurfaces cubiques lisses, en toute caractéristique, en construisant explicitement des courbes très libres (de degré 3) tracées dessus.

**Introduction :** L'objet de cette note est de fournir une démonstration simple d'un fait qui doit certainement être considéré comme connu mais qui semble difficile à trouver dans la littérature : le fait que, *en toute caractéristique*, les hypersurfaces cubiques lisses sont *séparablement* rationnellement connexes. On envoie à [2] (notamment chap. IV) ou [1] pour une discussion générale sur la (séparable) rationnelle connexité; ici on prendra pour définition l'existence d'une courbe *très libre* : c'est-à-dire qu'on dira qu'une variété projective lisse (intègre)  $X$  sur un corps  $k$  algébriquement clos est séparablement rationnellement connexe lorsqu'il existe  $h: \mathbb{P}^1 \rightarrow X$  tel que le fibré  $h^*T_X$  soit ample (i.e.,  $H^1(\mathbb{P}^1, (h^*T_X)(-2)) = 0$ ), où  $T_X$  désigne le fibré tangent à  $X$ . Pour les considérations générales sur les hypersurfaces cubiques, et notamment la rationalité des surfaces cubiques, on renvoie à [3].

La question plus générale de la séparable rationnelle connexité, en toute caractéristique, des hypersurfaces de Fano lisses, c'est-à-dire des hypersurfaces lisses de degré  $d$  dans  $\mathbb{P}^n$  avec  $n \geq d$ , semble encore ouverte (comparer [2] V.2.13 et V.5.11).

**Proposition 1.** *Soit  $X$  une variété projective lisse (intégrale) sur  $k$  un corps algébriquement clos, et soit  $D$  une sous-variété lisse (intégrale) de codimension 1 qui, vue en tant que diviseur sur  $X$  (ayant une seule composante, avec multiplicité 1), est ample. On se donne  $h: \mathbb{P}^1 \rightarrow D$  non constant, et on suppose que  $h$  est très libre à valeurs dans  $D$ , c'est-à-dire  $H^1(\mathbb{P}^1, T_D(-2)) = 0$ . Alors  $h: \mathbb{P}^1 \rightarrow X$  est encore très libre, vue comme courbe sur  $X$ , c'est-à-dire  $H^1(\mathbb{P}^1, T_X(-2)) = 0$ .*

*Démonstration.* Soit  $i: D \rightarrow X$  le morphisme d'immersion de  $D$  dans  $X$ . On a la suite exacte

$$0 \rightarrow T_D \rightarrow i^*T_X \rightarrow \mathcal{O}_D(D) \rightarrow 0$$

où  $T_D$  est le fibré tangent à  $D$ ,  $T_X$  celui à  $X$ ,  $\mathcal{O}_X(D)$  le fibré en droites (supposé ample) associé au diviseur  $D$ , et  $\mathcal{O}_D(D)$  sa restriction à  $D$  lui-même, qui n'est autre que le fibré normal à  $D$ . En tirant cette suite exacte courte de fibrés par le morphisme  $h: \mathbb{P}^1 \rightarrow D$ , on trouve :

$$0 \rightarrow h^*T_D \rightarrow h^*T_X \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\deg_D h) \rightarrow 0$$

où  $\deg_D h$  désigne le degré de  $h$  mesuré par rapport au diviseur  $D$  : on a  $\deg_D h > 0$  car  $D$  est ample et que  $h$  est non constant. On en déduit en particulier, au niveau de la cohomologie, pour tout  $\ell \in \mathbb{Z}$  :

$$H^1(\mathbb{P}^1, (h^*T_D)(\ell)) \rightarrow H^1(\mathbb{P}^1, (h^*T_X)(\ell)) \rightarrow H^1(\mathbb{P}^1, (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\deg_D h + \ell))) \rightarrow 0$$

Prenons  $\ell = -2$  : alors  $H^1(\mathbb{P}^1, (h^*T_D)(-2))$  s'annule par hypothèse, et  $H^1(\mathbb{P}^1, (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\deg_D h - 2)))$  s'annule car  $\deg_D h - 2 \geq -1$ . Il s'ensuit qu'on a  $H^1(\mathbb{P}^1, (h^*T_X)(-2)) = 0$ , ce qu'on voulait démontrer.  $\square$

**Proposition 2.** *Soit  $X$  une surface projective lisse (intégrale) sur  $k$  un corps algébriquement clos, et  $C \subseteq X$  une courbe rationnelle intégrale dans  $X$ , n'ayant pas d'autre singularité que des points doubles ordinaires. On suppose que  $\deg_{-K_X} C \geq 3$ , où  $\deg_{-K_X} C$  désigne le degré d'intersection de  $C$  par rapport au diviseur anticanonique  $-K_X$  sur  $X$ . Soit  $h: \mathbb{P}^1 \rightarrow C$  la normalisation. Alors  $h: \mathbb{P}^1 \rightarrow X$  est très libre, vue comme courbe sur  $X$ , c'est-à-dire  $H^1(\mathbb{P}^1, T_X(-2)) = 0$ . (Réciproquement, si  $h$  est très libre, alors  $\deg_{-K_X} C \geq 3$ .)*

*Démonstration.* Rappelons que  $T_{\mathbb{P}^1} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$ . On a une flèche  $T_{\mathbb{P}^1} \rightarrow h^*T_X$  déduite par dualité de  $h^*\Omega_{X/\text{Spec } k}^1 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^1/\text{Spec } k}^1$ , et cette flèche est injective sur chaque fibre car la différentielle de  $h$  ne peut pas s'annuler (en un point lisse, c'est évident, et au-dessus d'un point double,  $h$  prend la direction d'une des deux tangentes distinctes en ce point). La flèche  $I_C/I_C^2 \rightarrow i^*\Omega_{X/\text{Spec } k}^1$  (où  $I_C$  est le faisceau d'idéaux définissant  $C$  sur  $X$  et  $i$  la flèche d'immersion de  $C$  dans  $X$ ) donne, en tirant par  $h$  et en dualisant, une flèche  $h^*T_X \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\deg_C h)$  (non nécessairement surjective!). La composée  $T_{\mathbb{P}^1} \rightarrow h^*T_X \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\deg_C h)$  s'annule, car elle s'annule sur chaque fibre au-dessus de tout l'ouvert de lissité de  $C$ . Mais en regardant fibre à fibre, on voit même que la suite  $T_{\mathbb{P}^1} \rightarrow h^*T_X \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\deg_C h)$  est exacte : en effet, le noyau de la flèche de droite est un sous-fibré de rang 1 dans  $h^*T_X$  qui contient l'image de la flèche de gauche, image qui, comme on l'a

expliqué, a rang 1 en chaque fibre, donc il y a exactitude fibre à fibre, d'où la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \rightarrow h^*T_X \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\deg_C h)$$

La dernière flèche de cette suite exacte n'est pas nécessairement surjective (elle ne l'est d'ailleurs jamais si  $C$  a effectivement des singularités), mais l'image de cette flèche est un sous-fibré de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\deg_C h)$ , manifestement de rang 1 et de degré celui de  $h^*T_X$  moins deux (car le degré de  $h^*T_X$  est  $\deg_{-K_X} C$ ), c'est-à-dire  $\deg_{-K_X} C - 2$ , qui est donc au moins égal à 1 par hypothèse. On peut donc écrire

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \rightarrow h^*T_X \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\deg_{-K_X} C - 2) \rightarrow 0$$

(notons au passage que si  $C$  est lisse, on sait que  $\deg_C h = \deg_{-K_X} C - 2$  puisque le genre de  $C$  est zéro, donc la dernière flèche de la première suite exacte était bien surjective ; et réciproquement). En passant comme dans la démonstration précédente à la suite exacte longue de cohomologie (ce sont les  $H^1$  qui nous intéressent) après avoir tensorisé par  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$ , on voit que  $H^1(\mathbb{P}^1, T_X(-2)) = 0$  comme on le voulait.

Pour la réciproque, on écrit  $h^*T_X \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_2)$  avec  $d_1 \geq d_2$  : l'hypothèse que  $h$  est très libre se traduit  $d_2 \geq 1$ , et l'existence d'une flèche injective  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \rightarrow h^*T_X$  donne  $d_2 \geq 2$ , donc  $\deg_{-K_X} C = d_1 + d_2 \geq 3$ , la conclusion recherchée.  $\square$

En particulier, toute cubique plane intègre à point double ordinaire tracée sur une surface cubique lisse est très libre :

**Proposition 3.** *Soit  $X \subseteq \mathbb{P}^3$  une surface cubique lisse sur un corps  $k$  algébriquement clos (de caractéristique arbitraire),  $C \subseteq X$  la courbe cubique plane intersection de  $X$  avec un plan  $\Pi$  tel que  $C$  ait un point singulier  $x$  (c'est-à-dire que  $\Pi$  est le plan  $\Pi(x)$  tangent à  $X$  en  $x$ ) et supposons que  $C$  soit intègre et que  $x$  soit un point double ordinaire (par opposition à un cusp) : alors la normalisation  $h: \mathbb{P}^1 \rightarrow C$  composée avec l'inclusion canonique définit une courbe  $h: \mathbb{P}^1 \rightarrow X$  très libre sur  $X$ .*

*Démonstration.* On se trouve dans les conditions d'application de la proposition 2 : le fibré anticanonique  $-K_X$  sur une surface cubique est donné par une section plane ; le degré de la courbe  $C$  d'intersection est alors 3, ce qui assure que les hypothèses sont bien vérifiées.  $\square$

*Démonstration par calcul explicite.* On appelle  $(X_0 : X_1 : X_2 : X_3)$  les coordonnées de  $\mathbb{P}^3$ , et on suppose (sans perte de généralité) que  $X_3 = 0$  est l'équation du plan  $\Pi$ . La courbe  $C$  est une cubique rationnelle, donc elle a un (unique) point singulier  $x$ , qui, par hypothèse, est un point double ordinaire. Mettons que ce point soit donné par  $X_1 = X_2 = 0$  (soit  $(1 : 0 : 0)$ ) dans le plan  $\Pi$ . L'équation de  $C$  s'écrit alors  $X_0 q(X_1, X_2) + c(X_1, X_2) = 0$  où  $q$  est une forme quadratique en  $X_1, X_2$  et  $c$  une forme cubique. L'hypothèse que  $C$  a en  $(1 : 0 : 0)$  un point double ordinaire se traduit par le fait que  $q$  est non nulle et a deux racines distinctes (correspondant aux deux directions tangentes), et l'hypothèse que  $C$  est intègre, donc ne contient aucune droite, se traduit par le fait que  $q$  et  $c$  sont sans racine

commune. Quitte à faire un changement de coordonnées, on peut supposer que  $q(X_1, X_2) = X_1 X_2$ . Écrivons  $c(X_1, X_2) = \alpha_0 X_1^3 + \alpha_1 X_1^2 X_2 + \alpha_2 X_1 X_2^2 + \alpha_3 X_2^3$ , où  $\alpha_0 \neq 0$  et  $\alpha_3 \neq 0$  (sans quoi  $q$  et  $c$  auraient un zéro commun). Quitte à remplacer  $X_0$  par  $X_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$ , on peut supposer que  $\alpha_2 = 0$  et  $\alpha_3 = 0$ ; et quitte à multiplier  $X_1$  par  $\sqrt{\alpha_0}$  et  $X_2$  par  $\sqrt{\alpha_3}$ , on peut de plus prendre  $\alpha_0 = 1$  et  $\alpha_3 = 1$ . La normalisation  $h: \mathbb{P}^1 \rightarrow C$  est alors donnée par le paramétrage  $(U : V) \mapsto (-U^3 - V^3 : U^2 V : UV^2)$ . On peut alors écrire  $h^* T_{\mathbb{P}^3} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(5)\xi \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4)\eta \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)\frac{\partial}{\partial X_3}$  avec  $\xi \in \Gamma(\mathbb{P}^1, (h^* T_{\mathbb{P}^3})(-5))$  donné par  $\xi = \frac{U^2}{V^4} \frac{\partial}{\partial X_0} - \frac{U}{V^3} \frac{\partial}{\partial X_1} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial}{\partial X_2} = \frac{V^2}{U^4} \frac{\partial}{\partial X_0} - \frac{1}{U^3} \frac{\partial}{\partial X_1} - \frac{V}{U^2} \frac{\partial}{\partial X_2}$  et  $\eta \in \Gamma(\mathbb{P}^1, (h^* T_{\mathbb{P}^3})(-4))$  donné par  $\eta = \frac{U}{V^2} \frac{\partial}{\partial X_0} - \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial X_1} = -\frac{V}{U^2} \frac{\partial}{\partial X_0} + \frac{1}{U} \frac{\partial}{\partial X_2}$ .

Soit  $f = X_0 X_1 X_2 + c(X_1, X_2) + X_3 Q(X_0, X_1, X_2) + X_3^2 L(X_0, X_1, X_2) + A X_3^3$  l'équation de la surface  $X$ , où  $Q$  est une forme quadratique telle que  $Q(1, 0, 0) \neq 0$  (sans quoi  $X$  serait singulière en  $(1 : 0 : 0 : 0)$ ),  $L$  une forme linéaire (éventuellement nulle), et  $A$  une constante. On peut alors calculer  $\xi \cdot f = -U^2 V^2$  et  $\eta \cdot f = -U^4 V - UV^4$  et  $\frac{\partial}{\partial X_3} f = Q(-U^3 - V^3, U^2 V, UV^2)$ . Ainsi, aucune combinaison linéaire des sections (de  $\Gamma(\mathbb{P}^1, (h^* T_{\mathbb{P}^3})(-3))$ )  $U^2 \xi, UV \xi, V^2 \xi, U \eta, V \eta$  ou  $\frac{\partial}{\partial X_3}$  n'annule  $f$ , c'est-à-dire, n'est dans le noyau  $h^* T_X$  de la flèche  $h^* T_{\mathbb{P}^3} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(9)$  : en effet, en faisant  $V = 0$  on se convainc que le coefficient devant  $\frac{\partial}{\partial X_3}$  doit être nul, et l'annulation des autres coefficients est claire. On a ainsi prouvé  $\Gamma(\mathbb{P}^1, (h^* T_X)(-3)) = 0$ ; comme  $h^* T_X$  doit s'écrire  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_2)$  où mettons  $d_1 \geq d_2$ , ceci signifie  $d_1 < 3$ , mais comme  $d_1 + d_2 = 3$ , on a manifestement  $d_1 = 2$  et  $d_2 = 1$ . Ceci montre bien  $H^1(\mathbb{P}^1, (h^* T_X)(-2)) = 0$ . (On peut aussi dire que le  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$  de la décomposition de  $h^* T_X$  est engendré par  $UV \eta - U^3 \xi + V^3 \xi = -3 \frac{V^2}{U} \frac{\partial}{\partial X_0} + U \frac{\partial}{\partial X_1} + 2V \frac{\partial}{\partial X_2} = 3 \frac{U^2}{V} \frac{\partial}{\partial X_0} - 2U \frac{\partial}{\partial X_1} - V \frac{\partial}{\partial X_2}$ , qui, de fait, correspond bien à l'image de la flèche  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \rightarrow h^* T_X$  explicitée dans la démonstration précédente.)  $\square$

À l'opposé, une cubique plane intègre *cuspidale* tracée sur une surface cubique lisse *n'est pas* très libre (et l'hypothèse faite dans la proposition 2 sur les singularités de  $C$  est donc essentielle) :

**Remarque 4.** Soit  $X \subseteq \mathbb{P}^3$  une surface cubique lisse sur un corps  $k$  algébriquement clos (de caractéristique arbitraire),  $C \subseteq X$  la courbe cubique plane intersection de  $X$  avec un plan  $\Pi$  tel que  $C$  ait un point singulier  $x$  (c'est-à-dire que  $\Pi$  est le plan  $\Pi(x)$  tangent à  $X$  en  $x$ ) et supposons que  $C$  soit intègre et que  $x$  soit un cusp : alors la normalisation  $h: \mathbb{P}^1 \rightarrow C$  composée avec l'inclusion canonique définit une courbe  $h: \mathbb{P}^1 \rightarrow X$  qui n'est pas très libre sur  $X$ .

*Démonstration.* On reprend les notations utilisées dans le calcul explicite prouvant la proposition 3, mais cette fois avec  $q(X_1, X_2) = X_2^2$ . Si la caractéristique est différente de 3, quitte à faire des changements linéaires de coordonnées, on peut supposer que  $c(X_1, X_2) = X_1^3$ . Alors l'existence de la section  $\delta \in \Gamma(\mathbb{P}^1, (h^* T_X)(-3))$  donnée par  $\delta = 3 \frac{U^2}{V^2} \frac{\partial}{\partial X_0} - \frac{\partial}{\partial X_1} = 2 \frac{\partial}{\partial X_1} + 3 \frac{V}{U} \frac{\partial}{\partial X_2}$  montre que  $d_1 \geq 3$  (en fait, on a précisément  $h^* T_X \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ , ce qui se vérifie par l'annulation de  $\Gamma(\mathbb{P}^1, (h^* T_X)(-4))$ , mais ce n'est pas nécessaire pour savoir que la courbe n'est pas très libre). En caractéristique 3, on écrit  $c(X_1, X_2) = X_1^3 + \alpha X_1^2 X_2$ , et l'expression de la section  $\delta \in \Gamma(\mathbb{P}^1, (h^* T_X)(-3))$  est plus compliquée :

$$\delta = -\alpha \frac{U}{V} \frac{\partial}{\partial X_0} - \frac{\partial}{\partial X_1} = \alpha^2 \left( \alpha \frac{V}{U} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial X_0} - \left( \alpha \frac{V}{U} - 1 \right)^2 \frac{\partial}{\partial X_1} - \alpha \frac{V^2}{U^2} \left( \alpha \frac{V}{U} + 1 \right) \frac{\partial}{\partial X_2},$$

mais la conclusion est la même.  $\square$

**Note :** En analysant plus précisément la structure de la démonstration que nous venons de faire, on voit qu'en fait la surface  $X$  dans laquelle  $C$  est plongée importe peu : il y aura *toujours* une flèche non nulle  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3) \rightarrow h^*T_X$  donnée par  $\delta$  ; et même, la fin de la démonstration de la proposition 2 tient encore si on remplace essentiellement  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$  par  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)$  tout du long. Ceci signifie que, si  $C$  (la cubique cuspidale plane, vue comme une courbe abstraite) est plongée dans une surface projective lisse  $X$ , la flèche de normalisation la présente comme très libre sur  $X$  si et seulement si  $\deg_{-K_X} C \geq 4$ . L'auteur de cette note soupçonne qu'il existe un invariant  $\rho$  facilement calculable, pour une courbe singulière  $C$  (point singulier par point singulier, additif, et valant 0 pour un point double ordinaire et 1 pour un cusp cubique simple) tel que  $C$  plongée dans une surface projective lisse  $X$  soit très libre si et seulement si  $\deg_{-K_X} C \geq 3 + \rho$ .

Il n'y a bien sûr aucune surprise à l'existence de courbes très libres sur une surface cubique lisse, puisque cette dernière est rationnelle, donc certainement séparablement rationnellement connexe. Le fait intéressant dans la proposition 3 est qu'on peut en trouver explicitement. Ces courbes existent d'ailleurs, en vertu du lemme suivant (qui peut être intéressant en lui-même) :

**Lemme 5.** *Soit  $X \subseteq \mathbb{P}^3$  une surface cubique lisse sur un corps  $k$  algébriquement clos de caractéristique différente de 2. Alors il existe  $x \in X$  tel que l'intersection  $C(x)$  de  $X$  avec le plan tangent  $\Pi(x)$  à  $X$  en  $x$  soit une courbe cubique intègre ayant pour unique singularité un point double ordinaire en  $x$ .*

**Sous-Lemme 6.** *Soient  $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  six points (distincts) du plan projectif sur un corps  $k$  de caractéristique différente de 2 : on suppose que trois quelconques d'entre eux ne sont pas alignés et que tous les six ne sont pas situés sur une même conique. Alors il existe un point  $Q$  à l'intersection de deux des (quinze) droites reliant deux des six points  $P_i$  qui est distinct de tous les  $P_i$ , non situé sur aucune autre des droites reliant deux des  $P_i$  et également non situé sur une des six coniques reliant cinq des  $P_i$ .*

*Démonstration du sous-lemme.* Les points  $P_0, P_1, P_2, P_3$  forment une base projective du plan. Quitte à effectuer une transformation projective (qui ne change rien à la situation ni à la conclusion recherchée), on peut donc supposer qu'ils ont les coordonnées respectives  $(0 : 0 : 1), (1 : 0 : 1), (1 : 1 : 1), (0 : 1 : 1)$ . À ce moment-là, le point d'intersection de  $(P_0P_1)$  et de  $(P_2P_3)$  est  $(1 : 0 : 0)$ , celui de  $(P_0P_2)$  et de  $(P_1P_3)$  est  $(1 : 1 : 2)$ , et celui de  $(P_0P_3)$  et de  $(P_1P_2)$  est  $(0 : 1 : 0)$  : la chose qui nous importe est qu'ils ne sont pas alignés en caractéristique différente de 2, donc ils ne peuvent pas être tous les trois sur la droite  $(P_4P_5)$ . Appelons  $Q$  un de ces trois points qui n'est pas situé sur  $(P_4P_5)$ , et mettons pour fixer les idées (et sans perte de généralité) que ce soit le point d'intersection de  $(P_0P_1)$  et de  $(P_2P_3)$ . Manifestement,  $Q$  est distinct des six points  $P_i$ . Il n'est situé sur aucune des droites  $(P_0P_2), (P_0P_3), (P_0P_4)$  ou  $(P_0P_5)$ , sans quoi  $P_0$  et  $P_1$  seraient alignés avec un  $P_i$  pour  $i \geq 2$ . Pour des raisons semblables,  $Q$  ne peut pas être situé sur  $(P_1P_2), (P_1P_3), (P_1P_4), (P_1P_5), (P_2P_4), (P_2P_5), (P_3P_4)$  ou  $(P_3P_5)$ , et on a déjà expliqué qu'il n'était pas sur  $(P_4P_5)$ . Restent enfin les coniques ; une conique définie par cinq des six points  $P_i$  est non-dégénérée (i.e., lisse), donc ne peut pas contenir trois points alignés, et comme elle contient

soit  $P_0$  et  $P_1$  soit  $P_2$  et  $P_3$  elle ne peut pas contenir aussi  $Q$ . Ce qui termine la démonstration.  $\square$

*Démonstration du lemme.* Comme  $X$  est isomorphe à l'éclaté du plan projectif en six points, le sous-lemme nous permet de trouver un point  $z$  sur  $X$  situé sur deux, mais pas trois (on dit que  $z$  n'est *pas* un « point d'Eckardt »), des vingt-sept droites tracées sur  $X$ . (On peut aussi faire appel au fait « connu » que la surface cubique ayant le plus de points d'Eckardt est la surface de Clebsch, qui en a 10, ce qui est strictement moins que le tiers du nombre de points d'intersection, soit 105, de deux des 27 droites tracées sur  $X$ .) Ceci signifie que  $C(z)$  est formé de trois droites dans le plan  $\Pi(z)$ , se croisant en trois points distincts.

Soit  $D$  une des deux droites qui passent par  $z$ . Considérons un point  $y$  sur  $D$  : alors  $C(y)$  est formé de la réunion de  $D$  et d'une conique (éventuellement dégénérée). Comme il n'y a qu'un nombre fini de droites tracées sur  $X$ , il y a un ouvert *non vide* (de  $D$ ) de points  $y$  pour lesquels la conique en question est lisse. Par ailleurs, comme c'est le cas pour  $z$ , il y a un ouvert *non vide* de points  $y$  pour lesquels elle rencontre la droite  $D$  en deux points distincts. Fixons  $y$  dans l'intersection de ces deux ouverts : pour résumer,  $C(y)$  est donc la réunion de  $D$  et d'une conique  $\Gamma$  qui coupe  $D$  en  $y$  et en un deuxième point  $y'$  distinct de  $y$ .

Considérons maintenant un point  $x$  sur  $\Gamma$ . Comme il n'y a, de nouveau, qu'un nombre fini de droites tracées sur  $X$ , il y a un ouvert *non vide* (de  $\Gamma$ ) de points  $x$  pour lesquels  $C(x)$  est une cubique intègre, n'ayant donc pas d'autre singularité qu'en  $x$ . Par ailleurs, comme c'est le cas pour  $y$ , il y a un ouvert *non vide* de points  $x$  pour lesquels  $C(x)$  a deux directions tangentes distinctes en  $x$ . Fixons  $x$  dans l'intersection de ces deux ouverts :  $C(x)$  a alors toutes les propriétés souhaitées, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une cubique intègre ayant pour seule singularité un point double ordinaire en  $x$ .  $\square$

En caractéristique 2, le lemme n'est pas valable : en effet, la surface cubique (lisse) d'équation  $X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 = 0$  est coupée par tout plan tangent soit en une cubique intègre cuspidale, soit en une droite et une conique tangente à celle-ci, soit en trois droites concourantes en un point d'Eckardt (elle a 35 points d'Eckardt). Il n'existe donc aucune courbe *plane* très libre sur cette hypersurface cubique (mais il existe, bien sûr, des courbes très libres tracées dessus, par exemple celle donnée par  $h : (U : V) \mapsto (U^3 + U^2V : U^3 + U^2V + V^3 : U^2V + V^3 : UV^2)$ , qui a  $h^*T_X \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$  puisqu'en contractant six droites bien choisie elle devient isomorphe à une droite dans le plan éclaté en six points qui ne passe par aucun de ces points).

Ceci est d'ailleurs le seul exemple possible d'une surface cubique sur laquelle n'est pas tracée une courbe cubique plane à point double ordinaire. En effet, la démonstration du lemme 5 vaut encore en caractéristique 2 dès lors qu'il existe un point à l'intersection de deux droites qui n'est pas un point d'Eckardt : en revenant à la démonstration du sous-lemme 6, si tous les points d'intersections sont des points d'Eckardt, en prenant  $(0 : 0 : 1), (1 : 0 : 1), (1 : 1 : 1), (0 : 1 : 1)$  pour coordonnées de  $P_0, P_1, P_2, P_3$ , les points  $P_4$  et  $P_5$  doivent être alignés avec les intersections  $(1 : 0 : 0)$  de  $(P_0P_1)$  et de  $(P_2P_3)$ ,  $(1 : 1 : 0)$  de  $(P_0P_2)$  et de  $(P_1P_3)$ , et  $(0 : 1 : 0)$  de  $(P_0P_3)$  et de  $(P_1P_2)$ , donc on peut écrire  $P_4 = (X_4 : Y_4 : 0)$  et  $P_5 = (X_5 : Y_5 : 0)$ . Comme  $(P_0P_4), (P_1P_5)$  et  $(P_2P_3)$  doivent concourir en un point, on doit encore avoir  $Y_4X_5 + X_4Y_5 + Y_4Y_5 = 0$ , et, de même,  $Y_4X_5 + X_4Y_5 + X_4X_5 = 0$ , donc finalement  $X_4X_5 + Y_4Y_5 = 0$ , autrement dit  $P_4 = (1 : \zeta : 0)$  et  $P_5 = (1 : \zeta^2 : 0)$  avec  $\zeta$  racine primitive cubique de l'unité. Ceci montre que les six points sont complètement déterminés par l'hypothèse, et il n'y a donc qu'une seule surface cubique qui vérifie cette propriété.

On peut également facilement trouver des courbes très libres sur des hypersurfaces cubiques de dimension  $\geq 3$  :

**Proposition 7.** *Soit  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  une hypersurface cubique lisse de dimension  $n - 1 \geq 2$  sur un corps  $k$  algébriquement clos (de caractéristique arbitraire). Alors il existe  $h: \mathbb{P}^1 \rightarrow X$  très libre sur  $X$  (c'est-à-dire  $H^1(\mathbb{P}^1, T_X(-2)) = 0$ ) et dont l'image est contenue dans un plan si la caractéristique de  $k$  est autre que 2, et dans un espace de dimension 3 si elle est 2.*

*Démonstration.* On procède par récurrence sur la dimension  $n - 1$  de l'hypersurface. Le cas  $n - 1 = 2$  constitue le contenu de la proposition 3 (combiné au lemme 5) en caractéristique différente de deux, et est clair en caractéristique deux. Si  $n - 1 \geq 3$ , le théorème de Bertini permet de trouver un hyperplan  $H$  tel que l'intersection de  $H$  avec  $X$  soit une hypersurface cubique lisse de dimension  $n - 2$  : l'hypothèse de récurrence assure alors l'existence de  $h: \mathbb{P}^1 \rightarrow H \cap X$  très libre dont l'image est contenue dans un plan, et la proposition 1 montre que  $h$  est libre sur  $X$  tout entière.  $\square$

## Références

- [1] O. Debarre, *Higher-Dimensional Algebraic Geometry*, Springer, Universitext.
- [2] J. Kollár, *Rational Curves on Algebraic Varieties*, Springer, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 32.
- [3] Yu. I. Manin, *Cubic Forms : Algebra, Geometry, Arithmetic*, North-Holland (1974, second enlarged edition 1986).