

**C*-GROUPOIDES QUANTIQUES ET INCLUSIONS DE FACTEURS :
STRUCTURE SYMÉTRIQUE ET AUTODUALITÉ,
ACTION SUR LE FACTEUR HYPERFINI DE TYPE II_1**

MARIE-CLAUDE DAVID

RÉSUMÉ : Etant données une inclusion $N_0 \subset N_1$ de facteurs de type II_1 de profondeur 2 et d'indice fini et

$$N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset N_3 \dots$$

la tour de Jones correspondante, D. Nikshych et L. Vainerman ont muni les commutants relatifs $N'_0 \cap N_2$ et $N'_1 \cap N_3$ de structures duales de C*-groupeïde quantique.

Je modifie ici la dualité et j'obtiens ainsi une construction symétrique qui n'exige pas une nouvelle définition des involutions. Alors les algèbres de Temperley-Lieb sont des C*-groupeïdes quantiques autoduaux ; plus généralement on peut associer à une inclusion de profondeur finie et d'indice fini un C*-groupeïde quantique autodual.

Je montre que tout C*- groupeïde quantique connexe de dimension finie agit extérieurement sur le facteur hyperfini de type II_1 . A la lumière de ce cas particulier, je propose une déformation de tout C*-groupeïde quantique fini en un C*-groupeïde quantique fini régulier.

ABSTRACT : Let $N_0 \subset N_1$ a depth 2, finite index inclusion of type II_1 factors and

$$N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset N_3 \dots$$

the corresponding Jones tower. D. Nikshych and L. Vainerman built dual structures of quantum C*-groupoid on the relative commutants $N'_0 \cap N_2$ et $N'_1 \cap N_3$.

Here I define a new duality which allows a symmetric construction without changing the involution. So the Temperley-Lieb algebras are selfdual quantum C*-groupoids and the quantum C*-groupoids associated to a finite depth finite index inclusion can be chosen selfdual.

I show that every finite-dimensional connected quantum C*-groupoid acts outerly on the type II_1 hyperfinite factor. In the light of this particular case, I propose a deformation of any finite quantum C*-groupoid to a regular finite quantum C*-groupoid.

CODE MATIÈRE AMS : 46L37, 16W30, 57T05, 22D35.

MOTS CLEFS : Subfactors, quantum groupoids, Temperley-Lieb algebras, crossed product, action.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	3
2. C^* -groupoïdes quantiques finis	4
2.1. C^* -groupoïde quantique fini	4
2.2. C^* -groupoïde quantique dual	4
2.3. Projection de Haar, mesure de Haar	5
2.4. Les sous-algèbres co-unitales	5
2.5. C^* -groupoïde quantique fini régulier	5
2.6. Action d'un groupoïde quantique	5
2.7. Produit croisé d'une algèbre par un groupoïde quantique	6
2.8. Inclusions de profondeur 2	6
3. C^* -groupoïdes quantiques associés à une inclusion d'indice fini de profondeur 2 de facteurs de type II_1 .	8
3.1. Anti-automorphismes associés à la tour dérivée.	8
3.2. L'opérateur h	9
3.3. Unités matricielles et quasi-bases	9
3.4. Dualité	11
3.5. Les co-algèbres A et B	11
3.6. Antipodes sur A et B	15
3.7. Projection de Haar, mesure de Haar	16
3.8. Actions des C^* -groupoïdes quantiques	16
3.9. Conclusion	19
4. C^* -groupoïdes quantiques associés à une inclusion d'indice fini de profondeur finie de facteurs de type II_1	19
4.1. Inclusion de profondeur finie	19
4.2. Facteur intermédiaire et $*$ -sous-algèbre co-idéale	20
4.3. Autodualité	21
5. Structure de C^* -groupoïde quantique sur les algèbres de Temperley-Lieb	22
5.1. Facteurs de Jones et algèbres de Temperley-Lieb	22
5.2. Structure de C^* -groupoïde quantique des algèbres de Temperley-Lieb	22
5.3. C^* -groupoïde quantique de dimension 13 associé au facteur de Jones de graphe A_4	23
6. Action d'un groupoïde quantique fini sur un facteur	28
6.1. Hypothèse et remarque importante	28
6.2. Produit croisé des groupoïdes en dualité : L'algèbre $A.B$	28
6.3. Mesures de Haar et espérances conditionnelles	28
6.4. Trace sur $A.B$	29
6.5. L'inclusion $M_1 \subset M_2$	33
6.6. Action de A sur M_1	34
6.7. Conclusion	35
7. Déformation régulière d'un C^* -groupoïde quantique fini	35
7.1. Eléments séparateurs	35
7.2. Proposition	36
7.3. Nouvelle dualité et déformation des co-algèbres	36
Annexe A.	38
A.1. Représentation standard de $B.A$ sur $L^2(A, tr)$	38
A.2. Construction des facteurs	38
A.3. Commutants relatifs	39
A.4. Actions de A sur M_1 et de B sur M_2	39

A.5. Structures des commutants relatifs	40
A.6. Conclusion	41
Références	42

1. INTRODUCTION

Soient une inclusion de facteurs de type II_1 , $N_0 \subset N_1$, de profondeur 2 d'indice fini et

$$N_0 \subset N_1 \overset{f_1}{\subset} N_2 \overset{f_2}{\subset} N_3 \dots$$

la tour obtenue par construction de base. Si l'inclusion est irréductible, les commutants relatifs $A = N'_0 \cap N_2$ et $B = N'_1 \cap N_3$ peuvent être munis de structures duales d'algèbres de Kac de dimension finie ([Da1], [L], [Szy]). Généralisant les méthodes de W. Szymanski aux inclusions réductibles, D. Nikshych et L. Vainerman définissent dans [NV 1] une dualité entre les commutants relatifs A et B à l'aide de la trace tr de N_1 :

$$\langle a, b \rangle = [N_1 : N_0]^2 tr(af_2 f_1 H b) \quad (a \in A, b \in B)$$

(L'élément qui rend compte du fait que l'inclusion n'est pas irréductible est l'indice H de la restriction à $N'_1 \cap N_2$ de la trace tr .) A l'aide de cette dualité, ils définissent des structures duales de C^* -groupoïde quantique sur A et B . Les coproduits sont définis par dualité, aussi pour qu'ils soient compatibles avec l'involution, ils ont dû définir de nouvelles involutions sur A et B différentes de celles héritées du facteur N_4 . L'étude de ces structures à l'aide de formules généralisant celles obtenues dans [Da] pour une inclusion irréductible fait apparaître un autre inconvénient : Si on note $B(N_1 \subset N_2)$ la structure définie sur B , la structure duale sur A n'est pas isomorphe, mais anti-isomorphe à $B(N_0 \subset N_1)$.

Je propose ici une autre dualité qui permet une construction symétrique conservant l'involution :

$$\langle a, b \rangle = [N_1 : N_0]^2 tr(aH^{1/2} f_2 f_1 H^{1/2} b) \quad (a \in A, b \in B)$$

Avec cette nouvelle définition, si on note $B(N_1 \subset N_2)$ la structure définie sur B , la structure duale sur A est $B(N_0 \subset N_1)$.

Les propriétés des structures de C^* -groupoïde quantique construites à partir de cette dualité pourraient s'obtenir à partir des résultats de D. Nikshych et L. Vainerman. Certaines démonstrations sont d'ailleurs fortement inspirées des leurs. Pourtant, comme je dispose maintenant de formules pour les co-produits et les antipodes, je donne souvent des démonstrations directes.

L'intérêt de cette construction symétrique apparaît dans la partie 4. Dans le cas d'une inclusion de profondeur finie, on peut alors obtenir des C^* -groupoïdes quantiques autoduaux.

Dans la partie 5, je précise la structure de C^* -groupoïde quantique des algèbres de Temperley-Lieb. Grâce à la symétrie de la construction, ces C^* -groupoïdes quantiques sont autoduaux. J'étudie en particulier le C^* -groupoïde quantique de dimension 13 associé au graphe linéaire A_4 et montre qu'il est isomorphe à celui décrit par G. Böhm et K. Szlachanyi dans [BSz - 5].

Dans la partie 6, j'étends aux C^* -groupoïdes quantiques connexes de dimension finie un résultat de D. Nikshych [N] sur les algèbres de Kac faibles en les faisant agir extérieurement sur le facteur hyperfini de type II_1 .

Dans la partie 7, je montre qu'on peut déformer toute paire de C^* -groupoïdes quantiques finis duaux en une paire de C^* -groupoïdes quantiques finis réguliers sans modifier la structure de C^* -algèbre.

L'essentiel de ce texte a été écrit au printemps 2001, la partie 6 l'a complété au printemps 2003 et la 7 à l'automne de la même année. Léonid Vainerman et Jean-Michel Vallin ont été à l'origine de cet travail, je les en remercie vivement et plus particulièrement Léonid pour de nombreux échanges par courrier électronique à propos de la construction originale du C^* -groupe quantique. Mes remerciements vont aussi à Kornel Szlachányi pour ses réponses précises. Les calculs concernant le groupe quantique de dimension 13 ont été grandement facilités par les conseils Maple de Jacques Peyrière, je lui en suis reconnaissante.

2. C^* -GROUPOÏDES QUANTIQUES FINIS

On rappelle ici les définitions de C^* -groupe quantique fini et de C^* -groupe quantique fini dual ([BNSz][N][NV 2] [NV 3]) ainsi que celles d'une action et du produit croisé.

2.1. C^* -groupe quantique fini.

Définition. Un C^* -groupe quantique fini est une C^* -algèbre G de dimension finie (on note m la multiplication, 1 l'unité, $*$ l'involution) munie d'une structure de co-algèbre associative avec un coproduit Δ , une co-unité ε et une antipode S tels que

i) Δ soit un $*$ -homomorphisme d'algèbres de G dans $G \otimes G$ vérifiant :

$$(\Delta \otimes \text{id})\Delta(1) = (1 \otimes \Delta(1))(\Delta(1) \otimes 1)$$

ii) La co-unité soit une application linéaire de G dans G vérifiant :

$$\varepsilon(fgh) = \varepsilon(fg_{(1)})\varepsilon(g_{(2)}h) \quad ((f, g, h) \in G^3)$$

(propriété est équivalente à

$$\varepsilon(fgh) = \varepsilon(fg_{(2)})\varepsilon(g_{(1)}h) \quad ((f, g, h) \in G^3))$$

iii) L'antipode S soit un anti-homomorphisme d'algèbre et de co-algèbre de G dans G vérifiant pour tout g de G :

$$m(\text{id} \otimes S)\Delta(g) = (\varepsilon \otimes \text{id})(\Delta(1)(g \otimes 1))$$

(propriété équivalente à

$$m(S \otimes \text{id})\Delta(g) = (\text{id} \otimes \varepsilon)((1 \otimes g)\Delta(1))$$

On appelle **co-unité but** et **co-unité source** les applications ε_t et ε_s définies pour tout g de G par :

$$\varepsilon_t(g) = (\varepsilon \otimes \text{id})(\Delta(1)(g \otimes 1)) \quad \varepsilon_s(g) = (\text{id} \otimes \varepsilon)((1 \otimes g)\Delta(1))$$

2.2. C^* -groupe quantique dual.

Définition. On définit sur $\hat{G} = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(G, \mathbb{C})$ une structure de C^* -groupe quantique dual de celle de G grâce aux formules suivantes :

$$\begin{aligned} \langle h, \phi\psi \rangle &= \langle \Delta(h), \phi \otimes \psi \rangle \\ \langle h \otimes g, \hat{\Delta}(\phi) \rangle &= \langle hg, \phi \rangle \\ \langle h, \hat{S}(\phi) \rangle &= \langle S(h), \phi \rangle \\ \langle h, \phi^* \rangle &= \overline{\langle S(h)^*, \phi \rangle} \end{aligned}$$

pour tous ϕ et ψ de \hat{G} et tous h et g de G .

L'unité de \hat{G} est ε et la co-unité $\hat{\varepsilon}$ est $\phi \mapsto \langle 1, \phi \rangle$.

2.3. Projection de Haar, mesure de Haar. D'après [BNSz 4.5] et [NV 1-7.3.1], il existe une unique projection p de G invariante par l'antipode, appelée **projection de Haar normalisée** telle que pour tout g de G , on ait les propriétés équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \varepsilon_t(g)p &= gp & \varepsilon_t(p) &= 1 \\ \text{(ii)} \quad p\varepsilon_s(g) &= pg & \varepsilon_s(p) &= 1 \end{aligned}$$

La forme linéaire duale $\hat{\phi}$ de la projection de Haar normalisée est appelée **mesure de Haar normalisée de \hat{G}** . Elle est fidèle, invariante par l'antipode et vérifie les propriétés équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad (\text{id} \otimes \hat{\phi})\hat{\Delta} &= (\hat{\varepsilon}_t \otimes \hat{\phi})\hat{\Delta} & \hat{\phi} \circ \hat{\varepsilon}_t &= \hat{\varepsilon} \\ \text{(ii)} \quad (\hat{\phi} \otimes \text{id})\hat{\Delta} &= (\hat{\phi} \otimes \hat{\varepsilon}_s)\hat{\Delta} & \hat{\phi} \circ \hat{\varepsilon}_s &= \hat{\varepsilon} \end{aligned}$$

2.4. Les sous-algèbres co-unitales. [NV3 - 2.2][BNSz - 2.5 et 2.9]

L'algèbre $G_s = \varepsilon_s(G)$ (resp. $G_t = \varepsilon_t(G)$) est appelée sous-algèbre co-unitale source (resp. sous-algèbre co-unitale but).

Les co-unités but et source sont des homomorphismes idempotents de G_t (resp. G_s) et vérifient pour tout g de G :

$$(\text{id} \otimes \varepsilon_t)\Delta(g) = 1_{(1)}g \otimes 1_{(2)} \quad (\varepsilon_s \otimes \text{id})\Delta(g) = 1_{(1)} \otimes g1_{(2)}$$

On a aussi les formules suivantes :

$$\varepsilon_t \circ S = \varepsilon_t \circ \varepsilon_s = S \circ \varepsilon_s \quad \varepsilon_s \circ S = \varepsilon_s \circ \varepsilon_t = S \circ \varepsilon_t$$

Les sous-algèbres co-unitales commutent entre elles et vérifient :

$$\begin{aligned} G_t &= \{g \in G, \Delta(g) = 1_{(1)}g \otimes 1_{(2)} = g1_{(1)} \otimes 1_{(2)}\} = \{(\omega \otimes \text{id})\Delta(1), \omega \in \hat{G}\} \\ G_s &= \{g \in G, \Delta(g) = 1_{(1)} \otimes g1_{(2)} = 1_{(1)} \otimes 1_{(2)}g\} = \{(\text{id} \otimes \omega)\Delta(1), \omega \in \hat{G}\} \end{aligned}$$

2.5. C*-groupeïde quantique fini régulier. On dit que le C*-groupeïde quantique fini G est **régulier** si son antipode est involutive sur les algèbres co-unitales.

2.6. Action d'un groupeïde quantique. [NSzW - def.1.2.2] [N - 2.2]

2.6.1. Soit M une algèbre involutive unitaire. On dit qu'un groupeïde quantique G fini agit à gauche (resp. à droite) sur M s'il existe une application linéaire $g \otimes m \mapsto g \triangleright m$ de $G \otimes M$ dans M (resp. $m \otimes g \mapsto m \triangleleft g$ de $M \otimes G$ dans M) définissant une structure de G -module à gauche (resp. à droite) sur M et vérifiant pour g dans G et x et y dans M

$$\begin{aligned} (1) \quad g \triangleright (xy) &= (g_{(1)} \triangleright x)(g_{(2)} \triangleright y) \quad (\text{resp. } (xy) \triangleleft g = (x \triangleleft g_{(1)})(y \triangleleft g_{(2)})) \\ (2) \quad (g \triangleright x)^* &= S(g)^* \triangleright x^* \quad (\text{resp. } (x \triangleleft g)^* = x^* \triangleleft S(g)^*) \\ (3) \quad g \triangleright 1 &= \varepsilon_t(g) \triangleright 1 \quad (\text{resp. } 1 \triangleleft g = 1 \triangleleft \varepsilon_s(g)) \end{aligned}$$

Si M est une C^* -algèbre ou une algèbre de von Neumann, l'application $g \otimes m \mapsto g \triangleright m$ (resp. $m \otimes g \mapsto m \triangleleft g$) doit être continue en norme ou faiblement pour tout g de G .

D'après [NSzW - def 1.2.4], une action à gauche est dite **standard** si l'application $x \otimes 1_M \mapsto x \triangleright 1_M$ est un isomorphisme de A_t sur une sous-algèbre de M .

Une action à gauche est standard si et seulement si elle vérifie :

$$g \triangleright 1 = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_t(g) = 0$$

2.6.2. Rappelons les définitions des actions duales des groupoïdes l'un sur l'autre (voir [NSzW] ou [N]). Posons $A = G$ et $B = \hat{G}$. Le groupoïde A agit à droite sur B :

$$b \triangleleft a = \langle a, b_{(1)} \rangle b_{(2)} \quad (a \in A, b \in B)$$

Le groupoïde B agit à gauche sur A :

$$b \triangleright a = \langle a_{(2)}, b \rangle a_{(1)} \quad (a \in A, b \in B)$$

De façon équivalente, pour tous x et a de A et y et b de B , on a

$$\langle x, b \triangleleft a \rangle = \langle ax, b \rangle \quad \text{et} \quad \langle b \triangleright a, y \rangle = \langle a, yb \rangle.$$

2.6.3. Les actions que nous venons de définir sont standard.

Proposition (BNSz-lemme 2.6). *L'application $x \mapsto 1_b \triangleleft x$ est un isomorphisme de l'algèbre A_s sur l'algèbre B_t . Sa réciproque est donnée par $y \mapsto y \triangleright 1_a$ ($y \in B_t$).*

2.6.4. [BNSz - 2.7] Des propriétés des sous-algèbres co-unitaires, on déduit les formules suivantes pour b dans B , x dans A_t et y dans A_s :

$$\begin{aligned} x \triangleright b &= (x \triangleright 1_b) b & y \triangleright b &= b (y \triangleright 1_b) \\ b \triangleleft x &= (1_b \triangleleft x) b & b \triangleleft y &= b (1_b \triangleleft y) \end{aligned}$$

2.7. Produit croisé d'une algèbre par un groupoïde quantique.

2.7.1. *Définition.* [N - 2.2] Le produit croisé à gauche (resp. à droite) $M \rtimes G$ (resp. $G \ltimes M$) est le \mathbb{C} -espace vectoriel $M \otimes_{G_t} G$ (resp. $G \otimes_{G_s} M$) où on identifie $m(z \triangleright 1) \otimes g$ et $m \otimes zg$ (resp. $gz \otimes m$ et $g \otimes (1 \triangleleft z)m$) pour m dans M , g dans G et z dans G_t (resp. G_s). Soit $[m \otimes g]$ (resp. $[g \otimes m]$) la classe de $m \otimes g$ (resp. $g \otimes m$).

On munit le produit croisé d'une structure d'une algèbre involutive en posant pour tous g et h dans G et x et y dans M :

$$\begin{aligned} [x \otimes g][y \otimes h] &= [x(g_{(1)} \triangleright y) \otimes g_{(2)}h] & [x \otimes g]^* &= [(g_{(1)}^* \triangleright x^*) \otimes g_{(2)}^*] \\ (\text{resp. } [g \otimes x][h \otimes y] &= [gh_{(1)} \otimes (x \triangleleft h_{(2)})y] & [g \otimes x]^* &= [g_{(1)}^* \otimes (x^* \triangleleft g_{(2)}^*)] \end{aligned}$$

De plus si M est une C^* -algèbre ou une algèbre de von Neumann, le produit croisé devient une C^* -algèbre ou une algèbre de von Neumann.

Les applications $i_G : g \mapsto [1 \otimes g]$ (resp. $g \mapsto [g \otimes 1]$) et $i_M : m \mapsto [m \otimes 1]$ (resp. $m \mapsto [1 \otimes m]$) sont des homomorphismes injectifs d'algèbres involutives de G et M dans le produit croisé telles que :

$$M \rtimes G = i_M(M)i_G(G) \quad (\text{resp. } G \ltimes M = i_G(G)i_M(M))$$

2.7.2. *Action duale sur le produit croisé.* [N - 2.2]. On définit l'action duale à gauche (resp. à droite) de \hat{G} sur $M \rtimes G$ (resp. $G \ltimes M$) par :

$$\begin{aligned} h \triangleright [m \otimes g] &= [m \otimes h \triangleright g] & (g \in G, h \in \hat{G}, m \in M) \\ (\text{resp. } [g \otimes m] \triangleleft h &= [g \triangleleft h \otimes m] & (g \in G, h \in \hat{G}, m \in M)) \end{aligned}$$

2.8. **Inclusions de profondeur 2.** Nous rappelons ici quelques résultats de [NSzW] qui motivent cet article. Nous considérons un C^* -groupoïde quantique A de dimension finie agissant sur une algèbre de von Neumann M .

2.8.1. Produit croisé et tour de Jones.

Corollaire (NSzW - 4.1.5). Soient N et M des algèbres de von Neumann et A un C^* -groupoïde quantique de dimension finie tel que M soit $N \rtimes \hat{A}$. La tour

$$N \subset M \subset M \rtimes A \subset M \rtimes A \rtimes \hat{A} \dots$$

est une tour de Jones de profondeur 2.

En particulier, si on prend $N = A_t$ et $M = A_t \rtimes A = A$, alors

$$A_t \subset A \subset A \rtimes \hat{A} \subset A \rtimes \hat{A} \rtimes A \dots$$

est une tour de Jones.

2.8.2. *Action extérieure.* Nous prendrons le résultat du théorème suivant comme définition pour une action extérieure.

Théorème (NSzW - 4.2.3). L'action de A sur M est extérieure si et seulement si on a l'égalité :

$$M' \cap (M \rtimes A) = Z(M) \rtimes A_s$$

2.8.3. C^* -groupoïde quantique connexe.

Définition. Un C^* -groupoïde quantique A est dit connexe (terminologie de [N] que nous gardons car elle fait référence à l'inclusion $A_s \subset A$) ou pur (terminologie de [NSzW]) si $A_s \cap Z(A)$ est réduit à \mathbb{C} .

Proposition (NSzW - 2.4.6). Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) A est connexe
- (2) $\hat{A}_s \cap \hat{A}_t = \mathbb{C}$
- (3) $A_t \cap Z(A) = \mathbb{C}$

Remarques

- (1) Si A est connexe, toute action est standard ([NSzW - 2.2.1]).
- (2) D'après le théorème 3.1.1 de [NSzW], le centre de $M \rtimes A$ contient nécessairement $1_M \rtimes (A_t \cap Z(A))$. Donc la connexité de A est nécessaire pour obtenir un facteur comme produit croisé.
- (3) D'après le corollaire 2.4.4 de [NSzW], si l'action de A sur M est standard, le centre de M contient nécessairement une sous-algèbre isomorphe à $A_t \cap A_s$ donc la connexité de \hat{A} est nécessaire à l'action de A sur un facteur.

2.8.4. Action extérieure et facteur.

Théorème (NSzW - 4.2.4). Si A agit extérieurement et de façon standard sur un facteur M , $M \rtimes A$ est un facteur si et seulement si A est connexe.

Théorème (NSzW - 4.2.5). Si A est connexe et agit extérieurement sur un facteur M alors la tour

$$M^A \subset M \subset M \rtimes A \subset M \rtimes A \rtimes \hat{A} \dots$$

est une tour de Jones de facteurs. De plus le groupoïde dual \hat{A} est aussi connexe et son action canonique sur $M \rtimes A$ est extérieure.

2.8.5. *Tour dérivée.* Le résultat suivant précise la tour dérivée de l'inclusion obtenue par l'action de A .

Corollaire (NSzW - 4.3.5). *Soient A un C^* -groupoïde quantique fini agissant extérieurement sur un facteur M et N la sous-algèbre des points fixes de M sous A . On a les égalités suivantes :*

$$\begin{aligned} N' \cap M &= 1_M \rtimes A_t \\ M' \cap M \rtimes A &= 1_M \rtimes A_s \\ N' \cap M \rtimes A &= 1_M \rtimes A \end{aligned}$$

3. C^* -GROUPOÏDES QUANTIQUES ASSOCIÉS À UNE INCLUSION D'INDICE FINI DE PROFONDEUR 2 DE FACTEURS DE TYPE II_1 .

Soit $N_0 \subset N_1$ une inclusion d'indice fini τ^{-1} de facteurs de type II_1 . On note

$$\begin{matrix} f_1 & f_2 & f_3 & & f_n \\ N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset N_4 \cdots \subset N_n \subset N_{n+1} \cdots \end{matrix}$$

la tour de Jones obtenue par construction de base [G.H.J. 3] et tr la trace normale finie normalisée sur les facteurs considérés.

On suppose que l'inclusion $N_0 \subset N_1$ est de profondeur 2 c'est-à-dire qu'elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

- (1) le commutant relatif $N'_0 \cap N_3$ est obtenu par construction de base à partir de $N'_0 \cap N_1 \subset N'_0 \cap N_2$
- (2) l'algèbre $N'_0 \cap N_3$ est linéairement engendrée par $(N'_0 \cap N_2)f_2(N'_0 \cap N_2)$
- (3) $\dim Z(N'_0 \cap N_1) = \dim Z(N'_0 \cap N_3)$

On remarque que $N_0 \subset N_1$ est de profondeur 2 si et seulement si $N_1 \subset N_2$ est de profondeur 2.

3.1. Anti-automorphismes associés à la tour dérivée. Soit J_n l'isométrie bijective anti-linéaire canonique de l'espace standard $L^2(N_n, tr)$ de N_n ($n \in \mathbb{N}$). A partir de cette isométrie, A.Ocneanu définit un anti-automorphisme j_n de $N'_0 \cap N_{2n}$ en posant :

$$j_n(x) = J_n x^* J_n \quad (x \in N'_0 \cap N_{2n}).$$

L'anti-automorphisme j_n envoie $N'_0 \cap N_n$ sur $N'_n \cap N_{2n}$.

3.1.1. On rappelle ici les principales propriétés de ces anti-automorphismes.

Théorème (Da1- 2.2.1, 2.2.2). *Pour tout entier naturel n , les anti-automorphismes j_n sont involutifs et satisfont les relations suivantes :*

- a) La restriction de $j_{n+2}j_{n+1}$ à $N'_0 \cap N_{2n}$ coïncide avec $j_{n+1}j_n$.
- b) Si on note F_n le projecteur de Jones de l'inclusion $N_0 \subset N_n$, pour tout x de $N'_0 \cap N_n$, on a l'égalité $F_n x = F_n j_n(x)$.
- c) $j_n(f_p) = f_{2n-p}$ ($1 \leq p \leq n$).
- d) Si l'inclusion $N_0 \subset N_1$ est de profondeur finie, l'anti-automorphisme j_n conserve la trace de $N'_0 \cap N_{2n}$ pour tout entier n .

3.1.2. Comme les isomorphismes $j_{n+1}j_n$ se prolongent les uns les autres, on peut définir un isomorphisme γ de la tour dérivée par $\gamma_{/N'_0 \cap N_{2n}} = j_{n+1}j_n$. Cet isomorphisme γ ajoute 2 aux indices, par exemple :

$$\gamma(f_n) = f_{n+2}, \quad \gamma(N'_0 \cap N_{2n}) = N'_2 \cap N_{2n+2} \dots$$

3.1.3. *Remarque.* D'après [Da2. 2.2.3.v et 2.3], on peut affirmer que les applications S_A et S_B utilisées par D. Nikshych et L. Vainerman dans [NV 3-8.2 68] sont respectivement j_1 et j_2 , nous les noterons ainsi, gardant les notations S_A et S_B pour les antipodes. On a donc pour tous a de $N'_0 \cap N_2$ et b de $N'_1 \cap N_3$:

$$E_{N'_1}(j_1(a)f_2f_1) = E_{N'_1}(f_1f_2a) \quad \text{et} \quad E_{N_2}(bf_1f_2) = E_{N_2}(f_2f_1j_2(b))$$

Nous utiliserons sans cesse et pour différentes constructions de base le résultat suivant de [PiPol1] :

$$\forall x \in N_2 \quad xf_1 = \tau^{-1}E_{N_1}(xf_1)f_1$$

3.2. **L'opérateur h .** L'élément qui va rendre compte du fait que l'inclusion n'est pas irréductible est l'indice de la restriction à $N'_1 \cap N_2$ de la trace tr défini par Watatani [W]. Cet opérateur noté H est un élément inversible et autoadjoint du centre de $N'_1 \cap N_2$. Si l'algèbre $N'_1 \cap N_2$ se décompose sur son centre comme $\oplus_{j \in J} M_{v_j}(\mathbb{C})q_j$ et que, pour tout j de J , t_j soit la valeur de la restriction à $N'_1 \cap N_2$ de la trace tr sur les projecteurs minimaux de $M_{v_j}(\mathbb{C})q_j$, alors H est donné par la formule :

$$H = \sum_{j \in J} t_j^{-1} v_j q_j.$$

On vérifie facilement que la trace de H est égale à la dimension de $N'_1 \cap N_2$. On notera h l'opérateur $H^{1/2}$.

Lemme. Pour tout élément x de $N'_1 \cap N_2$, en particulier pour $x = h$, on a :

- (a) $f_2j_2(x) = f_2x$ et $f_1x = f_1j_1(x)$
- (b) $j_2(x)f_1f_2 = f_1f_2j_1(x)$

Démonstration. (a) D'après 3.1.1 (c).

(b) On utilise (a) et les propriétés de commutation des projecteurs f_1 et f_2 . □

3.3. Unités matricielles et quasi-bases.

3.3.1. *Notations.* Les notations et les résultats utilisés ici se trouvent dans [GHJ] aux paragraphes 2.3.11, 2.4.6 et 2.6.5. On peut voir en 5.3 un exemple. Soit une inclusion $K \subset L$ de C^* -algèbres unitaires de dimension finie :

$$K = \oplus_{j \in J} M_{v_j}(\mathbb{C})q_j \subset L = \oplus_{i \in I} M_{\mu_i}(\mathbb{C})p_i$$

On suppose qu'il existe sur L une trace fidèle tr et on note \vec{t} et \vec{s} les vecteurs définis par :

$$t_j = v_j^{-1} tr(q_j) \quad (j \in J), \quad s_i = \mu_i^{-1} tr(p_i) \quad (i \in I).$$

et h l'élément $\sum_{j \in J} \sqrt{v_j t_j^{-1}} q_j$ de K .

On considère le diagramme de Bratelli (augmenté d'un sommet $*$) de $K \subset L$. On appelle étage 1 du diagramme celui des sommets représentant les facteurs de K , étage 2 l'étage de ceux de L . Soit P l'ensemble des couples de chemins $p = (\xi, \eta)$ joignant le sommet $*$ à un même sommet du deuxième étage noté $\text{end}(p)$ et on note s_p la valeur $s_{\text{end}(p)}$. L'ensemble des opérateurs $\{T_p, p \in P\}$ est une famille d'unités matricielles de L .

3.3.2. Quasi-base d'une espérance conditionnelle.

Définition (W - 1.2.2). Soit E une espérance conditionnelle fidèle de L sur K . Une famille finie $\{(u_1, v_1) \dots (u_n, v_n)\}$ de $L \times L$ est dite une quasi-base si pour tout x de L , on a :

$$\sum_{i=1}^n u_i E(v_i x) = x = \sum_{i=1}^n E(x u_i) v_i$$

Proposition (W - 2.4.1). *Soit E l'espérance conditionnelle définie par la trace tr de L sur K . Posons, pour $p \in P$, $u_p = \frac{1}{\sqrt{s_p}} T_p h^{-1}$ alors $\{(u_p, u_p^*), p \in P\}$ est une quasi-base pour E .*

On dira dans ce cas que $\{u_p, p \in P\}$ est une quasi-base pour E .

3.3.3. *Cas particulier de la tour dérivée.* On considère le diagramme de Bratelli de la tour dérivée de l'inclusion $N_1 \subset N_2$:

$$N'_1 \cap N_1 = \mathbb{C} \subset N'_1 \cap N_2 = \bigoplus_{j \in J} M_{v_j}(\mathbb{C}) q_j \subset N'_1 \cap N_3 = \bigoplus_{i \in I} M_{\mu_i}(\mathbb{C}) p_i \subset N'_1 \cap N_4 \dots$$

La restriction de la trace tr aux algèbres de la tour dérivée est une trace de Markov caractérisée par les vecteurs \vec{t} et \vec{s} définis par :

$$t_j = v_j^{-1} tr(q_j) \quad (j \in J), \quad s_i = \mu_i^{-1} tr(p_i) \quad (i \in I).$$

Dans le cas d'une inclusion irréductible de profondeur 2, une famille d'unités matricielles normalisées (par $tr(b_p^* b_p) = 1$) de B est une base orthonormale de B pour le produit scalaire issu de la trace tr mais aussi une base de Pimsner-Popa de N_3 sur N_2 . Dans le cas d'une inclusion réductible de profondeur 2, ces deux propriétés ne coïncident plus. Si la normalisation est modifiée par h^{-1} , nous obtenons des quasi-bases.

Proposition.

- (i) *L'ensemble $\{b_p = \frac{1}{\sqrt{s_p}} T_p, p \in P\}$ est une famille d'unités matricielles normalisées (ou une base orthonormale) de B .*
- (ii) *L'ensemble $\{b_p h^{-1}, p \in P\}$ est une quasi-base de $N_3 \cap N'_1$ sur $N_2 \cap N'_1$.*
- (iii) *Si l'inclusion $N_1 \subset N_2$ est de profondeur 2, l'ensemble $\{b_p h^{-1}, p \in P\}$ est une quasi-base de N_3 sur N_2 , c'est-à-dire que pour tout x de N_3 , on a :*

$$x = \sum_{p \in P} b_p h^{-1} E_{N_2}(h^{-1} b_p^* x) = \sum_{p \in P} E_{N_2}(x b_p h^{-1}) h^{-1} b_p^*.$$

Démonstration. La première affirmation est évidente puisque la trace de $T_{p'}^* T_p$ vaut $\delta(p, p') s_p$ pour (p, p') dans $P \times P$. La deuxième résulte du lemme 2.4.1 de [W] rappelé en 3.3.2.

Si l'inclusion $N_1 \subset N_2$ est de profondeur 2, le commutant relatif $N_4 \cap N'_1$ est obtenu par contruction de base à partir de l'inclusion $N'_1 \cap N_2 \subset N'_1 \cap N_3$ donc il existe une famille finie $\{(u_\mu, v_\mu), \mu \in M\}$ de couples de $N'_1 \cap N_3$ telle que $\sum_{\mu \in M} u_\mu f_3 v_\mu = 1$. Alors $\{(u_\mu, v_\mu), \mu \in M\}$ est une quasi-base de N_3 sur N_2 en effet $\sum_{\mu \in M} u_\mu f_3 v_\mu = 1$ implique $\sum_{\mu \in M} u_\mu E_{N_2}(v_\mu x) f_3 = x f_3$ pour tout x de N_3 et donc grâce à [GHJ - 2.6.7(iii)], on peut écrire :

$$\sum_{\mu \in M} u_\mu E_{N_2}(v_\mu x) = x$$

En utilisant (ii) pour chaque u_μ , on obtient :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{\mu \in M, p \in P} b_p h^{-1} E_{N_2}(h^{-1} b_p^* u_\mu) E_{N_2}(v_\mu x) \\ &= \sum_{\mu \in M, p \in P} b_p h^{-1} E_{N_2}(h^{-1} b_p^* u_\mu E_{N_2}(v_\mu x)) \\ &= \sum_{p \in P} b_p h^{-1} E_{N_2}(h^{-1} b_p^* x) \end{aligned}$$

□

3.3.4. *Remarque.* Dans le cas d'une inclusion de profondeur 2, on a donc une quasi-base formée d'éléments du commutant relatif $N_3 \cap N'_1$, de plus on peut la choisir très proche d'une base orthonormale de cette algèbre. Nous verrons dans les calculs que ces propriétés sont très précieuses.

3.4. Dualité. Contrairement à D. Nikshych et L. Vainerman, nous définissons une dualité entre A et B en utilisant une formule symétrique :

$$\langle a, b \rangle = \tau^{-2} \text{tr}(ahf_2f_1hb) \quad (a \in A, b \in B)$$

On remarque que, grâce 3.2, la dualité s'écrit aussi :

$$\langle a, b \rangle = \tau^{-2} \text{tr}(aj_2(h)f_2f_1j_1(h)b) \quad (a \in A, b \in B)$$

et on a pour tout a de A , tout b de B et tout x de $N'_1 \cap N_2$:

$$\langle a, bx \rangle = \langle xa, b \rangle \quad \text{et} \quad \langle a, j_2(x)b \rangle = \langle aj_1(x), b \rangle$$

Remarque : Ce crochet définit une dualité car l'inclusion est de profondeur 2 (voir [Szy] ou [NV1 -3.2]).

3.5. Les co-algèbres A et B . Les algèbres A et B sont des C^* -algèbres. Grâce à la dualité entre A et B , nous définissons sur A et B des structures de co-algèbres co-associatives. Nous allons voir que les co-produits et les co-unités de ces co-algèbres sont définis par des formules analogues pour A et B et montrer qu'ils vérifient les propriétés (i) et (ii) des C^* groupoïdes quantiques (2.1).

3.5.1. Formule pour les co-produits. Le co-produit Δ_B de B est défini comme dual de la multiplication de l'algèbre A . De même pour le co-produit Δ_A de A .

Proposition. Soient $\{b_p, p \in P\}$ une famille d'unités matricielles normalisées de B et $\{a_s, s \in S\}$ une famille d'unités matricielles normalisées de A .

Premières formules :

Le co-produit Δ_B de B est donné pour x dans B par :

$$\Delta_B(x) = \tau^{-2} \sum_{p \in P} E_{N_3}(f_3xE_{N'_2}(b_p^*f_3h^{-1}f_2h^{-1})) \otimes b_p$$

et le co-produit Δ_A de A vérifie pour x dans A une formule analogue :

$$\Delta_A(x) = \tau^{-2} \sum_{s \in S} E_{N_2}(f_2xE_{N'_1}(a_s^*f_2j_1(h^{-1})f_1j_1(h^{-1}))) \otimes a_s.$$

formule qui s'écrit aussi :

$$\Delta_A(x) = \tau^{-2} \sum_{s \in S} E_{N_2}(f_2xE_{N'_1}(a_s^*f_2h^{-1}f_1h^{-1})) \otimes a_s.$$

Deuxième formule pour Δ_B :

Si $\{\alpha_r, r \in R\}$ est une base de Pimsner-Popa de A sur $N'_0 \cap N_1$, on a aussi :

$$\Delta_B(x) = \sum_{p \in P} \sum_{r \in R} E_A(x\alpha_r b_p^*) h^{-1} f_2 h^{-1} \alpha_r^* \otimes b_p$$

Démonstration. Soient a_1 et a_2 deux éléments de A , on a :

$$\begin{aligned} \langle a_1 \otimes a_2, \Delta_B(x) \rangle &= \tau^{-6} \sum_{p \in P} \text{tr}(a_1 h f_2 f_1 h f_3 x E_{N'_2}(b_p^* h^{-1} f_3 f_2 h^{-1})) \text{tr}(a_2 h f_2 f_1 h b_p) \\ &= \tau^{-6} \text{tr}(f_1 h f_3 x a_1 E_{N'_2} \left(\sum_{p \in P} \text{tr}(a_2 h f_2 f_1 h b_p) b_p^* h^{-1} f_3 f_2 \right) f_2) \\ &= \tau^{-6} \text{tr}(f_1 h f_3 x a_1 E_{N'_2} [E_{N'_1}(a_2 h f_2 f_1) f_3 f_2] f_2) \end{aligned}$$

Comme les tours $N'_3 \subset N'_2 \subset N'_1$ et $N'_2 \subset N'_1 \subset N'_0$ sont standard, on obtient :

$$\begin{aligned}
\langle a_1 \otimes a_2, \Delta_B(x) \rangle &= \tau^{-5} \text{tr}(f_1 h x a_1 E_{N'_1}(a_2 h f_2 f_1) f_3 f_2 f_3) \\
&= \tau^{-4} \text{tr}(f_1 h x a_1 E_{N'_1}(a_2 h f_2 f_1) f_3) \\
&= \tau^{-3} \text{tr}(a_1 E_{N'_1}(a_2 h f_2 f_1) f_1 h x) \\
&= \tau^{-2} \text{tr}(a_1 a_2 h f_2 f_1 h x) \\
&= \langle a_1 a_2, x \rangle
\end{aligned}$$

La première formule pour Δ_A se montre de manière analogue.

Nous pouvons établir une expression du co-produit Δ_B semblable à celle de [Da1-5.3.1], c'est la deuxième formule. Soit $\{\alpha_r, r \in R\}$ une base de Pimsner-Popa de A sur $N'_0 \cap N_1$, on vérifie facilement que $\{\alpha_r, r \in R\}$ est une base de Pimsner-Popa de N_2 sur N_1 . On sait d'après [Bi 2.7] que pour tout y de $N'_1 \cap N_4$, on a :

$$\tau \sum_{r \in R} \alpha_r y \alpha_r^* = E_{N'_2}(y).$$

En appliquant ce résultat à la première formule de Δ_B , on obtient la seconde. \square

On utilisera la notation habituelle de Sweedler : $\Delta(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}$.

3.5.2. Des définitions des co-produits par dualité et des propriétés de la dualité, on déduit :

Proposition. Soit x un élément de $N'_1 \cap N_2$. Pour tous a de A et b de B , on a :

$$\begin{aligned}
\Delta_B(bx) &= \Delta_B(b)(x \otimes 1) & \Delta_B(j_2(x)b) &= (1 \otimes j_2(x))\Delta_B(b) \\
\Delta_A(aj_1(x)) &= \Delta_A(a)(j_1(x) \otimes 1) & \Delta_A(xa) &= (1 \otimes x)\Delta_A(a)
\end{aligned}$$

3.5.3. Les projecteurs $\Delta_A(1)$ et $\Delta_B(1)$. Nous calculons maintenant les images de l'unité par les co-produits et nous faisons le lien avec les projecteurs relatifs aux produits fibrés en dimension finie définis par Jean-Michel Vallin dans [V1].

Proposition. Si $\{\lambda_k, k \in K\}$ est une famille d'unités matricielles de $N'_1 \cap N_2$ telle que l'élément λ_k appartienne au facteur $M_{v_{j_k}}(\mathbb{C})q_{j_k}$, l'élément $\Delta_B(1)$ est le projecteur $\sum_k \frac{1}{v_{j_k}} j_2(\lambda_k^*) \otimes \lambda_k$ de $N'_2 \cap N_3 \otimes N'_1 \cap N_2$.

Démonstration. Ecrivons la deuxième formule du co-produit pour $x = 1$, comme $\sum_{r \in R} \alpha_r f_2 \alpha_r^*$ vaut 1, la propriété 3.2 (a) donne :

$$\Delta_B(1) = \sum_p j_2(h^{-1} E_{N_2}(b_p^*) h^{-1}) \otimes b_p.$$

Si $\{\lambda_k, k \in K\}$ est une famille d'unités matricielles de $N'_1 \cap N_2$, $\{\sqrt{\frac{1}{t_{j_k}}} \lambda_k, t \in I\}$ est une base orthonormale de $N'_1 \cap N_2$ et comme $E_{N_2}(b_p^*) h^{-1}$ appartient à $N'_1 \cap N_2$, on a :

$$\begin{aligned}
\Delta_B(1) &= \sum_{p,k} \frac{1}{t_{j_k}} j_2(h^{-1} \lambda_k^*) \otimes \text{tr}(E_{N_2}(b_p^*) h^{-1} \lambda_k) b_p \\
&= \sum_k \frac{1}{t_{j_k}} j_2(h^{-1} \lambda_k^*) \otimes h^{-1} \lambda_k
\end{aligned}$$

On obtient donc la formule annoncée et l'appartenance de $\Delta_B(1)$ à $N'_2 \cap N_3 \otimes N'_1 \cap N_2$; $\Delta_B(1)$ est un projecteur car Δ_B est un homomorphisme d'algèbres, comme on le montre au paragraphe suivant. \square

Considérons l'identité comme représentation de $N'_1 \cap N_2$ dans A et B , j_1 (resp. j_2) comme antireprésentation de $N'_1 \cap N_2$ dans A (resp. B). Alors $\Delta_A(1)$ (resp. $\Delta_B(1)$) est le projecteur e_{Id, j_1} (resp. $e_{j_2, Id}$) défini par Jean-Michel Vallin [V1].

3.5.4. Propriétés des co-produits.

Proposition. *Les co-produits sont des homomorphismes d'algèbres involutives vérifiant :*

$$(\Delta \otimes \text{id})\Delta(1) = (1 \otimes \Delta(1))(\Delta(1) \otimes 1)$$

Démonstration. Montrons la proposition pour Δ_B par exemple. D'après 3.5.1, pour tous x et y de B , on a :

$$\begin{aligned} \Delta_B(x)\Delta_B(y) &= \tau^{-2} \sum_{p,p' \in P} E_{N_3}(f_3 x E_{N'_2}(b_p^* f_3 h^{-1} f_2 h^{-1})) \sum_{r \in R} E_A(y \alpha_r b_{p'}^*) h^{-1} f_2 h^{-1} \alpha_r^* \otimes b_p b_{p'} \\ &= \tau^{-2} \sum_{p,p' \in P} \sum_{r \in R} E_{N_3}[f_3 x E_A(y \alpha_r b_{p'}^*) h^{-1} E_{N'_2}(b_p^* f_3 h^{-1} f_2 j_2(h^{-1})) f_2 h^{-1} \alpha_r^*] \otimes b_p b_{p'} \\ &= \tau^{-2} \sum_{p,p' \in P} \sum_{r \in R} E_{N_3}[f_3 x E_A(y \alpha_r b_{p'}^*) H^{-1} E_{N'_2}(b_p^* f_3 h^{-1} f_2) f_2 h^{-1} \alpha_r^*] \otimes b_p b_{p'} \\ &= \tau^{-1} \sum_{p,p' \in P} \sum_{r \in R} E_{N_3}[f_3 x E_A(y \alpha_r b_{p'}^*) H^{-1} b_p^* f_3 h^{-1} f_2 h^{-1} \alpha_r^*] \otimes b_p b_{p'} \\ &= \sum_{p,p' \in P} \sum_{r \in R} E_{N_2}[x E_A(y \alpha_r b_{p'}^*) H^{-1} b_p^*] h^{-1} f_2 h^{-1} \alpha_r^* \otimes b_p b_{p'} \\ &= \sum_{p,p',q \in P} \sum_{r \in R} E_{N_2}[x E_A(y \alpha_r b_{p'}^* \text{tr}(b_{p'} b_q^* b_p)) H^{-1} b_p^*] h^{-1} f_2 h^{-1} \alpha_r^* \otimes b_q \\ &= \sum_{p,q \in P} \sum_{r \in R} E_{N_2}[x E_A(y \alpha_r b_q^* b_p h^{-1}) h^{-1} b_p^*] h^{-1} f_2 h^{-1} \alpha_r^* \otimes b_q \\ &= \sum_{p,q \in P} \sum_{r \in R} E_{N_2}(x y \alpha_r b_q^*) h^{-1} f_2 h^{-1} \alpha_r^* \otimes b_q \quad (\text{d'après 3.3.3}) \\ &= \Delta_B(xy) \end{aligned}$$

Traisons maintenant le cas de l'involution :

$$\begin{aligned} \Delta_B(x)^* &= \sum_{p \in P} \sum_{r \in R} \alpha_r h^{-1} f_2 h^{-1} E_A(b_p \alpha_r^* x^*) \otimes b_p^* \\ &= \sum_{p \in P} \sum_{r,s \in R} \alpha_r h^{-1} f_2 h^{-1} E_{N_1}(b_p \alpha_r^* x^* \alpha_s) \alpha_s^* \otimes b_p^* \\ &= \sum_{p \in P} \sum_{r,s \in R} \alpha_r E_{N_1}(b_p \alpha_r^* x^* \alpha_s) h^{-1} f_2 h^{-1} \alpha_s^* \otimes b_p^* \end{aligned}$$

Comme b_p commute avec N_1 , on a :

$$E_{N_1}(b_p \alpha_r^* x^* \alpha_s) = E_{N_1}(\alpha_r^* x^* \alpha_s b_p)$$

Puisque $\{\alpha_r, r \in R\}$ est une base de Pimsner-Popa de A sur $N'_0 \cap N_1$ et que $\{b_p^*, p \in P\}$ est une famille d'unités matricielles normalisées, on obtient :

$$\Delta_B(x)^* = \sum_{p \in P} \sum_{s \in R} E_A(x^* \alpha_s b_p) h^{-1} f_2 h^{-1} \alpha_s^* \otimes b_p^* = \Delta_B(x^*)$$

Montrons la relation pour $\Delta_B(1)$. Comme $1_{(1)}$ appartient à $N'_2 \cap N_3$, d'après 3.5.2, on a :

$$(\Delta_B \otimes \text{id})\Delta_B(1) = \Delta_B(1_{(1)}) \otimes 1_{(2)} = (1 \otimes 1_{(1)})\Delta_B(1) \otimes 1_{(2)} = (1 \otimes \Delta_B(1))(\Delta_B(1) \otimes 1)$$

□

3.5.5. Etude des co-unités.

Proposition. Pour tout élément b de B , la co-unité ε_B de B est donnée par :

$$\varepsilon_B(b) = \tau^{-1} \text{tr}(h f_2 h b).$$

Pour tout élément a de A , la co-unité ε_A de A , vérifie une formule analogue :

$$\varepsilon_A(a) = \tau^{-1} \text{tr}(h f_1 h a) = \tau^{-1} \text{tr}(j_1(h) f_1 j_1(h) a).$$

Chaque co-unité vérifie : $\varepsilon(xyz) = \varepsilon(xy_{(2)})\varepsilon(y_{(1)}z)$.

Démonstration. Les formules sont évidentes compte-tenu des propriétés des projecteurs de Jones. Montrons la relation pour la co-unité de B . Soient x, y et z trois éléments de B . On pose :

$$\Delta_A(1) = 1_{(1)} \otimes 1_{(2)} \quad \text{et} \quad \Delta_B(y) = y_{(1)} \otimes y_{(2)}.$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \varepsilon(xy_{(2)})\varepsilon(y_{(1)}z) &= \langle 1_{(1)}, x \rangle \langle 1_{(2)}, y_{(2)} \rangle \langle 1_{(1)}, y_{(1)} \rangle \langle 1_{(2)}, z \rangle \\ &= \langle 1_{(1)}, x \rangle \langle 1_{(2)}, \varepsilon_B(y_{(1)} 1_{(1)}) y_{(2)} \rangle \langle 1_{(2)}, z \rangle \end{aligned}$$

Or comme $1_{(1)}$ est un élément de $N'_1 \cap N_2$ et B une co-algèbre, d'après 3.5.2, on a :

$$\varepsilon_B(y_{(1)} 1_{(1)}) y_{(2)} = (\varepsilon_B \otimes \text{id})(\Delta_B(y)(1_{(1)} \otimes 1)) = (\varepsilon_B \otimes \text{id})\Delta_B(y 1_{(1)}) = y 1_{(1)}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \varepsilon(xy_{(2)})\varepsilon(y_{(1)}z) &= \langle 1_{(1)}, x \rangle \langle 1_{(2)}, y 1_{(1)} \rangle \langle 1_{(2)}, z \rangle \\ &= \langle 1, xy 1_{(1)} \rangle \langle 1_{(2)}, z \rangle \\ &= \langle 1_{(1)}, xy \rangle \langle 1_{(2)}, z \rangle \\ &= \varepsilon_B(xyz). \end{aligned}$$

□

Nous donnons maintenant les expressions des co-unités but et source de B , les formules pour A sont analogues :

Proposition. Pour tout x de B , on a :

$$\begin{aligned} \varepsilon_B^t(x) &= \tau^{-1} E_{N'_1 \cap N_2}(x h f_2 h^{-1}) \\ \varepsilon_B^s(x) &= \tau^{-1} j_2(E_{N'_1 \cap N_2}(x h f_2 h^{-1})) = \tau^{-1} E_{N'_2 \cap N_3}(j_2(x) h^{-1} f_2 h) \end{aligned}$$

La sous-algèbre co-unitale but A_t de A est $N'_0 \cap N_1$, la sous-algèbre co-unitale source B_s de B est $N'_2 \cap N_3$, les sous-algèbres co-unitales but B_t et source A_s coïncident avec $N'_1 \cap N_2$.

Démonstration. Avec les notations de 3.5.3 et grâce à la proposition précédente, on a :

$$\begin{aligned} \varepsilon_B^t(x) &= \tau^{-1} \sum_k \frac{1}{v_{j_k}} \text{tr}(x h f_2 h j_2(\lambda_k^*)) \lambda_k \\ &= \tau^{-1} \sum_k \frac{1}{v_{j_k}} \text{tr}(x h f_2 \lambda_k^* h) \lambda_k \\ &= \tau^{-1} \sum_k \text{tr}(x h f_2 \frac{1}{\sqrt{t_{j_k}}} \lambda_k^*) \frac{1}{\sqrt{t_{j_k}}} \lambda_k h^{-1} \end{aligned}$$

On obtient la formule annoncée en remarquant que $\{\frac{1}{\sqrt{t_{j_k}}} \lambda_k, k \in K\}$ est une famille d'unités matricielles normalisées de $N'_1 \cap N_2$. La deuxième formule se montre de même. □

3.6. Antipodes sur A et B . Pour obtenir des structures de C^* -groupoïdes quantiques duaux sur A et B , nous complétons nos données par les antipodes S_A et S_B définies pour tous a de A et b de B par :

$$\langle S_A(a)^*, b \rangle = \overline{\langle a, b^* \rangle} \quad \langle a, S_B(b)^* \rangle = \overline{\langle a^*, b \rangle}$$

3.6.1. Formules pour les antipodes. Nous obtenons alors les formules suivantes :

$$S_B(b) = h j_2(h^{-1}) j_2(b) h^{-1} j_2(h)$$

$$S_A(a) = j_1(h) h^{-1} j_1(a) j_1(h^{-1}) h$$

Il est évident que S_A et S_B sont des anti-automorphismes d'algèbres conservant l'unité. On vérifie facilement la formule de dualité :

$$\langle S_A(a), b \rangle = \langle a, S_B(b) \rangle.$$

Et par dualité, on obtient que S_A et S_B sont des anti-automorphismes de co-algèbres conservant les co-unités.

3.6.2. Il nous reste à vérifier la formule liant l'antipode, la co-unité et le co-produit :

Proposition. *Les antipodes S_A et S_B vérifient la relation :*

$$m(\text{id} \otimes S)\Delta(x) = (\varepsilon \otimes \text{id})(\Delta(1)(x \otimes 1)) = \varepsilon_t(x)$$

Démonstration. Soit x un élément de B , avec les notations de 3.5.1, on a :

$$\begin{aligned} m(\text{id} \otimes S_B)\Delta_B(x) &= x_{(1)} S_B(x_{(2)}) \\ &= \tau^{-2} \sum_{p \in P} E_{N_3}[f_3 x E_{N'_2}(b_p^* f_3 h^{-1} f_2 h^{-1})] h j_2(h^{-1}) j_2(b_p) h^{-1} j_2(h) \\ &= \tau^{-2} \sum_{p \in P} E_{N_3}[f_3 x E_{N'_2}(b_p^* f_3 h^{-1} f_2) h j_2(b_p h^{-2}) h^{-1} j_2(h)] \end{aligned}$$

Or, si $\{\alpha_r, r \in R\}$ est une base de Pimsner-Popa de A sur $N'_0 \cap N_1$, la formule de [Da1-3.2.1] nous donne une expression de $j_2(b_p h^{-2})$:

$$j_2(b_p h^{-2}) = \tau^{-1} \sum_{r \in R} E_A(f_2 \alpha_r b_p h^{-2}) f_2 \alpha_r^*.$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} m(\text{id} \otimes S_B)\Delta_B(x) &= \tau^{-3} \sum_{p \in P, r \in R} E_{N_3}[f_3 x h E_A(f_2 \alpha_r b_p h^{-2}) E_{N'_2}(b_p^* f_3 h^{-1} f_2) f_2 \alpha_r^* h^{-1} j_2(h)] \\ &= \tau^{-2} \sum_{p \in P, r \in R} E_{N_3}[f_3 x h E_A(f_2 \alpha_r b_p h^{-1}) h^{-1} b_p^* f_3 h^{-1} f_2 \alpha_r^* h^{-1} j_2(h)] \end{aligned}$$

Comme l'ensemble $\{b_p h^{-1}, p \in P\}$ est une quasi-base de N_3 sur N_2 [3.3.3], on a :

$$\sum_{p \in P} E_A(f_2 \alpha_r b_p h^{-1}) h^{-1} b_p^* = f_2 \alpha_r$$

d'autre part puisque $\{\alpha_r, r \in R\}$ est une base de Pimsner-Popa, la somme $\sum_{r \in R} \alpha_r f_2 \alpha_r^*$ vaut 1,

on en déduit :

$$\begin{aligned} m(\text{id} \otimes S_B)\Delta_B(x) &= \tau^{-2} \sum_{r \in R} E_{N_3}(f_3 x h f_2 \alpha_r f_3 j_2(h^{-1}) f_2 \alpha_r^* h^{-1} j_2(h)) \\ &= \tau^{-2} E_{N_3}(f_3 x h f_2 f_3 h^{-1}) \\ &= \tau^{-2} E_{N_3}(E_{N_2}(x h f_2 h^{-1}) f_3) \\ &= \tau^{-1} E_{N_2}(x h f_2 h^{-1}) \end{aligned}$$

On obtient la formule annoncée grâce à l'expression de ϵ_B^t démontrée en 3.5.5. \square

3.6.3. Remarques. Les formules définissant S_A et S_B sont analogues. Les automorphismes S_A^2 et S_B^2 sont intérieurs :

$$S_A^2 = \text{Ad}(j_1(H)H^{-1}) \quad S_B^2 = \text{Ad}(j_2(H^{-1})H)$$

Les C^* -groupoïdes quantiques construits sont donc réguliers.

3.7. Projection de Haar, mesure de Haar. On démontre facilement la proposition suivante.

Proposition. Soit d la dimension de $N'_1 \cap N_2$. La projection de Haar normalisée du C^* -groupoïde quantique B est $p_B = d^{-1}hf_2h$. La mesure de Haar normalisée du C^* -groupoïde quantique B est ϕ_B définie par :

$$\phi_B(x) = d^{-1} \text{tr}(H j_2(H)x) \quad (x \in B).$$

On a des formules analogues pour le C^* -groupoïde quantique A .

3.8. Actions des C^* -groupoïdes quantiques.

D'après [NV 1 - 6.1], le C^* -groupoïde quantique B agit à gauche sur l'algèbre N_2 . Nous définissons ici une action à gauche du C^* -groupoïde quantique A sur N_1 puis nous obtenons par dualité une action à gauche du C^* -groupoïde quantique B sur N_2 . On trouvera toutes les définitions concernant les actions et les produits croisés dans la partie 2.

3.8.1. Action du C^* -groupoïde quantique A sur N_1 .

Proposition. L'application :
$$\begin{array}{ccc} A \otimes N_1 & \rightarrow & N_1 \\ a \otimes x & \mapsto & a \triangleright x = \tau^{-1} E_{N_1}(axh f_1 h^{-1}) \end{array}$$
 est une action à gauche standard et extérieure du C^* -groupoïde quantique A sur l'algèbre N_1 .

Démonstration. Tout au long de cette démonstration, nous utilisons l'égalité : $f_1 h = f_1 j_1(h)$ (voir 3.2 (a)). Montrons d'abord que l'application définit une structure de A -module à gauche sur N_1 :

$$\begin{aligned} 1 \triangleright x &= \tau^{-1} E_{N_1}(xh f_1 h^{-1}) = x \\ a \triangleright (c \triangleright x) &= \tau^{-2} E_{N_1}(a E_{N_1}(cxh f_1 h^{-1})h f_1 h^{-1}) \\ &= \tau^{-2} E_{N_1}(a E_{N_1}(cxh f_1) f_1 h^{-1}) \\ &= \tau^{-1} E_{N_1}(acxh f_1 h^{-1}) = (ac) \triangleright x \end{aligned}$$

Nous étudions maintenant l'action de A sur un produit.

Lemme. Pour tout a de A et x de N_1 , on a :

$$(a_{(1)} \triangleright x) a_{(2)} = ax$$

Démonstration. Soit $\{a_s, s \in S\}$ une famille d'unités matricielles normalisées de A . D'après 3.5.1, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
(a_{(1)} \triangleright x) a_{(2)} &= \tau^{-3} \sum_{s \in S} E_{N_1} [E_{N_2} (f_2 a E_{N_1'} (a_s^* f_2 h^{-1} f_1 h^{-1})) x h f_1 h^{-1}] a_s \\
&= \tau^{-3} \sum_{s \in S} E_{N_1} [f_2 a x E_{N_1'} (a_s^* f_2 h^{-1} f_1) f_1 h^{-1}] a_s \\
&= \tau^{-2} \sum_{s \in S} E_{N_1} (f_2 a x a_s^* f_2 h^{-1} f_1 h^{-1}) a_s \\
&= \tau^{-2} \sum_{s \in S} E_{N_1} (f_2 E_{N_1} (a x a_s^*) j_1(h^{-1}) f_1 j_1(h^{-1})) a_s \\
&= \sum_{s \in S} E_{N_1} (a x a_s^* j_1(h^{-1})) j_1(h^{-1}) a_s
\end{aligned}$$

On conclut en remarquant que si $\{a_s, s \in S\}$ une famille d'unités matricielles normalisées de A , $\{a_s^*, s \in S\}$ l'est aussi et d'après 3.3.3, $\{a_s^* j_1(h^{-1}), s \in S\}$ est une quasi-base de N_2 sur N_1 . \square

On reprend maintenant la démonstration des propriétés de l'action. En appliquant le lemme précédent pour a dans A et x et y dans N_1 , on obtient :

$$(a_{(1)} \triangleright x) (a_{(2)} \triangleright y) = \tau^{-1} E_{N_1} ((a_{(1)} \triangleright x) a_{(2)} y h f_1 h^{-1}) = a \triangleright xy$$

Pour montrer la relation : $(a \triangleright x)^* = S_A(a)^* \triangleright x^*$, commençons par un lemme :

Lemme. Si x et y sont des éléments de N_1 et que a appartienne à A , alors on a :

$$tr(j_1(a) x f_1 y) = tr(f_1 x a y)$$

Démonstration. Ici, en considérant l'inclusion des commutants, la formule [NV 1 - 4.5 (i)] s'écrit :

$$j_1(a) = \tau^{-3} E_{N_2} (f_2 f_1 E_{N_1'} (a f_2 f_1))$$

En utilisant les propriétés de commutation, on obtient donc :

$$\begin{aligned}
tr(j_1(a) x f_1 y) &= \tau^{-3} tr(E_{N_2} (f_2 f_1 E_{N_1'} (a f_2 f_1)) x f_1 y) \\
&= \tau^{-3} tr(f_2 f_1 x E_{N_1'} (a f_2 f_1) f_1 y) \\
&= \tau^{-2} tr(f_2 f_1 x a f_2 f_1 y) \\
&= tr(E_{N_1} (f_1 x a) y) \\
&= tr(f_1 x a y)
\end{aligned}$$

\square

Grâce à ce lemme, pour x et y éléments de N_1 et a dans A , on peut écrire :

$$\begin{aligned}
tr((S_A(a)^* \triangleright x^*) y) &= \tau^{-1} tr(h j_1(h^{-1}) j_1(a^*) h^{-1} j_1(h) x^* h f_1 h^{-1} y) \\
&= \tau^{-1} tr(j_1(h a^* h^{-1}) x^* f_1 y) \\
&= \tau^{-1} tr(f_1 x^* h a^* h^{-1} y) \\
&= \tau^{-1} tr(h^{-1} f_1 h x^* a^* y) \\
&= tr((a \triangleright x)^* y)
\end{aligned}$$

On étudie ensuite l'action de A sur l'unité de N_1 :

$$a \triangleright 1 = \tau^{-1} E_{N_1} (a h f_1 h^{-1}) = \varepsilon_A^t(a) = \varepsilon_A^t(a) \triangleright 1$$

On vérifie facilement que $a \triangleright 1$ est nul si et seulement si $\varepsilon_A^t(a)$ l'est. L'action est donc standard. La proposition 3.8.3 nous permet d'affirmer qu'elle est extérieure (voir 2.8.2) puisque d'après 3.5.5, $N'_1 \cap N_2$ est la sous-algèbre co-unitale A_s . \square

3.8.2. Points fixes sous l'action de A . Par définition, un élément x de N_1 est un point fixe sous l'action de A si on a l'égalité

$$a \triangleright x = \varepsilon_A^t(a) \triangleright x \quad (*)$$

Proposition. *L'algèbre N_0 est l'algèbre des points fixes de N_1 sous l'action du C^* -groupe quantique A .*

Démonstration. Si x est dans N_0 , alors x commute à A donc vérifie l'égalité (*). Si x est un point fixe, écrivons l'égalité (*) pour $a = f_1 h^{-1}$, en utilisant le lemme 3.2, nous obtenons alors la suite d'égalités équivalentes :

$$\begin{aligned} (f_1 h^{-1}) \triangleright x &= \varepsilon_A^t(f_1 h^{-1}) \triangleright x \\ \tau^{-1} E_{N_1}(f_1 x f_1 h^{-1}) &= \tau^{-2} E_{N_1}(E_{N_1}(f_1 h^{-1}) x h f_1 h^{-1}) \\ E_{N_0}(x) j_1(h^{-1}) &= x j_1(h^{-1}) \\ E_{N_0}(x) &= x \end{aligned}$$

Donc x appartient à N_0 . \square

3.8.3. Produit croisé de N_1 par A .

Proposition. *L'application $\Theta : [x \otimes a] \mapsto xa$ est un isomorphisme d'algèbres de von Neumann entre $N_1 \rtimes A$ et N_2 .*

Démonstration. La démonstration est semblable à celle donnée par D. Nikshych et L. Vainerman dans [NV 1 - 6.3], nous la donnons pour être complets.

Si z appartient à $A_t = N'_0 \cap N_1$, on a :

$$z \triangleright 1 = \varepsilon_A^t(z) = z$$

donc Θ définit une application linéaire de $N_1 \otimes_{A_t} A$ dans N_2 qui est surjective puisque A fournit une quasi-base de N_2 sur N_1 .

En utilisant le premier lemme démontré en 3.8.1, on obtient pour a et c dans A , x et y dans N_1 :

$$\begin{aligned} \Theta([x \otimes a][y \otimes c]) &= \Theta([x(a_{(1)} \triangleright y) \otimes a_{(2)} c]) \\ &= x(a_{(1)} \triangleright y) a_{(2)} c \\ &= x a y c \\ &= \Theta([x \otimes a]) \Theta([y \otimes c]) \\ \Theta([x \otimes a]^*) &= \Theta([(a_{(1)}^* \triangleright x^*) \otimes a_{(2)}^*]) \\ &= (a_{(1)}^* \triangleright x^*) a_{(2)}^* \\ &= a^* x^* \\ &= \Theta([x \otimes a]) \end{aligned}$$

L'application est donc un homomorphisme surjectif d'algèbres involutives. Puisque ces algèbres sont des facteurs de type II_1 , Θ est injectif et la proposition est démontrée. \square

3.8.4. *Action du C*-groupe quantique B sur N₂.* On précise maintenant l'action à gauche de B sur A.

Lemme. *L'action à gauche de B sur A définie par dualité est :*

$$b \triangleright a = \tau^{-1} E_A(bah f_2 h^{-1}) \quad (a \in A, b \in B)$$

Démonstration. D'après 2.6.2, l'action duale de B sur A est définie par

$$b \triangleright a = a_{(1)} \langle a_{(2)}, b \rangle \quad (a \in A, b \in B).$$

Pour tout c dans B, on a donc :

$$\begin{aligned} \langle b \triangleright a, c \rangle &= \langle a_{(1)}, c \rangle \langle a_{(2)}, b \rangle \\ &= \langle a, cb \rangle \\ &= \tau^{-2} \text{tr}(bah f_2 f_1 hc) \\ &= \tau^{-2} \text{tr}(\tau^{-1} E_{N_2}(bah f_2) f_2 f_1 hc) \\ &= \tau^{-2} \text{tr}(\tau^{-1} E_{N_2}(bah f_2 h^{-1}) h f_2 f_1 hc) \\ &= \langle \tau^{-1} E_A(bah f_2 h^{-1}), c \rangle \end{aligned}$$

□

Proposition. *L'application : $\begin{array}{ccc} B \otimes N_2 & \rightarrow & N_2 \\ b \otimes x & \mapsto & b \triangleright x = \tau^{-1} E_{N_2}(bxh f_2 h^{-1}) \end{array}$ est une action à gauche du C*-groupe quantique B sur l'algèbre N₂ qui prolonge l'action duale de B sur A et dont l'algèbre de points fixes est N₁. Le facteur N₃ est isomorphe au produit croisé de N₂ par B.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que la formule est analogue à celle qui définit l'action de A sur N₁ et que si x appartient à A, on retrouve l'action duale. C'est l'action duale de B sur N₁ ⋈ A (voir 2.7.2). Comme l'algèbre N₂ est linéairement engendrée par les produits xa (x ∈ N₁, a ∈ A), on a plus précisément pour x dans N₁ et a dans A l'égalité b ⋈ xa = x(b ⋈ a). □

3.9. Conclusion. Nous avons donc défini sur les commutants relatifs N'₀ ∩ N₂ et N'₁ ∩ N₃ des structures duales de C*-groupe quantique données par des formules analogues. Ces C*-groupes quantiques agissent extérieurement de manière analogue et duale sur les facteurs N₁ et N₂. L'intérêt de la symétrie des définitions apparaîtra dans les parties suivantes.

Les C*-groupes quantiques associés à une inclusion de profondeur 2 de facteurs de type II₁ sont un peu particuliers (en 7, nous montrons que la régularité est possible par déformation), d'une part ils sont réguliers, d'autre part ils sont connexes en effet :

$$A_t \cap Z(A) \subset N'_0 \cap N_1 \cap \{f_1\}' = N'_0 \cap N_0 = \mathbb{C}$$

Cela tient au fait qu'on considère des inclusions de facteurs.

4. C*-GROUPOÏDES QUANTIQUES ASSOCIÉS À UNE INCLUSION D'INDICE FINI DE PROFONDEUR FINIE DE FACTEURS DE TYPE II₁

4.1. Inclusion de profondeur finie. Soit P₀ ⊂ P₁ une inclusion d'indice fini δ⁻¹ et de profondeur finie de facteurs de type II₁. On note

$$P_0 \subset P_1 \subset P_2 \subset P_3 \subset \dots P_n \subset P_{n+1} \dots$$

la tour de Jones obtenue par construction de base [G.H.J. 3] et tr la trace normale finie normalisée sur les facteurs considérés.

4.1.1. La proposition suivante montre qu'une inclusion de profondeur finie peut être vue comme intermédiaire d'une inclusion de profondeur 2.

Proposition (NV 2 - 4.1). *Soit $P_0 \subset P_1$ une inclusion d'indice fini et de profondeur finie p de facteurs de type Π_1 . Si l'entier m est supérieur ou égal à $p - 1$ alors l'inclusion $P_0 \subset P_m$ est de profondeur 2.*

4.1.2. On suppose donc que l'inclusion $P_0 \subset P_m$ est de profondeur 2 (4.1.1). Pour cette inclusion, on prend les notations suivantes :

$$N_0 = P_0 \subset N_1 = P_m \subset N_2 = P_{2m} \subset N_3 = P_{3m}$$

D'après [PP2], les projecteurs f_j s'expriment en fonction des projecteurs e_i , on a par exemple :

$$f_1 = \delta^{-m(m-1)/2} (e_m e_{m-1} \dots e_1) (e_{m+1} e_m \dots e_2) (e_{2m-1} e_{2m-2} \dots e_m).$$

L'anti-automorphisme j_n est l'anti-automorphisme de $P'_0 \cap P_{2n}$ défini en posant :

$$j_n(x) = J_n x^* J_n \quad (x \in P'_0 \cap P_{2n}).$$

où J_n l'isométrie bijective anti-linéaire canonique de l'espace standard $L^2(P_n, tr)$ de P_n ($n \in \mathbb{N}$) (voir 3.1.1).

Les commutants relatifs $A = N'_0 \cap N_2$ et $B = N'_1 \cap N_3$ sont donc munis de structures duales de C^* -groupoïde quantique.

4.2. Facteur intermédiaire et *-sous-algèbre co-idéale. D'après le théorème 4.3 de [NV 2], le commutant relatif $P'_m \cap P_{2m+1}$ est une *-sous-algèbre co-idéale de B et P_{2m+1} est isomorphe au produit croisé de P_{2m} par ce co-idéal. Précisons la structure de $P'_m \cap P_{2m+1}$, son action sur P_{2m} et les points fixes de P_{2m} sous cette action.

4.2.1. Nous gardons les notations de 3.5.1 pour la proposition suivante.

Proposition. *Le co-produit d'un élément y du co-idéal à gauche $P'_m \cap P_{2m+1}$ est donné par :*

$$\Delta_B(y) = \sum_{l \in L} \sum_{r \in R} E_A(y \alpha_r \mu_l^*) h^{-1} f_2 h^{-1} \alpha_r^* \otimes \mu_l$$

où $\{\mu_l, l \in L\}$ est une famille d'unités matricielles normalisées de $P'_m \cap P_{2m+1}$.

Les restrictions à $P'_m \cap P_{2m+1}$ de la co-unité et de la co-unité but de B vérifient pour tout élément y de $P'_m \cap P_{2m+1}$:

$$\varepsilon_B(y) = \delta^{-1} tr(y h e_{2m} h) \quad \varepsilon_B^t(y) = \delta^{-1} E_{N_2}(y h e_{2m} h^{-1})$$

La restriction à $P'_m \cap P_{2m+1}$ de l'action de B sur P_{2m} est donnée par

$$y \triangleright x = \delta^{-1} E_{N_2}(y x h e_{2m} h^{-1}) \quad (y \in P'_m \cap P_{2m+1}, x \in P_{2m})$$

Si l'on appelle algèbre des points fixes de P_{2m} sous l'action du co-idéal $P'_m \cap P_{2m+1}$, l'algèbre P_{2m}^f définie par :

$$P_{2m}^f = \{x \in P_{2m}, y \triangleright x = \varepsilon_B^t(y) \triangleright x, \forall y \in P'_m \cap P_{2m+1}\}$$

alors P_{2m}^f est l'image de P_{2m-1} par l'automorphisme intérieur $\text{Ad}(h)$.

Démonstration. Pour le co-produit, on écrit la deuxième formule :

$$\Delta_B(y) = \sum_{p \in P} \sum_{r \in R} E_A(y \alpha_r b_p^*) h^{-1} f_2 h^{-1} \alpha_r^* \otimes b_p$$

Comme $y \alpha_r$ est un élément de $P'_0 \cap P_{2m+1}$, on a :

$$E_A(y \alpha_r b_p^*) = E_A(y \alpha_r E_{P_{2m+1}}(b_p^*))$$

Soit $\{\mu_l, l \in L\}$ une famille d'unités matricielles normalisées de $P'_m \cap P_{2m+1}$. En décomposant $E_{P_{2m+1}}(b_p^*)$ sur cette base, on obtient la formule annoncée.

Les formules pour la co-unité, la co-unité but et l'action résultent de leurs définitions et du lemme suivant :

Lemme. $E_{P_{2m+1}}(f_2)$ vaut $\delta^{m-1}e_{2m}$.

Démonstration. Comme f_2 est le projecteur de Jones de l'inclusion $P_m \subset P_{2m}$ qui est d'indice δ^{-m} , on sait que $E_{P_{2m}}(f_2)$ est le scalaire δ^m . D'autre part, d'après [PP2], on a l'égalité : $f_2 = f_2e_{2m}$. On en déduit, pour tout x de P_{2m+1} :

$$tr(E_{P_{2m+1}}(f_2)x) = tr(f_2x) = tr(f_2e_{2m}x) = \delta^{-1}tr(f_2e_{2m}E_{P_{2m}}(e_{2m}x)) = \delta^{m-1}tr(e_{2m}x)$$

La formule annoncée en résulte. □

La démonstration du troisième point est analogue à celle de 3.8.2. □

4.2.2. De cette proposition et du théorème 4.3 de [NV 2], on déduit le corollaire :

Corollaire. La tour $P_1 \subset P_2 \subset P_3$ est isomorphe à la tour

$$hP_{2m-1}h^{-1} \subset P_{2m} \subset P_{2m} \rtimes (P'_m \cap P_{2m+1}).$$

Si m est impair, la tour $P_0 \subset P_1 \subset P_2$ est isomorphe à la tour

$$j_m(h)P_{m-1}j_m(h^{-1}) \subset P_m \subset P_m \rtimes (P'_0 \cap P_{m+1}).$$

La deuxième assertion résulte de la symétrie de la construction.

4.2.3. Calcul de $\Delta_B(e_{2m})$.

Corollaire. Si $\{\mu_l, l \in L\}$ est une famille d'unités matricielles normalisées de $P'_m \cap P_{2m+1}$, on a la formule :

$$\Delta_B(e_{2m}) = \delta \sum_{l \in L} j_{2m}(h^{-1}\mu_l^*) \otimes h^{-1}\mu_l$$

Démonstration. De la proposition et du lemme 4.2.1, on déduit :

$$\Delta_B(e_{2m}) = \delta^{-(m-1)} \sum_{l \in L} \sum_{r \in R} E_A(f_2\alpha_r\mu_l^*) f_2\alpha_r^* j_{2m}(h^{-1}) \otimes h^{-1}\mu_l$$

Et la formule 3.2.1 de [Da1] permet d'écrire l'égalité annoncée. □

4.3. **Autodualité.** Pour la fin de cette partie, nous choisissons m pair ($m = 2k$) et nous adoptons les notations suivantes : M_q est le facteur P_{qk} et N_q le facteur M_{2q} pour tout entier q . L'inclusion $N_0 \subset N_1$ est donc de profondeur 2 et son indice est $\tau^{-1} = [M_1 : M_0]^2$. Les projecteurs de Jones sont indiqués sur les tours :

$$\begin{array}{ccccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & \\ M_0 \subset & M_1 \subset & M_2 \subset & M_3 \subset & M_4 \subset & M_5 \subset & M_6 \\ & & & f_1 & & f_2 & \\ N_0 & \subset & N_1 & \subset & N_2 & \subset & N_3 \end{array}$$

Ici l'anti-automorphisme j_q est l'anti-automorphisme de $M'_0 \cap M_{2q}$ défini à partir de l'isométrie bijective anti-linéaire canonique de l'espace standard $L^2(M_q, tr)$. Dans les diverses formules de la partie 3, il faut donc remplacer j_2 par j_4 et j_1 par j_2 .

Les algèbres $A = N'_0 \cap N_2$ et $B = N'_1 \cap N_3$ sont munies de structures de C*-groupoïde quantique que nous allons comparer. Quand on choisit m pair, on bénéficie de l'existence de l'isomorphisme $\gamma = j_4j_3 = j_3j_2$ qui envoie l'algèbre involutive (A, j_2) sur (B, j_4) (3.1.2). L'isomorphisme γ décale de 2 les indices de la tour des M_n mais de 1 ceux de la tour des N_q .

De plus comme l'anti-isomorphisme j_3 de $N'_0 \cap N_3$ conserve la trace et échange les algèbres A et B , il conserve aussi l'indice H de la restriction à $N'_1 \cap N_2$ de la trace tr , on a donc :

$$\gamma(j_2(h)) = h \quad \text{et} \quad \gamma(h) = j_4(h).$$

Ces remarques et la symétrie des structures de C^* -groupeïde quantique permettent d'affirmer que γ est un isomorphisme du C^* -groupeïde quantique A sur le C^* -groupeïde quantique B .

Théorème. *Soit $P_0 \subset P_1$ une inclusion d'indice fini et de profondeur finie de facteurs de type Π_1 telle que $P_0 \subset P_{2k}$ soit de profondeur 2. Alors les C^* -groupeïdes quantiques $P'_0 \cap P_{4k}$ et $P'_{2k} \cap P_{6k}$ sont isomorphes, ils sont donc autoduaux.*

5. STRUCTURE DE C^* -GROUPOÏDE QUANTIQUE SUR LES ALGÈBRES DE TEMPERLEY-LIEB

Comme dans [NV 3 - 2.7], nous précisons la structure de C^* -groupeïde quantique sur les algèbres de Temperley-Lieb dans le cas non générique. Ces algèbres sont apparues dès le début de l'étude des inclusions ([J]). Ce sont les commutants relatifs des facteurs de Jones dans le facteur hyperfini.

5.1. Facteurs de Jones et algèbres de Temperley-Lieb. [GHJ - 2.1, 4.7b, II.7].

Soient l un entier supérieur à 2 et $(e'_i)_{i \geq 0}$ une suite de projecteurs satisfaisant les relations suivantes :

$$e'_i e'_{i \pm 1} e'_i = \delta e'_i \quad \text{et} \quad e'_i e'_j = e'_j e'_i \quad \text{pour } |i - j| \geq 2$$

avec $\delta = (4 \cos^2 \frac{\pi}{l+1})^{-1}$. Le facteur P_1 engendré par les projecteurs $(e'_i)_{i \geq 0}$ est le facteur hyperfini de type Π_1 et le sous-facteur P_0 de P_1 engendré par les projecteurs $(e'_i)_{i \geq 1}$ est le sous-facteur de Jones d'indice δ^{-1} . On note tr la trace normalisée de P_1 . Le graphe principal de l'inclusion $P_0 \subset P_1$ est le graphe linéaire A_l à l sommets (voir [GHJ - 1.4.3], [J - 4.5]), de même pour l'inclusion $P_1 \subset P_2$ qui lui est isomorphe. La profondeur de ces inclusions est donc $l - 1$. Les commutants relatifs sont des algèbres de Temperley-Lieb de paramètre non-générique δ^{-1} :

$$P'_q \cap P_n = (1, e_{q+1}, e_{q+2} \dots e_{n-2}, e_{n-1})''$$

D'après [NV 2 - 4.1] (voir 4.1.1), pour $m = l - 2$, l'inclusion $P_0 \subset P_m$ est de profondeur 2, de plus elle est isomorphe à l'inclusion $P_m \subset P_{2m}$. L'algèbre de Temperley-Lieb $A = P'_0 \cap P_{2m} = (1, e_1, e_2, \dots, e_{2m-1})''$ est donc munie d'une structure de C^* -groupeïde quantique autodual qu'on va préciser.

5.2. Structure de C^* -groupeïde quantique des algèbres de Temperley-Lieb.

Proposition. *Le co-produit de A est donné par :*

$$\begin{aligned} \Delta_A(1) &= \sum_k \frac{1}{v_{jk}} j_m(\lambda_k^*) \otimes \lambda_k \\ \Delta_A(e_p) &= \Delta_A(1)(e_p \otimes 1) = (e_p \otimes 1)\Delta_A(1) & (1 \leq p \leq m-1) \\ \Delta_A(e_q) &= \Delta_A(1)(1 \otimes e_q) = (1 \otimes e_q)\Delta_A(1) & (m+1 \leq q \leq 2m-1) \\ \Delta_A(e_m) &= \delta \sum_{l \in L} j_m(j_m(h^{-1})\mu_l^*) \otimes j_m(h^{-1})\mu_l. \end{aligned}$$

où $\{\lambda_k, k \in K\}$ est une famille d'unités matricielles de $P'_0 \cap P_m$ (v_{jk} est la dimension du facteur de $P'_0 \cap P_m$ auquel appartient λ_k), $\{\mu_l, l \in L\}$ une famille d'unités matricielles normalisées de $P'_0 \cap P_{m+1}$ et h la racine carrée de l'indice de la restriction à $P'_m \cap P_{2m}$ de tr .

La co-unité de A est donnée par :

$$\varepsilon_A(x) = \delta^{-m} \text{tr}(h f_1 h x) \quad (x \in A)$$

où f_1 est le projecteur de Jones de l'inclusion $P_0 \subset P_m$:

$$f_1 = \delta^{-m(m-1)/2} (e_m e_{m-1} \dots e_1) (e_{m+1} e_m \dots e_2) (e_{2m-1} e_{2m-2} \dots e_m).$$

L'antipode de A est donnée par :

$$S_A(e_p) = e_{2m-p} \quad (1 \leq p \leq 2m-1, p \neq m)$$

$$S_A(e_m) = j_m(h) h^{-1} e_m j_m(h^{-1}) h$$

Démonstration. Le co-produit est un homomorphisme d'algèbres, il suffit donc de le connaître sur les générateurs $1, e_1, \dots, e_{2m-1}$ de A . L'expression de $\Delta(1)$ résulte de 3.5.3. Tous les projecteurs sauf e_m sont soit dans $N'_0 \cap N_1$ soit dans $N'_1 \cap N_2$, leur co-produit est calculé grâce à 3.5.2 et 3.5.3.

L'expression de $\Delta(e_m)$ est donnée par le corollaire 4.2.3 grâce à la symétrie de la construction.

La formule de la co-unité découle de 3.5.5 et de [PiPo 2].

L'antipode est un anti-automorphisme d'algèbres conservant l'unité, il suffit donc de la connaître sur les projecteurs de Jones. D'après [Da1-2.2.1], on sait que, pour $p = 1 \dots 2m-1$, $j_m(e_p)$ est le projecteur e_{2m-p} ; les formules résultent alors des propriétés de commutation de h . \square

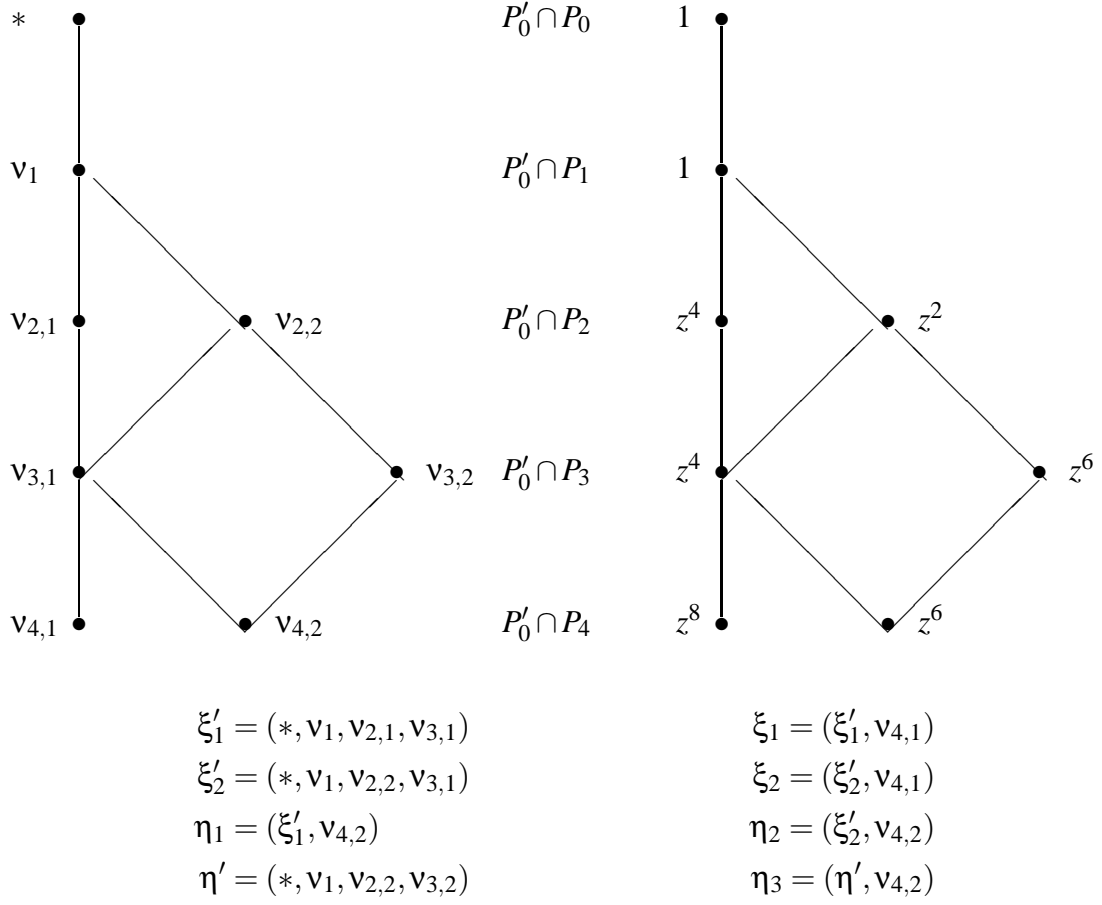
5.3. C*-groupeïde quantique de dimension 13 associé au facteur de Jones de graphe

A_4 . Dans cette partie, on suppose que l vaut 4, l'inclusion $P_0 \subset P_1$ est alors d'indice $\delta^{-1} = 4 \cos^2 \frac{\pi}{5}$, de graphe principal A_4 et l'inclusion $P_0 \subset P_2$ est de profondeur 2. La C*-algèbre $A_\delta = P'_0 \cap P_4$ est un C*-groupeïde quantique autodual ; nous le décrivons et montrons qu'il est isomorphe à celui, que nous nommerons G , décrit par G. Böhm et K. Szlachanyi dans [BSz-5]. Dans [NV1], D. Nikshych et L. Vainerman munissent cette même algèbre d'une structure de groupeïde quantique pour laquelle l'involution est modifiée mais on peut montrer par les méthodes employées ici qu'elle est isomorphe aux deux autres.

Pour simplifier les calculs, nous utilisons le paramètre $z = \sqrt[4]{\delta}$ introduit dans [BSz-5] et qui vérifie les relations suivantes et bien d'autres encore :

$$\begin{aligned} 1 - 3\delta + \delta^2 &= 0 & z^4 + z^2 - 1 &= 0 & 1 + z^2 &= z^{-2} \\ z^2 &= 1 - \delta = \frac{\delta}{1 - \delta} & z^3 &= \sqrt{\delta(1 - \delta)} \end{aligned}$$

5.3.1. *Algèbre des chemins de A_δ .* Comme dans [GHJ 2.3.11], nous représentons l'algèbre A_δ comme algèbre des chemins du graphe A_4 avec les notations suivantes pour les sommets du graphe et les chemins ; la trace des projecteurs minimaux des algèbres correspondant aux sommets du graphe est donnée sur le graphe de droite (d'après [J 5.2]) :



L'algèbre A_8 est somme directe de l'algèbre $C = \text{Vect} \{c_{i,j}, (i,j) \in \{1,2\}^2\}$ et l'algèbre $D = \text{Vect} \{d_{h,k}, (h,k) \in \{1,2,3\}^2\}$ avec $c_{i,j} = T_{\xi_i, \xi_j}$ et $d_{h,k} = T_{\eta_h, \eta_k}$.

L'algèbre $P'_0 \cap P_3$ est somme directe de $\text{Vect} \{b_{i,j}, (i,j) \in \{1,2\}^2\}$ et $\mathbb{C}b_5$ avec $b_{i,j} = T_{\xi'_i, \xi'_j} = c_{i,j} + d_{i,j}$ et $b_5 = T_{\eta', \eta'} = d_{3,3}$.

5.3.2. Projecteurs de Jones. L'algèbre A_8 est engendrée, en tant qu'algèbre, par l'unité et les projecteurs e_1, e_2 et e_3 . La formule [GHJ 2.6.5.4] nous fournit l'expression de ces projecteurs dans la base d'unités matricielles de l'algèbre des chemins.

D'après [GHJ 2.6.5.4], on a donc :

$$\begin{aligned}
 e_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 e_2 &= \begin{pmatrix} z^4 & z^3 \\ z^3 & z^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z^4 & z^3 & 0 \\ z^3 & z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 e_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & z^2 & z^3 \\ 0 & z^3 & z^4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Dans ce cas, d'après 3.2 et 3.1.1, on a :

$$h = z^{-2}e_3 + z^{-1}(1 - e_3) \quad j_2(h) = z^{-2}e_1 + z^{-1}(1 - e_1).$$

5.3.3. *Expression des unités matricielles en fonction des projecteurs de Jones.* On vérifie facilement par le calcul les expressions suivantes pour les unités matricielles de A_δ :

$$\begin{aligned} c_{1,1} &= e_1 e_3 \\ c_{1,2} &= z^{-3} e_3 e_1 (e_2 - \delta) \\ d_{1,1} &= e_1 (1 - e_3) \\ d_{1,2} &= z^{-3} (1 - e_3) e_1 (e_2 - \delta) \\ d_{1,3} &= z^{-6} e_1 (1 - e_3) (e_2 - \delta) (e_3 - z^2) \end{aligned}$$

Et on obtient les autres expressions grâce aux relations entre les unités matricielles.

5.3.4. *Nouvelles unités matricielles.* Nous définissons maintenant des nouvelles unités matricielles sur D qui vont permettre d'obtenir des formules plus simples pour le co-produit et l'antipode et d'identifier A_δ et le C^* -groupoïde quantique que nous appellerons G décrit en [BSz 5].

Proposition. $(D, *)$ admet $\{e_{i,j}, i, j = 1, 2, 3\}$ comme unités matricielles avec :

$$\begin{aligned} e_{1,2} &= z^2 d_{1,2} - z d_{1,3} = z^{-3} e_1 (1 - e_3) (e_2 - \delta) (1 - e_3) \\ e_{1,3} &= z d_{1,2} + z^2 d_{1,3} = \delta^{-1} e_1 (1 - e_3) (e_2 - \delta) e_3 \end{aligned}$$

On a alors en particulier :

$$\begin{aligned} e_1 &= c_{1,1} + e_{1,1} \\ e_3 &= c_{1,1} + e_{3,3} \\ e_2 &= z^4 c_{1,1} + z^3 c_{1,2} + z^3 c_{2,1} + z^2 c_{2,2} + z^4 e_{1,1} + z^5 e_{1,2} + z^4 e_{1,3} \\ &\quad + z^5 e_{2,1} + z^6 e_{2,2} + z^5 e_{2,3} + z^4 e_{3,1} + z^5 e_{3,2} + z^4 e_{3,3} \end{aligned}$$

Les calculs nécessaires à la vérification de cette proposition et des suivantes se font facilement à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

5.3.5. *Expression du co-produit.*

Proposition (BSz1 5). Si $\{e_{i,j}^0, i, j = 1, 2\}$ (resp. $\{e_{i,j}^1, i, j = 1, 2, 3\}$) est une famille d'unités matricielles du facteur de dimension 4 (resp. 9) de G , le co-produit de G est donné par :

$$\begin{aligned} \Delta_G(e_{1,1}^0) &= e_{1,1}^0 \otimes e_{1,1}^0 + e_{1,1}^1 \otimes e_{3,3}^1 \\ \Delta_G(e_{1,2}^0) &= e_{1,2}^0 \otimes e_{1,2}^0 + z^2 e_{1,3}^1 \otimes e_{3,1}^1 + z e_{1,2}^1 \otimes e_{3,2}^1 \\ \Delta_G(e_{2,2}^0) &= e_{2,2}^0 \otimes e_{2,2}^0 + z^4 e_{3,3}^1 \otimes e_{1,1}^1 + z^3 e_{3,2}^1 \otimes e_{1,2}^1 + z^3 e_{2,3}^1 \otimes e_{2,1}^1 + z^2 e_{2,2}^1 \otimes e_{2,2}^1 \\ \Delta_G(e_{1,1}^1) &= e_{1,1}^0 \otimes e_{1,1}^1 + e_{1,1}^1 \otimes e_{2,2}^0 + e_{1,1}^1 \otimes e_{2,2}^1 \\ \Delta_G(e_{1,2}^1) &= e_{1,2}^0 \otimes e_{1,2}^1 + e_{1,2}^1 \otimes e_{2,2}^0 + z e_{1,3}^1 \otimes e_{2,1}^1 - z^2 e_{1,2}^1 \otimes e_{2,2}^1 \\ \Delta_G(e_{1,3}^1) &= e_{1,2}^0 \otimes e_{1,3}^1 + e_{1,3}^1 \otimes e_{2,1}^0 + e_{1,2}^1 \otimes e_{2,3}^1 \\ \Delta_G(e_{2,2}^1) &= e_{2,2}^0 \otimes e_{2,2}^1 + e_{2,2}^1 \otimes e_{2,2}^0 + z^4 e_{2,2}^1 \otimes e_{2,2}^1 \\ &\quad + z^2 e_{3,3}^1 \otimes e_{1,1}^1 - z^3 e_{3,2}^1 \otimes e_{1,2}^1 - z^3 e_{2,3}^1 \otimes e_{2,1}^1 \\ \Delta_G(e_{2,3}^1) &= e_{2,2}^0 \otimes e_{2,3}^1 + e_{2,3}^1 \otimes e_{2,1}^0 + z e_{3,2}^1 \otimes e_{1,3}^1 - z^2 e_{2,2}^1 \otimes e_{2,3}^1 \\ \Delta_G(e_{3,3}^1) &= e_{2,2}^0 \otimes e_{3,3}^1 + e_{2,2}^1 \otimes e_{3,3}^0 + e_{3,3}^1 \otimes e_{1,1}^0 \end{aligned}$$

Dans la proposition suivante, nous donnons deux séries de formules pour le coproduit Δ_A , l'une en fonction des nouvelles unités matricielles permet de le comparer avec Δ_G , l'autre en fonction des projecteurs de Jones permet de le comparer avec celui de [NV1 - 7.3].

Proposition. *Le co-produit Δ_A de A_8 est l'homomorphisme d'algèbres déterminé par les égalités suivantes :*

$$\begin{aligned}
\Delta_A(1) &= c_{1,1} \otimes c_{1,1} + c_{1,1} \otimes e_{1,1} + c_{2,2} \otimes c_{2,2} + c_{2,2} \otimes e_{2,2} + c_{2,2} \otimes e_{3,3} \\
&\quad + e_{1,1} \otimes c_{2,2} + e_{1,1} \otimes e_{2,2} + e_{1,1} \otimes e_{3,3} + e_{2,2} \otimes c_{2,2} + e_{2,2} \otimes e_{2,2} \\
&\quad + e_{2,2} \otimes e_{3,3} + e_{3,3} \otimes c_{1,1} + e_{3,3} \otimes e_{1,1} \\
\Delta_A(e_1) &= c_{1,1} \otimes c_{1,1} + c_{1,1} \otimes e_{1,1} + e_{1,1} \otimes c_{2,2} + e_{1,1} \otimes e_{2,2} + e_{1,1} \otimes e_{3,3} \\
\Delta_A(e_3) &= c_{1,1} \otimes c_{1,1} + c_{2,2} \otimes e_{3,3} + e_{1,1} \otimes e_{3,3} + e_{2,2} \otimes e_{3,3} + e_{3,3} \otimes c_{1,1} \\
\Delta_A(e_2) &= z^4 c_{1,1} \otimes c_{1,1} + z^4 c_{1,1} \otimes e_{1,1} \\
&\quad + z^3 c_{1,2} \otimes c_{1,2} + z^5 c_{1,2} \otimes e_{1,2} + z^4 c_{1,2} \otimes e_{1,3} \\
&\quad + z^3 c_{2,1} \otimes c_{2,1} + z^5 c_{2,1} \otimes e_{2,1} + z^4 c_{2,1} \otimes e_{3,1} \\
&\quad + z^2 c_{2,2} \otimes c_{2,2} + z^6 c_{2,2} \otimes e_{2,2} + z^5 c_{2,2} \otimes e_{2,3} + z^5 c_{2,2} \otimes e_{3,2} + z^4 c_{2,2} \otimes e_{3,3} \\
&\quad + z^4 e_{1,1} \otimes c_{2,2} + z^4 e_{1,1} \otimes e_{2,2} + z^4 e_{1,1} \otimes e_{3,3} \\
&\quad + z^5 e_{1,2} \otimes c_{2,2} - z^7 e_{1,2} \otimes e_{2,2} + z^4 e_{1,2} \otimes e_{2,3} + z^4 e_{1,2} \otimes e_{3,2} \\
&\quad + z^4 e_{1,3} \otimes c_{2,1} + z^6 e_{1,3} \otimes e_{2,1} + z^5 e_{1,3} \otimes e_{3,1} \\
&\quad + z^5 e_{2,1} \otimes c_{2,2} - z^7 e_{2,1} \otimes e_{2,2} + z^4 e_{2,1} \otimes e_{2,3} + z^4 e_{2,1} \otimes e_{3,2} \\
&\quad + z^6 e_{2,2} \otimes c_{2,2} + 2z^6 e_{2,2} \otimes e_{2,2} - z^7 e_{2,2} \otimes e_{2,3} - z^7 e_{2,2} \otimes e_{3,2} + z^4 e_{2,2} \otimes e_{3,3} \\
&\quad + z^5 e_{2,3} \otimes c_{2,1} + z^7 e_{2,3} \otimes e_{2,1} + z^6 e_{2,3} \otimes e_{3,1} \\
&\quad + z^4 e_{3,1} \otimes c_{1,2} + z^6 e_{3,1} \otimes e_{1,2} + z^5 e_{3,1} \otimes e_{1,3} \\
&\quad + z^5 e_{3,2} \otimes c_{1,2} + z^7 e_{3,2} \otimes e_{1,2} + z^6 e_{3,2} \otimes e_{1,3} \\
&\quad + z^4 e_{3,3} \otimes c_{1,1} + z^4 e_{3,3} \otimes e_{1,1}
\end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}
\Delta_A(1) &= e_3 \otimes e_1 + (1 - e_3) \otimes (1 - e_1) \\
\Delta_A(e_1) &= e_1 e_3 \otimes e_1 + e_1 (1 - e_3) \otimes (1 - e_1) \\
\Delta_A(e_3) &= e_3 \otimes e_1 e_3 + (1 - e_3) \otimes (1 - e_1) e_3 \\
\Delta_A(e_2) &= \left(1 - \frac{(e_3 - e_2)^2}{(1 - \delta)}\right) \otimes \left(1 - \frac{(e_1 - e_2)^2}{(1 - \delta)}\right) + \delta e_3 \otimes e_1 \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{\delta(1 - \delta)}} e_3 (e_2 - \delta) \otimes e_1 (e_2 - \delta) + \frac{1}{\sqrt{\delta(1 - \delta)}} (e_2 - \delta) e_3 \otimes (e_2 - \delta) e_1 \\
&\quad + (1 - \delta) \left(\frac{(e_3 - e_2)^2}{(1 - \delta)} - e_3\right) \otimes \left(\frac{(e_1 - e_2)^2}{(1 - \delta)} - e_1\right)
\end{aligned}$$

Démonstration. Comme l'algèbre $P'_0 \cap P_2$ égale $\mathbb{C}e_1 \otimes \mathbb{C}(1 - e_1)$, on a :

$$\Delta_A(1) = e_3 \otimes e_1 + (1 - e_3) \otimes (1 - e_1).$$

En utilisant les expressions des projecteurs de Jones en fonction des unités matricielles, on obtient :

$$\Delta_A(1) = (c_{1,1} + e_{3,3}) \otimes (c_{1,1} + e_{1,1}) + (c_{2,2} + e_{1,1} + e_{2,2}) \otimes (c_{2,2} + e_{2,2} + e_{3,3}).$$

De même, les autres formules sont la traduction à l'aide des unités matricielles des égalités (5.2) :

$$\Delta_A(e_1) = (e_1 \otimes 1) \Delta_A(1) \quad \Delta_A(e_3) = \Delta_A(1) (1 \otimes e_3).$$

Le calcul de $\Delta_A(e_2)$ demande un peu plus de travail : D'après 5.3.1 et 5.3.3, les unités matricielles normalisées de $P'_0 \cap P_3$ sont :

$$\begin{aligned}\mu_1 &= z^{-2}e_1 & \mu_2 &= z^{-2}(c_{1,2} + d_{1,2}) & \mu_3 &= z^{-2}(c_{2,1} + d_{2,1}) \\ \mu_4 &= z^{-2}(c_{2,2} + d_{2,2}) & \mu_5 &= z^{-3}d_{3,3}\end{aligned}$$

Comme $j_2(h^{-1})$ vaut $z^2e_1 + z(1 - e_1)$, la formule 5.2 s'écrit ici :

$$\begin{aligned}\Delta_A(e_2) &= \delta(j_2(z^2\mu_1) \otimes z^2\mu_1 + j_2(z\mu_3) \otimes z^2\mu_2 + j_2(z^2\mu_2) \otimes z\mu_3 \\ &\quad + j_2(z\mu_4) \otimes z\mu_4 + j_2(z\mu_5) \otimes z\mu_5) \\ &= j_2(z^2e_1) \otimes z^2e_1 + j_2(zb_{2,1}) \otimes z^2b_{1,2} + j_2(z^2b_{1,2}) \otimes zb_{2,1} \\ &\quad + j_2(zb_{2,2}) \otimes zb_{2,2} + j_2(d_{3,3}) \otimes d_{3,3}\end{aligned}$$

Or on a :

$$\begin{aligned}b_{1,2} &= z^{-3}e_1(e_2 - \delta) \\ b_{2,2} &= z^{-6}(e_2 - \delta)e_1(e_2 - \delta) = z^{-2}[(e_2 - e_1)^2 - (1 - \delta)e_1] \\ d_{3,3} &= z^{-12}(e_3 - z^2)(e_2 - \delta)(1 - e_3)e_1(e_2 - \delta)(e_3 - z^2) = 1 - \frac{(e_1 - e_2)^2}{(1 - \delta)}\end{aligned}$$

Ces expressions des unités matricielles en fonction des projecteurs de Jones permettent de préciser les valeurs prises par j_2 puis on exprime le résultat en fonction des nouvelles unités matricielles et on obtient les formules annoncées. \square

Corollaire. *Le co-produit de A_δ coïncide avec celui de G .*

Démonstration. Comme le projecteur e_3 est l'image de e_1 par l'antipode qui est un anti-automorphisme de co-algèbre (on verra plus loin que les antipodes coïncident), il suffit pour comparer Δ_A et le co-produit Δ_G de G de considérer leurs valeurs en 1, e_1 et e_2 . On vérifie par le calcul qu'elles coïncident. \square

5.3.6. Expression de la co-unité. Comme f_1 coïncide avec e_2 dans C et est nul dans D , la co-unité ϵ_A est nulle sur D et comme elle est linéaire et compatible avec l'involution, il suffit de la connaître sur $c_{1,1}$ et $c_{1,2}$. Comme la trace des projecteurs minimaux de C est δ^2 , si on note Tr_0 la trace de C qui vaut 1 sur les projecteurs minimaux, on a :

$$\begin{aligned}\epsilon_A(c_{1,2}) &= Tr_0(hf_1hc_{1,2}) = 1 \\ \epsilon_A(c_{1,1}) &= Tr_0(f_1hc_{1,1}) = 1\end{aligned}$$

La co-unité de A coïncide avec celle de G .

5.3.7. Expression de l'antipode.

Proposition. *L'antipode de A_δ est entièrement déterminée par les formules suivantes ; elle coïncide avec l'antipode de G .*

$$\begin{aligned}S_A(c_{1,2}) &= c_{2,1} & S_A(c_{2,1}) &= c_{1,2} \\ S_A(e_{1,2}) &= z^{-1}e_{2,3} & S_A(e_{2,1}) &= ze_{3,2} \\ S_A(e_{1,3}) &= z^{-2}e_{1,3} & S_A(e_{3,1}) &= z^2e_{3,1}\end{aligned}$$

Démonstration. Ces formules résultent des expressions des nouvelles unités matricielles en fonction des projecteurs de Jones (5.3.4) et de 3.1.1 (c). Elles suffisent pour connaître S_A qui est un anti-automorphisme d'algèbre. \square

6. ACTION D'UN GROUPOÏDE QUANTIQUE FINI SUR UN FACTEUR

Dans cette partie, nous considérons $(A, m_a, 1_a, \Delta_a, \varepsilon_a, S_a, \phi_a, p_a)$ et $(B, m_b, 1_b, \Delta_b, \varepsilon_b, S_b, \phi_b, p_b)$ deux groupoïdes quantiques finis en dualité (notée $\langle a, b \rangle$). Le but de cette partie est de construire une inclusion $M_1 \subset M_2$ de facteurs (que nous obtenons hyperfinis de type II_1) telle que M_2 soit le produit croisé $M_1 \rtimes A$. Nous généralisons ainsi les résultats de [N] qui concernaient les algèbres de Kac faibles.

6.1. Hypothèse et remarque importante. Les résultats de [NSzW] rappelés en 2.8 et ceux de la partie 3 conduisent imposer l'hypothèse : A et B sont connexes (voir 2.8.3). Par contre l'hypothèse de régularité est inutile à la construction de l'inclusion sur laquelle agissent A et B . Ce qui laisse penser que la structure obtenue dans la partie 3 à partir de l'inclusion construite n'est pas nécessairement la structure originelle (voir 6.7).

6.2. Produit croisé des groupoïdes en dualité : L'algèbre $A.B$. Les produits croisés $A \rtimes B$ et $A \rtimes B$ sont isomorphes en effet grâce à 2.6.3, l'identification, pour y dans A_s , de $[ay \otimes b]$ et $[a \otimes (1_b \triangleleft y)b]$ dans $A \rtimes B$ correspond à celle, pour z dans B_t , de $[a(z \triangleright 1_a) \otimes b]$ et $[a \otimes zb]$ dans $A \rtimes B$. On vérifie facilement que les lois sont compatibles et que les injections $a \mapsto [a \otimes 1_b]$ et $b \mapsto [1_a \otimes b]$ sont des homomorphismes d'algèbres qui permettent d'écrire $A \rtimes B$ et $A \rtimes B$ comme $A.B$.

6.3. Mesures de Haar et espérances conditionnelles.

6.3.1. Mesures de Haar sur $A_s = B_t$.

Proposition. Les restrictions des mesures de Haar ϕ_a et ϕ_b coïncident sur les algèbres identifiées A_s et B_t .

Démonstration. D'après 2.3, la restriction à A_s (resp. B_t) de ϕ_a (resp. ϕ_b) vaut ε_a (resp. ε_b). Or, pour a dans A_s , on a :

$$\varepsilon_b(1_b \triangleleft a) = \langle 1_a, 1_{b(2)} \rangle \langle a, 1_{b(1)} \rangle = \langle a, 1_b \rangle = \varepsilon_a(a)$$

donc ϕ_a et ϕ_b coïncident sur les algèbres identifiées A_s et B_t . □

6.3.2. Des espérances conditionnelles.

Proposition. On pose pour a dans A :

$$F_{A_t}(a) = (\text{id} \otimes \phi_a)\Delta_a(a) = p_b \triangleright a \quad \text{et} \quad F_{A_s}(a) = (\phi_a \otimes \text{id})\Delta_a(a) = a \triangleleft p_b$$

Les applications F_{A_t} et F_{A_s} sont des espérances conditionnelles fidèles de A sur A_t (resp. A_s). Elles conservent ϕ_a et commutent.

On définit de même F_{B_t} et F_{B_s} avec des résultats analogues.

Démonstration. Les propriétés de ϕ_a (2.3) et celles des éléments de A_t (2.6.4) permettent d'affirmer que pour tout a de A , $F_{A_t}(a)$ appartient à A_t et que l'égalité $F_{A_t}(xay) = xF_{A_t}(a)y$ est vérifiée pour tous x et y dans A_t et a dans A . Comme Δ est un homomorphisme d'algèbres involutives, on a $F_{A_t}(x^*) = F_{A_t}(x)^*$. L'identité $\langle p_b \triangleright a, p_b \rangle = \langle a, p_b \rangle$ signifie que F_{A_t} conserve ϕ_a alors F_{A_t} est fidèle puisque ϕ_a est fidèle.

Grâce à la coassociativité du coproduit, on a :

$$F_{A_s}F_{A_t} = (\phi_a \otimes \text{id} \otimes \phi_a)(\Delta_a \otimes \text{id})\Delta_a = (\phi_a \otimes \text{id} \otimes \phi_a)(\text{id} \otimes \Delta_a)\Delta_a = F_{A_t}F_{A_s}$$

□

6.3.3. Automorphisme modulaire de ϕ_a .

Proposition (BNSz - 4.12 et 4.14). *Les éléments $g_s = F_{A_s}(p_a)^{1/2}$ et $g_t = F_{A_t}(p_a)^{1/2}$ sont inversibles et l'automorphisme modulaire de ϕ_a est implémenté par $g_s g_t$ c'est-à-dire que $\phi_a(g_s^{-1} g_t^{-1} \cdot)$ est une trace sur A . On posera de même*

$$\hat{g}_s = F_{B_s}(p_b)^{1/2} \quad \text{et} \quad \hat{g}_t = F_{B_t}(p_b)^{1/2}.$$

D'après [BNSz - 4.13], on a les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{g}_t &= 1_b \triangleleft g_s = 1_b \triangleleft g_t & g_t &= 1_a \triangleleft \hat{g}_s = 1_a \triangleleft \hat{g}_t \\ \hat{g}_s &= g_s \triangleright 1_b = g_t \triangleright 1_b & g_s &= \hat{g}_s \triangleright 1_a = \hat{g}_t \triangleright 1_a \\ S(g_t) &= g_s = S^{-1}(g_t) & S(\hat{g}_t) &= \hat{g}_s = S^{-1}(\hat{g}_t) \end{aligned}$$

Grâce à 2.4 et 2.3, on en déduit la relation suivante avec les projecteurs de Haar :

$$g_s p_a = \varepsilon_t(g_s) p_a = S(g_s) p_a = g_t p_a$$

et de même on montre : $p_a g_s = p_a g_t$.

D'après 6.3.2, $F_{A_s}(g_t^{-1})$ appartient à $A_s \cap A_t$. Si A et B sont connexes, $A_s \cap A_t$ est réduit aux scalaires et $F_{A_s}(g_t^{-1})$ est un scalaire qui vaut $d^{-1} \phi_a(g_t^{-1})$ avec $d = \phi_a(1_a)$.

Les mesures de Haar sont invariantes par les antipodes et coïncident sur les algèbres co-unitales donc on peut écrire les égalités suivantes

$$\phi_a(g_s^{-1}) = \phi_a(g_t^{-1}) = \phi_b(\hat{g}_s^{-1}) = \phi_b(\hat{g}_t^{-1})$$

et on notera γ ces scalaires. On en déduit :

$$F_{A_s}(g_t^{-1}) = F_{A_t}(g_s^{-1}) = F_{B_s}(\hat{g}_t^{-1}) = F_{B_t}(\hat{g}_s^{-1}) = d^{-1} \gamma$$

Si la restriction de S aux algèbres co-unitales est involutive alors la restriction de ϕ_a à A_t est la trace canonique de A_t (voir 6.3.1) et d est la dimension commune des algèbres co-unitales.

6.4. Trace sur $A.B$.

6.4.1. Traces sur A et B .

Définition. Pour a de A , on définit en posant :

$$tr_a(a) = d \gamma^{-2} \phi_a(g_s^{-1} g_t^{-1} a)$$

une trace normalisée tr_a sur A .

On définit de même tr_b .

6.4.2. Espérances conditionnelles. On notera E_{A_s}, E_{B_t} etc ... les espérances conditionnelles définies par les traces tr_a et tr_b . Elles sont reliées aux espérances définies par ϕ_a et ϕ_b par les formules :

$$\begin{aligned} E_{A_s}(a) &= d \gamma^{-1} F_{A_s}(a g_t^{-1}) & (a \in A) \\ E_{B_t}(b) &= d \gamma^{-1} F_{B_t}(\hat{g}_s^{-1} b) & (b \in B) \end{aligned}$$

6.4.3. Lemme. Pour tout b de B et tout y de B_s , on a :

- (i) $b_{(1)} \otimes E_{B_t}(y b_{(2)}) = \Delta_b(E_{B_t}(y b))$
- (ii) $b_{(1)}^* \otimes E_{B_t}(y b_{(2)}^*) = \Delta_b(E_{B_t}(y b^*))$
- (iii) $S_b^{-1} E_{B_t}(b) \triangleright 1_a = E_{B_t}(b) \triangleright 1_a$

Démonstration. La définition de E_{B_t} et les propriétés de g_s permettent d'obtenir facilement les propriétés de E_{B_t} à partir de celles de F_{B_t} .

(i) Comme $\Delta_b(y)$ égale $(1_b \otimes y)\Delta_b(1)$ on peut écrire :

$$\begin{aligned} b_{(1)} \otimes F_{B_t}(yb_{(2)}) &= (\text{id} \otimes \text{id} \otimes \phi_b)(\text{id} \otimes \Delta_b)\Delta_b(yb) \\ &= (\text{id} \otimes \text{id} \otimes \phi_b)(\Delta_b \otimes \text{id})\Delta_b(yb) \\ &= \Delta_b(F_{B_t}(yb)) \end{aligned}$$

(ii) se démontre de même.

(iii) A l'aide de 2.3 et 2.4, on obtient :

$$\begin{aligned} S_b^{-1}F_{B_t}(b) \triangleright 1_a &= 1_{a(1)} \langle 1_{a(2)}, S_b^{-1}b_{(1)} \rangle \langle p_a, b_{(2)} \rangle &= 1_{a(1)} \langle S_a^{-1}(1_{a(2)}), b_{(1)} \rangle \langle p_a, b_{(2)} \rangle \\ &= 1_{a(1)} \langle S_a^{-1}(1_{a(2)})p_a, b \rangle &= 1_{a(1)} \langle p_a 1_{a(2)}, S_b^{-1}b \rangle \\ &= 1_{a(1)} \langle p_a \varepsilon_s(1_{a(2)}), S_b^{-1}b \rangle &= 1_{a(1)} \langle p_a \varepsilon_s \circ \varepsilon_t(1_{a(2)}), S_b^{-1}b \rangle \\ &= 1_{a(1)} \langle p_a S_a \circ \varepsilon_t(1_{a(2)}), S_b^{-1}b \rangle &= 1_{a(1)} \langle p_a S_a(1_{a(2)}), S_b^{-1}b \rangle \\ &= 1_{a(1)} \langle 1_{a(2)}p_a, b \rangle &= F_{B_t}(b) \triangleright 1_a \end{aligned}$$

□

6.4.4. *D'autres espérances conditionnelles.* La proposition 4.2 de [N] se généralise ainsi :

Proposition.

(1) En posant pour tout $[a \otimes b]$ dans $A.B$,

$$E_A([a \otimes b]) = a(E_{B_t}(b) \triangleright 1_a)$$

on définit une espérance conditionnelle fidèle de $A.B$ dans A .

On définit de même l'espérance conditionnelle E_B .

(2) Le carré \mathcal{C}

$$\begin{array}{ccc} & E_A & \\ A & \subset & A.B \\ & \cup & \cup E_B \end{array}$$

$$A_s = B_t \subset B$$

est commutatif et symétrique (voir [JS - 5.3.6]). L'algèbre $A \cap B$ est $A_s = B_t$.

Démonstration. (1) Etudions les propriétés de E_A :

- Grâce à 2.6.3 la définition de E_A ne dépend pas du représentant de $[a \otimes b]$.
- Soient a et α dans A et b dans B , comme $[\alpha \otimes 1_b][a \otimes b]$ vaut $[\alpha a \otimes b]$, on a bien :

$$E_A([\alpha \otimes 1_b][a \otimes b]) = \alpha E_A([a \otimes b]).$$

Calculons maintenant $E_A([a \otimes b][\alpha \otimes 1_b])$.

$$E_A([a \otimes b][\alpha \otimes 1_b]) = a(b_{(1)} \triangleright \alpha)(E_{B_t}(b_{(2)}) \triangleright 1_a)$$

Grâce à 6.4.3(i) et à 2.6.4, on obtient :

$$E_A([a \otimes b][\alpha \otimes 1_b]) = a(E_{B_t}(b) \triangleright \alpha) = a(E_{B_t}(b) \triangleright 1_a)\alpha = E_A([a \otimes b])\alpha$$

- Vérifions l'égalité $E_A(x^*) = E_A(x)^*$. Grâce à 6.4.3(ii), on peut écrire :

$$E_A([a \otimes b]^*) = E_A([b_{(1)}^* \triangleright a^* \otimes b_{(2)}^*]) = (b_{(1)}^* \triangleright a^*)(E_{B_t}(b_{(2)}^*) \triangleright 1_a) = E_{B_t}(b^*) \triangleright a^*$$

Comme S_b envoie B_t sur B_s , on obtient grâce à 2.6.4 :

$$E_A([a \otimes b]^*) = (S_b^{-1}E_{B_t}(b) \triangleright a)^* = (a(S_b^{-1}E_{B_t}(b) \triangleright 1_a))^*$$

et 6.4.3(iii) permet de conclure.

- Soit $\{u_p, p \in P\}$ une quasi-base de B sur B_t (voir 3.3.2). Alors un élément $[a \otimes b]$ de $A.B$ s'écrit :

$$\begin{aligned} [a \otimes b] &= \sum_{p \in P} [a \otimes E_{B_t}(bu_p)u_p^*] \\ &= \sum_{p \in P} [a(E_{B_t}(bu_p) \triangleright 1_a) \otimes 1_b][1_a \otimes u_p^*] \\ &= \sum_{p \in P} [E_A([a \otimes b][1_a \otimes u_p]) \otimes 1_b][1_a \otimes u_p^*] \end{aligned}$$

Par involution, nous obtenons :

$$[a \otimes b] = \sum_{p \in P} [1_a \otimes u_p][E_A([1_a \otimes u_p^*][a \otimes b]) \otimes 1_b]$$

c'est-à-dire pour tout x de $A.B$

$$x = \sum_{p \in P} [1_a \otimes u_p][E_A([1_a \otimes u_p^*]x) \otimes 1_b]$$

- Nous calculons maintenant $E_A(x^*x)$.

$$\begin{aligned} E_A(x^*x) &= \sum_{(p,q) \in P \times P} E_A(x^*[1_a \otimes u_q])(E_{B_t}(u_q^*u_p) \triangleright 1_a)E_A([1_a \otimes u_p^*]x) \\ &= \sum_{(p,q) \in P \times P} E_A(x^*[1_a \otimes u_q][1_a \otimes E_{B_t}(u_q^*u_p)])E_A([1_a \otimes u_p^*]x) \\ &= \sum_{p \in P} E_A(x^*[1_a \otimes u_p])E_A([1_a \otimes u_p^*]x) \\ &= \sum_{p \in P} E_A([1_a \otimes u_p^*]x)^*E_A([1_a \otimes u_p^*]x) \end{aligned}$$

On en déduit que E_A est positive et fidèle.

- (2) Le carré C est commutatif puisqu'on peut écrire

$$E_A E_B = E_{A_s} \otimes E_{B_t} = E_B E_A.$$

On en déduit que $A_s = B_t = A \cap B$ Il est symétrique par définition puisque $A.B$ est l'espace vectoriel engendré par les produits $i_a(a)i_b(b)$ ($a \in A, b \in B$).

□

Corollaire. Pour tout $[a \otimes b]$ de $A.B$, on a l'égalité :

$$tr_a(E_A([a \otimes b])) = tr_b(E_B([a \otimes b]))$$

Démonstration. Soit $[a \otimes b] \in A.B$.

$$tr_a(E_A([a \otimes b])) = tr_a(a(E_{B_t}(b) \triangleright 1_a)) = tr_a(E_{A_s}(a)(E_{B_t}(b) \triangleright 1_a))$$

Par un calcul analogue on trouve :

$$tr_b(E_B([a \otimes b])) = tr_b((1_b \triangleleft E_{A_s}(a))E_{B_t}(b))$$

Par 2.6.3, 6.3.3 et 6.3.1, tr_a et tr_b coïncident sur $A_s = B_t$. On conclut à l'égalité :

$$tr_a(E_A([a \otimes b])) = tr_b(E_B([a \otimes b]))$$

□

6.4.5. *Prolongement des traces tr_a et tr_b à $A.B$.* Le corollaire précédent permet de prolonger tr_a et tr_b à $A.B$. Etudions ce prolongement.

Proposition. *La formule*

$$tr([a \otimes b]) = tr_a(E_A([a \otimes b])) = tr_b(E_B([a \otimes b]))$$

définit une trace normalisée fidèle sur $A.B$. Par construction, les espérances E_A et E_B conservent cette trace. On a aussi :

$$tr([a \otimes b]) = tr_a(E_{B_t}(b) \triangleright a) = tr_b(b \triangleleft E_{A_s}(a))$$

Démonstration. On vérifie facilement l'égalité : $tr([1_a \otimes 1_b]) = 1$. De plus tr est une forme linéaire positive et fidèle puisque E_A est linéaire, positive et fidèle.

Comme $[x \otimes y]$ vaut $[x \otimes 1_b][1_a \otimes y]$ pour montrer que tr est une trace, il suffit de montrer, pour a et x dans A et b et y dans B , les deux identités :

$$(1) \ tr([a \otimes b][x \otimes 1_b]) = tr([x \otimes 1_b][a \otimes b])$$

$$(2) \ tr([a \otimes b][1_a \otimes y]) = tr([1_a \otimes y][a \otimes b])$$

Montrons la première, la seconde se démontre de manière analogue. Grâce à 6.4.3(i), on a :

$$\begin{aligned} tr([a \otimes b][x \otimes 1_b]) &= tr([a(b_{(1)} \triangleright x) \otimes b_{(2)}]) \\ &= tr_a(a(b_{(1)} \triangleright x)(E_{B_t}(b_{(2)}) \triangleright 1_a)) \\ &= tr_a(a(E_{B_t}(b) \triangleright x)) \end{aligned}$$

Comme tr_a est une trace, à l'aide des formules 2.6.4 on peut écrire :

$$\begin{aligned} tr([a \otimes b][x \otimes 1_b]) &= tr_a(a(E_{B_t}(b) \triangleright 1_a)x) \\ &= tr_a(xa(E_{B_t}(b) \triangleright 1_a)) \\ &= tr([x \otimes 1_b][a \otimes b]) \end{aligned}$$

De plus, pour tout $[a \otimes b]$ de $A.B$, on a l'égalité :

$$tr([a \otimes b]) = tr_a((E_{B_t}(b) \triangleright 1_a)a) = tr_a(E_{B_t}(b) \triangleright a).$$

□

6.4.6. *Représentation standard de $A.B$ sur $L^2(A, tr)$.*

Proposition (BSz2 - 4.2). *L'algèbre $A.B$ admet une représentation fidèle π_ϕ sur $L^2(A, \phi_a)$ qui prolonge la représentation de A par multiplication à gauche. En particulier, π_ϕ vérifie pour b dans B et a dans A ,*

$$\pi_\phi(b)\Lambda_\phi(a) = \Lambda_\phi(b \triangleright a).$$

L'algèbre $A.B$ est l'extension de Jones de $A_t \subset A$ représentée sur $L^2(A, \phi_a)$. Elle est donc engendrée par A et p_b , projecteur de Jones de l'inclusion. Plus précisément, p_b vérifie : $\pi_\phi(p_b)\Lambda_\phi(a) = \Lambda_\phi(F_{A_t}(a))$.

Considérons l'isométrie U de $L^2(A, \phi_a)$ sur $L^2(A, tr)$ définie par

$$U\Lambda_\phi(a) = d^{-1/2}\gamma\Lambda_{tr}(ag_s^{1/2}g_t^{1/2}).$$

On vérifie facilement que la représentation $\pi = U\pi_\phi U^{-1}$ de $A.B$ prolonge la représentation standard de A sur $L^2(A, tr)$ et le projecteur de Jones de l'inclusion $A_t \subset A$ représentée sur $L^2(A, tr)$ est alors

$$f_b = d\gamma^{-1}\hat{g}_t^{-1/2}p_b\hat{g}_t^{-1/2}.$$

en effet à l'aide de 6.3.3 et 2.6.4, on obtient pour a dans A :

$$\begin{aligned}
\pi(f_b)\Lambda_{tr}(a) &= d^{3/2}\gamma^{-2}U\Lambda_\Phi(\hat{g}_t^{-1/2} \triangleright F_{A_t}(\hat{g}_t^{-1/2} \triangleright ag_s^{-1/2}g_t^{-1/2})) \\
&= d^{3/2}\gamma^{-2}U\Lambda_\Phi(g_s^{-1/2}F_{A_t}(g_s^{-1/2}ag_s^{-1/2}g_t^{-1/2})) \\
&= d\gamma^{-1}\Lambda_{tr}(g_s^{-1/2}F_{A_t}(g_s^{-1/2}ag_s^{-1/2}g_t^{-1/2})g_s^{1/2}g_t^{1/2}) \\
&= d\gamma^{-1}\Lambda_{tr}(F_{A_t}(g_s^{-1/2}ag_s^{-1/2})) \\
&= \Lambda_{tr}(E_{A_t}(a))
\end{aligned}$$

On vérifie facilement que $E_{B_t}(f_b)$ vaut $d^2\gamma^{-2}$.

Proposition. *L'algèbre $A.B$ est l'extension de Jones de $A_t \subset A$ représentée sur $L^2(A, tr_a)$. Le projecteur de Jones est $f_b = d\gamma^{-1}\hat{g}_t^{-1/2}p_b\hat{g}_t^{-1/2}$ avec $E_{B_t}(f_b) = d^2\gamma^{-2}$.*

6.4.7. *Trace de Markov.*

Proposition. *La trace tr est la trace de Markov normalisée de l'inclusion $A_t \subset A$ dont l'indice est $d^{-2}\gamma^2$. C'est aussi la trace de Markov de l'inclusion $A \subset A.B$*

Démonstration. Comme l'inclusion $A_t \subset A$ est connexe, il existe une unique trace de Markov dont le module est l'indice de l'inclusion ([GHJ - 2.7.3]). D'après 6.4.2 et 6.4.6, on a pour tout x de A_t :

$$tr([x \otimes f_b]) = tr(E_{B_t}(f_b) \triangleright x) = d^2\gamma^{-2}tr([x \otimes 1_b])$$

On en déduit que tr est la trace de Markov de module $\beta = d^{-2}\gamma^2$ ([GHJ - 2.7.1]). D'après [GHJ - 2.7.4], tr est aussi la trace de de l'inclusion $A \subset A.B$. □

6.5. **L'inclusion $M_1 \subset M_2$.**

6.5.1. *Construction de $M_1 \subset M_2$.* Comme le carré \mathcal{C} est un carré commutatif symétrique (6.4.2) pour les espérances conditionnelles associées à la trace de Markov de l'inclusion $A \subset A.B$, il vérifie le corollaire 5.3.4 de [JS] : La trace tr est aussi la trace de Markov des inclusions $A_s \subset A$, $B_t \subset B$ et $B \subset A.B$ et on obtient par construction de base une échelle périodique de carrés commutatifs (voir aussi [JS 5.3.5]) qu'on peut préciser grâce à 2.8.1.

$$\begin{array}{ccccccc}
A_0 = A & \subset & A_1 = A \rtimes B & \subset & A_2 = A \rtimes B \rtimes A & \subset & A_3 = A \rtimes B \rtimes A \rtimes B \dots \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
B_0 = B_t & \subset & B_1 = B & \subset & B_2 = B \rtimes A & \subset & B_3 = B \rtimes A \rtimes B \dots
\end{array}$$

A la limite, on obtient une paire $M_1 \subset M_2$ de facteurs hyperfinis de type II_1 : M_2 (resp. M_1) est la fermeture faible de $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ (resp. $\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n$) dans la construction GNS par rapport à la trace tr qui se prolonge.

6.5.2. De plus d'après [JS - 5.7.1], le commutant relatif $M_1' \cap M_2$ est $B' \cap A$. On en déduit la proposition suivante :

Proposition. *Le commutant relatif $M_1' \cap M_2$ est l'algèbre A_t contenue dans $A = A_0$.*

Démonstration. Le calcul suivant montre que les éléments de A_t commutent à B . Soient $x \in A_t$ et $b \in B$, alors on a :

$$[1_a \otimes b][x \otimes 1_b] = [x_{(1)} \otimes b \triangleleft x_{(2)}]$$

Grâce à 2.4, on en déduit :

$$[1_a \otimes b][x \otimes 1_b] = [x 1_{a(1)} \otimes b \triangleleft 1_{a(2)}] = [x \otimes (1_b \triangleleft 1_{a(1)}) (b \triangleleft 1_{a(2)})] = [x \otimes b \triangleleft 1_a] = [x \otimes 1_b][1_a \otimes b]$$

D'autre part, si un élément x de A commute à B , il commute à f_b et on a :

$$x f_b = E_{A_t}(x) f_b.$$

Or d'après [GHJ - 2.6.7 (iii)], pour tout y de $A.B$, il existe un unique z dans A tel que $y f_b = z f_b$. On obtient donc l'égalité $x = E_{A_t}(x)$ et x appartient à A_t . \square

6.6. Action de A sur M_1 .

6.6.1. Comme en 6.2 et [N - 5.6], on peut transformer les produits croisés à gauche en produits croisés à droite et obtenir l'échelle de carrés commutatifs suivante isomorphe à celle considérée en 6.5.1 :

$$\begin{array}{ccccccc} A & \subset & A \rtimes B & \subset & A \rtimes B \rtimes A & \subset & A \rtimes B \rtimes A \rtimes B & \dots & \subset & M_2 \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup & \\ B_t & \subset & B & \subset & B \rtimes A & \subset & B \rtimes A \rtimes B & \dots & \subset & M_1 \end{array}$$

6.6.2. Nous généralisons maintenant la proposition 5.7 de [N].

Proposition. Soient $i_a : a \mapsto [a \otimes 1_b \otimes 1_a \otimes \dots]$ l'inclusion de A dans M_2 et E_{M_1} l'espérance conditionnelle de M_2 sur M_1 conservant la trace tr . Posons

$$f_a = d\gamma^{-1} g_s^{-1/2} p_a g_s^{-1/2}.$$

L'application de $M_1 \times A$ dans M_1

$$x \triangleleft a = d^{-2} \gamma^2 E_{M_1}(i_a(g_s^{-1/2} f_a g_s^{1/2}) x i_a(a)) \quad (x \in M_1, a \in A)$$

définit une action extérieure à droite de A sur M_1 telle que $M_2 = A \rtimes M_1$.

Démonstration. Notons $x = [b \otimes z]$ un élément de B_n avec $b \in B$ et abusivement $z \in A_{n-1}$. L'élément x vu dans $A_n \subset M_2$ s'écrit $[1_a \otimes b \otimes z]$ et $[1_a \otimes 1_b \otimes z]$ commute avec A_0 . Observons l'action de A sur x :

$$\begin{aligned} x \triangleleft a &= d^{-1} \gamma E_{M_1}(i_a(g_s^{-1} p_a) x i_a(a)) \\ &= d^{-1} \gamma E_{M_1}([g_s^{-1} p_a \otimes b \otimes 1][a \otimes 1_b \otimes z]) \\ &= d^{-1} \gamma E_{M_1}([g_s^{-1} p_a a_{(1)} \otimes b \triangleleft a_{(2)} \otimes z]) \\ &= d^{-1} \gamma E_{M_1}([g_s^{-1} p_a \varepsilon_s(a_{(1)}) \otimes b \triangleleft a_{(2)} \otimes z]) \quad (\text{d'après 2.3}) \\ &= d^{-1} \gamma E_{M_1}([g_s^{-1} p_a \otimes (1_b \triangleleft \varepsilon_s(a_{(1)})) (b \triangleleft a_{(2)}) \otimes z]) \\ &= d^{-1} \gamma E_{M_1}([g_s^{-1} p_a \otimes (1_b \triangleleft a_{(1)}) (b \triangleleft a_{(2)}) \otimes z]) \\ &= d^{-1} \gamma E_{M_1}([g_s^{-1} p_a \otimes b \triangleleft a \otimes z]) \end{aligned}$$

$$A_n \subset M_2$$

Le carré $\cup \quad \cup$ muni des espérances conditionnelles conservant tr est commutatif,

$$B_n \subset M_1$$

on en déduit :

$$\begin{aligned} x \triangleleft a &= d^{-1} \gamma E_{B_n}([g_s^{-1} p_a \otimes b \triangleleft a \otimes z]) \\ &= d^{-1} \gamma [(1_b \triangleleft E_{A_s}(g_s^{-1} p_a)) (b \triangleleft a) \otimes z] \\ &= [b \triangleleft a \otimes z] \end{aligned}$$

En effet d'après 6.3.3 et 6.4.2, on a :

$$E_{A_s}(g_s^{-1} p_a) = d\gamma^{-1} g_s^{-1} F_{A_s}(p_a g_s^{-1}) = d\gamma^{-1} g_s^{-1} F_{A_s}(p_a g_s^{-1}) = d\gamma^{-1} g_s^{-1} F_{A_s}(p_a) g_s^{-1} = d\gamma^{-1}$$

L'application $x \mapsto x \triangleleft a$ prolonge donc l'action duale $[b \otimes z] \mapsto [b \triangleleft a \otimes z]$ de A sur $B_n = B \rtimes A_{n-1}$. Elle définit une action à droite faiblement continue de A sur M_1 . De plus $A \rtimes M_1 = i_a(A)M_1$ est le facteur M_2 . L'action est extérieure d'après 2.8.2 et 6.5.2. \square

6.7. Conclusion. On a donc montré que le C*-groupe quantique connexe fini A agit extérieurement sur le facteur hyperfini de type II_1 . On peut voir A comme le commutant relatif d'une inclusion en complétant l'échelle de carrés commutatifs :

$$\begin{array}{ccccccc} B & \subset & B \rtimes A & \subset & B \rtimes A \rtimes B & \subset & B \rtimes A \rtimes B \rtimes A & \dots & \subset & M_1 \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & & \cup \\ B_s = A_t & \subset & A & \subset & A \rtimes B & \subset & A \rtimes B \rtimes A & \dots & \subset & M_0 \end{array}$$

par construction de base verticale car le projecteur de Jones est $e_1 = f_a \otimes 1 \otimes 1 \otimes \dots$ pour chaque colonne :

$$\begin{array}{ccccccc} C_0 = A \rtimes B & \subset & C_1 = A \rtimes B \rtimes A & \subset & C_2 = A \rtimes B \rtimes A \rtimes B & \subset & \dots & \subset & M_2 \\ \cup & & \cup & & \cup & & & & \cup \\ B & \subset & B \rtimes A & \subset & B \rtimes A \rtimes B & \subset & \dots & \subset & M_1 \\ \cup & & \cup & & \cup & & & & \cup \\ A_t & \subset & A & \subset & A \rtimes B & \subset & & \subset & M_0 \end{array}$$

Le facteur $M_2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ est engendré comme algèbre de von Neumann par M_1 et e_1 , de plus on vérifie facilement l'égalité $e_1 x e_1 = E_{M_0}(x) e_1$ pour tout x de M_1 puisqu'elle est vraie pour e_1

tout x de C_n et tout entier n . Alors d'après [Pipo2], la tour $M_0 \subset M_1 \subset M_2$ est standard et la grille de carrés commutatifs construit vérifie les hypothèses de la proposition 5.7.5 .

On peut construire de même le facteur M_3 avec $e_2 = f_b \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \dots$. On démontre alors à l'aide du théorème 5.7.6 de [JS] que A (resp. B) est le commutant relatif $M'_0 \cap M_2$ (resp. $M'_1 \cap M_3$). En effet, on a :

$$M'_0 \cap M_2 = (1_a \otimes 1_b \otimes A)' \cap A \rtimes B \rtimes 1_a$$

et on conclut comme en 6.5.2.

On peut donc munir A et B en tant que commutants relatifs de structures duales de C*-groupe quantique fini régulier. Quel rapport entre ces nouvelles structures et celles de départ qui n'étaient pas nécessairement régulières ? Le calcul de la dualité héritée de l'inclusion $M_0 \subset M_1$ en fonction de la dualité originelle donne la formule qui sert pour la déformation explicitée dans la partie suivante. On en déduit qu'on peut déformer un C*-groupe quantique fini en un C*-groupe quantique fini régulier sans modifier la structure de C*-algèbre.

7. DÉFORMATION RÉGULIÈRE D'UN C*-GROUPOÏDE QUANTIQUE FINI

On considère deux C*-groupe quantiques finis A et B duaux. Le but de cette partie est de déformer la structure de co-algèbre de A (on peut bien sûr faire de même dans le même temps pour B) pour faire de A un C*-groupe quantique fini régulier. Comme il ne sera question que de la structure de co-algèbre de A , on omettra l'indice A . L'étude de la structure de co-algèbre de B est analogue.

7.1. Éléments séparateurs. D'après [NV3 - 2.3.4], $(S \otimes \text{id})(\Delta(1))$ est un élément séparateur de $A_t \otimes A_t$. Plus précisément, les relations utiles sont, pour z dans A_t :

$$\begin{aligned} \Delta(1)(S^{-1}(z) \otimes 1) &= \Delta(1)(1 \otimes z) \\ (S^{-1}(z) \otimes 1)\Delta(1) &= (1 \otimes z)\Delta(1) \end{aligned}$$

Si $\{\lambda_i, i \in I\}$ est une famille d'unités matricielles de $A_t = \otimes_{j \in J} M_{v_j}(\mathbb{C})q_j$ telle que l'élément λ_i appartienne au facteur $M_{v_{j_i}}(\mathbb{C})q_{j_i}$, posons $q = \sum_{i \in I} \frac{1}{n_{j_i}} \lambda_i^* \otimes \lambda_i$. Alors $(S^{-1} \otimes \text{id})(q)$ vérifie aussi, pour z dans A_t :

$$\begin{aligned} (S^{-1} \otimes \text{id})(q)(S^{-1}(z) \otimes 1) &= (S^{-1} \otimes \text{id})(q)(1 \otimes z) \\ (S^{-1}(z) \otimes 1)(S^{-1} \otimes \text{id})(q) &= (1 \otimes z)(S^{-1} \otimes \text{id})(q) \end{aligned}$$

7.2. Proposition. *Il existe un élément k positif inversible de A_t tel que*

- (1) $k^2 = 1_{(2)}S(1_{(1)})$
- (2) k^2 soit la dérivée de Radon-Nikodym de la trace canonique de A_t par rapport à la restriction de la co-unité à A_t .
- (3) $\Delta(1) = \Delta(1)(S^{-1} \otimes \text{id})(q)$
- (4) $\Delta(1) = (1 \otimes k^2)(S^{-1} \otimes \text{id})(q)$
- (5) La restriction de S^2 à $A_s A_t$ est $\text{Ad}(k^{-2}S(k^2))$. En particulier $S^2(k)$ vaut k .

Démonstration. Le début de l'énoncé est le lemme 4.6 de [BSz2], la dernière se trouve dans des notes manuscrites de K. Szlachanyi.

D'après 7.1, on peut écrire :

$$\Delta(1)(S^{-1} \otimes \text{id})(q) = \Delta(1)(1 \otimes \sum_{i \in I} \frac{1}{n_{j_i}} \lambda_i^* \lambda_i) = \Delta(1)$$

On obtient donc (3) et pour (4), on écrit

$$\Delta(1) = \Delta(1)(S^{-1} \otimes \text{id})(q) = (1 \otimes 1_{(2)}S(1_{(1)}))(S^{-1} \otimes \text{id})(q)$$

On a aussi : $\Delta(1) = (S^{-1}(k^2) \otimes 1)(S^{-1} \otimes \text{id})(q)$ et de $\Delta(1) = \Delta(1)^*$, on déduit l'égalité, pour tout i de I :

$$S^{-1}(\lambda_i k^2) = S^{-1}(\lambda_i^* k^2)^*$$

Comme $S \circ *$ est involutive et que les λ_i engendrent A_t , pour tout z de A_t on a :

$$S^{-1}(z k^2) = S(k^2 z)$$

On en déduit les deux égalités :

$$S^2(z) = k^{-2} z k^2 \quad S^2(S(z)) = S(k^2) S(z) S(k^{-2})$$

Comme A_t et A_s commutent, on peut traduire les deux expressions de S^2 par (5). □

On trouve une proposition analogue dans [V2].

7.3. Nouvelle dualité et déformation des co-algèbres. On considère une nouvelle dualité entre A et B :

$$[a, b] = \langle kaS(k), b \rangle \quad (a \in A, b \in B)$$

et la structure de co-algèbre définie sur A par cette dualité :

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(a) &= (1 \otimes k^{-1}) \Delta(a) (1 \otimes k^{-1}) \\ \tilde{\varepsilon}(a) &= \varepsilon(kaS(k)) = \varepsilon(S(k)ak) \\ \tilde{S}(a) &= S(k^{-1})kS(a)k^{-1}S(k) \end{aligned}$$

De plus, le projecteur $\tilde{\Delta}(1)$ vaut $(\tilde{S}^{-1} \otimes \text{id})(q)$.

Théorème. *L'algèbre A munie de sa structure d'algèbre originelle et de cette nouvelle structure de co-algèbre est un C^* -groupoïde quantique fini régulier.*

Démonstration. Les nouveaux co-produit, co-unité et antipode étant définis par dualité, il suffit de vérifier les propriétés propres aux C*-groupoïdes quantiques.

Vérifions que le nouveau co-produit est un homomorphisme d'algèbres involutives. D'après 7.2, pour tous x et y dans A , on a :

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}(x)\tilde{\Delta}(y) &= (1 \otimes k^{-1})\Delta(x)(1 \otimes k^{-2})\Delta(y)(1 \otimes k^{-1}) \\ &= (1 \otimes k^{-1})\Delta(x)\Delta(1)(1 \otimes k^{-2})\Delta(1)\Delta(y)(1 \otimes k^{-1}) \\ &= (1 \otimes k^{-1})\Delta(x)\Delta(1)(S^{-1} \otimes \text{id})(q)\Delta(y)(1 \otimes k^{-1}) \\ &= \tilde{\Delta}(xy)\end{aligned}$$

L'égalité $\tilde{\Delta}(x)^* = \tilde{\Delta}(x^*)$ est évidente.

Le projecteur $\tilde{\Delta}(1)$ vérifie l'égalité :

$$(\tilde{\Delta} \otimes 1)\tilde{\Delta}(1) = (1 \otimes \tilde{\Delta}(1))(\tilde{\Delta}(1) \otimes 1)$$

En effet, comme k commute à A_s , on a :

$$\begin{aligned}(1 \otimes \tilde{\Delta}(1))(\tilde{\Delta}(1) \otimes 1) &= (1 \otimes 1 \otimes k^{-1})(1 \otimes \Delta(1))(1 \otimes k^{-1} \otimes k^{-1})(\Delta(1) \otimes 1)(1 \otimes k^{-1} \otimes 1) \\ &= (1 \otimes k^{-1} \otimes k^{-1})(1 \otimes \Delta(1))(\Delta(1) \otimes 1)(1 \otimes k^{-1} \otimes k^{-1}) \\ &= (1 \otimes k^{-1} \otimes k^{-1})(\Delta \otimes \text{id})\Delta(1)(1 \otimes k^{-1} \otimes k^{-1}) \\ &= (\tilde{\Delta} \otimes 1)\tilde{\Delta}(1)\end{aligned}$$

On pose $\tilde{\Delta}(y) = \tilde{y}_{(1)} \otimes \tilde{y}_{(2)}$ et on démontre sans problème la relation :

$$\tilde{\epsilon}(xyz) = \tilde{\epsilon}(x\tilde{y}_{(1)})\tilde{\epsilon}(\tilde{y}_{(2)}z) \quad ((x, y, z) \in A^3)$$

Vérifions maintenant la relation entre $\tilde{\Delta}$, $\tilde{\epsilon}$ et \tilde{S} pour a dans A :

$$\begin{aligned}(\tilde{\epsilon} \otimes \text{id})(\tilde{\Delta}(1)(a \otimes 1)) &= (\epsilon \otimes \text{id})((S(k) \otimes k^{-1})\Delta(1)(ak \otimes k^{-1})) \\ &= (\epsilon \otimes \text{id})(\Delta(1)(ak \otimes 1)k^{-1}) \quad (\text{d'après 7.1}) \\ &= m(\text{id} \otimes S)(\Delta(ak))k^{-1} \\ &= a_{(1)}kS(a_{(2)})k^{-1} \\ &= \tilde{a}_{(1)}S(k^2)\tilde{S}(\tilde{a}_{(2)})\end{aligned}$$

On a donc montré pour a dans A :

$$(\tilde{\epsilon} \otimes \text{id})(\tilde{\Delta}(1)(a \otimes 1)) = \tilde{a}_{(1)}S(k^2)\tilde{S}(\tilde{a}_{(2)})$$

On écrit cette relation pour l'unité :

$$1 = (\tilde{\epsilon} \otimes \text{id})(\tilde{\Delta}(1)) = \tilde{1}_{(1)}S(k^2)\tilde{S}(\tilde{1}_{(2)})$$

Or $\tilde{a}_{(1)}S(k^2)\tilde{S}(\tilde{a}_{(2)})$ vaut $\tilde{a}_{(1)}\tilde{1}_{(1)}S(k^2)\tilde{S}(\tilde{1}_{(2)})\tilde{S}(\tilde{a}_{(2)})$, on obtient donc

$$(\tilde{\epsilon} \otimes \text{id})(\tilde{\Delta}(1)(a \otimes 1)) = m(\text{id} \otimes \tilde{S})(\tilde{\Delta}(a))$$

L'involutivité de \tilde{S} sur les sous-algèbres co-unitales est évidente. \square

On peut donc déformer toute paire de C*-groupoïdes quantiques finis en une paire de C*-groupoïdes quantiques finis réguliers sans modifier la structure de C*-algèbre.

ANNEXE A.

Cet appendice est un ajout à la version publiée. Il consiste à donner une version légèrement modifiée de la construction de facteurs hyperfinis de type II_1 sur lesquels agissent deux C^* -groupoïdes quantiques finis réguliers en dualité de façon à les retrouver, avec leurs structures initiales, comme commutants relatifs de la tour de Jones obtenue. N. Thiéry et l'auteur ont utilisé cette possibilité dans [DT]. Cette nouvelle version consiste en gros à échanger les lignes et les colonnes dans la grille de carrés commutatifs.

Nous utilisons les notations de 2.6. Nous considérons deux C^* -groupoïdes quantiques finis réguliers (voir 2.5) A et B en dualité.

A.1. Représentation standard de $B.A$ sur $L^2(A, tr)$. Utilisant la remarque 6.2, nous notons $B.A$ les produits croisés isomorphes $B \rtimes A$ et $B \ltimes A$. Dans 6.4.6, nous considérons la représentation π de $A.B$ sur $L^2(A, tr)$ comme extension de Jones de $A_t \subset A$. Dans [BSz2 - p. 183-184], G. Böhm et K. Szlachányi définissent aussi une représentation π'_ϕ de $B.A$ sur $L^2(A, \phi_a)$ qui nous permet d'obtenir une représentation π' de $B.A$ sur $L^2(A, tr)$ comme extension de Jones de $A_s \subset A$. La démarche est analogue à 6.4.6 et 6.4.7, nous résumons les résultats dans la proposition suivante :

Proposition. (1) *L'algèbre $B.A$ admet une représentation fidèle π'_ϕ sur $L^2(A, \phi_a)$ qui prolonge la représentation de A par multiplication à gauche. En particulier, π'_ϕ vérifie pour b dans B et a dans A ,*

$$\pi'_\phi(b)\Lambda_\phi(a) = \Lambda_\phi(a \triangleleft S_b^{-1}(b)).$$

L'algèbre $B.A$ est l'extension de Jones de $A_s \subset A$ représentée sur $L^2(A, \phi_a)$. Elle est donc engendrée par A et p_b , projecteur de Jones de l'inclusion. Plus précisément, p_b vérifie : $\pi_\phi(p_b)\Lambda_\phi(a) = \Lambda_\phi(F_{A_s}(a)).$

(2) *Soit U l'isométrie de $L^2(A, \phi_a)$ sur $L^2(A, tr)$ définie par*

$$U\Lambda_\phi(a) = d^{-1/2}\gamma\Lambda_{tr}(ag_s^{1/2}g_t^{1/2}).$$

La représentation $\pi' = U\pi'_\phi U^{-1}$ de $B.A$ prolonge la représentation standard de A sur $L^2(A, tr)$ et $B.A$ est l'extension de Jones de $A_s \subset A$ représentée sur $L^2(A, tr)$. Le projecteur de Jones est $f_b = d\gamma^{-1}\hat{g}_t^{-1/2}p_b\hat{g}_t^{-1/2}$ avec $E_{B_s}(f_b) = d^2\gamma^{-2}$.

(3) *La trace tr (définie sur $B.A$ comme en 6.4.5) est la trace de Markov normalisée de l'inclusion $A_s \subset A$ dont l'indice est $d^{-2}\gamma^2$. C'est aussi la trace de Markov de l'inclusion $A \subset B.A$*

A.2. Construction des facteurs. Comme en 6.5.1 et 6.7, à partir des carrés commutatifs munis de la trace de Markov prolongeant tr_a et tr_b :

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{E_A}{\subset} & A.B \\ \cup & & \cup E_B \\ A_s = B_t & \subset & B \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} A & \overset{E_A}{\subset} & B.A \\ \cup & & \cup E_B \\ A_t = B_s & \subset & B \end{array}$$

on construit des échelles périodiques de carrés commutatifs dont les lignes sont des constructions de bases :

$$\begin{array}{ccccccc}
B_1 & \subset & N_0^3 = A_0.B_1 & \subset & N_1^3 = B_0.A_0.B_1 & \subset & N_2^3 = A.B_0.A_0.B_1 & \subset & \cdots & \subset & M_3 \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & & & \cup \\
A_s & \subset & N_0^2 = A_0 & \subset & N_1^2 = B_0.A_0 & \subset & N_2^2 = A.B_0.A_0 & \subset & \cdots & \subset & M_2 \\
& & \cup & & \cup & & \cup & & & & \cup \\
& & B_s = A_t & \subset & N_1^1 = B_0 & \subset & N_2^1 = A.B_0 & \subset & \cdots & \subset & M_1 \\
& & & & \cup & & \cup & & & & \cup \\
& & & & N_1^0 = B_t = A_s & \subset & N_2^0 = A & \subset & \cdots & \subset & M_0
\end{array}$$

On a noté A_0 et B_0 les copies de départ des C^* -groupoïdes quantiques finis réguliers et leurs inclusions dans les algèbres construites, N_t^r l'algèbre de la r -ème ligne et t -ème colonne (les lignes sont comptées à partir de celle de M_0 et la colonne -1 est la plus à gauche). Les facteurs M_i sont les facteurs engendrés par les lignes d'algèbres. Les colonnes sont aussi des constructions de base ainsi que

$$M_0 \subset M_1 \overset{e_1}{\subset} M_2 \overset{e_2}{\subset} M_3$$

dont les projecteurs sont définis dans N_1^3 par $e_1 = [1_b \otimes f_a \otimes 1_b]$ et $e_2 = [1_b \otimes 1_a \otimes f_b]$ avec $f_a = d\gamma^{-1}g_s^{-1/2}p_ag_s^{-1/2}$.

A.3. Commutants relatifs. On applique alors le théorème 5.7.6 de [JS] à cette grille et on en déduit :

$$\begin{aligned}
M'_0 \cap M_1 &= (N_2^0)' \cup N_1^1 = (A \otimes 1_b)' \cap (1_a \otimes B_0) \subset A.B_0 \\
M'_1 \cap M_2 &= (N_1^1)' \cup N_0^2 = (B_0 \otimes 1_a)' \cap (1_b \otimes A_0) \subset B_0.A_0 \\
M'_0 \cap M_2 &= (N_2^0)' \cup N_1^2 = (A \otimes 1_b \otimes 1_a)' \cap (1_a \otimes B_0.A_0) \subset A.B_0.A_0 \\
M'_1 \cap M_3 &= (N_1^1)' \cup N_0^3 = (B_0 \otimes 1_a \otimes 1_b)' \cap (A_0.B_1 \otimes 1_b) \subset B_0.A_0.B_1 \\
M'_0 \cap M_3 &= (N_2^0)' \cup N_1^3 = (A \otimes 1_b \otimes 1_a \otimes 1_b)' \cap (1_a \otimes B_0.A_0.B_1) \subset A.B_0.A_0.B_1
\end{aligned}$$

Comme en 6.5.2, on conclut que le carré commutatif
$$\begin{array}{ccc}
M'_1 \cap M_3 & \subset & M'_0 \cap M_3 \\
\cup & & \cup \\
M'_1 \cap M_2 & \subset & M'_0 \cap M_2
\end{array}$$
 est exactement

le carré commutatif
$$\begin{array}{ccc}
B_1 & \subset & A_0.B_1 \\
\cup & & \cup \\
A_s & \subset & A_0
\end{array}$$
 au coin supérieur gauche de la grille. De plus $M'_0 \cap M_1$

est l'algèbre A_t , donc $M'_0 \cap M_1 \subset M'_0 \cap M_2 \subset M'_0 \cap M_3$ est la construction de base (voir 6.4.6) et les inclusions construites sont d'indice fini et de profondeur 2.

A.4. Actions de A sur M_1 et de B sur M_2 . Dans cette nouvelle construction, le commutant relatif $A_0 = M'_0 \cap M_2$ agit à gauche sur M_1 par son action à gauche sur B_0 contenu dans M_1 .

Proposition. Soient $i_a : a \mapsto [\cdots \otimes 1_a \otimes 1_b \otimes a]$ l'inclusion de A_0 dans M_2 et E_{M_1} l'espérance conditionnelle de M_2 sur M_1 conservant la trace tr . L'application de $A_0 \times M_1$ dans M_1

$$a \triangleright x = d^{-2}\gamma^2 E_{M_1}(i_a(a)x i_a(g_s^{1/2} f_a g_s^{-1/2})) \quad (x \in M_1, a \in A)$$

définit une action extérieure à gauche de A_0 sur M_1 telle que $M_2 = M_1 \rtimes A_0$.

Soient $i_b : b \mapsto [\cdots \otimes 1_b \otimes 1_a \otimes b]$ l'inclusion de B_1 dans M_3 et E_{M_2} l'espérance conditionnelle de M_3 sur M_2 conservant la trace tr . L'application de $B_1 \times M_2$ dans M_2

$$b \triangleright y = d^{-2}\gamma^2 E_{M_2}(i_b(b)y i_b(\hat{g}_s^{1/2} f_b \hat{g}_s^{-1/2})) \quad (y \in M_2, b \in B)$$

définit une action extérieure à gauche de B_1 sur M_2 telle que $M_3 = M_2 \rtimes B_1$.

De plus on a : $b \triangleright i_a(a) = i_a(b \triangleright a)$.

Démonstration. Commençons par un lemme :

Lemme. Dans $B.A$, pour $a \in A$ et $b \in B$, on a :

$$[1_b \otimes a][b \otimes p_a g_s^{-1}] = [(a \triangleright b) \otimes p_a g_s^{-1}]$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} [1_b \otimes a][b \otimes p_a g_s^{-1}] &= [a_{(1)} \triangleright b \otimes a_{(2)} p_a g_s^{-1}] \\ &= [a_{(1)} \triangleright b \otimes \varepsilon_t(a_{(2)}) p_a g_s^{-1}] && \text{(d'après 2.3)} \\ &= [(a_{(1)} \triangleright b)(\varepsilon_t(a_{(2)}) \triangleright 1_b) \otimes p_a g_s^{-1}] \\ &= [(a_{(1)} \triangleright b)(a_{(2)} \triangleright 1_b) \otimes p_a g_s^{-1}] \\ &= [(a \triangleright b) \otimes p_a g_s^{-1}] \end{aligned}$$

□

Notons $x = [z \otimes b]$ un élément de N_r^1 avec $b \in B_0$ et $z \in N_r^0$. D'après A.3, comme z appartient à M_0 , z commute à A_0 . L'élément $i_a(a)xi_a(g_s^{1/2}f_a g_s^{-1/2})$ considéré dans N_r^2 s'écrit donc $[z \otimes 1_b \otimes a][1_{N_r^0} \otimes b \otimes g_s^{1/2}f_a g_s^{-1/2}]$. Le lemme permet de simplifier l'expression de l'action pour $x = [z \otimes b]$:

$$a \triangleright x = d^{-2} \gamma^2 E_{M_1}(i_a(a)xi_a(g_s^{1/2}f_a g_s^{-1/2})) = d^{-1} \gamma E_{M_1}([z \otimes (a \triangleright b) \otimes p_a g_s^{-1}])$$

$$N_r^2 \subset M_2$$

Le carré $\begin{array}{ccc} N_r^2 & \subset & M_2 \\ \cup & & \cup \\ N_r^1 & \subset & M_1 \end{array}$ muni des espérances conditionnelles conservant tr est commutatif,

on en déduit : $a \triangleright x = d^{-1} \gamma E_{N_r^1}([z \otimes (a \triangleright b) \otimes p_a g_s^{-1}])$ puis en appliquant la proposition 6.4.4, $a \triangleright x = d^{-1} \gamma [z \otimes (a \triangleright b) E_{A_t}(p_a g_s^{-1}) \triangleright 1_b]$. De plus, d'après 6.3.3 et 6.4.2, on a :

$$E_{A_t}(p_a g_s^{-1}) = d \gamma^{-1} F_{A_t}(g_s^{-1} p_a) g_t^{-1} = d \gamma^{-1} F_{A_t}(g_t^{-1} p_a) g_t^{-1} = d \gamma^{-1} g_t^{-1} F_{A_t}(p_a) g_t^{-1} = d \gamma^{-1}$$

On obtient donc $a \triangleright x = [z \otimes (a \triangleright b)]$. L'application $x \mapsto a \triangleright x$ étend l'action duale $[z \otimes b] \mapsto [z \otimes a \triangleright b]$ de A_0 sur $N_r^1 = N_r^0.B$. Elle définit une action à gauche faiblement continue de A_0 sur M_1 . De plus $M_1 \rtimes A_0 = M_1 i_a(A_0)$ est le facteur M_2 . L'action est extérieure d'après 2.8.2 et A.3.

L'étude de l'action de B_1 sur M_2 est analogue. □

A.5. Structures des commutants relatifs. Dans $M'_0 \cap M_3$ regardons la dualité entre $A_0 = M'_0 \cap M_2$ et $B_1 = M'_1 \cap M_3$ définie pour ces commutants relatifs comme en 3.4. Nous allons utiliser ici, pour la première fois, le fait que A et B sont réguliers.

A.5.1. L'opérateur h . Nous avons déjà mentionné en 6.3.1, 6.3.3 et 7.2 que si A est régulier, la restriction de ϕ_a à A_s est la trace canonique de A_s . D'autre part, la définition 6.4.1 relie la trace de Markov de l'inclusion à ϕ_a par la formule : $tr(a) = d \gamma^{-2} \phi_a(g_s^{-1} g_t^{-1} a)$ pour $a \in A$. Grâce à 6.3.3, on en déduit, pour $a \in A_s$, la relation $tr(a) = \gamma^{-1} \phi_a(g_s^{-1} a)$ entre la trace de Markov et la trace canonique sur A_s donc h^2 est égal à γg_s .

A.5.2. Action de B sur $A_0 \subset M_2$. On peut alors reprendre les formules A.4 de l'action d'un élément b de B_1 sur un élément $i_a(a)$ de $A_0 \subset M_2$ en écrivant :

$$i_a(b \triangleright a) = b \triangleright i_a(a) = d^{-2} \gamma^2 E_{M_2}(i_b(b)[i_a(ah) \otimes f_b(h^{-1} \triangleright 1_b)])$$

A.5.3. Dualité des commutants relatifs.

Proposition. La dualité entre A_0 et B_1 résultant de la tour des facteurs (définie en 3.4) coïncide avec la dualité donnée initialement entre A et B . Les structures de C^* -groupoïdes quantiques résultant de la tour sont les structures initiales de A et B .

Démonstration. Notons $[a, b]$ la dualité entre $a \in A_0$ et $b \in B_1$ définie en 3.4. Grâce à A.2, A.3, A.4, on obtient :

$$\begin{aligned}
[a, b] &= d^{-4} \gamma^4 \text{tr}([i_a(ah) \otimes f_b][i_a(f_a h) \otimes 1_b] i_b(b)) \\
&= d^{-4} \gamma^4 \text{tr}(i_b(b)[i_a(ah) \otimes f_b][i_a(f_a h) \otimes 1_b]) \\
&= d^{-4} \gamma^4 \text{tr}(E_{M_2}(i_b(b)[i_a(ah) \otimes f_b(h^{-1} \triangleright 1_b)])[i_a(h f_a h) \otimes 1_b]) \\
&= d^{-2} \gamma^2 \text{tr}([i_a(b \triangleright a) \otimes 1_b][i_a(h f_a h) \otimes 1_b]) \quad \text{d'après A.5.2} \\
&= d^{-2} \gamma^2 \text{tr}_a((b \triangleright a) h f_a h) \\
&= d^{-1} \gamma^2 \text{tr}_a((b \triangleright a) p_a) \quad \text{d'après A.5.1} \\
&= \phi_a(g_s^{-1} g_t^{-1} p_a(b \triangleright a)) \\
&= \phi_a(g_s^{-2} p_a(b \triangleright a)) \\
&= \langle g_s^{-2} p_a(b \triangleright a), p_b \rangle \\
&= \langle p_a(b \triangleright a), p_b \triangleleft g_s^{-2} \rangle \quad \text{d'après 2.6.2} \\
&= \langle p_a(b \triangleright a), p_b(1_b \triangleleft g_s^{-2}) \rangle \quad \text{d'après 2.6.4} \\
&= \langle p_a(b \triangleright a), p_b \hat{g}_t^{-2} \rangle \quad \text{d'après 6.3.3} \\
&= \langle (b \triangleright a), (p_b \hat{g}_t^{-2}) \triangleleft p_a \rangle
\end{aligned}$$

Or, par 6.3.2 et 6.3.3, on a :

$$(p_b \hat{g}_t^{-2}) \triangleleft p_a = F_{B_s}(p_b \hat{g}_s^{-2}) = F_{B_s}(p_b) F_{B_s}(p_b)^{-1} = 1$$

Donc, par 2.6.2, les deux dualités entre A_0 et B_1 coïncident et comme les structures de C^* -algèbres sont conservées, les structures de C^* -groupoïdes quantiques aussi. \square

A.6. Conclusion. Nous réunissons dans le théorème suivant les résultats de cet annexe.

Théorème. Etant donnés A et B deux C^* -groupoïdes quantiques finis réguliers en dualité, on peut construire une tour de Jones (de profondeur 2) de facteurs hyperfinis de type Π_1 :

$$M_0 \subset M_1 \overset{e_1}{\subset} M_2 \overset{e_2}{\subset} M_3$$

telle que

$$\begin{array}{ccc}
M'_1 \cap M_3 & \subset & M'_0 \cap M_3 \\
(1) \text{ le carré commutatif } & \cup & \cup \text{ soit isomorphe au carré commutatif } \\
M'_1 \cap M_2 & \subset & M'_0 \cap M_2
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
B & \subset & A.B \\
\cup & \cup & \text{avec } e_1 = [d\gamma^{-1} g_s^{-1/2} p_a g_s^{-1/2} \otimes 1_b] \text{ et } e_2 = [1_a \otimes d\gamma^{-1} \hat{g}_s^{-1/2} p_b \hat{g}_s^{-1/2}] \\
A_s & \subset & A
\end{array}$$

- (2) les structures de C^* -groupoïdes quantiques sur les commutants relatifs obtenues à partir de la tour de facteurs grâce à la dualité 3.4 coïncident avec les structures initiales de A et B .
- (3) A (resp. B) agisse à gauche sur M_1 (resp. M_2) de telle sorte que M_2 (resp. M_3) soit isomorphe à $M_1 \rtimes A$ (resp. $M_2 \rtimes B$).

RÉFÉRENCES

- [Bi] D.Bisch : Bimodules, higher relative commutants and the fusion algebra associated to a subfactor *The Fields Institutes for Research in Mathematical Sciences Communications Series 13* (1997), 13-63.
- [BNSz] G. Böhm, F. Nill et K. Szlachányi : Weak Hopf algebras I. Integral theory and C^* -structure. *J. Algebra* 221 (1999) 385-438.
- [BSz1] G. Böhm et K. Szlachányi : A Coassociative C^* -Quantum Group with Non-Integral Dimensions. *Lett. in Math. Phys.*, 35 (1996), 437-456.
- [BSz2] G. Böhm et K. Szlachányi : Weak Hopf algebras II. Representation Theory, Dimension and the Markov Trace. *J. Algebra* 233 (2000) 156-212.
- [Da1] M.-C. David : Paragroupe d'Adrian Ocneanu et algèbre de Kac. *Pacific Journal of mathematics*, Vol 172, No2, 1996.
- [Da2] M.-C. David : Couple assorti de systèmes de Kac et inclusions de facteurs de type II_1 . *Journal of functional analysis* 159, 1-42 (1998).
- [DT] M.-C. David et N. M. Thiéry : Exploration of finite dimensional Kac algebras and lattices of intermediate subfactors of irreducible inclusions (arXiv :math.QA/0812.3044v2)
- [GHJ] F. M. Goodman, P. de la Harpe et V. F. R. Jones : Coxeter Graphs and Towers of algebras. *MSRI Publications number 14*.
- [J] V. Jones : Index for subfactors. *Invent. Math.* 72 1-25 (1983).
- [JS] V. Jones et V.S.Sunder : Introduction to Subfactors. *London Mathematical Society. Lecture Notes Series 234. Cambridge university press*
- [L] R.Longo : A duality for Hopf algebras and subfactors I. *Comm. Math. Phys.* 159 (1994), 133-150
- [N] D. Nikshych : Duality for action of weak Kac algebras and crossed product inclusions of II_1 factors. *journal of Operator Theory* 46 (2001) n° 3 suppl. 635-655
- [NSzW] F. Nill, K. Szlachányi et H.-W. Wiesbrock : Weak Hopf algebras and reducible Jones inclusions of depth 2, I : From crossed products to Jones towers. *prépublication math.QA/9806130* (1998).
- [NV1] D. Nikshych et L. Vainerman : A characterisation of depth 2 subfactors of II_1 factors. *J. Func. Analysis* 171 (2000) no. 2, 278-307.
- [NV2] D. Nikshych et L. Vainerman : A Galois correspondence for II_1 factors and quantum groupoids. *J. Func. Analysis* 178 (2000) 113-142.
- [NV3] D. Nikshych et L. Vainerman : Finite quantum groupoids and their applications. "New Directions in Hopf Algebras", Editors S. Montgomery and H.-J. Schneider, *MSRI Publications Vol. 43, Cambridge University Press* (2002), pp. 211 - 262.
- [PiPo 1] M. Pimsner et S. Popa : Entropy and index for subfactors. *Ann.Scient.ENS* 19 (1986) p. 57-106
- [PiPo 2] M. Pimsner et S. Popa : Iterating the basic construction. *Trans.A.M.S.* 310 (1988) No 1 p.127-134.
- [Szy] W. Szymanski : Finite index subfactors and Hopf algebras crossed products. *Proc.Amer. Math. Soc.* 120 (1994) 519-528.
- [V1] J.-M. Vallin. Groupoïdes quantiques finis. *Journal of Algebra* **239**, 215-261 (2001)
- [V2] J.-M. Vallin. Deformation of finite dimensional C^* -Quantum Groupoids. *math.QA/0310265*.

[W] Y.Watatani. Index for C^* -subalgebras. *Memoirs of the AMS* 424 (1990).

MATHÉMATIQUE, BÂT. 425, UNIVERSITÉ PARIS-SUD, F-91405 ORSAY CEDEX.
MCLD@MATH.U-PSUD.FR