SUR LES AUTOMORPHISMES ET LA RIGIDITÉ DES GROUPES DE COXETER À ANGLES DROITS.

Anatole CASTELLA

12 Décembre 2004

Introduction.

Un groupe de Coxeter est un groupe W admettant un sous-ensemble générateur S formé d'éléments d'ordre 2 tel que, si l'on note, pour $s, t \in S$, $m_{s,t}$ l'ordre du produit st dans W, le groupe W soit donné par la présentation :

$$W = \langle S \mid (st)^{m_{s,t}} = 1$$
, si $s, t \in S$ avec $m_{s,t} \neq \infty \rangle$.

On dit alors que (W, S) est un système de Coxeter (admis par W), que l'ensemble S est un ensemble de Coxeter pour W et que le cardinal de S est le rang du système (W, S). On note S(W) l'ensemble des ensembles de Coxeter pour W.

Généralement, on se donne un système de Coxeter (W,S) par la matrice $\Gamma_{(W,S)} = (m_{s,t})_{s,t\in S}$, que l'on représente par un graphe d'ensemble de sommets S, avec une arête étiquetée $m_{s,t}$ entre les sommets s et t lorsque $m_{s,t} \geq 3$. On dit que la matrice $\Gamma_{(W,S)}$ est le type de (W,S) (et est un type admis par W). C'est une matrice de Coxeter, c'est-à-dire une matrice symétrique à coefficients dans $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, avec des 1 sur la diagonale et uniquement sur la diagonale. On peut montrer (cf. [B], Ch. V, § 4, n° 3) que toute matrice de Coxeter est, à isomorphisme de matrices près, le type d'un système de Coxeter (où l'on appelle isomorphisme de matrices de $(m_{s,t})_{s,t\in S}$ sur $(m'_{s',t'})_{s',t'\in S'}$ toute bijection de S sur S' qui respecte les coefficients).

Soit W un groupe de Coxeter.

Si $S \in \mathcal{S}(W)$ et si α est un automorphisme de W, alors $\alpha(S) \in \mathcal{S}(W)$ et les types $\Gamma_{(W,S)}$ et $\Gamma_{(W,\alpha(S))}$ sont isomorphes (via $S \to \alpha(S)$, $s \mapsto \alpha(s)$). Inversement, pour S, $S' \in \mathcal{S}(W)$, tout isomorphisme de $\Gamma_{(W,S)}$ sur $\Gamma_{(W,S')}$ se prolonge en un automorphisme de W qui envoie S sur S'. On est alors amené à considérer les deux problèmes suivants :

- 1. Déterminer le groupe Aut(W).
- 2. Déterminer les classes d'isomorphisme des types admis par W ou, de façon équivalente, les orbites de l'action de Aut(W) sur $\mathcal{S}(W)$: $Aut(W) \times \mathcal{S}(W) \to \mathcal{S}(W)$, $(\alpha, S) \mapsto \alpha(S)$.

On dit qu'un groupe de Coxeter est *rigide* lorsqu'il admet un unique type, à isomorphisme près, c'est-à-dire lorsque l'action décrite en 2 ci-dessus est transitive (voir aussi la définition 6 en section 3.1 ci-dessous).

De nombreux résultats existent sur ces deux problèmes, pour différentes classes de groupes de Coxeter, et en particulier pour la classe des groupes de Coxeter "à angles droits" :

Définition 1 (Angles droits). Soit (W, S) un système de Coxeter de type Γ . On dit que (W, S) et Γ sont à angles droits si Γ est à coefficients dans $\{1, 2, \infty\}$.

On montre que, si un groupe de Coxeter W admet un système de Coxeter à angles droits, alors tous les systèmes de Coxeter qu'il admet sont à angles droits et ont même rang (voir la section 1.3). On dit alors que le groupe de Coxeter W est à angles droits et que le rang commun des systèmes de Coxeter qu'il admet est le rang du groupe W.

Soit W un groupe de Coxeter à angles droits (de rang fini ou infini).

Notons $\pi: W \to W^{ab}$, $w \mapsto \overline{w}$ le morphisme canonique de W sur son abélianisé. Comme le sous-groupe dérivé est un sous-groupe caractéristique, π induit le morphisme $\pi_{Aut}: Aut(W) \longrightarrow Aut(W^{ab})$, $\alpha \longmapsto (\overline{\alpha}: \overline{w} \mapsto \overline{\alpha(w)})$. Notons F l'ensemble des éléments d'ordre fini de W, et posons $\overline{F} = \pi(F)$. Comme les automorphismes de W stabilisent F, π_{Aut} est à valeurs dans le sous-groupe $Aut(W^{ab}, \overline{F})$ de $Aut(W^{ab})$ constitué des automorphismes de W^{ab} qui stabilisent \overline{F} . En 1988, J. Tits a établi dans [T] (Corollaire 1) que la suite :

$$\{1\} \hookrightarrow \ker(\pi_{Aut}) \hookrightarrow Aut(W) \xrightarrow{\pi_{Aut}} Aut(W^{ab}, \overline{F}) \to \{1\}$$

est exacte et scindée. Il a ensuite entamé l'étude de $\ker(\pi_{Aut})$ (qu'il note $Aut^{\circ}(W)$), fourni des pistes à suivre pour étudier $Aut(W^{ab}, \overline{F})$ et décrit ce dernier groupe dans quelques exemples. Dix ans plus tard, B. Mühlherr a donné dans [M] une présentation par générateurs et relations de $\ker(\pi_{Aut})$ (qu'il note Spe(W)), dans le cas où W est de rang fini.

Au début des années 2000, D.G. Radcliffe et T. Hosaka ont montré respectivement dans [R] et dans [H] que les groupes de Coxeter à angles droits et de rang fini sont rigides.

Le but de cet article est de donner une démonstration de ce dernier résultat qui ne fait pas intervenir la finitude du rang (donc de montrer que tous les groupes de Coxeter à angles droits sont rigides)¹ et de décrire le groupe $Aut(W^{ab}, \overline{F})$ pour une vaste classe de groupes de Coxeter à angles droits (contenant les groupes de Coxeter à angles droits et de rang fini), à savoir ceux que nous appelons "d'épaisseur finie" (section 4.3.3, définition 13).

La première partie est consacrée à quelques rappels sur les groupes et sur les groupes de Coxeter, qui nous permettent de fixer les notations utilisées dans les parties suivantes.

Dans la seconde partie, nous présentons des résultats généraux sur les ensembles munis d'une relation binaire symétrique et réflexive (dont la motivation est expliquée ci-dessous). La terminologie employée est la suivante :

Définition (Section 2, définitions 2, 3, 4 et 5). Nous appelons ensemble à relation tout couple (E, R) où E est un ensemble et R une relation binaire symétrique et réflexive sur E.

Soit (E,R) un ensemble à relation. Nous notons $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E et [E] l'ensemble des parties finies de E. Ce sont des F_2 -espaces vectoriels (cf. section 1.1). Nous notons $[E]_c$ l'ensemble des parties finies de E constituées d'éléments deux à deux en relation R.

Soit $C: \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, $X \longmapsto \{y \in E \mid \forall x \in X, yRx\}$. Nous appelons cellules les images par C^2 des singletons de E et noyaux les classes d'équivalence de la relation (d'équivalence) $C(\{x\}) = C(\{y\})$ sur E. Nous notons C(E,R) l'ensemble des cellules et $\mathcal{N}(E,R)$ l'ensemble des noyaux. Pour $x \in E$, nous disons que la cellule $C^2(\{x\})$ est la cellule de (ou définie par) x et nous notons N(x) le noyau (la classe d'équivalence) de x.

Si (E, R) et (E', R') sont deux ensembles à relation, nous appelons isomorphisme (d'ensembles à relation) de (E, R) sur (E', R') toute bijection f de E sur E' telle que $(f \times f)(R) = R'$.

Si $\Gamma = \Gamma_{(W,S)}$ est un type admis par W, nous munisons S de la relation R_{Γ} de commutation dans S. Nous obtenons ainsi un ensemble à relation (S, R_{Γ}) qui détermine entièrement Γ (qui est à angles droits), puisque l'on a, pour $s, t \in S$ distincts, $m_{s,t} = 2 \Leftrightarrow sR_{\Gamma}t$ et $m_{s,t} = \infty \Leftrightarrow (s,t) \notin R_{\Gamma}$ (notons que $[S]_c$ est alors l'ensemble des parties commutatives et finies de S).

Pour $S, S' \in \mathcal{S}(W)$ et $\Gamma = \Gamma_{(W,S)}, \Gamma' = \Gamma_{(W,S')}$, on voit que les notions d'isomorphisme de matrices de Γ sur Γ' et d'isomorphisme d'ensembles à relation de (S, R_{Γ}) sur $(S', R_{\Gamma'})$ coïncident.

De plus, à la suite de J. Tits, nous remarquons qu'il existe un isomorphisme (\mathbb{F}_2 -linéaire) de [S] sur [S'] envoyant $[S]_c$ sur $[S']_c$ (voir la démonstration du corollaire 1 de [T], où $[S]_c$ est noté $F(\Gamma)$, ou la remarque 2 a ci-dessous).

¹Après la première diffusion de cet article, D.G. Radcliffe m'a signalé que cette généralisation est également conséquence d'un résultat de sa thèse de doctorat ([R2], Ch. 5, Théorème principal).

Pour démontrer que les groupes de Coxeter à angles droits (de rang quelconque) sont rigides, on voit donc qu'il suffit de montrer le résultat suivant :

Théorème (Section 2.3, assertion 2 du théorème 1). Soient (E,R) et (E',R') deux ensembles à relation. S'il existe un isomorphisme (F_2 -linéaire) de [E] sur [E'] envoyant $[E]_c$ sur $[E']_c$, alors les ensembles à relation (E,R) et (E',R') sont isomorphes.

Dans la troisième partie, nous examinons les notions de rigidité et de rigidité forte pour les groupes de Coxeter à angles droits (cf. définitions 6 et 7). Nous obtenons en particulier, comme corollaire immédiat du Théorème 1, le résultat suivant :

Théorème (Section 3.1, Théorème 2). Les groupes de Coxeter à angles droits sont rigides.

Dans la quatrième partie, nous étudions le groupe $Aut(W^{ab}, \overline{F})$. Comme l'avait remarqué J. Tits dans [T], pour tout $S \in \mathcal{S}(W)$, nous pouvons identifier $Aut(W^{ab}, \overline{F})$ au groupe $Aut([S], [S]_c)$ constitué des automorphismes de [S] stabilisant $[S]_c$ (voir la section 1.3 ci-dessous). Fixant $S \in \mathcal{S}(W)$, c'est ce dernier groupe $Aut([S], [S]_c)$ que nous décrivons ici. L'étude que nous effectuons est inspirée des idées exposées dans la partie finale de [T].

Posons $\Gamma = \Gamma_{(W,S)}$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(S, R_{\Gamma})$ et $\mathcal{N} = \mathcal{N}(S, R_{\Gamma})$. La proposition 5 de la partie 2.3 montre en particulier que le groupe $Aut([S], [S]_c)$ agit sur l'ensemble $\{[T] \mid T \in \mathcal{C}\}$, via $(\varphi, [T]) \mapsto \varphi([T])$. Notant $K(\Gamma)$ le noyau de cette action, nous exhibons un sous-groupe G du groupe $Aut(\Gamma)$ des automorphismes de la matrice Γ tel que l'on ait $Aut([S], [S]_c) = K(\Gamma) \rtimes G$ (cf. section 4.1).

Nous donnons ensuite une caractérisation simple des éléments de $K(\Gamma)$ parmi les éléments de Aut([S]) (section 4.2, proposition 10) et montrons que le groupe $K(\Gamma)$ se décompose luimême en le produit semi-direct $K(\Gamma) = K^{\circ}(\Gamma) \rtimes D(\Gamma)$ (section 4.2, proposition 12), où $D(\Gamma)$ désigne le groupe constitué des automorphismes de [S] qui, pour tout $N \in \mathcal{N}$, stabilisent le sous-espace [N] de [S] (remarquons que, \mathcal{N} étant une partition de S, on a $[S] = \bigoplus_{N \in \mathcal{N}} [N]$ et $D(\Gamma) \approx \prod_{N \in \mathcal{N}} Aut([N])$) et où $K^{\circ}(\Gamma)$ est le sous-groupe de $K(\Gamma)$ suivant :

Définition (Section 4.2, notation 10). Soit
$$s \in S$$
. Posons $(C^2(\{s\}))^* = C^2(\{s\}) \setminus N(s)$. Alors $K^{\circ}(\Gamma) = \{ \varphi \in K(\Gamma) \mid \forall s \in S, \ \varphi(\{s\}) \in \{s\} + [(C^2(\{s\}))^*] \}$.

La section 4.3 est consacrée à l'étude du groupe $K^{\circ}(\Gamma)$. La méthode consiste essentiellement à déterminer une partition de S en parties "d'épaisseur nulle" (section 4.3.2, définition 11), qui se traduit par une décomposition de $K^{\circ}(\Gamma)$ en produits semi-directs itérés de certains de ses sous-groupes, simples à décrire (section 4.3.2, formules (E1) ou (E2), et section 4.3.3, théorème 3). C'est à cette étape qu'il faut supposer S "d'épaisseur finie" (section 4.3.3, définition 13), afin que les produits semi-directs itérés mentionnés soient en nombre fini.

Les résultats obtenus sont illustrés par quelques exemples à la fin de cet article.

1 Préliminaires.

1.1 Généralités sur les groupes.

Soit W un groupe. Nous notons F(W), ou plus simplement F, l'ensemble des éléments d'ordre fini de W. Soit $\pi: W \to W^{ab}$, $w \mapsto \overline{w}$ le morphisme canonique de W sur son abélianisé. Nous notons $\overline{F} = \overline{F(W)}$ l'image de F(W) par π .

Nous notons Aut(W) le groupe des automorphismes de W et Int(W) le groupe de ses automorphismes intérieurs. Pour $X \subseteq W$, notons $Aut(W,X) = \{\alpha \in Aut(W) \mid \alpha(X) = X\}$ le sous-groupe de Aut(W) formé des automorphismes de W qui stabilisent X.

Dans tout ce qui suit, nous disons qu'un groupe (fini ou infini) est un 2-groupe élémentaire si tous ses éléments non triviaux sont d'ordre 2. Bien sûr, les notions de 2-groupe élémentaire et de \mathbb{F}_2 -espace vectoriel (ainsi que les notions de morphisme correspondantes) coïncident et on ne les distinguera donc pas. On pourra par exemple parler de base d'un 2-groupe élémentaire, sans faire explicitement référence à sa structure de \mathbb{F}_2 -espace vectoriel.

Soit E un ensemble. On note Perm(E) le groupe des permutations de E, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E, [E] l'ensemble des parties finies de E, et $\mathcal{E}(E)$ l'ensemble des singletons de E. Muni de l'opération de différence symétrique $X + Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$, $\mathcal{P}(E)$ est un 2-groupe élémentaire (d'élément neutre \emptyset) et [E] en est le sous-espace vectoriel de base $\mathcal{E}(E)$.

1.2 Généralités sur les groupes de Coxeter.

Soit (W, S) un système de Coxeter de type $\Gamma = (m_{s,t})_{s,t \in S}$.

On note M_S l'ensemble des mots sur S (i.e. le monoïde libre engendré par S) et, pour $w \in W$, $M_S(w)$ l'ensemble des éléments de M_S représentant w dans W. Les éléments de longueur minimale de $M_S(w)$ sont dit $r\acute{e}duits$ et leur longueur commune, notée $l_S(w)$, est appelée la longueur de w (par rapport à S). On sait (cf. [B], Ch. IV, §1, n° 8, Proposition 7) que l'ensemble des éléments de S apparaissant dans un mot réduit de $M_S(w)$ ne dépend que de w; cet ensemble est appelé le S-support de w et est noté $Supp_S(w)$.

Soit $X \subseteq S$. On note W_X le sous-groupe de W engendré par X. Alors W_X est constitué des éléments de W dont le S-support est inclus dans X (cf. [B], Ch. IV, §1, n° 8, Corollaire 1). On en déduit que le couple (W_X, X) est un système de Coxeter de type $(m_{s,t})_{s,t\in X}$, que, pour $X, Y \subseteq S$, on a $W_X \subseteq W_Y \iff X \subseteq Y$, et que, si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de S, alors $W_{\bigcap_{i\in I}X_i} = \bigcap_{i\in I}W_{X_i}$ (cf. [B], Ch. IV, §1, n° 8, Théorème 2).

Les sous-groupes W_X , pour $X \subseteq S$, sont appelés sous-groupes S-paraboliques standard et on dit que X et W_X sont S-sphériques lorsque W_X est fini. Voici un résultat classique (cf. [T], proposition 1, ou [B], exercice 2d page 130) :

Proposition 1. Soit (W, S) un système de Coxeter. Tout sous-groupe fini de W est, à conjugaison près, inclus dans un sous-groupe S-sphérique.

Nous notons $\mathcal{P}_c(S)$ (resp. $[S]_c$) l'ensemble des parties commutatives de S (resp. des parties commutatives et finies de S). Les éléments de $[S]_c$ sont des parties S-sphériques et, plus généralement, pour $X \in \mathcal{P}_c(S)$, le sous-groupe S-parabolique standard W_X est un 2-groupe élémentaire de base X.

On note $Aut(\Gamma)$ le groupe des automorphismes de la matrice Γ (i.e. le sous-groupe de Perm(S) constitué des permutations de S qui respectent les coefficients $m_{s,t}$).

Remarques 1. a. Tout élément de $Aut(\Gamma)$ se prolonge en un automorphisme de W qui stabilise S et le groupe $Aut(\Gamma)$ s'identifie ainsi au sous-groupe Aut(W,S) de Aut(W).

b. Tout élément f de Perm(S) définit, via $X \mapsto f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$, un élément de Aut([S]) qui respecte le cardinal et détermine entièrement f. Si, de plus, f respecte les coefficients de Γ , alors f stabilise $[S]_c$ et définit donc un élément de $Aut([S], [S]_c)$ (qui respecte le cardinal). Le groupe $Aut(\Gamma)$ s'identifie ainsi à un sous-groupe de $Aut([S], [S]_c)$.

1.3 Le cas à angles droits.

Soit (W, S) un système de Coxeter à angles droits de type $\Gamma = (m_{s,t})_{s,t \in S}$.

Dans ce cas, l'ensemble $[S]_c$ des parties commutatives finies de S est exactement l'ensemble des parties S-sphériques. Les sous-groupes S-sphériques sont donc des 2-groupes élémentaires et, d'après la proposition 1, tous les sous-groupes finis de W sont alors des 2-groupes élémentaires. L'ensemble F(W) est donc constitué de l'élément neutre et des éléments d'ordre 2 de W. On voit alors que, pour tout $S' \in \mathcal{S}(W)$, le système de Coxeter (W, S') est nécessairement à angles droits. Autrement dit, tous les systèmes de Coxeter admis par W sont à angles droits.

La proposition suivante, qui apparaît dans la démonstration du corollaire 1 de [T], montre alors en particulier que tous les élements de $\mathcal{S}(W)$ ont même cardinal, à savoir la dimension du 2-groupe élémentaire W^{ab} sur F_2 .

Les deux affirmations qui apparaissent dans la définition 1 sont ainsi prouvées.

Proposition 2. Soit (W, S) un système de Coxeter à angles droits.

- 1. L'application $\mathcal{E}(S) \to W^{ab}$, $\{s\} \mapsto \overline{s}$ se prolonge en un isomorphisme π_S de [S] sur W^{ab} .
- 2. De plus, π_S envoie $[S]_c$ sur \overline{F} .

Démonstration. D'après la propriété universelle du système de Coxeter (W, S), l'application $S \to [S]$, $s \mapsto \{s\}$ se prolonge (de façon unique) en un morphisme de groupes de W dans [S]. Comme [S] est abélien, ce morphisme passe au quotient en le morphisme $\rho_S: W^{ab} \to [S]$, donné par $\overline{s} \mapsto \{s\}$. Comme ρ_S envoie la famille génératrice $(\overline{s})_{s \in S}$ du F_2 -espace vectoriel W^{ab} sur la base $(\{s\})_{s \in S}$ du F_2 -espace vectoriel [S], ρ_S est un isomorphisme, d'où le premier point, avec $\pi_S = (\rho_S)^{-1}$.

Montrons que $\pi_S([S]_c) = \overline{F}$. Soit $X \in [S]_c$. Alors $\pi_S(X) = \prod_{s \in X} \overline{s}$ appartient à \overline{F} , puisque l'élément $\prod_{s \in X} s$ de W est d'ordre 1 ou 2 (donc appartient à F(W)). On a donc $\pi_S([S]_c) \subseteq \overline{F}$. Réciproquement, soit $w \in F(W)$. D'après la proposition 1, il existe une partie S-sphérique X (de S) telle que w est conjugué à un élément de W_X . Comme (W,S) est à angles droits, on a $X \in [S]_c$ et w est donc conjugué à un élément $\prod_{s \in Y} s$, pour un certain $Y \subseteq X$. On a alors $Y \in [S]_c$ et $\overline{w} = \prod_{s \in Y} \overline{s} = \pi_S(Y)$. On a donc $\overline{F} \subseteq \pi_S([S]_c)$ et le résultat.

Remarques 2. a. Si S' est un autre ensemble de Coxeter pour W, alors l'application $(\pi_{S'})^{-1} \circ \pi_S$ est un isomorphisme de [S] sur [S'] envoyant $[S]_c$ sur $[S']_c$.

- **b.** L'isomorphisme π_S nous permet d'identifier les groupes Aut([S]) et $Aut(W^{ab})$ d'une part, et les groupes $Aut([S], [S]_c)$ et $Aut(W^{ab}, \overline{F})$ d'autre part.
- c. Revenons à la remarque 1 b. On supose ici que Γ est à angles droits; on montre alors facilement que le groupe $Aut(\Gamma)$ s'identifie précisément au sous-groupe de $Aut([S],[S]_c)$ constitué des éléments de $Aut([S],[S]_c)$ qui respectent le cardinal.

Commentaires 1. Identifions $Aut([S],[S]_c)$ et $Aut(W^{ab},\overline{F})$ grâce à π_S .

- a. Pour montrer que la suite $\{1\} \hookrightarrow \ker(\pi_{Aut}) \hookrightarrow Aut(W) \xrightarrow{\pi_{Aut}} Aut(W^{ab}, \overline{F}) \to \{1\}$ est exacte et scindée, J. Tits a défini la section de π_{Aut} qui à tout $\varphi \in Aut(W^{ab}, \overline{F}) = Aut([S], [S]_c)$ associe l'automorphisme de W donné sur S par $s \mapsto \prod_{x \in \varphi(\{s\})} x$.
- **b.** Via cette section, $Aut([S], [S]_c)$ s'identifie à un sous-groupe de Aut(W) et on a alors $Aut(W) = \ker(\pi_{Aut}) \rtimes Aut([S], [S]_c)$. On vérifie aisément que $Aut([S], [S]_c)$ s'identifie précisément au sous-groupe de Aut(W) constitué des automorphismes de W qui stabilisent l'ensemble des éléments de support S-sphérique (i.e. la réunion des sous-groupes S-sphériques de W).
- c. Via cette section, on vérifie facilement que le sous-groupe de $Aut([S], [S]_c)$ identifié à $Aut(\Gamma)$ comme en remarque 1 b (ou 2 c) s'envoie sur le sous-groupe Aut(W, S) de Aut(W); on

2 Outils.

2.1 Ensembles à relations.

Définition 2 (Relations). Nous appelons ensemble à relation, ou plus simplement relation, tout couple (E,R) où E est un ensemble et R une relation binaire symétrique et réflexive sur E. Autrement dit, R est une partie de $E \times E$ telle que, pour tous $x, y \in E$, $(x,x) \in R$, et $(x,y) \in R \iff (y,x) \in R$. On note xRy pour $(x,y) \in R$.

Soient (E,R) et (E',R') deux ensembles à relation. Un isomorphisme de relations de (E,R) sur (E',R') est une bijection $f:E \xrightarrow{\sim} E'$ telle que $(f \times f)(R) = R'$. S'il en existe un, on dit que les relations (E,R) et (E',R') sont isomorphes. En particulier, si (E,R) = (E',R'), on parle d'automorphismes de (E,R) et on note Aut(E,R) le groupe qu'ils constituent.

Notation 1 (La relation associée à Γ). Soit (W, S) un système de Coxeter de type $\Gamma = (m_{s,t})_{s,t\in S}$. On munit S de la relation binaire symétrique et réflexive $R_{\Gamma} = \{(s,t) \in S \times S \mid m_{s,t} = 1 \text{ ou } 2\} = \{(s,t) \in S \times S \mid st = ts\}.$

Remarques 3. Soit W un groupe de Coxeter à angles droits.

- a. Pour $S \in \mathcal{S}(W)$ et $\Gamma = \Gamma_{(W,S)}$, la relation R_{Γ} détermine entièrement Γ puisque, pour $s, t \in S$ distincts, on a les équivalences suivantes : $m_{s,t} = 2 \Leftrightarrow sR_{\Gamma}t$, et $m_{s,t} = \infty \Leftrightarrow (s,t) \notin R_{\Gamma}$.
- **b.** On voit alors que, pour $S, S' \in \mathcal{S}(W)$ et $\Gamma = \Gamma_{(W,S)}, \Gamma' = \Gamma_{(W,S')}$, les notions d'isomorphisme (de matrices) de Γ sur Γ' et d'isomorphisme de relations de (S, R_{Γ}) sur $(S', R_{\Gamma'})$ coïncident. En particulier, on a $Aut(\Gamma) = Aut(S, R_{\Gamma})$.

Définition 3 (Commutants. Parties commutatives). Soit (E,R) un ensemble à relation.

Considérons l'application
$$C = C_{(E,R)} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & \{y \in E \mid \forall x \in X, \ yRx\} \end{array} \right.$$

Pour simplifier, nous notons C(x) l'image $C(\{x\})$ du singleton $\{x\}$ de E. Par analogie avec ce qui se passe pour la relation (S, R_{Γ}) associée à une matrice de Coxeter Γ , nous disons que :

- pour $x, y \in E$, x et y commutent lorsque xRy (i.e $x \in C(y)$),
- pour $X \subseteq E$, l'image C(X) est le commutant de X (dans E) et X est commutative si les éléments de X commutent deux à deux (c'est-à-dire si $X \subseteq C(X)$),

et nous notons $\mathcal{P}_c(E)$ (resp. $[E]_c$) l'ensemble des parties commutatives de E (resp. des parties commutatives et finies de E).

Remarques 4. a. C est décroissante (et donc C^2 est croissante) pour l'inclusion.

- **b.** Pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, $X \subseteq C^2(X)$.
- c. On déduit des assertions a et b que $C^3 = C$.
- **d.** Pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, X est commutative $\iff C^2(X)$ est commutative.
- e. Pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, $C(X) = \bigcap_{x \in X} C(x)$.

Notation 2. Soit (E,R) un ensemble à relation.

Nous notons $R_{\mathcal{P}}$ la relation binaire sur $\mathcal{P}(E)$ donnée par $XR_{\mathcal{P}}Y \Leftrightarrow \forall (x,y) \in X \times Y, xRy$. On vérifie que $R_{\mathcal{P}}$ est symétrique (car R l'est) et que, pour $X \in \mathcal{P}(E)$, on a $XR_{\mathcal{P}}X$ si et seulement si X est commutative.

Remarques 5. Conservons les notations introduites ci-dessus.

a. Soit $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}_c(E)$. On note encore $R_{\mathcal{P}}$ la relation $R_{\mathcal{P}} \cap \mathcal{X}^2$ induite par $R_{\mathcal{P}}$ sur \mathcal{X} . C'est une relation symétrique et réflexive, et le couple $(\mathcal{X}, R_{\mathcal{P}})$ est donc un ensemble à relation.

b. Pour $X, Y \in \mathcal{P}_c(E)$, on a $XR_{\mathcal{P}}Y \Leftrightarrow (X \cup Y) \in \mathcal{P}_c(E) \Leftrightarrow (X + Y) \in \mathcal{P}_c(E)$.

Dans ce qui suit, nous serons amenés à considérer différents ensembles de parties commutatives d'un ensemble à relation (E,R) (cf. définitions 4 et 5). Cependant nous noterons $R_{\mathcal{P}}$, sans plus de précision, les différentes relations associées à ces différents ensembles de parties commutatives; cela ne provoquera pas de difficulté majeure puisque la relation $XR_{\mathcal{P}}Y$ signifiera, dans chaque cas, que la réunion $X \cup Y$ est encore commutative.

2.2 Cellules et noyaux.

Soit (E, R) un ensemble à relation et soit $C = C_{(E,R)}$ (cf. définition 3).

Définition 4 (Cellules). Nous appelons cellules (de (E, R)) les images par C^2 des singletons de E et nous notons C(E, R) l'ensemble qu'elles constituent. Nous disons plus précisément que la cellule $C^2(x)$ est la cellule de x et que x définit la cellule $C^2(x)$.

Commentaires 2. Soit $X \in \mathcal{P}_c(E)$. On montre que $C^2(X)$ est l'intersection des parties commutatives maximales de E contenant X. En particulier, pour $x \in E$, la cellule $C^2(x)$ est l'intersection des parties commutatives maximales de E contenant x. C'est sous cette deuxième forme que la notion de cellule d'un élément a été introduite par J. Tits dans la partie finale de [T] ($C^2(x)$ y est noté T(x)). Lorsque S est infini, la définition que l'on donne ici a l'avantage d'éviter d'avoir à utiliser le lemme de Zorn (pour l'existence des parties commutatives maximales).

Remarques 6. a. La remarque 4 b nous montre que, pour tout $x \in E$, on a $x \in C^2(x)$, et la remarque 4 d nous montre que les cellules sont des parties commutatives de E.

b. Comme $C^3 = C$ (remarque 4 c), les cellules sont des points fixes de C^2 et on a donc en particulier, pour toute cellule $T, x \in T \Longrightarrow C^2(x) \subseteq T$.

Définition 5 (Noyaux). Notons \equiv la relation d'équivalence sur E donnée par $y \equiv z \iff C^2(y) = C^2(z)$ (ou encore $y \equiv z \iff C(y) = C(z)$, puisque $C^3 = C$). Nous appelons noyaux (de (E,R)) les classes d'équivalence de E pour \equiv et nous notons $\mathcal{N}(E,R)$ l'ensemble qu'ils constituent.

Notation 3. Soit $T \in \mathcal{C}(E, R)$. Il est clair que l'ensemble $\{x \in E \mid C^2(x) = T\}$ est un noyau de (E, R); on l'appelle le noyau de T et on le note Noy(T) (autrement dit, Noy(T) = N(x) pour tout $x \in E$ tel que $T = C^2(x)$).

Soit $N \in \mathcal{N}(E,R)$. On appelle *cellule de* N, et on note Cel(N), la cellule commune aux éléments de N (autrement dit, $Cel(N) = C^2(x)$ pour tout $x \in N$).

Remarques 7. a. Soit N un noyau. On a $N \subseteq Cel(N)$ (grâce à la remarque 6 a). En particulier, les noyaux sont des parties commutatives (i.e. $\mathcal{N}(E,R) \subseteq \mathcal{P}_c(E)$).

- **b.** Toute cellule est la réunion (disjointe) des noyaux qu'elle rencontre.
- c. Les applications $Cel: \mathcal{N}(E,R) \to \mathcal{C}(E,R)$ et $Noy: \mathcal{C}(E,R) \to \mathcal{N}(E,R)$ sont des bijections inverses l'une de l'autre.

Notons que, les cellules et les noyaux étant des parties commutatives de E, on peut munir chacun des ensembles $\mathcal{C}(E,R)$ et $\mathcal{N}(E,R)$ d'une structure d'ensemble à relation, avec la relation $R_{\mathcal{P}}$ définie en notation 2 (cf. remarque 5 a). Nous avons alors la proposition suivante :

Proposition 3. Les bijections Cel et Noy décrites ci-dessus sont des isomorphismes de relations inverses l'un de l'autre.

Démonstration. Il s'agit de voir que, pour $N, P \in \mathcal{N}(E, R)$, on a $NR_{\mathcal{P}}P \Leftrightarrow Cel(N)R_{\mathcal{P}}Cel(P)$. Comme $N \subseteq Cel(N)$ et $P \subseteq Cel(P)$, l'implication $Cel(N)R_{\mathcal{P}}Cel(P) \Rightarrow NR_{\mathcal{P}}P$ est évidente.

Réciproquement, supposons $NR_{\mathcal{P}}P$. Posons $Cel(N) = C^2(x)$ et $Cel(P) = C^2(y)$, pour $x \in N$ et $y \in P$. On a xRy, c'est-à-dire $x \in C(y)$, donc $C^2(y) \subseteq C(x)$, et on veut montrer que, pour tout $x' \in Cel(N) = C^2(x)$ et tout $y' \in Cel(P) = C^2(y)$, on a x'Ry'. Comme $y' \in C^2(y) \subseteq C(x)$, on a $C^2(x) \subseteq C(y')$, et comme $x' \in C^2(x)$, on a $x' \in C(y')$, c'est-à-dire x'Ry', d'où le résultat. \square

Donnons à présent une propriété importante des noyaux, qui nous servira à la fois pour montrer qu'un groupe de Coxeter à angles droits W est rigide (cf. section 2.3, théorème 1) et pour étudier le groupe $Aut([S], [S]_c)$ (cf. section 4.1, proposition 8).

Lemme 1. Pour $N, P \in \mathcal{N}(E, R)$, on $a : NR_{\mathcal{P}}P \iff \exists (x, y) \in N \times P, xRy$.

Démonstration. Le sens direct étant évident (par définition de $R_{\mathcal{P}}$), montrons la réciproque.

Soient $x \in N$, $y \in P$ tels que xRy, et soient $x' \in N$, $y' \in P$. On a C(x) = C(x') et C(y) = C(y') par définition de N et P, et $x \in C(y)$ par hypothèse sur x et y. On a alors $x \in C(y')$, ou encore $y' \in C(x)$ (puisque R est symétrique), d'où $y' \in C(x')$, c'est-à-dire x'Ry'. On a donc le résultat.

Proposition 4. Soient (E, R) et (E', R') deux ensembles à relation. Supposons qu'il existe un isomorphisme de relations ψ respectant le cardinal, de $(\mathcal{N}(E, R), R_{\mathcal{P}})$ sur $(\mathcal{N}(E', R'), R'_{\mathcal{P}})$.

Alors toute bijection f de E sur E' définie, noyau par noyau, par n'importe quelle bijection de $N \in \mathcal{N}(E,R)$ sur $\psi(N) \in \mathcal{N}(E',R')$ est un isomorphisme de relations de (E,R) sur (E',R'). En particulier, les ensembles à relation (E,R) et (E',R') sont isomorphes.

Démonstration. Remarquons que la construction proposée est possible (grâce à l'axiome du choix) car $\mathcal{N}(E,R)$ (resp. $\mathcal{N}(E',R')$) est une partition de E (resp. E') et car les noyaux N et $\psi(N)$ ont même cardinal par hypothèse.

Soient $x, y \in E$. Notons N (resp. P) le noyau de x (resp. y). Grâce au lemme 1 et au fait que ψ est un isomorphisme de relations, on a les équivalences suivantes : $xRy \iff NR_{\mathcal{P}}P \iff \psi(N)R'_{\mathcal{P}}\psi(P) \iff f(x)R'f(y)$. La bijection f est donc un isomorphisme de relations. \square

2.3 Théorème principal.

Soient (E,R) et (E',R') deux ensembles à relations. Posons, pour simplifier, $C = C_{(E,R)}$, C = C(E,R), $\mathcal{N} = \mathcal{N}(E,R)$ et $C' = C_{(E',R')}$, C' = C(E',R'), $\mathcal{N}' = \mathcal{N}(E',R')$.

Supposons qu'il existe un isomorphisme \mathbb{F}_2 -linéaire φ de [E] sur [E'] envoyant $[E]_c$ sur $[E']_c$.

Lemme 2. Soient $X, Y \in [E]_c$. Alors $\varphi(X), \varphi(Y) \in [E']_c$ et on a:

 $X \cup Y$ est commutative $\iff \varphi(X) \cup \varphi(Y)$ est commutative.

Démonstration. On suppose $X, Y \in [E]_c$ et $\varphi([E]_c) = [E']_c$, donc $\varphi(X), \varphi(Y) \in [E']_c$. De plus, d'après la remarque 5 b, on a $X \cup Y \in [E]_c \Leftrightarrow X + Y \in [E]_c$, et $\varphi(X) \cup \varphi(Y) \in [E']_c \Leftrightarrow \varphi(X) + \varphi(Y) \in [E']_c$. Enfin, comme φ est un isomorphisme linéaire envoyant $[E]_c$ sur $[E']_c$, on a $X + Y \in [E]_c \Leftrightarrow \varphi(X) + \varphi(Y) \in [E']_c$ et on en déduit le résultat.

Notation 4. Si T est une cellule d'un ensemble à relation (E, R), nous posons $T^* = T \setminus Noy(T) = \{x \in E \mid C^2(x) \subseteq T\}$ et nous notons V_T l'espace vectoriel quotient $[T]/[T^*]$.

Proposition 5. Conservons les notations introduites ci-dessus.

1. Soit $x \in E$. Il existe $x' \in \varphi(\{x\})$ tel que $x \in \varphi^{-1}(\{x'\})$ et, pour tout tel x', on a $\varphi([C^2(x)]) = [C'^2(x')]$.

2. Soit $T \in \mathcal{C}$ et soit T' l'unique élément de \mathcal{C}' tel que $\varphi([T]) = [T']$. Alors $\varphi([T^{\star}]) = [T'^{\star}]$ et φ induit donc un isomorphisme $\bar{\varphi}_T : V_T \xrightarrow{\sim} V_{T'}$ donné par $X + [T^{\star}] \longmapsto \varphi(X) + [T'^{\star}]$.

Démonstration. Montrons la première assertion. L'existence de $x' \in \varphi(\{x\})$ tel que $x \in \varphi^{-1}(\{x'\})$ résulte des égalités $\{x\} = \varphi^{-1}(\varphi(\{x\})) = \varphi^{-1}(\sum_{x' \in \varphi(\{x\})} \{x'\}) = \sum_{x' \in \varphi(\{x\})} \varphi^{-1}(\{x'\})$ et du fait que l'on a $\sum_{x' \in \varphi(\{x\})} \varphi^{-1}(\{x'\}) \subseteq \bigcup_{x' \in \varphi(\{x\})} \varphi^{-1}(\{x'\})$.

Pour montrer l'inclusion $\varphi([C^2(x)]) \subseteq [C'^2(x')]$, il suffit de montrer que, pour tout $y \in C^2(x)$, on a $\varphi(\{y\}) \in [C'^2(x')]$, c'est-à-dire que, pour tout $y' \in C'(x')$, la partie $\{y'\} \cup \varphi(\{y\})$ est commutative. Soient donc $y \in C^2(x)$ et $y' \in C'(x')$. Les éléments x' et y' commutent (i.e. $\{x'\} \cup \{y'\}$ est commutative), donc, par le lemme précédent, $\varphi^{-1}(\{x'\}) \cup \varphi^{-1}(\{y'\})$ est une partie commutative, qui de plus contient x (par hypothèse sur x'). On en déduit que l'on a $\varphi^{-1}(\{y'\}) \subseteq C(x)$, donc que $\varphi^{-1}(\{y'\}) \cup \{y\}$ est commutative (puisque $y \in C^2(x)$), et donc (grâce au lemme précédent) que $\{y'\} \cup \varphi(\{y\})$ est également commutative. Puisque les rôles joués par (φ, x) et (φ^{-1}, x') sont symétriques, on obtient de la même façon l'inclusion $\varphi^{-1}([C'^2(x')]) \subseteq [C^2(x)]$ et donc $\varphi([C^2(x)]) = [C'^2(x')]$.

Montrons la seconde assertion. D'après le premier point, pour $T \in \mathcal{C}$, il existe $T' \in \mathcal{C}'$ tel que $\varphi([T]) = [T']$, et un tel T' est nécessairement unique puisque si X_1 et X_2 sont deux ensembles tels que $[X_1] = [X_2]$, alors on a clairement $X_1 = X_2$.

Soit $y \in T^*$. D'après le premier point, $\varphi([C^2(y)])$ est l'ensemble des parties finies d'une cellule U' de (E', R') nécessairement strictement incluse dans T', puisque $C^2(y) \subsetneq T$ (donc $[C^2(y)] \subsetneq [T]$). On a donc $\varphi(\{y\}) \in [U'] \subseteq [T'^*]$, ce qui montre l'inclusion $\varphi([T^*]) \subseteq [T'^*]$. L'autre inclusion se démontre de la même façon, à partir de φ^{-1} , et on a donc $\varphi([T^*]) = [T'^*]$. La fin de l'assertion s'en déduit immédiatement.

Notation 5. On déduit de la proposition précédente que l'isomorphisme linéaire $\varphi : [E] \xrightarrow{\sim} [E']$ envoie de façon bijective (en respectant l'inclusion et la dimension) l'ensemble des sous-espaces de [E] de la forme [T], où $T \in \mathcal{C}$, sur l'ensemble des sous-espaces de [E'] de la forme [T'], où $T' \in \mathcal{C}'$. L'isomorphisme φ induit donc une bijection $\varphi_{\mathcal{C}}$ de \mathcal{C} sur \mathcal{C}' donnée par :

$$\varphi_{\mathcal{C}}: \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \stackrel{\sim}{\longrightarrow} & \mathcal{C}' \\ T & \longmapsto & T' \end{array} \right., \ \text{ où } \varphi([T]) = [T'].$$

Proposition 6. Conservons les notations introduites ci-dessus.

La bijection $\varphi_{\mathcal{C}}$ est un isomorphisme de relations de $(\mathcal{C}, R_{\mathcal{P}})$ sur $(\mathcal{C}', R'_{\mathcal{D}})$.

Démonstration. Soient $T, U \in \mathcal{C}$ et soient $T' = \varphi_{\mathcal{C}}(T), U' = \varphi_{\mathcal{C}}(U) \in \mathcal{C}'$. Il s'agit de montrer que l'on a $TR_{\mathcal{P}}U \Leftrightarrow T'R'_{\mathcal{P}}U'$, c'est-à-dire que $T \cup U$ est commutative si et seulement si $T' \cup U'$ l'est. Supposons $T' \cup U'$ commutative et soit $(t, u) \in T \times U$. La partie $\varphi(\{t\}) \cup \varphi(\{u\})$ de E' est incluse dans $T' \cup U'$ donc est commutative et, d'après le lemme 2, on a donc tRu. Comme ceci est vrai pour tout $(t, u) \in T \times U$, on a $TR_{\mathcal{P}}U$ et l'implication $T'R'_{\mathcal{P}}U' \Rightarrow TR_{\mathcal{P}}U$ est donc démontrée. L'autre implication se démontre de la même façon, en utilisant φ^{-1} .

Donnons à présent le point clé de la démonstration du théorème 2 :

Théorème 1. Soient (E,R) et (E',R') deux ensembles à relations et soit φ un isomorphisme de [E] sur [E'] envoyant $[E]_c$ sur $[E']_c$.

1. L'isomorphisme φ induit un isomorphisme de relations qui respecte le cardinal

$$\varphi_{\mathcal{N}}: \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathcal{N},R_{\mathcal{P}}) & \longrightarrow & (\mathcal{N}',R'_{\mathcal{P}}) \\ N & \longmapsto & N' \end{array} \right., \quad \text{où } \varphi([Cel(N)]) = [Cel(N')].$$

2. Les ensembles à relation (E,R) et (E',R') sont isomorphes.

Démonstration. Le fait que l'application $\varphi_{\mathcal{N}}$ définie en 1 soit un isomorphisme de relations résulte des propositions 3 et 6, puisque l'on a $\varphi_{\mathcal{N}} = Noy \circ \varphi_{\mathcal{C}} \circ Cel$ avec les isomorphismes de relations $Cel: (\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{C}, R_{\mathcal{P}}), \varphi_{\mathcal{C}}: (\mathcal{C}, R_{\mathcal{P}}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{C}', R'_{\mathcal{P}})$ et $Noy: (\mathcal{C}', R'_{\mathcal{P}}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{N}', R'_{\mathcal{P}})$.

Montrons que φ_N respecte le cardinal. Soient $N \in \mathcal{N}$ et $N' = \varphi_N(N) \in \mathcal{N}'$. Posons T = Cel(N) et T' = Cel(N'). On a $\varphi([T] = [T']$. D'après la seconde assertion de la proposition 5, les espaces vectoriels V_T et $V_{T'}$ sont isomorphes (via $\bar{\varphi}_T$) et ont donc même dimension. Or T est la réunion disjointe de N et de T^* , donc $[T] = [N] \oplus [T^*]$ et les espaces vectoriels [N] et $V_T = [T]/[T^*]$ sont donc isomorphes. De même, les espaces vectoriels [N'] et $V_{T'}$ sont isomorphes et on a le résultat puisque l'espace vectoriel [N] (resp. [N']), qui admet pour base l'ensemble des singletons de N (resp. de N') est de dimension Card(N) (resp. Card(N')).

Le second point résulte du premier et de la proposition 4.

3 Sur la rigidité des groupes de Coxeter à angles droits.

3.1 Les groupes de Coxeter à angles droits sont rigides.

Définition 6 (Rigidité). Soit W un groupe de Coxeter.

On dit que W est rigide lorsque tous les types admis par W sont isomorphes, autrement dit lorsque, pour tous $S, S' \in \mathcal{S}(W)$, il existe $\alpha \in Aut(W)$ tel que $\alpha(S) = S'$.

Les résultats obtenus dans la partie précédente nous permettent de démontrer le théorème 2 annoncé en introduction :

Théorème 2. Les groupes de Coxeter à angles droits sont rigides.

Démonstration. Soit W un groupe de Coxeter à angles droits et soient $S, S' \in \mathcal{S}(W)$. Notons Γ et Γ' les types respectifs des systèmes (W, S) et (W, S'); ce sont des matrices de Coxeter à angles droits (cf. section 1.3). Considérons les relations (S, R) et (S', R') associées aux systèmes (W, S) et (W, S') respectivement : on a $R = \{(s, t) \in S \times S \mid st = ts\}$ et $R' = \{(s', t') \in S' \times S' \mid s't' = t's'\}$.

D'après la proposition 2, il existe un isomorphisme de [S] sur [S'] envoyant $[S]_c$ sur $[S']_c$ (par exemple l'isomorphisme $(\pi_{S'})^{-1} \circ \pi_S$ de la remarque 2 a). On en déduit, grâce au théorème 1, que les relations (S,R) et (S',R') sont isomorphes. Comme les matrices Γ et Γ' sont à angles droits, un isomorphisme de relations de (S,R) sur (S',R') est un isomorphisme de Γ sur Γ' (cf. remarque 3 b). On a donc le résultat.

3.2 Sur la rigidité forte.

Définition 7 (Rigidité forte). Soit W un groupe de Coxeter.

On dit que W est fortement rigide lorsque, pour tous $S, S' \in \mathcal{S}(W)$, il existe $w \in W$ tel que $wSw^{-1} = S'$ (c'est-à-dire qu'il existe un automorphisme intérieur envoyant S sur S').

Remarques 8. Soient W un groupe de Coxeter, $S \in \mathcal{S}(W)$ et $\Gamma = \Gamma_{(W,S)}$. Identifions $Aut(\Gamma)$ et Aut(W,S) (comme en remarque 1 a).

a. On vérifie facilement que l'on a la caractérisation :

W est fortement rigide \iff W est rigide et $Aut(W) = Int(W) \cdot Aut(\Gamma)$.

b. Supposons W à angles droits.

Alors W est rigide, d'après le théorème 2. De plus, on a $Aut(W) = \ker(\pi_{Aut}) \rtimes Aut([S], [S]_c)$ ([T], Corollaire 1, ou commentaires 1 b et 1 c ci-dessus), avec $Aut(\Gamma) \subseteq Aut([S], [S]_c)$ (remarque 1 b ou 2 c) et clairement $Int(W) \subseteq \ker(\pi_{Aut})$. La caractérisation de la rigidité forte de l'assertion a ci-dessus se traduit donc dans ce cas par :

W est fortement rigide $\iff \ker(\pi_{Aut}) = Int(W)$ et $Aut(([S], [S]_c)) = Aut(\Gamma)$.

Commentaires 3. Soit (W, S) un système de Coxeter à angles droits de type Γ .

- a. Notons ${}^W\!S$ l'ensemble des conjugués des éléments de S dans W. Le corollaire 1 de [T] montre en particulier que l'on a $\ker(\pi_{Aut}) \subseteq Aut(W, {}^W\!S)$. De plus, on vérifie que l'on a $Aut([S], [S]_c) \cap Aut(W, {}^W\!S) = Aut(\Gamma)$. On en déduit la caractérisation $Aut(([S], [S]_c)) = Aut(\Gamma) \Leftrightarrow Aut(W) = Aut(W, {}^W\!S)$.
- **b.** Lorsque W est de rang fini, on peut, par des considérations simples sur Γ (ou sur son graphe), déterminer si W est fortement rigide ou non. En effet, on a :
 - 1. $\ker(\pi_{Aut}) = Int(W) \Leftrightarrow \forall s \in S, \ \forall t, \ u \in S \setminus C(s), \ \exists \ t_0 = t, \ t_1, \ \dots, \ t_n = u \in S \setminus C(s) \ \text{tels}$ que t_{i-1} et t_i commutent, pour $1 \leq i \leq n$ (cf. [M], corollaire du théorème principal),
 - 2. $Aut(([S], [S]_c)) = Aut(\Gamma) \Leftrightarrow \forall s \in S, C^2(s) = \{s\} \text{ (cf. [BM], théorème 5.1, appliqué aux groupes de Coxeter à angles droits et de rang fini, et les commentaires 2 et 3 a).}$

Ces conditions apparaissent aussi dans [BMMN] (théorème 4.10).

c. Lorsque W est à angles droits et de rang infini, la condition énoncée en b 1 est nécessaire, pour avoir $\ker(\pi_{Aut}) = Int(W)$, mais n'est pas suffisante (cf. [T], proposition 5 et remarque finale de la partie 3).

La proposition 7 ci-dessous montre que la caractérisation du commentaire 3 b 2 est encore valable pour les groupes de Coxeter à angles droits de rang infini. C'est un résultat qui découle également de l'étude générale du groupe $Aut(([S],[S]_c))$ que nous effectuons dans la partie suivante (cf. remarque 14 c ci-dessous).

Notation 6. Soient $s \in S$ et $t \in C^2(s)$, $t \neq s$. Nous notons $\alpha_{s,t}$ l'endomorphisme \mathbb{F}_2 -linéaire de |S| donné par $\alpha_{s,t}(\{x\}) = \{x\}$ si $x \in S \setminus \{s\}$, et $\alpha_{s,t}(\{s\}) = \{s,t\}$.

Remarques 9. a. Comme $\alpha_{s,t}$ est clairement involutif, c'est un élément de Aut([S]).

b. On a en fait $\alpha_{s,t} \in Aut([S], [S]_c)$. En effet, pour $X \in [S]_c$, on a soit $\alpha_{s,t}(X) = X \in [S]_c$ si $s \notin X$, soit $\alpha_{s,t}(X) = X + \{t\}$ si $s \in X$, auquel cas $t \in C^2(s) \subseteq C^2(X) \subseteq C(X)$ (la dernière inclusion est vérifiée car, X étant commutative, on a $X \subseteq C(X)$) et donc $X + \{t\} \in [S]_c$; ceci montre l'inclusion $\alpha_{s,t}([S]_c) \subseteq [S]_c$, et comme $\alpha_{s,t}$ est involutif, on a le résultat.

Commentaires 4. a. La matrice de $\alpha_{s,t}$ dans la base $\mathcal{E}(S) = \{\{x\} \mid x \in S\}$ de [S] est une matrice de transvection élémentaire.

b. Les automorphismes $\alpha_{s,t}$, vus comme éléments de Aut(W), apparaissent sous une forme plus générale dans [BM] (lemme 6.1).

Proposition 7. Soit (W,S) un système de Coxeter à angles droits de type $\Gamma = \Gamma_{(W,S)}$. On a

$$Aut([S], [S]_c) = Aut(\Gamma) \iff \forall s \in S, \ C^2(s) = \{s\}.$$

Démonstration. Supposons que, pour tout $s \in S$, $C^2(s) = \{s\}$. La proposition 5 nous montre alors que les sous-espaces de [S] de la forme $[\{s\}] = \{\emptyset, \{s\}\}\}$, où $s \in S$, sont permutés entre eux par les éléments de $Aut([S], [S]_c)$. Comme ces éléments sont des automorphismes de [S], ils fixent \emptyset (élément neutre de [S]) et permutent donc entre eux les singletons de S. On en déduit que $Aut([S], [S]_c) \subseteq Aut(\Gamma)$ (cf. remarque 2 c).

Réciproquement, supposons qu'une cellule $C^2(s)$ contienne un élément $t \neq s$, et considérons l'endomorphisme $\alpha_{s,t}$ de [S] défini en notation 6. C'est un élément de $Aut([S], [S]_c)$, d'après la remarque 9 b, qui n'appartient pas à $Aut(\Gamma)$, puisqu'il ne respecte pas le cardinal. On a donc $Aut(\Gamma) \subsetneq Aut([S], [S]_c)$ et le résultat.

4 Le groupe $Aut(W^{ab}, \overline{F}) = Aut([S], [S]_c)$.

Soit W un groupe de Coxeter à angles droits. Le but de cette partie est d'étudier le groupe $Aut(W^{ab}, \overline{F})$ intervenant dans la décomposition $Aut(W) = \ker(\pi_{Aut}) \rtimes Aut(W^{ab}, \overline{F})$ établie par J. Tits dans [T].

Fixons $S \in \mathcal{S}(W)$ et notons $\Gamma = \Gamma_{(W,S)}$ le type de (W,S). Nous identifions $Aut(W^{ab}, \overline{F})$ à $Aut([S], [S]_c)$ comme en remarque 2 b. C'est précisément ce groupe $Aut([S], [S]_c)$ que nous étudions dans ce qui suit, notamment grâce aux résultats de la section 2.3 (appliqués au cas particulier où S = S').

Pour alléger les énoncés, nous posons $R = R_{\Gamma}$, C = C(S,R), C = C(S,R) et $\mathcal{N} = \mathcal{N}(S,R)$.

4.1 Les sous-groupes $Aut(\Gamma)$ et $K(\Gamma)$. Dévissage de $Aut([S],[S]_c)$.

Notons $Aut(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}, Card)$ le sous-groupe de $Aut(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}})$ constitué des automorphismes de la relation $(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}})$ qui respectent le cardinal. Le théorème 1 nous montre en particulier que tout $\varphi \in Aut([S], [S]_c)$ induit un élément $\varphi_{\mathcal{N}}$ de $Aut(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}, Card)$, donné, pour $N \in \mathcal{N}$, par $N \mapsto N'(\in \mathcal{N})$, où $\varphi([Cel(N)]) = [Cel(N')]$.

Notation 7 (Le groupe $K(\Gamma)$). Notons θ l'application $Aut([S], [S]_c) \to Aut(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}, Card)$, $\varphi \mapsto \varphi_{\mathcal{N}}$. On vérifie facilement que θ est un morphisme de groupes. Nous notons $K(\Gamma)$ son noyau.

Rappelons que l'on a $Aut(\Gamma) = Aut(S,R)$ (cf. remarque 3 a). On a vu en remarque 2 c que le groupe $Aut(\Gamma)$ s'identifie, via $\sigma \longmapsto (X \mapsto \sigma(X))$, au sous-groupe de $Aut([S],[S]_c)$ constitué des éléments de $Aut([S],[S]_c)$ qui respectent le cardinal. On note encore σ l'élement $X \mapsto \sigma(X)$ de $Aut([S],[S]_c)$.

Soit $\sigma \in Aut(\Gamma)$. On vérifie que, pour tout $X \in [S]$, on a $\sigma([X]) = [\sigma(X)]$ et $C(\sigma(X)) = \sigma(C(X))$. L'automorphisme σ permute donc les noyaux (de même cardinal) de (S, R) et l'on voit que l'élément $\theta(\sigma) = \sigma_{\mathcal{N}}$ de $Aut(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}, Card)$ est simplement donné par $N \mapsto \sigma(N)$.

Notation 8. Soit Ω l'ensemble des classes d'équivalence de \mathcal{N} pour la relation Card(N) = Card(P). Pour $\omega \in \Omega$, fixons une fois pour toutes un représentant N_{ω} de la classe ω et, pour tout $N \in \omega$, une bijection $\sigma_{\omega,N} : N_{\omega} \longrightarrow N$ (il en existe une, puisque $Card(N_{\omega}) = Card(N)$).

Pour $\psi \in Aut(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}, Card)$, nous définissons la permutation σ_{ψ} de S, noyau par noyau, de la manière suivante : si $N \in \mathcal{N}$ et si ω est la classe de N (et de $\psi(N)$), alors σ_{ψ} est donné de N sur $\psi(N)$ par $\sigma_{\omega,\psi(N)} \circ (\sigma_{\omega,N})^{-1}$. On note G l'ensemble des σ_{ψ} , pour $\psi \in Aut(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}, Card)$.

Proposition 8. Pour $\psi \in Aut(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}, Card)$, on a $\sigma_{\psi} \in Aut(\Gamma)$. De plus, l'application $\psi \mapsto \sigma_{\psi}$ est un morphisme de groupes et une section de θ . En particulier, G est un sous-groupe de $Aut(\Gamma)$ et on a les décompositions :

$$Aut([S],[S]_c) = K(\Gamma) \rtimes G \quad et \quad Aut(\Gamma) = (K(\Gamma) \cap Aut(\Gamma)) \rtimes G$$

Démonstration. La proposition 4 nous montre que, pour $\psi \in Aut(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}, Card)$, la permutation σ_{ψ} de S appartient à $Aut(\Gamma)$. De plus, vu la définition des σ_{ψ} , l'application $Aut(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}, Card) \to Aut(\Gamma)$, $\psi \mapsto \sigma_{\psi}$ est un morphisme de groupes et σ_{ψ} s'envoie sur ψ par θ , d'où le résultat. \square

Dans les sections suivantes, nous explicitons le groupe $K(\Gamma)$. Décrivons pour le moment le groupe $K(\Gamma) \cap Aut(\Gamma)$:

Proposition 9. Soient $\sigma \in K(\Gamma) \cap Aut(\Gamma)$ et $N \in \mathcal{N}$. Alors l'automorphisme σ induit (par restriction) une permutation $\sigma_{|N}$ de N.

De plus, l'application $\rho_1: K(\Gamma) \cap Aut(\Gamma) \to \prod_{N \in \mathcal{N}} Perm(N)$, $\sigma \mapsto (\sigma_{|N})_{N \in \mathcal{N}}$ est un isomorphisme de groupes.

Démonstration. On sait que tout élément σ de $Aut(\Gamma)$ permute les noyaux et induit donc une bijection de N sur $\sigma(N)$. Si, de plus, $\sigma \in K(\Gamma)$, alors $\sigma(N) = N$ et la permutation $\sigma_{|N}$ est bien définie. On vérifie facilement que $\sigma \longmapsto (\sigma_{|N})_{N \in \mathcal{N}}$ est un morphisme de groupes injectif (puisque \mathcal{N} est une partition de S). De plus, si $(\sigma_N)_{N \in \mathcal{N}}$ est un élément de $\prod_{N \in \mathcal{N}} Perm(N)$, alors, d'après la proposition 4, la permutation de S définie noyau par noyau par $\sigma_N : N \longrightarrow N$, pour tout $N \in \mathcal{N}$, appartient à $Aut(\Gamma)$ (c'est le cas particulier où $\psi = Id_{\mathcal{N}}$). On voit donc que le morphisme $\sigma \longmapsto (\sigma_{|N})_{N \in \mathcal{N}}$ est surjectif.

4.2 Les sous-groupes $D(\Gamma)$ et $K^{\circ}(\Gamma)$. Dévissage de $K(\Gamma)$.

Comme \mathcal{N} est une partition de S, on a $[S] = \bigoplus_{N \in \mathcal{N}} [N]$.

Proposition 10. L'ensemble $[S]_c$ est l'ensemble des sommes (finies) $\sum_{N \in \mathcal{N}} X_N$ où, pour tout $N \in \mathcal{N}, X_N \in [N]$, et où $\{N \in \mathcal{N} \mid X_N \neq \emptyset\}$ est fini et de réunion commutative (i.e. formé de noyaux deux à deux en relation $R_{\mathcal{P}}$). On en déduit que l'on a :

$$K(\Gamma) = \{ \varphi \in Aut([S]) \mid \forall \ T \in \mathcal{C}, \ \varphi([T]) = [T] \}.$$

Démonstration. Toute telle somme $\sum_{N\in\mathcal{N}} X_N$ est une partie commutative finie de S et appartient donc à $[S]_c$. Réciproquement, si $X\in[S]_c$, alors, dans la décomposition $[S]=\bigoplus_{N\in\mathcal{N}}[N]$, X s'écrit $X=\sum_{1\leq k\leq n} X_k$, où, pour tout k, X_k est une partie finie non vide d'un noyau N_k et où, d'après le lemme 1, les noyaux N_k sont deux à deux en relation $R_{\mathcal{P}}$.

Comme $K(\Gamma)$ est par définition le noyau de θ , pour tout élément φ de $K(\Gamma)$ et tout $T \in \mathcal{C}$, on a $\varphi([T]) = [T]$. Réciproquement, il s'agit de montrer que, si $\varphi \in Aut([S])$ satisfait à $\varphi([T]) = [T]$ pour tout $T \in \mathcal{C}$, alors $\varphi([S]_c) = [S]_c$. Or si N est un noyau de S et si $X \in [N]$, on a $\varphi(X) \in [Cel(N)] \subseteq [S]_c$; comme on sait que deux noyaux N et P sont en relation $R_{\mathcal{P}}$ si et seulement si les cellules Cel(N) et Cel(P) le sont (cf. proposition 3), la caractérisation de $[S]_c$ obtenue ci-dessus permet de conclure que l'on a $\varphi([S]_c) \subseteq [S]_c$. Le même raisonnement appliqué à φ^{-1} nous fournit $\varphi^{-1}([S]_c) \subseteq [S]_c$ et on a donc le résultat.

Notation 9 (Le sous-groupe $D(\Gamma)$). Posons

$$D(\Gamma) = \{ \varphi \in Aut([S]) \mid \forall \ N \in \mathcal{N}, \ \varphi([N]) = [N] \}.$$

Comme $[S] = \bigoplus_{N \in \mathcal{N}} [N]$, il est clair que $D(\Gamma)$ s'identifie à $\prod_{N \in \mathcal{N}} Aut([N])$, via l'isomorphisme $\rho_2 : \varphi \longmapsto (\varphi_{|[N]})_{N \in \mathcal{N}}$.

Proposition 11. Le sous-groupe $D(\Gamma)$ de Aut([S]) est inclus dans $K(\Gamma)$.

Démonstration. D'après la proposition précédente, il suffit de vérifier que, pour tout $\varphi \in D(\Gamma)$ et tout $T \in \mathcal{C}$, on a $\varphi([T]) = [T]$. Or toute cellule T est la réunion des N(s), pour $s \in T$ (remarque 7 c), donc $[T] = \sum_{s \in T} [N(s)]$ et on en déduit le résultat.

Notation 10 (Le sous-groupe $K^{\circ}(\Gamma)$). Soit $T \in \mathcal{C}$. On rappelle que V_T désigne l'espace vectoriel quotient $[T]/[T^*]$. D'après la proposition 5, tout élément φ de $K(\Gamma)$ induit un automorphisme $\overline{\varphi}_T$ de l'espace vectoriel quotient V_T , donné par $\overline{\varphi}_T : \overline{X} = X + [T^*] \longmapsto \overline{\varphi(X)} = \varphi(X) + [T^*]$.

L'application $\rho_3: \varphi \longmapsto (\bar{\varphi}_T)_{T \in \mathcal{C}}$ est clairement un morphisme de groupes de $K(\Gamma)$ dans $\prod_{T \in \mathcal{C}} Aut(V_T)$. On note $K^{\circ}(\Gamma)$ son noyau. On a

$$K^{\circ}(\Gamma) = \{\varphi \in K(\Gamma) \mid \forall \ s \in S, \ \varphi(\{s\}) \in \{s\} + [(C^2(s))^{\star}]\}.$$

Proposition 12. La restriction de ρ_3 à $D(\Gamma)$ est bijective. On a donc en particulier la décomposition $K(\Gamma) = K^{\circ}(\Gamma) \rtimes D(\Gamma)$.

Démonstration. Soient $N \in \mathcal{N}$ et T = Cel(N). Comme T est la réunion disjointe de N et de T^* , on a la décomposition $[T] = [N] \oplus [T^*]$, et le morphisme $X \longmapsto \overline{X} = X + [T^*]$ est donc un isomorphisme de [N] sur V_T . Si l'on identifie [N] à V_T (et Aut([N]) à $Aut(V_T)$) via cet isomorphisme, alors la restriction de ρ_3 à $D(\Gamma)$ s'identifie à l'isomorphisme $\rho_2 : \varphi \longmapsto (\varphi_{[N]})_{N \in \mathcal{N}}$ de $D(\Gamma)$ sur $\prod_{N \in \mathcal{N}} Aut([N])$ (cf. notation 9). On a donc le résultat.

Commentaires 5. a. On a $K(\Gamma) \cap Aut(\Gamma) \subseteq D(\Gamma)$. De plus, l'isomorphisme ρ_1 de la proposition 9 est induit par l'isomorphisme ρ_2 si l'on identifie, pour tout $N \in \mathcal{N}$, Perm(N) à un sous-groupe de Aut([N]), comme en remarque 1 b.

b. Soient $s \in S$ et $t \in C^2(s)$, $t \neq s$. Alors l'élément $\alpha_{s,t}$ de $Aut([S], [S]_c)$, défini en notation 6 (cf. remarque 9 b), appartient à $D(\Gamma)$ ou à $K^{\circ}(\Gamma)$ selon que $C^2(t) = C^2(s)$ ou que $C^2(t) \subsetneq C^2(s)$.

4.3 Étude du groupe $K^{\circ}(\Gamma)$.

4.3.1 Sous-groupes de $K^{\circ}(\Gamma)$.

Les résultats de cette section 4.3.1 sont valables pour le groupe $K(\Gamma)$ (en remplaçant systématiquement K° par K dans les énoncés qui suivent). Cependant, comme ils ne nous serviront qu'à décrire le groupe $K^{\circ}(\Gamma)$, c'est dans ce cadre que nous les présentons.

Définition 8 (Support). Soit End([S]) l'ensemble des endomorphismes de l'espace vectoriel [S]. Pour $\varphi \in End([S])$, on appelle support de φ l'ensemble $D_{\varphi} = \{s \in S \mid \varphi(\{s\}) \neq \{s\}\}$.

Remarques 10. a. Soit $\varphi \in End([S])$. On vérifie facilement que l'on a $D_{\varphi} = \emptyset \iff \varphi = Id_{[S]}$, et que, si $\varphi = \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n$, avec $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in End([S])$, alors $D_{\varphi} \subseteq \bigcup_{1 \le k \le n} D_{\varphi_k}$. b. De plus, si $\varphi \in Aut([S])$, alors $D_{\varphi^{-1}} = D_{\varphi}$.

Notation 11 (Les sous-groupes $K_Y^{\circ}(\Gamma)$). Soit $Y \subseteq S$. Nous notons $K_Y^{\circ}(\Gamma)$ l'ensemble $\{\varphi \in K^{\circ}(\Gamma) \mid D_{\varphi} \subseteq Y\}$. D'après les remarques 10 a et b, $K_Y^{\circ}(\Gamma)$ est un sous-groupe de $K^{\circ}(\Gamma)$. Remarquons que $K_S^{\circ}(\Gamma) = K^{\circ}(\Gamma)$.

Dans la suite de cette section, nous voulons décrire le groupe $K_Y^{\circ}(\Gamma)$, pour $Y \subseteq S$, à partir de certains de ses sous-groupes $K_Z^{\circ}(\Gamma)$, où $Z \subseteq Y$.

Définition 9 (Parties saturées). Soit $Y \subseteq S$. Nous disons qu'une partie X de S est Y-saturée si, pour tout $x \in X \cap Y$, $C^2(x) \cap Y \subseteq X$. Nous disons simplement saturée pour S-saturée.

Remarques 11. Soient X et Y deux parties de S.

- a. X est Y-saturée si et seulement si $X \cap Y = \bigcup_{x \in X \cap Y} C^2(x) \cap Y$. En particulier, les parties saturées sont les réunions de cellules.
 - **b.** Si $Y' \subseteq Y$ et si X est Y-saturée, alors X est Y'-saturée.

Définition 10 (Troncature). Soient $X \subseteq S$ et $\varphi \in End([S])$. On appelle troncature de φ suivant X l'endomorphisme φ_X de [S] donné par $\varphi_X(\{s\}) = \varphi(\{s\})$ si $s \in X$ et $\varphi_X(\{s\}) = \{s\}$ si $s \notin X$. Clairement, φ_X coïncide avec φ sur $[X \cup (S \setminus D_{\varphi})]$ et $D_{\varphi_X} = X \cap D_{\varphi}$.

Lemme 3. Soient $Y \subseteq S$ et X une partie Y-saturée.

1. Soient φ , $\psi \in K_Y^{\circ}(\Gamma)$. Alors $(\varphi \circ \psi)_X = \varphi_X \circ \psi_X$.

2. L'application $K_Y^{\circ}(\Gamma) \longrightarrow K_{X\cap Y}^{\circ}(\Gamma)$, $\varphi \longmapsto \varphi_X$ est un morphisme de groupes de noyau $K_{Y\setminus X}^{\circ}(\Gamma)$.

Démonstration. Montrons le premier point. Soient φ , $\psi \in K_Y^{\circ}(\Gamma)$ et $s \in S$. Montrons que $(\varphi \circ \psi)_X(\{s\}) = (\varphi_X \circ \psi_X)(\{s\})$. Si $s \notin X \cap Y$, alors $\varphi_X(\{s\}) = \psi_X(\{s\}) = (\varphi \circ \psi)_X(\{s\}) = \{s\}$ et le résultat est clair. Si $s \in X \cap Y$, alors $C^2(s) \subseteq X \cup (S \setminus Y)$ puisque X est Y-saturée. On a alors $C^2(s) \subseteq X \cup (S \setminus D_{\varphi})$ (puisque $D_{\varphi} \subseteq Y$) et φ_X coïncide donc avec φ sur $[C^2(s)]$. De plus, comme $\psi \in K(\Gamma)$, on a $\psi_X(\{s\}) = \psi(\{s\}) \in [(C^2(s)],$ d'où l'on déduit que $(\varphi_X \circ \psi_X)(\{s\}) = \varphi(\psi(\{s\})) = (\varphi \circ \psi)_X(\{s\})$.

Montrons le second point. Pour montrer que $\varphi \longmapsto \varphi_X$ est un morphisme de groupes de $K_Y^{\circ}(\Gamma)$ dans $K_{X\cap Y}^{\circ}(\Gamma)$, il suffit (grâce au premier point) de montrer que, pour $\varphi \in K_Y^{\circ}(\Gamma)$, la troncature φ_X appartient à $K_{X\cap Y}^{\circ}(\Gamma)$. Vu la définition de φ_X , le seul fait non trivial à montrer est que φ_X appartient à $K(\Gamma)$. Le premier point nous montre en particulier que $(\varphi^{-1})_X$ et φ_X sont des automorphismes (de [S]) inverses l'un de l'autre (puisque $(Id_{[S]})_X = Id_{[S]}$). D'après la proposition 10, il suffit donc de montrer que l'on a $\varphi_X([T]) = [T]$ pour toute cellule T. Or, par définition de φ_X et $(\varphi^{-1})_X$ et comme $\varphi \in K(\Gamma)$, on a clairement $\varphi_X([T]) \subseteq [T]$ et $(\varphi^{-1})_X([T]) = (\varphi_X)^{-1}([T]) \subseteq [T]$, d'où le résultat. Le noyau de ce morphisme est clairement le sous-groupe $K_{Y\setminus X}^{\circ}(\Gamma)$ de $K_Y^{\circ}(\Gamma)$, et le lemme est donc démontré.

Proposition 13. Soit $Y \subseteq S$ et soit X une partie Y-saturée de S. On a la décomposition :

$$K_Y^{\circ}(\Gamma) = K_{Y \setminus X}^{\circ}(\Gamma) \rtimes K_{X \cap Y}^{\circ}(\Gamma).$$

Démonstration. L'assertion 2 du lemme précédent nous dit que l'on a un morphisme de groupes $\varphi \longmapsto \varphi_X$ de $K_Y^{\circ}(\Gamma)$ dans $K_{X\cap Y}^{\circ}(\Gamma)$ et que ce morphisme a pour noyau $K_{Y\setminus X}^{\circ}(\Gamma)$. Comme l'inclusion naturelle $K_{X\cap Y}^{\circ}(\Gamma) \hookrightarrow K_Y^{\circ}(\Gamma)$ en est clairement une section, on a le résultat.

Ce résultat suggère une méthode pour décrire le sous-groupe $K_Y^{\circ}(\Gamma)$, pour une partie donnée Y de S: trouver une partie Y-saturée $X \subsetneq Y$ telle que le sous-groupe $K_{Y \setminus X}^{\circ}(\Gamma)$ soit "simple à décrire", puis décrire par récurrence le sous-groupe $K_{X \cap Y}^{\circ}(\Gamma) = K_X^{\circ}(\Gamma)$.

Dans la section suivante, nous décrivons le sous-groupe $K_Z^{\circ}(\Gamma)$ de $K^{\circ}(\Gamma)$ dans le cas où Z est une partie d'"épaisseur nulle" (voir la définition 11 ci-dessous).

Dans la section 4.3.3, nous allons voir comment décomposer toute partie Y de S en l'union disjointe d'une partie d'épaisseur nulle Y_0 et d'une partie Y-saturée $Y_{\geq 1}$. La proposition 13, appliquée récursivement, nous permettra alors de décomposer le groupe $K_Y^{\circ}(\Gamma)$ (au moins lorsque Y est "d'épaisseur finie", voir la définition 13 ci-dessous) en produits semi-directs itérés de certains de ses sous-groupes $K_Z^{\circ}(\Gamma)$ avec Z d'épaisseur nulle (théorème 3 ci-dessous).

4.3.2 Parties d'épaisseur nulle.

Nous définissons plus loin (en définition 13) l'"épaisseur" (dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$) d'une partie de S. Définissons pour le moment les parties d'"épaisseur nulle" :

Définition 11 (Parties d'épaisseur nulle). On dit qu'une partie Z de S est d'épaisseur nulle si, pour tout $s \in Z$, $(C^2(s))^* \cap Z = \emptyset$ (autrement dit si tous les noyaux sont Z-saturés).

Remarques 12. a. Si Z est d'épaisseur nulle et si $Z' \subseteq Z$, alors Z' est d'épaisseur nulle. b. Les noyaux (et donc les parties de noyaux, d'après a) sont d'épaisseur nulle.

Fixons une partie Z de S d'épaisseur nulle.

Lemme 4. Soient φ , $\psi \in End([S])$ de supports inclus dans Z et soit $s \in Z$. Si on a $\varphi(\{s\}) = \{s\} + Y$ et $\psi(\{s\}) = \{s\} + Y'$, où Y, $Y' \in [(C^2(s))^*]$, alors $(\varphi \circ \psi)(\{s\}) = (\psi \circ \varphi)(\{s\}) = \{s\} + Y + Y'$.

Démonstration. Par hypothèse, Z est d'épaisseur nulle et contient s, donc est disjointe de $(C^2(s))^*$. A fortiori, les parties Y et Y' de $(C^2(s))^*$ sont disjointes de D_{φ} et de D_{ψ} (qui sont inclus dans Z). On a donc $\varphi(Y') = Y'$, $\psi(Y) = Y$, et un calcul direct nous donne le résultat. \square

Proposition 14. $K_Z^{\circ}(\Gamma) = \{ \varphi \in End([S]) \mid D_{\varphi} \subseteq Z \text{ et, } \forall s \in Z, \ \varphi(\{s\}) \in \{s\} + [(C^2(s))^*] \}.$ En particulier, $K_Z^{\circ}(\Gamma)$ est un 2-groupe élémentaire.

Démonstration. Par définition de $K^{\circ}(\Gamma)$ et de son sous-groupe $K_{Z}^{\circ}(\Gamma)$, l'inclusion $K_{Z}^{\circ}(\Gamma) \subseteq \{\varphi \in End([S]) \mid D_{\varphi} \subseteq Z \text{ et}, \forall s \in Z, \varphi(\{s\}) \in \{s\} + [(C^{2}(s))^{*}]\}$ est évidente. Soit donc φ un endomorphisme de [S] tel que $D_{\varphi} \subseteq Z$ et que $\varphi(\{s\}) \in \{s\} + [(C^{2}(s))^{*}]$, pour tout $s \in Z$.

Montrons que $\varphi^2 = Id_{[S]}$. Si $s \notin Z$, alors on a $\varphi(\{s\}) = \{s\}$, donc $\varphi^2(\{s\}) = \{s\}$; si $s \in Z$, alors $\varphi(\{s\}) = \{s\} + Y$, où $Y \in [(C^2(s))^*]$, et le lemme précédent nous fournit $\varphi^2(\{s\}) = \{s\} + Y + Y = \{s\}$.

Il reste à montrer que φ appartient à $K(\Gamma)$. Il suffit pour cela de montrer que, pour toute cellule T, $\varphi([T]) = [T]$ (cf. proposition 10) et, comme φ est involutif, il suffit de montrer que $\varphi([T]) \subseteq [T]$. Or pour $s \in T$ (qui satisfait donc à $C^2(s) \subseteq T$), on a soit $s \notin D_{\varphi}$, auquel cas $\varphi(\{s\}) = \{s\} \in [T]$, soit $s \in D_{\varphi}$, donc $s \in Z$ et $\varphi(\{s\}) \in \{s\} + [(C^2(s))^*] \subseteq [T]$. On a donc le résultat.

Corollaire 1. Soit $(Z_i)_{i\in I}$ une partition de Z. Alors l'application $\varphi \longmapsto (\varphi_{Z_i})_{i\in I}$, où φ_{Z_i} est la troncature de φ suivant Z_i , est un isomorphisme de groupes de $K_Z^{\circ}(\Gamma)$ sur le produit direct de ses sous-groupes $K_{Z_i}^{\circ}(\Gamma)$ $(i \in I)$.

Démonstration. Remarquons que, puisque Z est d'épaisseur nulle, chaque Z_i , $i \in I$, est d'épaisseur nulle (cf. remarque 12 a). D'après la caractérisation des éléments de $K_X^{\circ}(\Gamma)$ pour une partie d'épaisseur nulle X, obtenue dans la proposition 14, il est clair que, pour tout $i \in I$, la troncature de tout élément de $K_Z^{\circ}(\Gamma)$ suivant Z_i est un élément de $K_{Z_i}^{\circ}(\Gamma)$.

De plus, si φ , $\psi \in K_Z^{\circ}(\Gamma)$, alors $(\varphi \circ \psi)_{Z_i} = \varphi_{Z_i} \circ \psi_{Z_i}$. En effet, pour $s \in Z_i$, on a $\varphi_{Z_i}(\{s\}) = \varphi(\{s\}) = \{s\} + Y \text{ et } \psi_{Z_i}(\{s\}) = \psi(\{s\}) = \{s\} + Y', \text{ où } Y, Y' \in [(C^2(s))^*], \text{ et le lemme 4 nous fournit } (\varphi \circ \psi)(\{s\}) = \{s\} + Y + Y' = (\varphi_{Z_i} \circ \psi_{Z_i})(\{s\}).$ L'application $\varphi \longmapsto (\varphi_{Z_i})_{i \in I}$ est donc un morphisme de groupes de $K_Z^{\circ}(\Gamma)$ dans $\prod_{i \in I} K_{Z_i}^{\circ}(\Gamma)$. Ce morphisme est injectif car l'image $(\varphi_{Z_i})_{i \in I}$ détermine φ sur [Z] (puisque $(Z_i)_{i \in I}$ est une partition de Z), donc sur $[D_{\varphi}]$.

Montrons qu'il est surjectif. Si $(\varphi_i)_{i\in I}$ est un élément de $\prod_{i\in I} K_{Z_i}^{\circ}(\Gamma)$, définissons l'endomorphisme φ de [S] par $\varphi(\{s\}) = \{s\}$ si $s \notin Z$, et $\varphi(\{s\}) = \varphi_i(\{s\})$ si $s \in Z_i$. D'après la caractérisation de la proposition 14, φ est un élément de $K_Z^{\circ}(\Gamma)$, et il s'envoie clairement sur la famille $(\varphi_i)_{i\in I}$. On a donc le résultat.

Corollaire 2. Soient $N \in \mathcal{N}$, et $X \subseteq N$. On pose T = Cel(N). Alors X est d'épaisseur nulle et l'application $\varphi \longmapsto (Id_{[S]} + \varphi)_{|[X]}$ est un isomorphisme de 2-groupes élémentaires de $K_X^{\circ}(\Gamma)$ sur le groupe (additif) $\mathcal{L}_{F_2}([X], [T^*])$, constitué des applications F_2 -linéaires de [X] dans $[T^*]$.

Démonstration. La partie X de N est d'épaisseur nulle d'après la remarque 12 b. Soit $\varphi \in K_X^{\circ}(\Gamma)$. On sait que, pour $s \in S$, on a $\varphi(\{s\}) \in \{s\} + [(C^2(s))^{\star}]$. En particulier, pour $s \in X \subseteq N$, on a $C^2(s) = T$, donc $\varphi(\{s\}) \in \{s\} + [T^{\star}]$. L'application F_2 -linéaire $(Id_{[S]} + \varphi)_{[[X]}$ est donc à valeurs dans $[T^{\star}]$ et l'application $\varphi \longmapsto (Id_{[S]} + \varphi)_{[[X]}$ est donc bien à valeurs dans $\mathcal{L}_{F_2}([X], [T^{\star}])$.

Soient φ , $\psi \in K_X^{\circ}(\Gamma)$ et $s \in X$. On a $\varphi(\{s\}) = \{s\} + Y$ et $\psi(\{s\}) = \{s\} + Y'$, où $Y, Y' \in [T^{\star}]$, et, d'après le lemme 4, $\varphi \circ \psi(\{s\}) = \{s\} + Y + Y'$, d'où $(Id_{[S]} + \varphi \circ \psi)(\{s\}) = Y + Y' = (Id_{[S]} + \varphi)(\{s\}) + (Id_{[S]} + \psi)(\{s\})$. Donc $\varphi \longmapsto (Id_{[S]} + \varphi)_{|[X]}$ est un morphisme de groupes. Ce morphisme est injectif, car l'image $(Id_{[S]} + \varphi)_{|[X]}$ de φ détermine φ sur [X], donc sur $[D_{\varphi}]$.

Montrons qu'il est surjectif. Pour $f \in \mathcal{L}_{I\!\!F_2}([X],[T^\star])$, notons encore f l'endomorphisme $f \oplus 0_{|[S \setminus X]}$ (prolongement de f à [S], défini par 0 sur $[S \setminus X]$). Alors l'endomorphisme $\varphi = Id_{[S]} + f$ de [S] appartient à $K_X^{\circ}(\Gamma)$ (d'après la proposition 14), et s'envoie clairement sur f.

Pour décomposer $K_Z^{\circ}(\Gamma)$ (où Z est d'épaisseur nulle) comme dans le corollaire 1, nous allons privilégier, vu le corollaire 2, les partitions de Z en parties de noyaux. Par exemple, on obtient :

- (E1) $K_Z^{\circ}(\Gamma) \approx \prod_{N \in \mathcal{N}(Z)} \mathcal{L}_{I\!\!F_2}([N \cap Z], [(Cel(N))^{\star}])$, via $\varphi \mapsto ((Id_{[S]} + \varphi)_{|[N \cap Z]})_{N \in \mathcal{N}(Z)}$, où $\mathcal{N}(Z) = \{N(z) \mid z \in Z\}$ est l'ensemble des noyaux rencontrés par Z,
- (E2) $K_Z^{\circ}(\Gamma) \approx \prod_{s \in Z} \mathcal{L}_{I\!\!F_2}([\{s\}], [(C^2(s))^{\star}]) \approx \prod_{s \in Z} [(C^2(s))^{\star}], \text{ via } \varphi \mapsto ((Id_{[S]} + \varphi)_{|[\{s\}]})_{s \in Z} \text{ et } (f_s)_{s \in Z} \mapsto (f_s(\{s\}))_{s \in Z}, \text{ avec la partition de } Z \text{ en l'ensemble de ses singletons.}$

4.3.3 Profondeur et décomposition en parties d'épaisseur nulle.

Définition 12 (Profondeur). Soit $Y \subseteq S$. On appelle chaîne (d'éléments de Y) toute suite finie (y_0, y_1, \ldots, y_p) d'éléments de Y telle que, pour $1 \le i \le p$, $C^2(y_{i-1}) \subsetneq C^2(y_i)$. Si (y_0, y_1, \ldots, y_p) est une chaîne, on dit que sa longueur est p, et qu'elle a pour origine y_0 .

Soit $Y \subseteq S$. On définit la fonction Y-profondeur $p_Y : Y \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, de la façon suivante : pour $y \in Y$, $p_Y(y)$ est la borne supérieure de l'ensemble des longueurs des chaînes d'éléments de Y d'origine y. Pour $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on pose $Y_p = \{y \in Y \mid p_Y(y) = p\}$, et $Y_{\geq p} = \bigcup_{k \geq p} Y_k = \{y \in Y \mid p_Y(y) \geq p\}$ (En particulier, $Y_{\geq 0} = Y$ et $Y_{\infty} = Y_{\geq \infty}$).

Remarques 13. a. Si Y est une cellule, alors $Y_0 = Noy(Y)$, et $Y_{\geq 1} = Y \setminus Noy(Y) = Y^*$. Plus généralement, si Y est saturée (i.e. si Y est une réunion de cellules) et si $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, alors Y_p est une réunion de noyaux, et $Y_{\geq p}$ est saturée.

- **b.** Les Y_p , pour $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, sont deux à deux disjoints, et chaque partie $Y_{\geq p}$ est Y-saturée.
- **c.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors Y_n est d'épaisseur nulle, et satisfait à $Y_n \neq \emptyset \Longrightarrow Y_k \neq \emptyset$, pour tout $k \leq n$. De plus, si $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on vérifie que $(Y_{\geq n})_p = Y_{n+p}$, d'où $(Y_{\geq n})_{\geq p} = Y_{\geq n+p}$.

Définition 13 (Épaisseur). Soit $Y \subseteq S$. Nous appelons épaisseur de Y la borne supérieure (dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$) de la fonction p_Y .

On vérifie facilement que les parties d'épaisseur 0, au sens que l'on vient de définir, sont les parties d'épaisseur nulle au sens de la définition 11 de la section 4.3.2.

Lorsque S est d'épaisseur finie, nous disons que (W,S) et Γ sont d'épaisseur finie. Comme cette notion ne dépend pas de $S \in \mathcal{S}(W)$ (puisque W est rigide), nous disons aussi, sans ambiguïté, que W est d'épaisseur finie. C'est par exemple le cas lorsque \mathcal{C} (ou \mathcal{N}) est fini et, en particulier, on voit donc que tout groupe de Coxeter de rang fini est d'épaisseur finie.

Théorème 3. Soit $Y \subseteq S$ d'épaisseur finie e. Alors :

$$K_Y^\circ(\Gamma) = K_{Y_0}^\circ(\Gamma) \rtimes (K_{Y_1}^\circ(\Gamma) \rtimes (\cdots \rtimes (K_{Y_{e-1}}^\circ(\Gamma) \rtimes K_{Y_e}^\circ(\Gamma)) \cdots)).$$

De plus, si Y est saturée, alors $K_{Y_e}^{\circ}(\Gamma) = \{Id_{[S]}\}.$

 $D\'{e}monstration$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Sans hypothèse sur Y, la proposition 13, appliquée à $Y_{\geq k}$ et à la partie $Y_{\geq k}$ -saturée $(Y_{\geq k})_{\geq 1} = Y_{\geq k+1}$ (remarque 13 c), nous fournit la décomposition :

$$K_{Y_{\geq k}}^{\circ}(\Gamma) = K_{Y_k}^{\circ}(\Gamma) \rtimes K_{Y_{\geq k+1}}^{\circ}(\Gamma).$$

On suppose ici Y d'épaisseur finie e, donc on a $Y_{\geq e+1} = \emptyset$ et $K_{Y_{\geq e+1}}^{\circ}(\Gamma) = \{Id_{[S]}\}$. La formule voulue s'obtient alors facilement par récurrence, en appliquant le procédé ci-dessus successivement aux parties $Y_{\geq k}$, pour $0 \leq k \leq e$.

Si, de plus, Y est saturée, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $y \in Y_n \Rightarrow (C^2(y))^* \subseteq Y_{\geq n+1}$, et on voit que Y_e est nécessairement constitué d'éléments y de Y tels que $(C^2(y))^* = \emptyset$. Mais alors la formule (E2) appliquée à $Z = Y_e$ (qui est d'épaisseur nulle, d'après la remarque 13 c) nous montre que l'on a $K_{Y_e}^{\circ}(\Gamma) = \{Id_{[S]}\}$.

4.4 Conclusion.

On rappelle que nous voulions, dans cette partie, décrire le groupe $Aut([S], [S]_c)$.

Nous avons défini (en section 4.1) un sous-groupe G de $Aut(\Gamma)$ isomorphe à $Aut(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}, Card)$ pour lequel on a (d'après la proposition 8) :

$$Aut([S], [S]_c) = K(\Gamma) \rtimes G \text{ et } Aut(\Gamma) = (K(\Gamma) \cap Aut(\Gamma)) \rtimes G.$$
 (1)

Les propositions 9 (section 4.1) et 12 (section 4.2) nous donnent (avec le commentaire 5 a):

$$K(\Gamma) = K^{\circ}(\Gamma) \rtimes D(\Gamma), \text{ avec } D(\Gamma) \approx \prod_{N \in \mathcal{N}} Aut([N]), \text{ via } \rho_2 : \varphi \mapsto (\varphi_{|[N]})_{N \in \mathcal{N}}, \\ K(\Gamma) \cap Aut(\Gamma) \subseteq D(\Gamma), \text{ et } K(\Gamma) \cap Aut(\Gamma) \approx \prod_{N \in \mathcal{N}} Perm(N), \text{ via } \rho_1 : \sigma \mapsto (\sigma_{|N})_{N \in \mathcal{N}}.$$
 (2)

Le théorème 3 (section 4.3.3) nous permet de décrire le groupe $K^{\circ}(\Gamma) = K_S^{\circ}(\Gamma)$, dans le cas où S (qui est une partie saturée) est d'épaisseur finie e. On obtient :

$$K^{\circ}(\Gamma) = K_{S_0}^{\circ}(\Gamma) \rtimes (K_{S_1}^{\circ}(\Gamma) \rtimes (\cdots \rtimes (K_{S_{e-2}}^{\circ}(\Gamma) \rtimes K_{S_{e-1}}^{\circ}(\Gamma)) \cdots)). \tag{3}$$

Enfin, pour $0 \le k \le e-1$, la partie S_k de S est d'épaisseur nulle (cf. remarque 13 c) et contient les noyaux qu'elle rencontre (cf. remarque 13 a), ce qui signifie que, $\mathcal{N}(S_k)$ désignant l'ensemble $\{N(s) \mid s \in S_k\}$, on a, pour tout $N \in \mathcal{N}(S_k)$, $N \subseteq S_k$; les formules (E1) et (E2) appliquées à S_k nous donnent donc :

$$K_{S_k}^{\circ}(\Gamma) \approx \begin{cases} \prod_{N \in \mathcal{N}(S_k)} \mathcal{L}_{\mathbb{F}_2}([N], [(Cel(N))^*]), & \text{via } \varphi \mapsto ((Id_{[S]} + \varphi)_{|[N]})_{N \in \mathcal{N}(S_k)} \\ \prod_{s \in S_k} [(C^2(s))^*], & \text{via } \varphi \mapsto (\{s\} + \varphi(\{s\}))_{s \in S_k}. \end{cases}$$
(4)

Remarques 14. Rappelons que l'on note $\mathcal{E}(S)$ l'ensemble des singletons de S. On a :

- **a.** S est d'épaisseur nulle $\Leftrightarrow \mathcal{N} = \mathcal{C} \Leftrightarrow K^{\circ}(\Gamma) = \{1\},\$
- **b.** $\mathcal{N} = \mathcal{E}(S) \Leftrightarrow D(\Gamma) = \{1\} \Leftrightarrow Aut(\Gamma) \cap K(\Gamma) = \{1\} \Leftrightarrow G = Aut(\Gamma),$
- c. Γ satisfait aux conditions de a et de b $\Leftrightarrow \mathcal{C} = \mathcal{E}(S) \Leftrightarrow K(\Gamma) = \{1\} \Leftrightarrow Aut([S], [S]_c) = Aut(\Gamma)$. On retrouve ainsi le résultat de la proposition 7.

Exemples.

Dans les exemples de graphe de Coxeter qui suivent, toutes les arêtes sont étiquetées ∞ .

Exemple 1. Nous retrouvons les résultats obtenus par J. Tits dans la partie finale de [T] (le groupe $Aut(F(\Gamma))$ étudié par J. Tits est isomorphe à $Aut([S], [S]_c)$).

• Supposons que S soit la réunion disjointe de deux sous-ensembles non vides S' et S'' tels que $m_{s,t} = \infty \Leftrightarrow (s,t) \in S' \times S''$ ou $(s,t) \in S'' \times S'$ (on dit alors que le graphe de Γ est "bipartite complet"). Avec notre terminologie, il s'agit du cas où S est d'épaisseur nulle et a deux noyaux (qui sont S' et S'').

On a alors, d'après les formules (1) et (2) et la remarque 14 a, $Aut([S], [S]_c) = D(\Gamma) \rtimes G \approx (Aut([S']) \times Aut([S''])) \rtimes G$. De plus, on a clairement $G \approx Aut(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}, Card) = \{1\}$ si les noyaux S' et S'' n'ont pas même cardinal, et $G \approx \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si S' et S'' ont même cardinal.

- Supposons que le graphe de Γ soit un cycle de longueur $n \geq 5$. On vérifie facilement que $\mathcal{C} = \mathcal{E}(S)$ et donc $Aut([S], [S]_c) = Aut(\Gamma)$ (cf. proposition 7, ou remarque 14 c).
- Les autres cas étudiés par J. Tits sont d'épaisseur 1, et satisfont à $\mathcal{N} = \mathcal{E}(S)$. On a alors $Aut([S], [S]_c) = K_{S_0}^{\circ}(\Gamma) \rtimes Aut(\Gamma)$ (cf. formules (1), (2), (3) et remarque 14 b) et $K_{S_0}^{\circ}(\Gamma) \approx \prod_{s \in S_0} [(C^2(s))^*]$ (cf. formule (4)).

Exemple 2. Soit Γ donnée par le graphe $\frac{1}{2}$ $\xrightarrow{3}$ $\xrightarrow{4}$ $\xrightarrow{5}$. On a :

Sommet s	1	2	3	4	5
Cellule $C^2(s)$	$\{1, 2\}$	$\{1, 2\}$	${3,5}$	$\{1, 2, 4\}$	$\{5\}$
Noyau $N(s)$	$\{1, 2\}$	$\{1, 2\}$	{3}	{4}	$\{5\}$

On vérifie que $G \approx Aut(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}, Card) = \{1\}$ et que S est d'épaisseur 1, avec $S_0 = \{3, 4\}$ et $S_1 = \{1, 2, 5\}$. On a alors, grâce aux formules (1) à (4), $Aut([S], [S]_c) = K_{S_0}^{\circ}(\Gamma) \rtimes D(\Gamma)$, avec :

$$D(\Gamma) \approx Aut([\{1,2\}]) \approx GL_2(\mathbb{F}_2) \text{ et } K_{S_0}^{\circ}(\Gamma) \approx [(C^2(3))^*] \times [(C^2(4))^*] \approx (\mathbb{F}_2)^3.$$

Exemple 3. Soit Γ donnée par le graphe infini (indexé par \mathbb{Z}) :

On a:

Sommet s	a_k	b_k	b'_k
Cellule $C^2(s)$	$\{a_k, b_{k-1}, b'_{k-1}, b_{k+1}, b'_{k+1}\}$	$\{b_k,b_k'\}$	$\{b_k,b_k'\}$
Noyau $N(s)$	$\{a_k\}$	$\{b_k,b_k'\}$	$\{b_k,b_k'\}$

Il est clair que tout élément de $Aut(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}, Card)$ est entièrement déterminé par son action sur l'ensemble de noyaux $\{\{a_k\} \mid k \in \mathbb{Z}\} \approx \mathbb{Z}$, puisque si $\{a_k\}$ s'envoie sur $\{a_l\}$, alors nécessairement, $\{b_k, b_k'\}$ s'envoie sur $\{b_l, b_l'\}$. On voit alors que $Aut(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}, Card)$ s'identifie au groupe diédral infini $D_{\infty} = \langle \psi, \psi' \rangle$ engendré par les symétries $\psi : k \mapsto -k, k \in \mathbb{Z}$ et $\psi' : k \mapsto -k + 1, k \in \mathbb{Z}$. Via cette identification (et celle de $Aut(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}, Card)$ au sous-groupe G de $Aut(\Gamma)$, on a donc $Aut([S], [S]_c) = K(\Gamma) \rtimes D_{\infty}$ (cf. formule (1)).

On déduit du tableau ci-dessus que S est d'épaisseur 1, avec $S_0 = \{a_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et $S_1 = \{b_k, b_k' \mid k \in \mathbb{Z}\}$. On obtient, grâce aux formules (2) (3) et (4), $K(\Gamma) = K_{S_0}^{\circ}(\Gamma) \rtimes D(\Gamma)$, avec :

$$D(\Gamma) \approx \prod_{k \in \mathbb{Z}} GL_2(\mathbb{F}_2) \text{ et } K_{S_0}^0(\Gamma) \approx \prod_{k \in \mathbb{Z}} (\mathbb{F}_2)^4 \approx (\mathbb{F}_2)^{\mathbb{Z}}.$$

Exemple 4. Soit $e \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et soit $\Gamma = (m_{s,t})_{s,t \in S}$, où $S = \{s_k, s_k' \mid 0 \le k < e+1\}$ et $m_{s,t} = \infty \iff \{s,t\} = \{s_k, s_l'\}$ avec $0 \le l \le k < e+1$. On a :

Sommet s	s_k	s_k'	
Cellule $C^2(s)$	$\{s_0,s_1,\ldots,s_k\}$	$\{s_i' \mid k \le i < e+1\}$	
Noyau $N(s)$	$\{s_k\}$	$\{s_k'\}$	

Comme $\mathcal{N} = \mathcal{E}(S)$, on a $D(\Gamma) = \{1\}$ et $G = Aut(\Gamma)$ (cf. remarque 14 b). On a donc $Aut([S], [S]_c) = K^{\circ}(\Gamma) \rtimes Aut(\Gamma)$.

Supposons e fini. On vérifie alors que $Aut(\Gamma) = \langle \sigma \rangle \approx \mathbb{F}_2$, où σ envoie s_k sur s'_{e-k} et s'_k sur s_{e-k} , pour $0 \le k \le e$. On a donc $Aut([S], [S]_c) = K^{\circ}(\Gamma) \times \langle \sigma \rangle \approx K^{\circ}(\Gamma) \times \mathbb{F}_2$.

On voit que S est d'épaisseur e, avec $S_k = \{s_k', s_{e-k}\}$, pour $0 \le k \le e$. On a donc, d'après les formules (3) et (4), $K^{\circ}(\Gamma) = K_{S_0}^{\circ}(\Gamma) \rtimes (K_{S_1}^{\circ}(\Gamma) \rtimes (\cdots \rtimes (K_{S_{e-2}}^{\circ}(\Gamma) \rtimes K_{S_{e-1}}^{\circ}(\Gamma)) \cdots))$ et, pour $0 \le k \le e-1$, $K_{S_k}^{\circ}(\Gamma) \approx [(C^2(s_k'))^*] \times [(C^2(s_{e-k}))^*] \approx (\mathbb{F}_2)^{e-k} \times (\mathbb{F}_2)^{e-k} \approx (\mathbb{F}_2)^{2(e-k)}$.

Supposons $e = \infty$. Alors $Aut(\Gamma) = \{1\}$, donc $Aut([S], [S]_c) = K^{\circ}(\Gamma)$.

On voit que S est d'épaisseur infinie, avec $S_k = \{s_k'\}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, et $S_{\infty} = \{s_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. On ne peut donc pas appliquer le théorème 3 à S; cependant, la proposition 13 reste valable : si l'on pose $X = \{s_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ et $X' = \{s_k' \mid k \in \mathbb{N}\}$, alors X et X' sont saturées, donc d'après la proposition 13, $K_X^{\circ}(\Gamma)$ et $K_{X'}^{\circ}(\Gamma)$ sont distingués dans $K^{\circ}(\Gamma)$ et $K_X^{\circ}(\Gamma) = K_X^{\circ}(\Gamma) \times K_{X'}^{\circ}(\Gamma)$.

Le groupe $K_X^{\circ}(\Gamma)$ s'identifie à un sous-groupe de $Aut([X]) = GL_{I\!\!F_2}([X])$ et, plus précisément, si l'on fixe la base $(\{s_0\}, \{s_1\}, \ldots)$ de [X], au sous-groupe de $GL_{I\!\!F_2}([X])$ constitué des matrices (infinies à droite) triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale.

De même, le sous-groupe $K_{X'}^{\circ}(\Gamma)$ s'identifie à un sous-groupe de $Aut([X']) = GL_{\mathbb{F}_2}([X'])$ et, plus précisément, si l'on fixe la base $(\{s'_0\}, \{s'_1\}, \ldots)$ de [X'], au sous-groupe de $GL_{\mathbb{F}_2}([X'])$ constitué des matrices (infinies à droite) triangulaires inférieures, avec des 1 sur la diagonale et un nombre fini de 1 dans chaque colonne, inversibles et telles que l'inverse soit de la même forme.

Références.

- [B] N. BOURBAKI. Groupes et Algèbres de Lie, Chapitres IV-VI. Hermann, Paris, 1968.
- [BM] P. Bahls, M. Mihalik. Reflection Independence In Even Coxeter Groups. Geom. Ded. à paraître.
- [BMMN] N. Brady, J.P. MacCammond, B. Mühlherr, W.D. Neumann. Rigidity of Coxeter groups and Artin groups. Geom. Ded. **94** (2002), 91-109.
- [H] T. Hosaka. Determination up to isomorphism of Right-Angled Coxeter systems. Proc. Japan Ac. 79 (2003), 33-35.
- [M] B. MÜHLHERR. Automorphisms of graph-universal Coxeter Groups. Journal of Algebra 200 (1998), 629-649.
- [R] D.G. RADCLIFFE. Rigidity of Right-Angled Coxeter Groups. eprint arXiv:math/9901049.
- [R2] D.G. Radcliffe. Unique presentation of Coxeter groups and related groups. Ph.D. Thesis, University of Wisconsin, Milwaukee (2001).
- [T] J. Tits. Sur le groupe des automorphismes de certains groupes de Coxeter. Journal of Algebra 113 (1988), 346-357.