SỬ DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ ĐẶC TRƯNG GIẢI PT-HPT

Phần 1. CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1.Tính đơn điệu của hàm số

Hàm số y = f(x) gọi là đồng biến (tăng) trong khoảng (a ; b) nếu với $\forall x_1; x_2 \in (a;b)$ mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.

Hàm số y = f(x) gọi là nghịch biến (giảm) trong khoảng (a ; b) nếu với $\forall x_1; x_2 \in (a;b)$ mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.

Hàm số y = f(x) đồng biến hoặc nghịch biến trên (a;b) , ta nói hàm số y = f(x) đơn điệu trên (a ; b) .

2 . Định lí

Giả sử hàm số y = f(x) có đạo hàm trong khoảng (a ; b) .

+Hàm số y = f(x) đồng biến trong khoảng (a ; b) $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ với $\forall x \in (a;b)$ và $f'(x) = 0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trong khoảng (a ; b) .

+ Hàm số y = f(x) nghịch biến trong khoảng (a ; b) $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0$ với $\forall x \in (a;b)$ và $f'(x) = 0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trong khoảng (a ; b) .

+ Nếu $f'(x) > 0$ với $\forall x \in (a;b)$ và $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $[a;b]$

+ Nếu $f'(x) < 0$ với $\forall x \in (a;b)$ và $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a;b]$

Phần 2. CÁC TÍNH CHẤT

a)**Tính chất**

Nếu f(x) liên tục và đơn điệu trên (a ; b) thì ta có : f(u) = f(v) $\Leftrightarrow$ u = v với mọi u ,v $\in$ (a ; b)

b) Các bổ đề hỗ trợ:

b.1. *Nếu f(x) đơn điệu và liên tục trên (a ; b) thì phương trình f(x) = 0 có nhiều nhất một nghiệm $x_0 \in$ (a ; b) .*

b.2. *Nếu f(x); g(x) liên tục và đơn điệu ngược chiều trên (a ; b) thì phương trình f(x) = g(x) có nhiều nhất một nghiệm trên (a ; b).*

b.3. + *f(x) đồng biến trên (a ; b) thì f(u) < f(v)* $\Leftrightarrow u < v$

\+ *f(x) nghịch biến trên (a ; b) thì f(u) < f(v)* $\Leftrightarrow u > v$

với $\forall u, v \in (a; b)$.

Nhận xét :

Các tính chất và bổ đề trên dễ dàng suy ra từ định nghĩa về hàm số đồng biến , nghịch biến

Phần 3. VẬN DỤNG TÍNH CHẤT TRÊN VÀO VIỆC GIẢI MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH .

Trước hết ta sẽ vận dụng tính chất đó vào giải các phương trình,và hệ phương trình. Sau đó là các bài tập vận dụng .

Bài 1. Giải phương trình sau trên tập số thực:

$$x^3 - 15x^2 + 78x - 141 = 5\sqrt[3]{2x-9} \qquad (1)$$

(Olimpic 30-4 năm 2011)

Lời giải:

ĐKXĐ: $x \in \mathbb{R}$

PT (1) $\Leftrightarrow (x-5)^3 + 5(x-5) = (2x-9) + 5\sqrt[3]{2x-9} \qquad (*)$

Xét hàm số đặc trưng : $f(t) = t^3 + 5t$ với $t \in \mathbb{R}$

Ta có: $f'(t) = 3t^2 + 5 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số trên đồng biến trên $\mathbb{R}$

Mà phương trình (*) có dạng: $f(x-5) = f\left(\sqrt[3]{2x-9}\right)$

$$\Leftrightarrow (x-5)^3 = 2x-9$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 15x^2 + 73x - 116 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x^2 - 11x + 29) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = \dfrac{11 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là $x = 4; x = \dfrac{11 \pm \sqrt{5}}{2}$

Bài 2. Giải phương trình:

$$2\sqrt[3]{2x-1} = 27x^3 - 27x^2 + 13x - 2 \qquad (1)$$

(Đề thi HSG Tỉnh Hải Phòng năm 2010)

Lời giải:

ĐKXĐ: $x \in \mathbb{R}$

PT (1) $\Leftrightarrow (2x-1)+2\sqrt[3]{2x-1}=(3x-1)^3+2(3x-1)$ (*)

Xét hàm số đặc trưng : $f(t)=t^3+2t$ với $t \in \mathbb{R}$

Ta có: $f'(t)=3t^2+2>0 \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số trên đồng biến trên $\mathbb{R}$

Mà phương trình (*) có dạng: $f(3x-1)=f\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)$

$$\Leftrightarrow 3x-1=\sqrt[3]{2x-1}$$
$$\Leftrightarrow (3x-1)^3=(2x-1)$$
$$\Leftrightarrow x\left(27x^2-27x+7\right)=0 \Leftrightarrow x=0$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=0$

<u>Bài 3</u>. Giải phương trình:

$$x^3+3x^2+4x+2=(3x+2)\sqrt{3x+1} \quad (1)$$

(Đề thi HSG Tỉnh Quảng Bình năm 2010)

Lời giải:

ĐKXĐ: $3x+1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -\dfrac{1}{3}$

PT (1) $\Leftrightarrow (x+1)^3+(x+1)=\left[(3x+1)+1\right]\sqrt{3x+1}$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3+(x+1)=\left(\sqrt{3x+1}\right)^3+\sqrt{3x+1} \quad (*)$$

Xét hàm số đặc trưng : $f(t)=t^3+t$ với $t \ge 0$

Ta có: $f'(t)=3t^2+1>0 \forall t \ge 0$ suy ra hàm số trên đồng biến trên $[0;+\infty)$

Mà phương trình (*) có dạng: $f(x+1)=f\left(\sqrt{3x+1}\right)$

$$\Leftrightarrow x+1=\sqrt{3x+1}$$
$$\Leftrightarrow x^2+2x+1=3x+1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \end{array}\right. \text{ (Thỏa mãn ĐKXĐ)}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt $x = 0; x = 1$

<u>Bài 4</u>. Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{6x+1} = 8x^3 - 4x - 1 \qquad (1)$$

Lời giải:

ĐKXĐ: $x \in \mathbb{R}$

PT (1) $\Leftrightarrow \left(6x+1\right) + \sqrt[3]{6x+1} = \left(2x\right)^3 + \left(2x\right) \qquad (*)$

Xét hàm số đặc trưng : $f\left(t\right) = t^3 + t$ với $t \in \mathbb{R}$

Ta có: $f'\left(t\right) = 3t^2 + 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số trên đồng biến trên $\mathbb{R}$

Mà phương trình (*) có dạng: $f\left(\sqrt[3]{6x+1}\right) = f\left(2x\right)$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 6x = 1 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

Nếu $x \in \left[-1;1\right]$ Đặt $x = \cos t,\ t \in \left[0;\pi\right]$, phương trình (2) trở thành:

$$\left(4\cos^3 t - 3\cos t\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 3t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \pm\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

Mà $t \in \left[0;\pi\right] \Rightarrow t = \frac{\pi}{9}; t = \frac{5\pi}{9}; t = \frac{7\pi}{9}$

Suy ra: $x = \cos\frac{\pi}{9}; x = \cos\frac{5\pi}{9}; x = \cos\frac{7\pi}{9}$

Do phương trình (2) là phương trình bậc ba nên có không quá 3 nghiệm nên phương trình (2) chỉ có 3 nghiệm trên

Vậy phương trình đã cho là : $x = \cos\frac{\pi}{9}; x = \cos\frac{5\pi}{9}; x = \cos\frac{7\pi}{9}$

<u>Bài 5</u>. Giải phương trình:

$$3x(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) + (4x + 2)(\sqrt{1 + x + x^2} + 1) = 0 \qquad (1)$$

(***Olympic 30-4 ĐBSCL 2000)***

Giải: Ta thấy phương trình chỉ có nghiệm trong $(-\frac{1}{2};0)$

$$PT(1) \Leftrightarrow \left(-3x\right)(2+\sqrt{(-3x)^2+3}) = (2x+1)(2+\sqrt{(2x+1)^2+3})$$
$$\Leftrightarrow u(2+\sqrt{u^2+3}) = v(2+\sqrt{v^2+3}) \quad (1)$$

Với u=-3x, v=2x+1; u,v>0. Xét hàm số $f(t) = 2t+\sqrt{t^4+3t^2}$ với t>0

Ta có $f'(t) = 2+\dfrac{2t^3+3t}{\sqrt{t^4+3t^2}} > 0 \ \ \forall t > 0$

Suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$

Mà phương trình (1) $\Leftrightarrow f\left(u\right) = f\left(v\right) \Leftrightarrow$ u=v $\Leftrightarrow$ -3x=2x+1 $\Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$

Vậy nghiệm duy nhất của phương trình đã cho là $x = -\frac{1}{5}$

<u>Bài 6</u>. Giải phương trình:

$$2^{x-1} - 2^{x^2-x} = (x-1)^2 \qquad (1)$$

(ĐH Thủy Lợi 2001-2002)

Lời giải:

ĐKXĐ: $x \in \mathbb{R}$

Ta có: PT(1) $\Leftrightarrow 2^{x-1}+(x-1) = 2^{x^2-x}+(x^2-x)$ (*)

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$ với $t \in \mathbb{R}$

Do $f^{'}(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0$ với $\forall t \in R \ \Rightarrow$ f(t) đồng biến trên R

Mà (*) trở thành: $f(x-1) = f(x^2-x)$

$$\Leftrightarrow x-1 = x^2 - x$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là x = 1 .

<u>Bài 7</u>. Giải phương trình:

$$2^{\frac{1-x^2}{x^2}} - 2^{\frac{1-2x}{x^2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} \qquad (1)$$

Lời giải:

ĐKXĐ : $x \neq 0$;

Do $\frac{1-2x}{x^2} - \frac{1-x^2}{x^2} = 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{x})$.

Nên phương trình (1) $\Leftrightarrow 2^{\frac{1-x^2}{x^2}} + \frac{1}{2}.\frac{1-x^2}{x^2} = 2^{\frac{1-2x}{x^2}} + \frac{1}{2}.\frac{1-2x}{x^2}$ (*)

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$ với $t \in \mathbb{R}$

Ta có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0$ với $\forall t \in R \Rightarrow$ Hàm số f(t) đồng biến trên R .

Mà phương trình (*) trở thành: $f(\frac{1-x^2}{x^2}) = f(\frac{1-2x}{x^2})$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x^2}{x^2} = \frac{1-2x}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \quad (l) \\ x = 2 \ \ (t/m) \end{array}\right. .$$

Vậy x = 2 là nghiệm của phương trình

<u>Bài 8</u>. Giải phương trình:

$$\log_3\left(\frac{2x-1}{(x-1)^2}\right) = 3x^2 - 8x + 5 \ \ (1)$$

(Đề thi HSG tỉnh Thái Bình năm 2010-2011)

Lời giải:

ĐKXĐ: $\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$

PT(1) $\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{2x-1}{(x-1)^2}\right) - 1 = 3(x-1)^2 - (2x-1)$

$\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{2x-1}{3(x-1)^2}\right) = 3(x-1)^2 - (2x-1)$

$\Leftrightarrow \log_3(2x-1) + (2x-1) = \log_3\left(3(x-1)^2\right) + 3(x-1)^2$ (*)

Xét hàm số đặc trưng : $f(t) = \log_3 t + t$ với $t > 0$

Ta có: $f'(t)=\frac{1}{t\ln 3}+1>0\forall t>0$ suy ra hàm số trên đồng biến trên$(0;+\infty)$

Mà PT (*) có dạng : $f(2x-1)=f\left(3(x-1)^2\right)$

$$\Leftrightarrow 2x-1=3(x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-8x+4=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\ (t/m) \\ x=\frac{2}{3}\ (t/m) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt: $x=2;x=\frac{2}{3}$

**Bình luận: Điểm mấu chốt trong bài toán trên là tách hệ số tự do và viết phương trình về dạng* $f(u)=f(v)$ *để xét được hàm số đặc trưng*

Bài 9. Giải phương trình:

$$\sin 2x-\cos x=1+\log_2 \sin x \quad (1) \text{ với } x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$$

Lời giải: Do $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$suy ra: $0<\sin x;\cos x<1$

Nên $PT(1)\Leftrightarrow \log_2\cos x+\sin 2x-\cos x=1+\log_2\sin x+\log_2\cos x$

$$\Leftrightarrow \log_2\cos x-\cos x=\log_2\sin 2x-\sin 2x \ (*)$$

Xét hàm số đặc trưng: $f(t)=\log_2 t-t$ với $t\in(0;1]$

Ta có $f'(t)=\frac{1}{t\ln 2}-1>0\forall t\in(0,1)$ vì: $0<t\le 1\Leftrightarrow 0<t\ln 2\le\ln 2<\ln e=1$

$$\Rightarrow \frac{1}{t\ln 2}>1\Leftrightarrow \frac{1}{t\ln 2}-1>0$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;1]$, mà phương trình (*) có dạng:

$$f\left(\cos x\right)=f\left(\sin 2x\right)$$
$$\Leftrightarrow \cos x=\sin 2x$$
$$\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}$$

Bình luận: Để giải được bài toán trên ta cần phải có kỹ năng thêm bớt và khai thác triệt để giả thiết (điều kiện của biến)

Bài 10. Giải phương trình :

$$\log_2\left(\cot x-\tan x\right)=1+\cos 2x-\sin 2x \quad (2) \text{ với } x\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$$

Lời giải:

Do $x\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ nên $\begin{cases}\cot x>1\\ 0<\tan x<1\end{cases}\Rightarrow \cot x-\tan x>0$

Và: $\cot x-\tan x=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}$

nên PT(2) $\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}\right)=1+\cos 2x-\sin 2x$

$$\Leftrightarrow \log_2\cos 2x-\log_2\sin 2x=\cos 2x-\sin 2x \quad \text{vì } 0<\sin 2x;\cos 2x<1\,\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_2\cos 2x-\cos 2x=\log_2\sin 2x-\sin 2x$$

Xét hàm số đặc trưng: $f\left(t\right)=\log_2 t-t$ với $t\in\left(0;1\right)$

Ta có $f'\left(t\right)=\frac{1}{t\ln 2}-1>0\,\forall t\in\left(0,1\right)$ vì: $0<t<1\Leftrightarrow 0<t\ln 2<\ln 2<\ln e=1$

$$\Rightarrow \frac{1}{t\ln 2}>1\Leftrightarrow \frac{1}{t\ln 2}-1>0$$

Suy ra hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;1\right)$, mà phương trình (*) có dạng:

$$f\left(\cos 2x\right)=f\left(\sin 2x\right)$$
$$\Leftrightarrow \cos 2x=\sin 2x$$
$$\Leftrightarrow \tan 2x=1$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=\frac{\pi}{8}$

<u>Bài 11</u>. Giải phương trình :

$$3^x=1+x+\log_3(1+2x) \qquad (1)$$

Lời giải:

ĐKXĐ: $x>-\frac{1}{2}$

$PT(1)\Leftrightarrow 3^x+x=1+2x+\log_3(1+2x)$

$\Leftrightarrow 3^x+\log_3 3^x=\left(1+2x\right)+\log_3(1+2x) \quad (*)$

Xét hàm số đặc trưng : $f(t)=t+\log_3 t$ với $t>0$

Ta có $f'\left(t\right)=1+\frac{1}{t\ln 3}>0 \quad \forall t>0$ suy ra $f\left(t\right)$ là hàm đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$

Mà phương trình $(*)\Leftrightarrow f(3^x)=f(1+2x)\Leftrightarrow 3^x=2x+1\Leftrightarrow 3^x-2x-1=0 \quad (2)$

Xét hàm số: $g(x)=3^x-2x-1\Rightarrow g'(x)=3^x\ln 3-2\Rightarrow g''(x)=3^x\ln^2 3>0$

$\Rightarrow$ PT $g(x)=0$ có nhiều nhất là hai nghiệm, mà g(0)=g(1)=0 nên phương trình (2) có hai nghiệm x=0 và x=1

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là x=0 và x=1

<u>Bài 12</u>. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^3-5x=y^3-5y & (1) \\ x^8+y^4=1 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Từ PT (2) ta có $x^8\le 1; y^4\le 1\Leftrightarrow \left|x\right|\le 1;\left|y\right|\le 1$

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^3-5t; t\in\left[-1;1\right]$

Ta có $f'(t)=3t^2-5<0;\forall t\in[-1;1]$ do đó f(t) nghịch biến trên khoảng (-1;1) Mà PT $(1)\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$ thay vào PT (2) ta được PT : $x^8+x^4-1=0$

Đặt $a=x^4$ và giải phương trình ta được $a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow y=x=\pm\sqrt[4]{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

Vậy hệ có 2 nghiệm phân biệt là:

$$\left(\sqrt[4]{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}};\sqrt[4]{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)\text{ và }\left(-\sqrt[4]{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}};-\sqrt[4]{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)$$

** Bình luận :Ngoài việc đưa một phương trình trong hệ có dạng f(x)=f(y) , ta còn phải giới hạn x,y thuộc tập D(từ phương trình thứ hai) để trên để trên đó hàm f đơn điệu*

<u>Bài 13</u>. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^5+xy^4=y^{10}+y^6 & (1)\\ \sqrt{4x+5}+\sqrt{y^2+8}=6 & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

ĐKXĐ $x\ge-\dfrac{5}{4}$

Ta thấy $y=0$ không thỏa mãn hệ, suy ra $y\neq 0$. Chia cả hai vế của (1) cho $y^5\neq 0$

khi đó hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{x}{y}\right)^5+\dfrac{x}{y}=y^5+y & (*)\\ \sqrt{4x+5}+\sqrt{y^2+8}=6 & (2)\end{cases}$

Xét hàm số $f(t)=t^5+t$. Ta có $f'(t)=5t^4+1>0\ \forall\ t\in R$, nên hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên R.

Mà phương trình $(*)\Leftrightarrow f\left(\dfrac{x}{y}\right)=f(y)\Leftrightarrow\dfrac{x}{y}=y\Leftrightarrow x=y^2$

Thay $x=y^2$ vào (2) ta được phương trình: $\sqrt{4x+5}+\sqrt{x+8}=6$ (3)

Xét hàm số $g(x)=\sqrt{4x+5}+\sqrt{x+8}-6$ với $x\ge-\dfrac{5}{4}$

Ta có $g'(x)=\frac{2}{\sqrt{4x+5}}+\frac{1}{2\sqrt{x+8}}>0\forall x>-\frac{5}{4}$

Mà $g(x)$ liên tục trên $\left[-\frac{5}{4};+\infty\right)$ nên $g(x)$ đồng biến trên $\left[-\frac{5}{4};+\infty\right)$

Suy ra phương trình $g(x)=0$ nếu có nghiệm thì có nghiệm duy nhất mà $g(1)=0$

Nên $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (3)

Với $x = 1 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm là (1;1) và (1;-1).

<u>Bài 14</u>. Tìm *m* để hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3-y^3+3y^2-3x-2=0 \\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}+m=0 \end{cases}$$ có nghiệm thực.

(Đề ra kỳ này THTT 10/2011)

Lời giải:

ĐKXĐ: $\begin{cases} 1-x^2\ge 0 \\ 2y-y^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le 1 \\ 0\le y\le 2 \end{cases}$

Đặt $t=x+1\Rightarrow t\in[0;2]$, khi đó $x^3-y^3+3y^2-3x-2=0\Leftrightarrow t^3-3t^2=y^3-3y^2\ (1)$.

Xét hàm số $f(u)=u^3-3u^2$ trên $[0;2]$ ta có $f'(u)=3u^2-6u\le 0,\forall u\in[0;2]$ suy ra $f(u)$ nghịch biến trên đoạn [0; 2] nên: $(1)\Leftrightarrow y=t\Leftrightarrow y=x+1$

Khi đó $x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}+m=0\Leftrightarrow x^2-2\sqrt{1-x^2}+m=0$

Đặt $v=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow v\in[0;1]\Rightarrow (2)\Leftrightarrow v^2+2v-1=m$.

Xét hàm số $g(v)=v^2+2v-1$ với $v\in[0;1]$ ta có $g'(v)=2v+2>0\ \forall v\in[0;1]$

và *g(v)* liên tục trên[0; 1]

Suy ra $\underset{[0;1]}{\text{Min}}\, g(v)=g(0)=-1;\quad \underset{[0;1]}{\text{Max}}\, g(v)=g(1)=2$

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi: $-1\le m\le 2$

<u>Bài 15</u>. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2-2x+2}=3^{y-1}+1 \\ y+\sqrt{y^2-2y+2}=3^{x-1}+1 \end{cases}$$

(THTT năm 2009)

Lời giải:

Đặt $u = x - 1; v = y - 1$ ta được hệ $\begin{cases} u + \sqrt{u^2+1} = 3^v & (1) \\ v + \sqrt{v^2+1} = 3^u & (2) \end{cases}$

Trừ vế với vế 2 PT ta được : $u + \sqrt{u^2+1} + 3^u = v + \sqrt{v^2+1} + 3^v$ (*)

Xét hàm số đặc trưng: $f(t) = t + \sqrt{t^2+1} + 3^t; f'(t) = \dfrac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}} + 3^t \ln 3$

Vì $\sqrt{t^2+1} > \sqrt{t^2} \geq -t \Rightarrow \sqrt{t^2+1} + t > 0 \Rightarrow f'(t) > 0, \forall t$ do đó hàm số f(t) đồng biến trên R

Nên PT (*) $\Leftrightarrow u = v$ thay vào PT (1) ta được $u + \sqrt{u^2+1} = 3^u$ (3)

Theo nhận xét trên thì $u + \sqrt{u^2+1} > 0$ nên PT (4) $\Leftrightarrow \ln\left(u + \sqrt{u^2+1}\right) - u\ln 3 = 0$ (lấy ln hai vế)

Xét hàm số $g(u) = \ln\left(u + \sqrt{u^2+1}\right) - u\ln 3;\quad g'(u) = \dfrac{1}{\sqrt{u^2+1}} - \ln 3 < 1 - \ln 3 < 0, \forall u \in R$

hay hàm g(u) nghịch biến trên R và do PT (3) có nghiệm u=0 nên PT (3) có nghiệm duy nhất: u=0

Từ đó ta được nghiệm của hệ ban đầu là : x=y=1

Bình luận: *Để giải được hệ phương trình trên ta phải nhận dạng hệ là hệ đối xứng loại hai để trừ hai phương trình cho nhau ta với xét được hàm số đặc trưng*

<u>Bài 16</u>. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} e^{y^2-x^2} = \dfrac{x^2+1}{y^2+1} & (1) \\ 3\log_3(x+2y+6) = 2\log_2(x+y+2) + 1 & (2) \end{cases}$$

(Đề thi HSG Tỉnh Đồng Tháp 2010)

<u>Lời giải</u>:

ĐKXĐ: $\begin{cases} x + 2y + 6 > 0 \\ x + 2y + 2 > 0 \end{cases}$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow y^2 - x^2 = \ln\left(x^2+1\right) - \ln\left(y^2+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(x^2+1\right) + x^2 + 1 = \ln\left(y^2+1\right) + y^2 + 1 \quad (3)$$

Xét hàm số đặc trưng : $f(t) = \ln t + t$ với $t \geq 1$, phương trình (3) có dạng:

$$f\left(x^2+1\right) = f\left(y^2+1\right) \quad (4)$$

Vì $f'(t) = \frac{1}{t} + t > 0 \quad \forall t \in [1;+\infty) \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$

Nên: $f\left(x^2+1\right) = f\left(y^2+1\right) \Leftrightarrow x^2+1 = y^2+1 \Leftrightarrow x = \pm y$

- Với $x = -y$, từ (2) ta được: $\log_3(6-x) = 1 \Leftrightarrow x = 3$, suy ra $y = -3$ (t/m đk)
- Với $x = y$, từ (2) ta được: $3\log_3(x+2) = 2\log_2(x+1) \quad (5)$

  Điều kiện: $x > -1$, ta đặt: $\log_2(x+1) = 3u \Leftrightarrow x+1 = 2^{3u} \Leftrightarrow x = 2^{3u} - 1$, phương trình (5) trở thành:

$$3\log_3(x+2) = 6u \Leftrightarrow x+2 = 3^{2u}$$

Suy ra : $2^{3u} + 1 = 3^{2u} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^u + \left(\frac{8}{9}\right)^u = 1 \quad (6)$

Xét hàm số: $g(u) = \left(\frac{1}{9}\right)^u + \left(\frac{8}{9}\right)^u$ với $u \in R$

Vì : $g'(u) = \left(\frac{1}{9}\right)^u.\ln\frac{1}{9} + \left(\frac{8}{9}\right)^u.\ln\frac{8}{9} < 0 \quad \forall u \in R \Rightarrow$ g'(u) nghịch biến trên R

Mặt khác: $g(1) = 1$ nên u = 1 là một nghiệm của pt (6). Do đó: pt(6) có nghiệm duy nhất u = 1

Với u = 1 suy ra x = y = 7 (thỏa mãn đk)

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm (3;-3) và (7;7).

<u>Bài 17</u>. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + 3x + \ln(2x+1) = y \\ y^2 + 3y + \ln(2y+1) = x \end{cases}$$

(Đề thi HSG quốc gia THPT, bảng B, năm 1994)

Lời giải: Điều kiện : $x > -\frac{1}{2}; y > -\frac{1}{2}$

Cộng vế với vế hai phương trình của hệ ta có:

$$x^2+4x+\ln(2x+1)=y^2+4y+\ln(2y+1)\quad(1)$$

Xét hàm số $f(t)=t^2+4t+\ln(2t+1)$ trên $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$

Ta có: $f'(t)=2t+4+\frac{2}{2t+1}>0,\forall t\in\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$ nên $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$ nên $(1)\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$.

Vậy hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\x^2+2x+\ln(2x+1)=0\end{cases}$

Xét hàm số $f(x)=x^2+2x+\ln(2x+1)$ trên $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Ta có: $f'(x)=2x+2+\frac{2}{2x+1}>0,\forall x\in\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$

Suy ra $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$

Mà $f(0)=0$ nên $f(x)=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow y=0$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(0;0)$.

BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Bài 1. *Giải các phương trình:*

a) $\sqrt[3]{3x+5}=x^3+3x^2+x-3$ b) $\sqrt[3]{3x+4}=x^3+3x^2+x-2$

c) $\sqrt[3]{6x+2}=8x^3-4x-2$ d) $8x^2+6x+1=\frac{|x|-|3x+1|}{|3x^2+x|}$

e) $(5x-6)^2-\frac{1}{\sqrt{5x-7}}=x^2-\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

f) $2x^3-x^2+\sqrt[3]{2x^3-3x+1}=3x+1+\sqrt[3]{x^2+2}$

g) $-2x^3+10x^2-17x+8=2x^2\sqrt[3]{5x-x^3}$ ***(HSG Tỉnh Bình Định 2010)***

Bài 2. *Giải các phương trình:*

a) $\sin x+\cos x-\sin x.\cos x=1+\ln\frac{\sin x+\cos x+3}{4+\sin x.\cos x}$

b) $\cos 2x + 2\cos x = \log_{2012}\left(\dfrac{\sin x + \cos x + 3}{4 + \sin x.\cos x}\right)$

c) $\log_3\left(\dfrac{3x-1}{(x-1)^2}\right) = 2x^2 - 7x + 4$

d) $2x^2 - 6x + 2 = \log_2 \dfrac{2x+1}{(x-1)^2}$

e) $\log_3 \dfrac{\sqrt{x^2-x-12}}{7-x} + x = 7 - \sqrt{x^2-x-12}$

f) $\log_3\left(\dfrac{x^2+x+3}{2x^2+4x+5}\right) = x^2 + 3x + 2$

g) $(x+2)^2 + \log_2 \dfrac{x^2+4x+5}{\sqrt{2x+3}} = 2\sqrt{2x+3}$

h) $\dfrac{1}{2}\log_2(x+2) + x + 2 = \log_2 \dfrac{2x+1}{x} + \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{x+2}$ (ĐH Vinh 2010)

Bài 3.*Chứng minh rằng với mọi m>0 phương trình sau luôn có nghiệm*

$$\log_2\left(\frac{\sqrt{x^2+mx+2}}{2x-1}\right) = 2x - \sqrt{x^2+mx+2} - 1$$

Bài 4. *Giải các phương trình:*

a) $2^{x+1} - 4^x = x - 1$

b) $2011^{\sin^2 x} - 2011^{\cos^2 x} = \cos 2x$

c) $16^{\sin^3 x} - 8^{\sin x} = \sin 3x$

d) $e^{|2x-5|} - e^{|x-1|} = \dfrac{1}{|2x-5|} - \dfrac{1}{|x-1|}$

e) $\cos x.\left(\dfrac{5}{2}\right)^{\sin x} = \sin x.\left(\dfrac{5}{2}\right)^{\cos x}$

f) $6^x = 3\log_6(1+5x) + 2x + 1$

g) $7^{x-1} = 6\log_7(6x-5) + 1$

h) $2^x = 3\log_2(3x-1) - 1$

Bài 5. *Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực:*

$$2012^{x^2+2mx+2} - 2012^{2x^2+4mx+m+2} = x^2 + 2mx + m$$

Bài 6. *Giải các hệ phương trình sau:*

a) $\begin{cases} x^3 - 3x = y^3 - 3y \\ x^6 + y^6 = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^{11} + xy^{10} = y^{22} + y^{12} \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2+3} = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt{x-1}-\sqrt{y-1}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{y-1} \\ x^2+y=30 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \sqrt{3+x^2}+2\sqrt{x}=3+\sqrt{y} \\ \sqrt{3+y^2}+2\sqrt{y}=3+\sqrt{x} \end{cases}$

e) $\begin{cases} 8x^3-y^3-3y^2=5y-4x+3 \\ \sqrt{2x+y+5}+2x=2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^6-y^3+x^2-9y^2-30=28y \\ \sqrt{2x+3}+x=y(2) \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2^x+2x=3+y \\ 2^y+2y=3+x \end{cases}$

g) $\begin{cases} x^3+3x+\sqrt{3x+1}-5-y=0 \\ y^3+3y+\sqrt{3y+1}-5-z=0 \\ z^3+3z+\sqrt{3z+1}-5-x=0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x^3+3x-3+\ln\left(x^2-x+1\right)=y \\ y^3+3y-3+\ln\left(y^2-y+1\right)=z \\ z^3+3z-3+\ln\left(z^2-z+1\right)=x \end{cases}$

i) $\begin{cases} \sqrt{x^2-2x+6}.\log_3\left(6-y\right)=x \\ \sqrt{y^2-2y+6}.\log_3\left(6-z\right)=y \\ \sqrt{z^2-2z+6}.\log_3\left(6-x\right)=z \end{cases}$

Bài 7. Chứng minh rằng hệ phương trình: $\begin{cases} e^x=2011-\dfrac{y}{\sqrt{y^2-1}} \\ e^y=2011-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} \end{cases}$

có đúng 2 nghiệm thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$

Nam Trực, ngày 28 tháng 10 năm 2011

Nguyễn Trung Sỹ