

ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA

Nguyễn Thị Phương Hà (chủ biên) - Huỳnh Thái Hoàng

# LÝ THUYẾT ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA  
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH - 2005

## MỤC LỤC

<i>Lời nói đầu</i>	7
<i>Chương 1</i>	
ĐẠI CƯƠNG VỀ HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN	9
1.1 Khái niệm điều khiển	9
1.2 Các nguyên tắc điều khiển	12
1.3 Phân loại điều khiển	15
1.4 Lịch sử phát triển lý thuyết điều khiển	20
1.5 Một số ví dụ về các phần tử và hệ thống tự động	22
<i>Chương 2</i>	
MÔ TẢ TOÁN HỌC HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN LIÊN TỤC	36
2.1 Khái niệm	36
2.2 Hàm truyền đạt và đại số sơ đồ khối	37
2.3 Sơ đồ dòng tín hiệu	60
2.4 Phương pháp không gian trạng thái	66
2.5 Tóm tắt	90
<i>Phụ lục: Mô tả hệ thống tự động dùng MATLAB</i>	91
<i>Chương 3</i>	
ĐẶC TÍNH ĐỘNG HỌC CỦA HỆ THỐNG	96
3.1 Khái niệm về đặc tính động học	96
3.2 Các khâu động học điển hình	102
3.3 Đặc tính động học của hệ thống tự động	116
3.4 Tóm tắt	121
<i>Phụ lục: Khảo sát đặc tính động học của hệ thống dùng MATLAB</i>	122
<i>Chương 4</i>	
KHẢO SÁT TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA HỆ THỐNG	124

4.1 Khái niệm về ổn định	124
4.2 Tiêu chuẩn ổn định đại số	128
4.3 Phương pháp quỹ đạo nghiệm số	134
4.4 Tiêu chuẩn ổn định tần số	146
<i>Chương 5</i>	
ĐÁNH GIÁ CHẤT LƯỢNG HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN	156
5.1 Các tiêu chuẩn chất lượng	156
5.2 Sai số xác lập	158
5.3 Đáp ứng quá độ	160
5.4 Các tiêu chuẩn tối ưu hóa đáp ứng quá độ	165
5.5 Đánh giá chất lượng quá trình quá độ theo đặc tính tần số của hệ thống	168
<i>Chương 6</i>	
THIẾT KẾ HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN LIÊN TỤC	172
6.1 Khái niệm	172
6.2 Ảnh hưởng của các bộ điều khiển đến chất lượng của hệ thống	173
6.3 Thiết kế hệ thống dùng QĐNS	187
6.4 Thiết kế hệ thống dùng biểu đồ Bode	205
6.5 Thiết kế bộ điều khiển PID	214
6.6 Thiết kế hệ thống điều khiển hồi tiếp trạng thái	219
<i>Phụ lục: Thiết kế hệ thống dùng MATLAB</i>	229
<i>Chương 7</i>	
MÔ TẢ TOÁN HỌC HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN RỜI RẠC	236
7.1 Hệ thống điều khiển rời rạc	236
7.2 Phép biến đổi Z	242
7.3 Mô tả hệ thống rời rạc bằng hàm truyền	249
7.4 Mô tả hệ thống rời rạc bằng phương trình trạng thái	255
<i>Phụ lục: Mô tả hệ rời rạc dùng MATLAB</i>	272

## Chương 8

PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN RỜI RẠC	276
A. Phân tích hệ thống điều khiển rời rạc	276
8.1 Điều kiện ổn định của hệ rời rạc	276
8.2 Tiêu chuẩn Routh - Hurwitz mở rộng	277
8.3 Tiêu chuẩn Jury	279
8.4 Quỹ đạo nghiệm số	280
8.5 Chất lượng hệ thống rời rạc	285
B. Thiết kế hệ thống điều khiển rời rạc	293
8.6 Khái niệm	293
8.7 Hàm truyền của các khâu hiệu chỉnh rời rạc	294
8.8 Thiết kế hệ rời rạc dùng phương pháp QĐNS	297
8.9 Thiết kế dùng bộ điều khiển hồi tiếp trạng thái	306
8.10 Thiết kế bộ điều khiển PID	311

## Chương 9

HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG PHI TUYẾN	314
9.1 Khái niệm	314
9.2 Phương pháp mặt phẳng pha	319
9.3 Phương pháp tuyến tính hóa gần đúng	324
9.4 Phương pháp tuyến tính hóa điều hòa	328
9.5 Phương pháp tuyến tính hóa từng đoạn	339
9.6 Tiêu chuẩn Lyapunov	342
9.7 Tiêu chuẩn ổn định tuyệt đối V. M. Popov	357
9.8 Tổng kết	365

## Phụ lục

A. Bảng biến đổi Laplace và $Z$	368
B. Tóm tắt một vài tính chất và định lý của phép biến đổi $z$	369
C. Hàm mô tả các khâu phi tuyến điển hình	370



## **Lời nói đầu**

*Lý thuyết và kỹ thuật điều khiển tự động các quá trình sản xuất, các qui trình công nghệ, các đối tượng công nghiệp, quốc phòng, y tế... trong những năm gần đây đã có những bước nhảy vọt nhờ sự phát triển mạnh mẽ của kỹ thuật máy tính và công nghệ thông tin. Lý thuyết điều khiển tự động kinh điển không hề thay đổi giá trị của mình, mà ngược lại, có ý nghĩa đặc thù riêng. Nếu như trước đây, đối tượng khảo sát của điều khiển tự động về cơ bản là các hệ tuyến tính tiên định, điều khiển tập trung, thì hiện nay là các hệ thống phân tán có đối thoại với nhau liên kết thành mạng. Thiết kế sản phẩm được hỗ trợ của máy tính tới mức tối đa với các thư viện, các chương trình thiết kế đặc chủng có thiết bị ngoại vi mạnh.*

Bộ sách “**ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG**” gồm hai quyển: **Lý thuyết điều khiển tự động và Bài tập điều khiển tự động**.

**LÝ THUYẾT ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG** gồm bốn phần chín chương:

**Phần mở đầu:**

*Chương 1: Đại cương về hệ thống điều khiển tự động*

**Phần một:** *Hệ điều khiển tự động tuyến tính liên tục*

*Chương 2: Mô tả toán học*

*Chương 3: Đặc tính động học*

*Chương 4: Khảo sát tính ổn định của hệ thống*

*Chương 5: Đánh giá chất lượng hệ thống điều khiển*

*Chương 6: Hiệu chỉnh và thiết kế hệ thống*

**Phần hai:** *Hệ thống điều khiển tự động rời rạc*

*Chương 7: Mô tả toán học hệ thống điều khiển rời rạc*

*Chương 8: Phân tích và thiết kế hệ thống điều khiển rời rạc*

**Phần cuối:**

*Chương 9: Hệ thống điều khiển tự động phi tuyến*

Đối với môn **Cơ sở điều khiển tự động** thì chương 9 là phần tham khảo, không bắt buộc. Cuốn sách **LÝ THUYẾT ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG** được phân công biên soạn như sau:

*Chương 1, 4, 5, 9: TS Nguyễn Thị Phương Hà biên soạn*

*Chương 2, 3, 6, 7, 8: ThS Huỳnh Thái Hoàng biên soạn*

*BÀI TẬP ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG* được biên soạn theo nội dung và bố cục của quyển *LÝ THUYẾT ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG* nhằm nâng cao kiến thức, khả năng phân tích và thiết kế hệ thống cho sinh viên. Nội dung gồm ba phần:

**Phần một:** Bài tập của các chương sau:

Chương 1: Ví dụ về hệ điều khiển tự động

Chương 2: Hệ điều khiển tự động liên tục

Chương 3: Hệ điều khiển tự động rời rạc

Chương 4: Hệ phi tuyến

Chương 5: Thiết kế hệ thống

**Phần hai:** Các bài giải mẫu và đáp án chọn lọc

**Phần ba:** Đề thi và đáp án

Phần mềm **Matlab** là một công cụ mạnh để khảo sát và thiết kế hệ thống được giới thiệu cho sinh viên qua một số bài ở **Phần một** và các bài thí nghiệm điều khiển tự động.

Quyển *BÀI TẬP ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG* do Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh xuất bản, ra mắt bạn đọc lần đầu tiên vào năm 2002.

Hy vọng bộ sách *ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG* sẽ giúp ích cho sinh viên trong quá trình học tập môn học **Cơ sở điều khiển tự động và Lý thuyết điều khiển tự động**.

Mặc dù đã cố gắng sưu tầm thêm nhiều tài liệu của các trường trên thế giới, song nội dung cuốn sách khó tránh khỏi những thiếu sót và hạn chế.

Tác giả chân thành cảm ơn những ý kiến đóng góp của các bạn đồng nghiệp và bạn đọc xa gần để quyển sách ngày càng hoàn thiện hơn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các thầy giáo, cô giáo thuộc Bộ môn Điều khiển tự động Khoa Điện - Điện tử và Ban Công tác Giáo trình, Trường Đại học Bách khoa - Đại học Quốc gia TP HCM, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia TP HCM đã tạo điều kiện và giúp đỡ nhiệt tình để hoàn thành quyển sách này.

Thư góp ý xin gửi về: Bộ môn Điều khiển tự động Khoa Điện - Điện tử, Trường Đại học Bách khoa - Đại học Quốc gia TP HCM - 268 Lý Thường Kiệt, Q.10 - ĐT: 8.654.357.

**Các tác giả**

# Chương 1

## ĐẠI CƯƠNG VỀ HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN

### 1.1 KHÁI NIỆM ĐIỀU KHIỂN

#### 1.1.2 Điều khiển là gì?

Một câu hỏi khá phổ biến với những người mới làm quen với lý thuyết điều khiển là “Điều khiển là gì?”. Để có khái niệm về điều khiển chúng ta xét ví dụ sau. Giả sử chúng ta đang lái xe trên đường, chúng ta muốn xe chạy với tốc độ cố định  $40\text{km/h}$ . Để đạt được điều này mắt chúng ta phải quan sát đồng hồ đo tốc độ để biết được tốc độ của xe đang chạy. Nếu tốc độ xe dưới  $40\text{km/h}$  thì ta tăng ga, nếu tốc độ xe trên  $40\text{km/h}$  thì ta giảm ga. Kết quả của quá trình trên là xe sẽ chạy với tốc độ “gần” bằng tốc độ mong muốn. Quá trình lái xe như vậy chính là quá trình điều khiển. Trong quá trình điều khiển chúng ta cần thu thập thông tin về đối tượng cần điều khiển (quan sát đồng hồ đo tốc độ để thu thập thông tin về tốc độ xe), tùy theo thông tin thu thập được và mục đích điều khiển mà chúng ta có cách xử lý thích hợp (quyết định tăng hay giảm ga), cuối cùng ta phải tác động vào đối tượng (tác động vào tay ga) để hoạt động của đối tượng theo đúng yêu cầu mong muốn.

**Định nghĩa:** Điều khiển là quá trình thu thập thông tin, xử lý thông tin và tác động lên hệ thống để đáp ứng của hệ thống “gần” với mục đích định trước. Điều khiển tự động là quá trình điều khiển không cần sự tác động của con người.

Câu hỏi thứ hai cũng thường gặp đối với những người mới

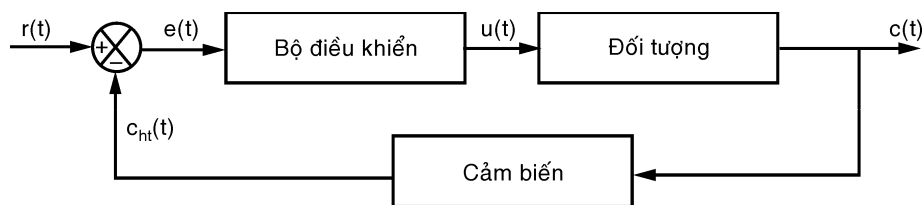


làm quen với lý thuyết điều khiển là “Tại sao cần phải điều khiển?”. Câu trả lời tùy thuộc vào từng trường hợp cụ thể, tuy nhiên có hai lý do chính là con người không thỏa mãn với đáp ứng của hệ thống hay muốn hệ thống hoạt động tăng độ chính xác, tăng năng suất, tăng hiệu quả kinh tế. Ví dụ trong lĩnh vực dân dụng, chúng ta cần điều chỉnh nhiệt độ và độ ẩm cho các căn hộ và các cao ốc tạo ra sự tiện nghi trong cuộc sống. Trong vận tải cần điều khiển các xe hay máy bay từ nơi này đến nơi khác một cách an toàn và chính xác. Trong công nghiệp, các quá trình sản xuất bao gồm vô số mục tiêu sản xuất thỏa mãn các đòi hỏi về sự an toàn, độ chính xác và hiệu quả kinh tế.

Trong những năm gần đây, các hệ thống điều khiển (HTĐK) càng có vai trò quan trọng trong việc phát triển và sự tiến bộ của kỹ thuật công nghệ và văn minh hiện đại. Thực tế mỗi khía cạnh của hoạt động hằng ngày đều bị chi phối bởi một vài loại hệ thống điều khiển. Dễ dàng tìm thấy hệ thống điều khiển máy công cụ, kỹ thuật không gian và hệ thống vũ khí, điều khiển máy tính, các hệ thống giao thông, hệ thống năng lượng, robot,... Ngay cả các vấn đề như kiểm toán và hệ thống kinh tế xã hội cũng áp dụng từ lý thuyết điều khiển tự động.

Khái niệm điều khiển thật sự là một khái niệm rất rộng, nội dung quyển sách này chỉ đề cập đến lý thuyết điều khiển các hệ thống kỹ thuật.

### 1.1.2 Các thành phần cơ bản của hệ thống điều khiển



Chú thích các ký hiệu viết tắt:

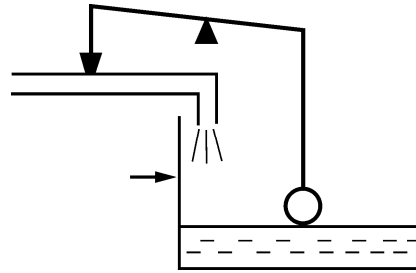
- $r(t)$  (reference input): tín hiệu vào, tín hiệu chuẩn
- $c(t)$  (controlled output): tín hiệu ra
- $c_{ht}(t)$ : tín hiệu hồi tiếp
- $e(t)$  (error): sai số
- $u(t)$ : tín hiệu điều khiển.

**Hình 1.1** Sơ đồ khối hệ thống điều khiển

Để thực hiện được quá trình điều khiển như định nghĩa ở trên, một hệ thống điều khiển bắt buộc gồm có ba thành phần cơ bản là thiết bị đo lường (cảm biến), bộ điều khiển và đối tượng điều khiển. Thiết bị đo lường có chức năng thu thập thông tin, bộ điều khiển thực hiện chức năng xử lý thông tin, ra quyết định điều khiển và đối tượng điều khiển chịu sự tác động của tín hiệu điều khiển. Hệ thống điều khiển trong thực tế rất đa dạng, sơ đồ khối ở hình 1.1 là cấu hình của hệ thống điều khiển thường gặp nhất.

Trở lại ví dụ lái xe đã trình bày ở trên ta thấy đối tượng điều khiển chính là chiếc xe, thiết bị đo lường là đồng hồ đo tốc độ và đôi mắt của người lái xe, bộ điều khiển là bộ não người lái xe, cơ cấu chấp hành là tay người lái xe. Tín hiệu vào  $r(t)$  là tốc độ xe mong muốn ( $40km/h$ ), tín hiệu ra  $c(t)$  là tốc độ xe hiện tại của xe, tín hiệu hồi tiếp  $c_{ht}(t)$  là vị trí kim trên đồng hồ đo tốc độ, sai số  $e(t)$  là sai lệch giữa tốc độ mong muốn và tốc độ hiện tại, tín hiệu điều khiển  $u(t)$  là góc quay của tay ga.

Một ví dụ khác như hệ thống điều khiển mực chất lỏng ở hình 1.2 dù rất đơn giản nhưng cũng có đầy đủ ba thành phần cơ bản kể trên. Thiết bị đo lường chính là cái phao, vị trí của phao cho biết mực chất lỏng trong bồn. Bộ điều khiển chính là cánh tay đòn mở van tùy theo vị trí hiện tại của phao, sai lệch càng lớn thì góc mở van càng lớn. Đối tượng điều khiển là bồn chứa, tín hiệu ra  $c(t)$  là mực chất lỏng trong bồn, tín hiệu vào  $r(t)$  là mực chất lỏng mong muốn. Muốn thay đổi mực chất lỏng mong muốn ta thay đổi độ dài của đoạn nối từ phao đến cánh tay đòn.



**Hình 1.2** Hệ thống điều khiển mực chất lỏng

Mục 1.5 sẽ trình bày chi tiết hơn về một số phần tử và hệ thống điều khiển thường gặp, qua đó sẽ làm nổi bật vai trò của các phần tử cơ bản trong hệ thống điều khiển.

### 1.1.3 Các bài toán cơ bản trong lĩnh vực điều khiển tự động

Trong lĩnh vực điều khiển tự động có rất nhiều bài toán cần giải quyết, tuy nhiên các bài toán điều khiển trong thực tế có thể quy vào ba bài toán cơ bản sau:

**Phân tích hệ thống:** Cho hệ thống tự động đã biết cấu trúc và thông số. Bài toán đặt ra là trên cơ sở những thông tin đã biết tìm đáp ứng của hệ thống và đánh giá chất lượng của hệ. Bài toán này luôn giải được.

**Thiết kế hệ thống:** Biết cấu trúc và thông số của đối tượng điều khiển. Bài toán đặt ra là thiết kế bộ điều khiển để được hệ thống thỏa mãn các yêu cầu về chất lượng. Bài toán nói chung là giải được.

**Nhận dạng hệ thống:** Chưa biết cấu trúc và thông số của hệ thống. Vấn đề đặt ra là xác định cấu trúc và thông số của hệ thống. Bài toán này không phải lúc nào cũng giải được.

Quyển sách này chỉ đề cập đến bài toán phân tích hệ thống và thiết kế hệ thống. Bài toán nhận dạng hệ thống sẽ được nghiên cứu trong môn học khác.

## 1.2 CÁC NGUYÊN TẮC ĐIỀU KHIỂN

Các nguyên tắc điều khiển có thể xem là kim chỉ nam để thiết kế hệ thống điều khiển đạt chất lượng cao và có hiệu quả kinh tế nhất.

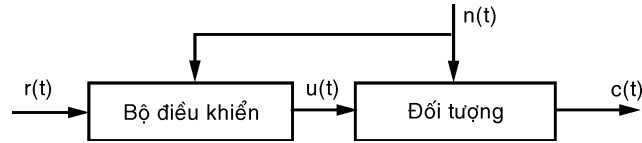
**Nguyên tắc 1:** Nguyên tắc thông tin phản hồi

Muốn quá trình điều khiển đạt chất lượng cao, trong hệ thống phải tồn tại hai dòng thông tin: một từ bộ điều khiển đến đối tượng và một từ đối tượng ngược về bộ điều khiển (dòng thông tin ngược gọi là hồi tiếp). Điều khiển không hồi tiếp (điều khiển vòng hở) không thể đạt chất lượng cao, nhất là khi có nhiễu.

Các sơ đồ điều khiển dựa trên nguyên tắc thông tin phản hồi là:

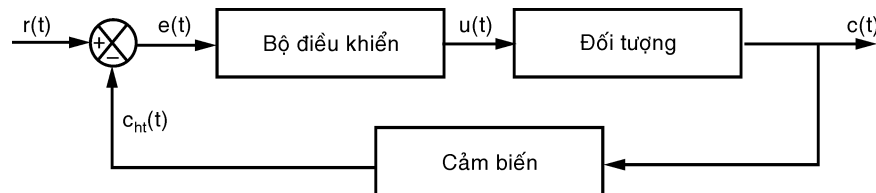
**Điều khiển bù nhiễu (H.1.3):** là sơ đồ điều khiển theo nguyên tắc bù nhiễu để đạt đầu ra  $c(t)$  mong muốn mà không cần quan sát tín hiệu ra  $c(t)$ . Về nguyên tắc, đối với hệ phức tạp thì điều

khiến bù nhiễu không thể cho chất lượng tốt.



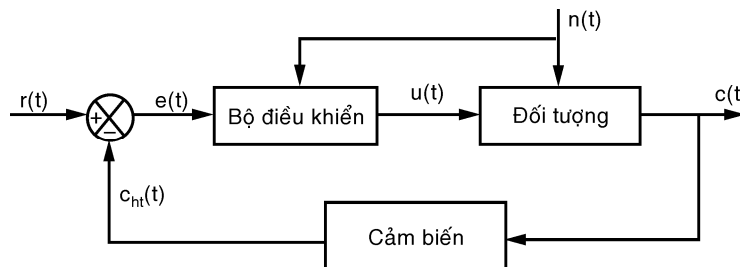
**Hình 1.3** Sơ đồ khối hệ thống điều khiển bù nhiễu

**Điều khiển sai bằng sai lệch (H.1.4):** Bộ điều khiển quan sát tín hiệu ra  $c(t)$ , so sánh với tín hiệu vào mong muốn  $r(t)$  để tính toán tín hiệu điều khiển  $u(t)$ . Nguyên tắc điều khiển này điều chỉnh linh hoạt, loại sai lệch, thử nghiệm và sửa sai. Đây là nguyên tắc cơ bản trong điều khiển.



**Hình 1.4** Sơ đồ khối hệ thống điều khiển sai bằng sai lệch

**Điều khiển phối hợp:** Các hệ thống điều khiển chất lượng cao thường phối hợp sơ đồ điều khiển bù nhiễu và điều khiển sai bằng sai lệch như hình 1.5.



**Hình 1.5** Sơ đồ khối hệ thống điều khiển phối hợp

### **Nguyên tắc 2:** Nguyên tắc đa dạng tương xứng

Muốn quá trình điều khiển có chất lượng thì sự đa dạng của bộ điều khiển phải tương xứng với sự đa dạng của đối tượng. Tính đa dạng của bộ điều khiển thể hiện ở khả năng thu thập thông tin, lưu trữ thông tin, truyền tin, phân tích xử lý, chọn quyết định,... Ý nghĩa của nguyên tắc này là cần thiết kế bộ điều khiển phù hợp với đối tượng. Hãy so sánh yêu cầu chất lượng điều

khiển và bộ điều khiển sử dụng trong các hệ thống sau:

- Điều khiển nhiệt độ bàn ủi (chấp nhận sai số lớn) với điều khiển nhiệt độ lò sấy (không chấp nhận sai số lớn).
- Điều khiển mực nước trong bồn chứa của khách sạn (chỉ cần đảm bảo luôn có nước trong bồn) với điều khiển mực chất lỏng trong các dây chuyền sản xuất (mực chất lỏng cần giữ không đổi).

**Nguyên tắc 3:** Nguyên tắc bổ sung ngoài

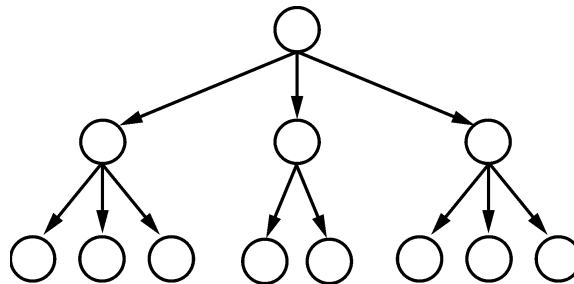
Một hệ thống luôn tồn tại và hoạt động trong môi trường cụ thể và có tác động qua lại chặt chẽ với môi trường đó. Nguyên tắc bổ sung ngoài thừa nhận có một đối tượng chưa biết (hộp đen) tác động vào hệ thống và ta phải điều khiển cả hệ thống lẫn hộp đen. Ý nghĩa của nguyên tắc này là khi thiết kế hệ thống tự động, muốn hệ thống có chất lượng cao thì không thể bỏ qua nhiều của môi trường tác động vào hệ thống.

**Nguyên tắc 4:** Nguyên tắc dự trữ

Vì nguyên tắc 3 luôn coi thông tin chưa đầy đủ phải đề phòng các bất trắc xảy ra và không được dùng toàn bộ lực lượng trong điều kiện bình thường. Vốn dự trữ không sử dụng, nhưng cần để đảm bảo cho hệ thống vận hành an toàn.

**Nguyên tắc 5:** Nguyên tắc phân cấp

Đối với một hệ thống điều khiển phức tạp cần xây dựng nhiều lớp điều khiển bổ sung cho trung tâm. Cấu trúc phân cấp thường sử dụng là cấu trúc hình cây, ví dụ như hệ thống điều khiển giao thông đô thị hiện đại, hệ thống điều khiển dây chuyền sản xuất.



**Hình 1.6** Sơ đồ điều khiển phân cấp

**Nguyên tắc 6:** Nguyên tắc cân bằng nội

Mỗi hệ thống cần xây dựng cơ chế cân bằng nội để có khả năng tự giải quyết những biến động xảy ra.

### 1.3 PHÂN LOẠI ĐIỀU KHIỂN

Có nhiều cách phân loại hệ thống điều khiển tùy theo mục đích của sự phân loại. Ví dụ nếu căn cứ vào phương pháp phân tích và thiết kế có thể phân hệ thống điều khiển thành các loại tuyến tính và phi tuyến, biến đổi theo thời gian và bất biến theo thời gian; nếu căn cứ vào dạng tín hiệu trong hệ thống ta có hệ thống liên tục và hệ thống rời rạc; nếu căn cứ vào mục đích điều khiển ta có hệ thống điều khiển ổn định hóa, điều khiển theo chương, điều khiển theo dõi,...

#### 1.3.1 Phân loại theo phương pháp phân tích và thiết kế

##### *1- Hệ thống tuyến tính - Hệ thống phi tuyến*

Hệ thống tuyến tính không tồn tại trong thực tế, vì tất cả các hệ thống vật lý đều là phi tuyến. Hệ thống điều khiển tuyến tính là mô hình lý tưởng để đơn giản hóa quá trình phân tích và thiết kế hệ thống. Khi giá trị của tín hiệu nhập vào hệ thống còn nằm trong giới hạn mà các phần tử còn hoạt động tuyến tính (áp dụng được nguyên lý xếp chồng), thì hệ thống còn là tuyến tính. Nhưng khi giá trị của tín hiệu vào vượt ra ngoài vùng hoạt động tuyến tính của các phần tử và hệ thống, thì không thể xem hệ thống là tuyến tính được. Tất cả các hệ thống thực tế đều có đặc tính phi tuyến, ví dụ bộ khuếch đại thường có đặc tính bão hòa khi tín hiệu vào trở nên quá lớn, từ trường của động cơ cũng có đặc tính bão hòa. Trong truyền động cơ khí đặc tính phi tuyến thường gặp phải là khe hở và vùng chết giữa các bánh răng, đặc tính ma sát, đàn hồi phi tuyến... Các đặc tính phi tuyến thường được đưa vào HTĐK nhằm cải thiện chất lượng hay tăng hiệu quả điều khiển. Ví dụ như để đạt thời gian điều khiển là tối thiểu trong các hệ thống tên lửa hay điều khiển phi tuyến người ta sử dụng bộ điều khiển on-off (bang-bang hay relay). Các ống phản lực được đặt cạnh động cơ để tạo ra mômen phản lực điều khiển. Các ống này thường được điều khiển theo kiểu full on - full off,

nghĩa là một lượng khí nạp vào một ống định trước trong khoảng thời gian xác định, để điều khiển tư thế của phi tuyến.

Trong quyển sách này, hệ thống tuyến tính được đưa ra phân tích và thiết kế chính yếu có thể áp dụng các kỹ thuật phân tích và đồ họa. Các hệ phi tuyến khó xử lý theo toán học và cũng chưa có một phương pháp chung nào để giải quyết cho cả một lớp hệ phi tuyến. Trong thiết kế hệ thống, thực tế ban đầu thiết kế bộ điều khiển dựa trên mô hình hệ tuyến tính bằng cách loại bỏ các đặc tính phi tuyến. Bộ điều khiển đã thiết kế được áp dụng vào mô hình hệ phi tuyến để đánh giá hoặc tái thiết kế bằng phương pháp mô phỏng.

### ***2- Hệ thống bất biến - hệ thống biến đổi theo thời gian***

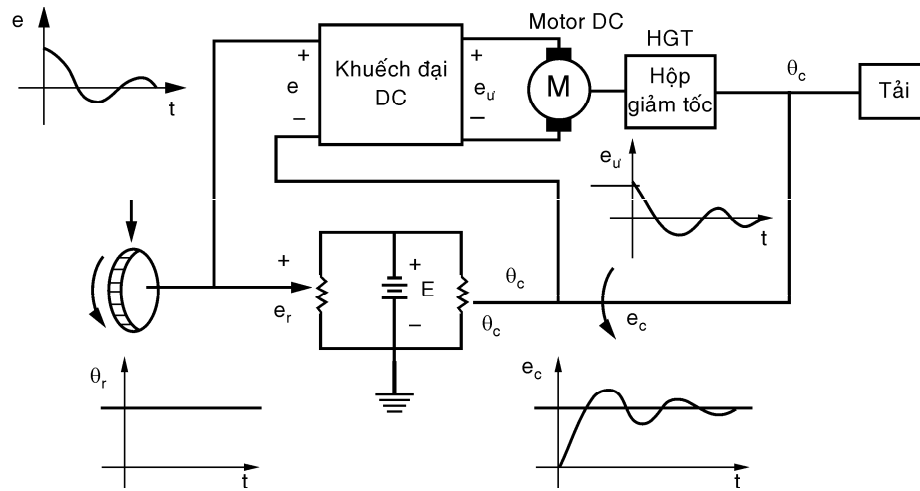
Khi các thông số của HTĐK không đổi trong suốt thời gian hoạt động của hệ thống, thì hệ thống được gọi là hệ thống bất biến theo thời gian. Thực tế, hầu hết các hệ thống vật lý đều có các phần tử trôi hay biến đổi theo thời gian. Ví dụ như điện trở dây quán động cơ bị thay đổi khi mới bị kích hay nhiệt độ tăng. Một ví dụ khác về HTĐK biến đổi theo thời gian là hệ điều khiển tên lửa, trong đó khối lượng của tên lửa bị giảm trong quá trình bay. Mặc dù hệ thống biến đổi theo thời gian không có đặc tính phi tuyến, vẫn được coi là hệ tuyến tính, nhưng việc phân tích và thiết kế loại hệ thống này phức tạp hơn nhiều so với hệ tuyến tính bất biến theo thời gian.

## **1.3.2 Phân loại theo loại tín hiệu trong hệ thống**

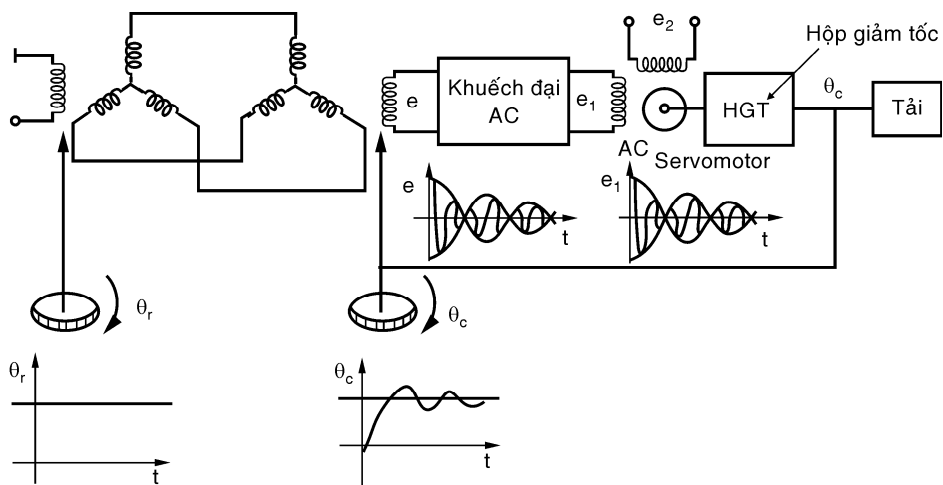
### ***1- Hệ thống liên tục***

Hệ thống liên tục là hệ thống mà tín hiệu ở bất kỳ phần nào của hệ cũng là hàm liên tục theo thời gian. Trong tất cả các HTĐK liên tục, tín hiệu được phân thành AC hay DC. Khái niệm AC và DC không giống trong kỹ thuật điện mà mang ý nghĩa chuyên môn trong thuật ngữ HTĐK. HTĐK AC có nghĩa là tất cả các tín hiệu trong hệ thống đều được điều chế bằng vài dạng sơ đồ điều chế. HTĐK DC được hiểu đơn giản là hệ có các tín hiệu không được điều chế, nhưng vẫn có tín hiệu xoay chiều. Hình 1.7 là sơ đồ một HTĐK DC kín và dạng sóng đáp ứng quá độ của hệ.

Các thành phần của HTĐK DC là biến trở, khuếch đại DC, động cơ DC, tachometer DC...



Hình 1.7 Sơ đồ HTĐK DC vòng kín



Hình 1.8 Sơ đồ HTĐK AC vòng kín

Hình 1.8 là sơ đồ một HTĐK AC có cùng chức năng như HTĐK ở hình 1.7. Trong trường hợp này, tín hiệu trong hệ đều được điều chế, nghĩa là thông tin được truyền đi nhờ một sóng mang AC. Chú ý rằng biến điều khiển đầu ra của đối tượng vẫn giống như ở HTĐK DC. HTĐK AC được sử dụng rộng rãi trong hệ thống điều khiển máy bay và tên lửa, ở đó nhiễu và tín hiệu lạ là vấn đề phải quan tâm. Với tần số



sóng mang từ 400 Hz trở lên, HTĐK AC loại bỏ được phần lớn các nhiễu tần số thấp. Các thành phần của HTĐK AC là thiết bị đồng bộ, khuếch đại AC, động cơ AC, con quay hồi chuyển, máy đo gia tốc...

Thực tế, một hệ thống có thể liên kết các thành phần AC và DC, sử dụng các bộ điều chế và các bộ giải điều chế thích ứng với tín hiệu tại các điểm khác nhau trong hệ thống.

## **2- Hệ thống rời rạc**

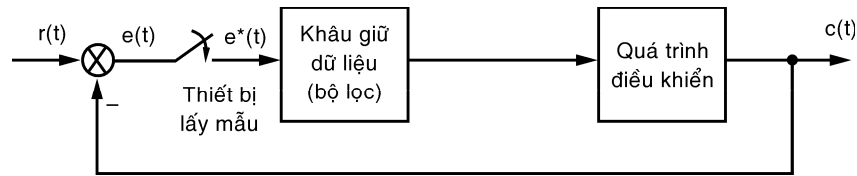
Khác với HTĐK liên tục, HTĐK rời rạc có tín hiệu ở một hay nhiều điểm trong hệ thống là dạng chuỗi xung hay mã số. Thông thường HTĐK rời rạc được phân làm hai loại: HTĐK lấy mẫu dữ liệu và HTĐK số. HTĐK lấy mẫu dữ liệu ở dạng dữ liệu xung. HTĐK số liên quan đến sử dụng máy tính số hay bộ điều khiển số vì vậy tín hiệu trong hệ được mã số hóa, mã số nhị phân chẳng hạn.

Nói chung, một HTĐK lấy mẫu dữ liệu chỉ nhận dữ liệu hay thông tin trong một khoảng thời gian xác định. Ví dụ, tín hiệu sai lệch của HTĐK chỉ có thể được cung cấp dưới dạng xung và trong khoảng thời gian giữa hai xung liên tiếp HTĐK sẽ không nhận được thông tin về tín hiệu sai lệch. HTĐK lấy mẫu dữ liệu có thể xem là một HTĐK AC vì tín hiệu trong hệ thống được điều chế xung.

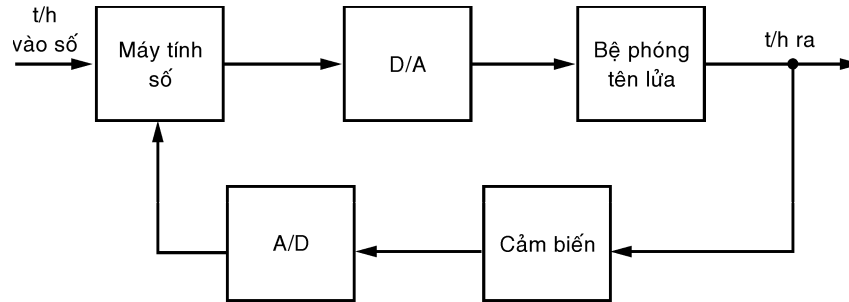
Hình 1.9 minh họa hoạt động của một hệ thống lấy mẫu dữ liệu. Tín hiệu liên tục  $r(t)$  được đưa vào hệ thống, tín hiệu sai lệch  $e(t)$  được lấy mẫu bởi thiết bị lấy mẫu, ngõ ra của thiết bị lấy mẫu là chuỗi xung tuần tự. Tốc độ lấy mẫu có thể thống nhất hoặc không. Một trong những ưu điểm quan trọng của thao tác lấy mẫu là các thiết bị đặt tiền trong hệ có thể chia sẻ thời gian để dùng chung trên nhiều kênh điều khiển. Một lợi điểm khác là nhiều ít hơn.

Do máy tính cung cấp nhiều tiện ích và mềm dẻo, điều khiển bằng máy tính ngày càng phổ biến. Nhiều hệ thống vận tải hàng không sử dụng hàng ngàn các linh kiện rời rạc chỉ chiếm một khoảng không không lớn hơn quyển sách này. Hình 1.10 trình

bày các thành phần cơ bản của bộ phận tự lái trong điều khiển tên lửa.



**Hình 1.9** Sơ đồ khối HTĐK lấy mẫu dữ liệu



**Hình 1.10** Sơ đồ khối HTĐK tên lửa

### 1.3.3 Phân loại theo mục tiêu điều khiển

#### 1- Điều khiển ổn định hóa

Mục tiêu điều khiển là kết quả tín hiệu ra bằng tín hiệu vào chuẩn  $r(t)$  với sai lệch cho phép  $e_{xl}$  (sai số ở chế độ xác lập).

$$|e(t)| = |r(t) - c(t)| \leq e_{xl}$$

Khi tín hiệu vào  $r(t)$  không đổi theo thời gian ta có hệ thống điều khiển ổn định hóa hay hệ thống điều chỉnh, ví dụ như hệ thống ổn định nhiệt độ, điện áp, áp suất, nồng độ, tốc độ,...

#### 2- Điều khiển theo chương trình

Nếu  $r(t)$  là một hàm định trước theo thời gian, yêu cầu đáp ứng ra của hệ thống sao chép lại các giá trị của tín hiệu vào  $r(t)$  thì ta có hệ thống điều khiển theo chương trình.

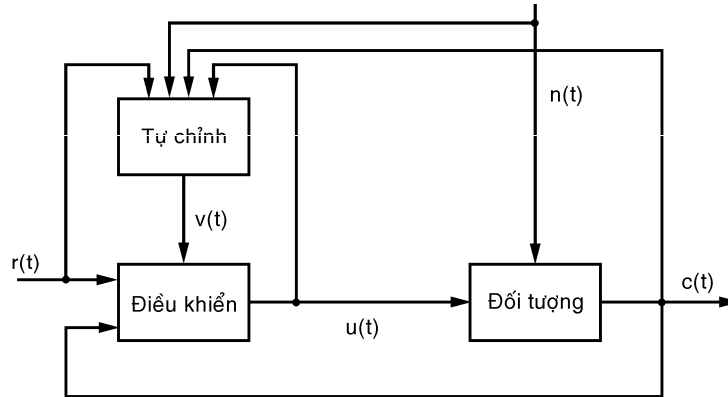
Ví dụ hệ thống điều khiển máy công cụ CNC, điều khiển tự động nhà máy xi măng Hoàng Thạch, hệ thống thu nhập và truyền số liệu hệ thống điện, quản lý vật tư ở nhà máy...

#### 3- Điều khiển theo dõi

Nếu tín hiệu tác động vào hệ thống  $r(t)$  là một hàm không biết trước theo thời gian, yêu cầu điều khiển đáp ứng ra  $c(t)$  luôn bám sát được  $r(t)$ , ta có hệ thống theo dõi. Điều khiển theo dõi được sử dụng rộng rãi trong các HTĐK vũ khí, hệ thống lái tàu, máy bay...

#### 4- Điều khiển thích nghi

Tín hiệu  $v(t)$  chỉnh định lại tham số điều khiển sao cho hệ thích nghi với mọi biến động của môi trường ngoài.



Hình 1.11 Nguyên tắc tự chỉnh định

#### 5- Điều khiển tối ưu - hàm mục tiêu đạt cực trị

Ví dụ các bài toán qui hoạch, vận trù trong kinh tế, kỹ thuật đều là các phương pháp điều khiển tối ưu.

## 1.4 LỊCH SỬ PHÁT TRIỂN LÝ THUYẾT ĐIỀU KHIỂN

### 1.4.1 Điều khiển kinh điển (classical control)

Lý thuyết điều khiển kinh điển (trước 1960) mô tả hệ thống trong miền tần số (phép biến đổi Fourier) và mặt phẳng  $s$  (phép biến đổi Laplace). Do dựa trên các phép biến đổi này, lý thuyết điều khiển kinh điển chủ yếu áp dụng cho hệ tuyến tính bất biến theo thời gian, mặt dù có một vài mở rộng để áp dụng cho hệ phi tuyến, thí dụ phương pháp hàm mô tả. Lý thuyết điều khiển kinh điển thích hợp để thiết kế hệ thống một ngõ vào - một ngõ ra (SISO: *single-input/single-output*), rất khó áp dụng cho các hệ thống nhiều ngõ vào - nhiều ngõ ra (MIMO: *multi-input/multi-*

output) và các hệ thống biến đổi theo thời gian.

Các phương pháp phân tích và thiết kế hệ thống trong lý thuyết điều khiển kinh điển gồm có phương pháp Nyquist, Bode, và phương pháp quỹ đạo nghiệm số. Để thiết kế hệ thống dùng phương pháp Nyquist và Bode cần mô tả hệ thống dưới dạng đáp ứng tần số (đáp ứng biên độ và đáp ứng pha), đây là một thuận lợi vì đáp ứng tần số có thể đo được bằng thực nghiệm. Mô tả hệ thống cần để thiết kế dùng phương pháp quỹ đạo nghiệm số là hàm truyền, hàm truyền cũng có thể tính được từ đáp ứng tần số. Hàm truyền của các hệ thống phức tạp được tính bằng cách sử dụng sơ đồ khối hay sơ đồ dòng tín hiệu. Mô tả chính xác đặc tính động học bên trong hệ thống là không cần thiết đối với các phương pháp thiết kế kinh điển, chỉ có quan hệ giữa ngõ vào và ngõ ra là quan trọng.

Các khâu hiệu chỉnh đơn giản như hiệu chỉnh vi tích phân tỉ lệ PID (*Proportional Integral Derivative*), hiệu chỉnh sớm trễ pha,... thường được sử dụng trong các hệ thống điều khiển kinh điển. Ảnh hưởng của các khâu hiệu chỉnh này đến biểu đồ Nyquist, biểu đồ Bode và quỹ đạo nghiệm số có thể thấy được dễ dàng, nhờ đó có thể dễ dàng lựa chọn được khâu hiệu chỉnh thích hợp.

#### 1.4.2 Điều khiển hiện đại (*modern control*) (từ khoảng năm 1960 đến nay)

Kỹ thuật thiết kế hệ thống điều khiển hiện đại dựa trên miền thời gian. Mô tả toán học dùng để phân tích và thiết kế hệ thống là phương trình trạng thái. Mô hình không gian trạng thái có ưu điểm là mô tả được đặc tính động học bên trong hệ thống (các biến trạng thái) và có thể dễ dàng áp dụng cho hệ MIMO và hệ thống biến đổi theo thời gian. Lý thuyết điều khiển hiện đại ban đầu được phát triển chủ yếu cho hệ tuyến tính, sau đó được mở rộng cho hệ phi tuyến bằng cách sử dụng lý thuyết của Lyapunov.

Bộ điều khiển được sử dụng chủ yếu trong thiết kế hệ thống điều khiển hiện đại là bộ điều khiển hồi tiếp trạng thái. Tùy theo cách tính vector hồi tiếp trạng thái mà ta có phương pháp phân bố cực, điều khiển tối ưu, điều khiển bền vững...

Với sự phát triển của lý thuyết điều khiển số và hệ thống rời rạc, lý thuyết điều khiển hiện đại rất thích hợp để thiết kế các bộ điều khiển là các chương trình phần mềm chạy trên vi xử lý và máy tính số. Điều này cho phép thực thi được các bộ điều khiển có đặc tính động phức tạp hơn cũng như hiệu quả hơn so với các bộ điều khiển đơn giản như PID hay sớm trễ pha trong lý thuyết kinh điển.

### 1.4.3 Điều khiển thông minh (*intelligent control*)

Điều khiển kinh điển và điều khiển hiện đại, gọi chung là điều khiển thông thường (*conventional control*) có khuyết điểm là để thiết kế được hệ thống điều khiển cần phải biết mô hình toán học của đối tượng. Trong khi đó thực tế có những đối tượng điều khiển rất phức tạp, rất khó hoặc không thể xác định được mô hình toán. Các phương pháp điều khiển thông minh như điều khiển mờ, mạng thần kinh nhân tạo, thuật toán di truyền mô phỏng/bắt chước các hệ thống thông minh sinh học, về nguyên tắc không cần dùng mô hình toán học để thiết kế hệ thống, do đó có khả năng ứng dụng thực tế rất lớn. Khuyết điểm của điều khiển mờ là quá trình thiết kế mang tính thử sai, dựa vào kinh nghiệm của chuyên gia. Nhờ kết hợp logic mờ với mạng thần kinh nhân tạo hay thuật toán di truyền mà thông số bộ điều khiển mờ có thể thay đổi thông qua quá trình học hay quá trình tiến hóa, vì vậy khắc phục được khuyết điểm thử sai. Hiện nay các bộ điều khiển thông thường kết hợp với các kỹ thuật điều khiển thông minh tạo nên các bộ điều khiển lai điều khiển các hệ thống phức tạp với chất lượng rất tốt.

## 1.5 MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ CÁC PHẦN TỬ VÀ HỆ THỐNG TỰ ĐỘNG

### 1.5.1 Các phần tử tự động

Như đã đề cập ở mục 1.1.2, một HTĐK gồm các phần tử cơ bản sau:

- \* Phần tử cảm biến, thiết bị đo lường
- \* Đối tượng hay quá trình điều khiển

- \* Thiết bị điều khiển, các bộ điều khiển thụ động và tích cực

Mục đích của phần này là trình bày một cách tóm lược một vài phần tử thường dùng trong các HTĐK và phân tích chúng qua các ví dụ minh họa, tính toán cụ thể sẽ được đề cập ở chương 2.

### **1- Các loại cảm biến, thiết bị đo lường**

Biến trở tuyến tính, biến trở góc quay dùng để chuyển đổi sự dịch chuyển thành điện áp. Ngoài ra còn có thể chuyển đổi kiểu điện cảm và điện dung... Nguyên tắc chung để đo các đại lượng không điện như nhiệt độ, quang thông, lực, ứng suất, kích thước, di chuyển, tốc độ... bằng phương pháp điện là biến đổi chúng thành tín hiệu điện. Cấu trúc thiết bị đo gồm ba thành phần: bộ phận chuyển đổi hay cảm biến, cơ cấu đo điện và các sơ đồ mạch trung gian hay mạch gia công tín hiệu ví dụ như mạch khuếch đại, chỉnh lưu, ổn định. Cảm biến xenxin làm phần tử đo lường trong các hệ bám sát góc quay, truyền chỉ thị góc quay ở cự ly xa mà không thực hiện được bằng cơ khí. Biến áp xoay hay còn gọi là biến áp quay dùng để biến đổi điện áp của cuộn sơ cấp hoặc góc quay của cuộn sơ cấp thành tín hiệu ra tương ứng với chúng. Biến áp xoay sin, cos để đo góc quay của rôto, trên đặt cuộn sơ cấp, thành điện áp tỉ lệ thuận với sin hay cos của góc quay đó. Biến áp xoay tuyến tính biến đổi độ lệch góc quay của rôto thành điện áp tỉ lệ tuyến tính. Con quay 3 bậc tự do và con quay 2 bậc tự do được sử dụng làm các bộ cảm biến đo sai lệch góc và đo tốc độ góc tuyệt đối trong các hệ thống ổn định đường ngắm của các dụng cụ quan sát và ngắm bắn.

Cảm biến tốc độ - bộ mã hóa quang học là đĩa mã trên có khắc vạch mà ánh sáng có thể đi qua được. Phía sau đĩa mã đặt phototransistor chịu tác dụng của một nguồn sáng. Động cơ và đĩa mã được gắn đồng trục, khi quay ánh sáng chiếu đến phototransistor lúc bị ngăn lại, lúc không bị ngăn lại làm cho tín hiệu ở cực colecto là một chuỗi xung. Trên đĩa mã có khắc hai vòng vạch, ngoài A trong B có cùng số vạch, nhưng lệch  $90^\circ$  (vạch A trước B là  $90^\circ$ ). Nếu đĩa mã quay theo chiều kim đồng hồ thì chuỗi xung B sẽ nhanh hơn chuỗi xung A là  $1/2$  chu kỳ và ngược lại.

Thiết bị đo tốc độ như DC Tachometer, AC Tachometer, Optical Tachometer.

Cảm biến nhiệt độ như Pt 56Ω, Pt 100Ω, Thermocouple...

## **2- Đối tượng điều khiển**

Đối tượng điều khiển có thể là thiết bị kỹ thuật, dây chuyền sản xuất, qui trình công nghệ... là mục tiêu điều khiển của con người trong các lĩnh vực khác nhau.

Các phần tử chấp hành thường dùng trong ĐKTD là các loại động cơ bước, động cơ DC, servomotor, động cơ AC, động cơ thủy lực khí nén... Động cơ bước được dùng để định vị chính xác do có cấu trúc rôto và stato khá đặc biệt. Rôto thông thường là các nam châm vĩnh cửu có cạnh được xẻ rãnh răng cưa suốt chu vi của rôto, để tập trung đường sức từ tại các mũi răng. Tương tự, stato được chế tạo thông dụng có bốn bố dây quấn xen kẽ theo các từ cực. Khi có dòng điện chạy qua một cuộn dây stato, rôto sẽ quay một góc đến vị trí cân bằng từ thông là giao điểm của hai răng stato và rôto. Thay đổi thứ tự các cuộn dây 1, 2, 3, 4 rôto sẽ lệch một góc là 90°. Có ba cách điều khiển động cơ bước: điều khiển hành trình năng lượng thấp, điều khiển thường, điều khiển 1/2 bước. Vì cuộn dây stato có điện trở thuần rất nhỏ khoảng 0,2Ω do vậy thường điều khiển bằng các nguồn dòng thông dụng nhất là transistor, Fet...

Một loại đo lường điều khiển khác cũng thường gặp trong công nghiệp là hệ thống nhiệt, ví dụ như lò nung trong dây chuyền sản xuất gạch men, lò sấy trong dây chuyền chế biến thực phẩm, hệ thống làm lạnh trong các dây chuyền chế biến thủy sản. Yêu cầu điều khiển đối với hệ thống nhiệt thường là điều khiển ổn định hòa hoặc điều khiển theo chương trình.

Mô hình toán của động cơ DC và lò nhiệt sẽ được trình bày ở mục 2.2.2.

## **3- Kỹ thuật giao tiếp máy tính**

Thiết bị điều khiển rất đa dạng, có thể là một mạch RC, mạch khuếch đại thuật toán, mạch xử lý hay máy tính PC. Trước đây các bộ điều khiển như PID, sớm trễ pha thường được thực hiện bằng các mạch rời (xem mục 2.2.2.2). Gần đây do sự phát triển của lý thuyết điều khiển rời rạc và kỹ thuật vi xử lý các bộ điều khiển trên đã được thực thi bằng các chương trình phần



mềm chạy trên vi xử lý hay máy tính. Hiện nay máy tính đã khẳng định là thiết bị điều khiển đa năng và tin cậy. Phần dưới đây sẽ trình bày một số vấn đề liên quan đến kỹ thuật giao tiếp máy tính.

### **Bộ chuyển đổi ADC và DAC**

Hình 1.12 là sơ đồ Card A/D và D/A 8 bit. Trong các ứng dụng cần độ chính xác cao hơn có thể sử dụng card A/D và D/A 12 bit.

Card chuyển đổi A/D và D/A 12 bit PCL-711B có đặc điểm:

- Chuyển đổi A/D có độ phân giải 12 bit.
- Cho phép 8 ngõ vào tương tự đơn.
- Tám ngõ vào tương tự có thể lập trình được  $\pm 5V$ ,  $\pm 2,5V$ ,  $\pm 1,25V$ ,  $\pm 0,625V$ ,  $\pm 0,3125V$ .
- Mức IRQ (ngắt) có thể lập trình được dùng cho việc truyền dữ liệu A/D.
- Một kênh D/A 12 bit với tầm điện áp  $0\div 5V$  hay  $0\div 10V$ .
- Ngõ ra số D/O 16 bit, ngõ vào số D/I 16 bit.
- Khởi động phần mềm, trigơ tần số lập trình được và bộ trigơ bên ngoài.
- Chương trình điều khiển giao diện thân thiện với người sử dụng.

### **Card giao tiếp với máy tính**

Ví dụ Card giao tiếp sử dụng IC8255 gắn trên slot mở rộng của Main Board máy tính (H.1.13).

### **Các loại giao thức truyền tin**

RS232C serial Interface, chấu nối 25 chân dùng để truyền dữ liệu nối tiếp với tốc độ nhỏ hơn 20.000 *bits/second* (năm 1969).

Khoảng 1975 đến 1977 áp dụng RS-422, RS-423, RS-449. RS-449 chấu nối 37 chân, tốc độ truyền có thể nhanh gấp năm lần so với RS-232C.

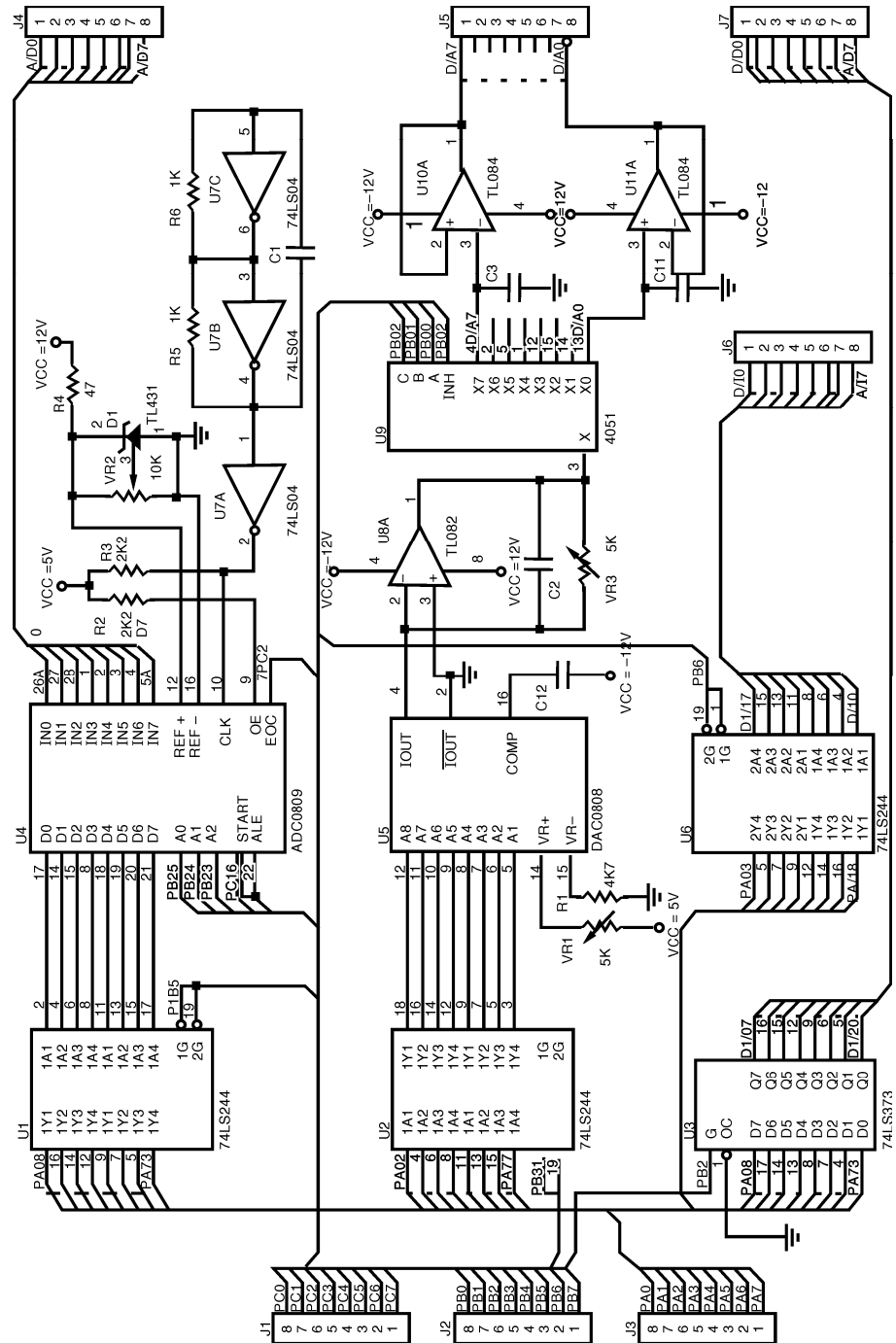
Vào năm 1970-1975 phát triển Bus dữ liệu song song với IEEE-488.

Năm 1978 - IEEE - 583 có slots cho 25 moduls, nối trực tiếp với Bus I/O của máy tính, nối song song tới 7 CRATES.

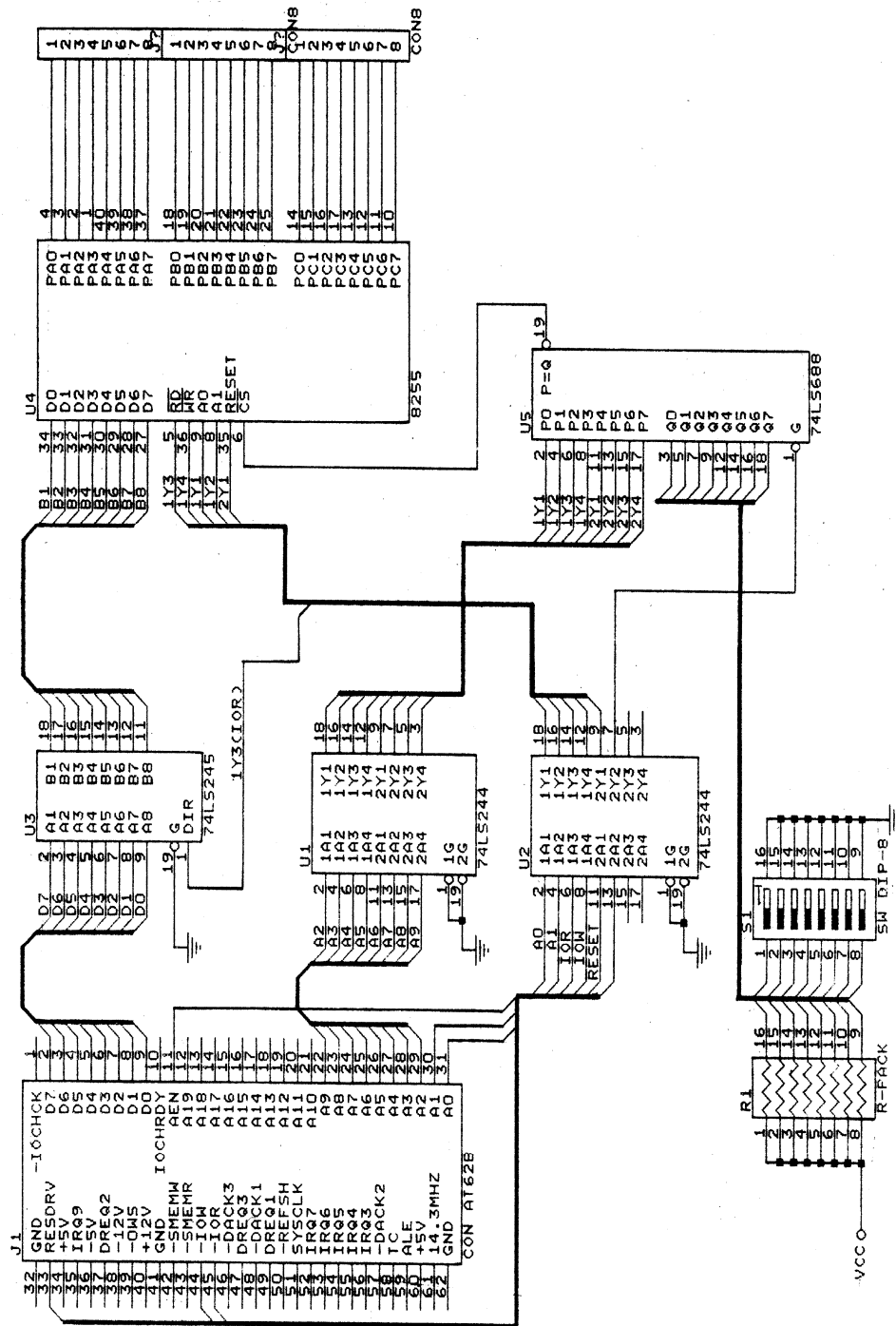
### **Mạng cục bộ - Local Area Networks (LAN)**

Hệ đơn kênh IEEE - 802.4 Single - Channel Systems

Tốc độ dữ liệu  $5 \div 10$  megabits/second, tần số (MHz) đối với binary 1 là  $5 \div 10$  MHz, binary 0 tăng gấp hai lần  $10 \div 20$  MHz.



Hình 1.12 Card AD và DA 8 bit



Hình 1.13 Card xuất nhập

Mạng giải rộng IEEE - 802.4 Broadband Networks có khả năng cung cấp cho nhiều mạng LAN.

Giao diện hệ thống mở (*The Open Systems Interface*) năm 1979; Ethernet năm 1980.

### Mạng diện rộng - Wide Area Network (WAN)

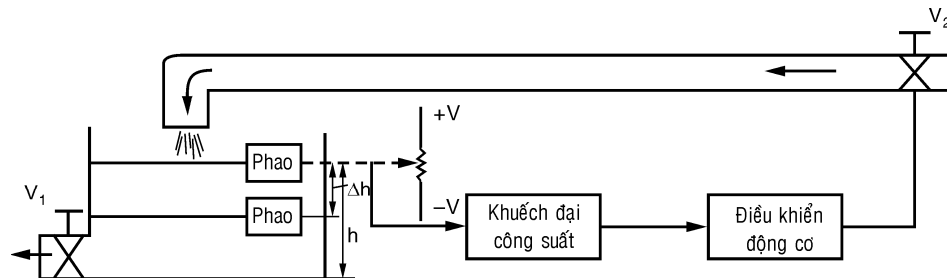
Sử dụng giao thức truyền tin Transport Control Protocol/Internet Protocol (TCP/IP).

## 1.5.2 Các ứng dụng của hệ thống điều khiển tự động

1- Hình 1.14 minh họa một hệ thống điều khiển mức chất lỏng trong bể.

Tốc độ dòng chảy ngõ ra qua van  $V_1$  là biến đổi, hệ thống có thể duy trì mức chất lỏng  $h = \text{const}$  với sai số cho phép khá chính xác. Nếu mức chất lỏng trong bể không đúng, một điện áp sai lệch được tạo ra qua khuếch đại đưa vào bộ điều khiển động cơ điều chỉnh van  $V_2$  để khôi phục lại mức chất lỏng mong muốn bằng cách điều chỉnh tốc độ dòng chảy ngõ vào.

Trong trường hợp dòng chảy vào có tốc độ hằng số, phao có hai cặp tiếp điểm thường đóng, thường mở để điều khiển đóng mở động cơ điện AC. Để tránh động cơ bị đóng ngắt không dứt khoát, tạo hai mức tương ứng vùng trễ Trigger Schmidt  $\Delta h$ .

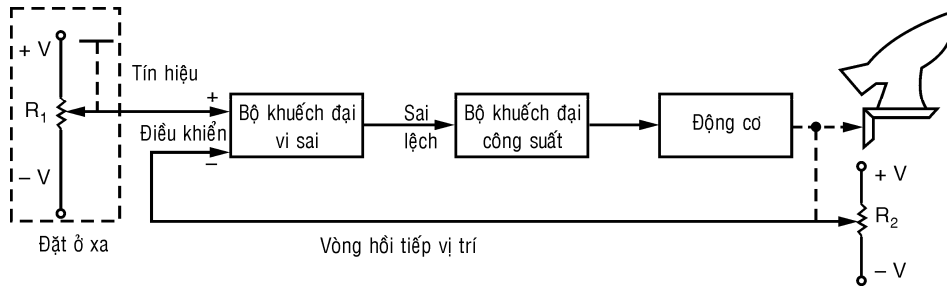


**Hình 1.14** Hệ thống điều khiển tự động mức chất lỏng trong bể

2- Hình 1.15 minh họa một hệ thống định vị dùng cho bộ phóng tên lửa.

Hệ thống hồi tiếp này được thiết kế định vị bộ phóng khá chính xác dựa trên các lệnh từ biến trở  $R_1$  là tín hiệu vào được đặt ở xa hệ thống. Biến trở  $R_2$  cho tín hiệu hồi tiếp trở về bộ

khuếch đại vị sai, hoạt động như một bộ phát hiện sai lệch. Nếu có sai lệch, được khuếch đại đưa đến động cơ, điều chỉnh vị trí trục ngõ ra tương ứng với vị trí trục ngõ vào và sai lệch bằng 0.

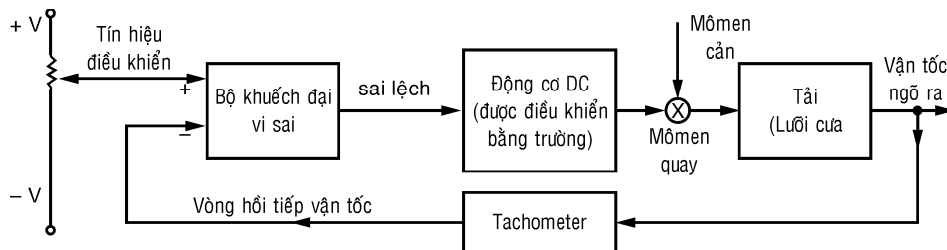


**Hình 1.15** Một hệ thống tự động định vị trí dùng cho bệ phóng tên lửa

3- Một phiên bản về điều khiển tự động vận tốc của một động cơ một chiều (điều khiển bằng trường) được minh họa ở hình 1.16.

Hệ thống hồi tiếp này có khả năng duy trì vận tốc ngõ ra không đổi một cách tương đối mặc dù có thể xuất hiện mômen cản.

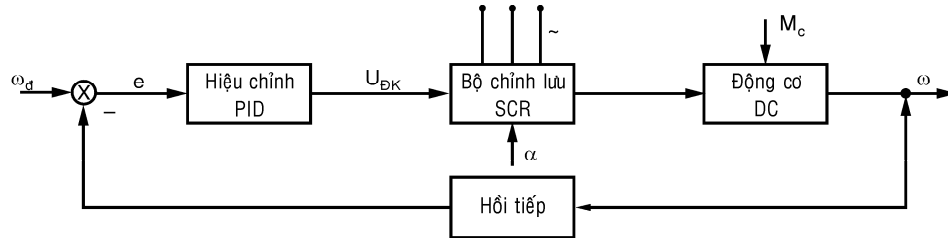
Tachometer là thành phần hồi tiếp, biến đổi vận tốc sang điện áp tỉ lệ đưa về bộ khuếch đại vị sai. Nếu vận tốc ngõ ra khác với vận tốc mong muốn, bộ khuếch đại vị sai tạo ra tín hiệu sai lệch điều chỉnh là dòng, thay đổi trường trong động cơ để khôi phục lại vận tốc ngõ ra mong muốn.



**Hình 1.16** Điều khiển tự động vận tốc cho một động cơ DC được điều khiển bằng trường

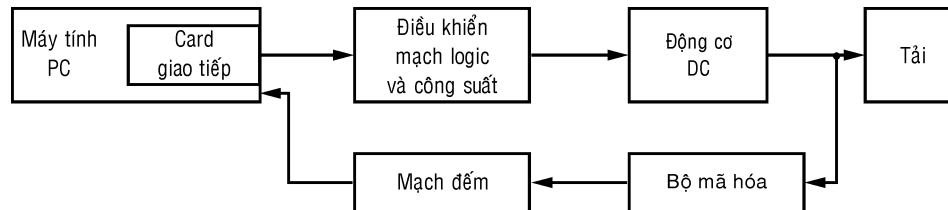
4- Hình 1.17 là sơ đồ khối HTĐK vận tốc động cơ DC bằng SCR. Bộ điều khiển vi tích phân tỉ lệ PID, điều khiển góc kích  $\alpha$

bộ chỉnh lưu SCR, thay đổi vận tốc sao cho  $\omega = \omega_{đặt}$ . Mục tiêu điều khiển đạt sai số xác lập bằng 0. Nguyên tắc kích SCR thường được sử dụng là tuyến tính góc  $\alpha$ , phương pháp cosin và phương pháp xung - số. Đặc tính cơ bản của động cơ DC trong vòng điều khiển hồi tiếp được cải thiện, giữ được tốc độ ổn định khi phụ tải thay đổi. Kí hiệu  $\omega_d$  - vận tốc đặt mong muốn,  $M_c$  - mômen cản tác động lên động cơ.



**Hình 1.17** Sơ đồ khối HTĐK vận tốc động cơ DC bằng SCR

5- Sơ đồ khối HTĐK định vị bằng máy tính được trình bày ở hình 1.18.



**Hình 1.18** HTĐK định vị bằng máy tính

Card giao tiếp IC 8255, bộ mã hóa Encoder loại cảm biến 1000 xung khi động cơ quay hết một vòng. Tăng độ chính xác bằng cách hồi tiếp vị trí và thay đổi vận tốc động cơ để dừng đúng vị trí mong muốn.

6- Robot là một lĩnh vực rất quan trọng trong ứng dụng các HTĐK.

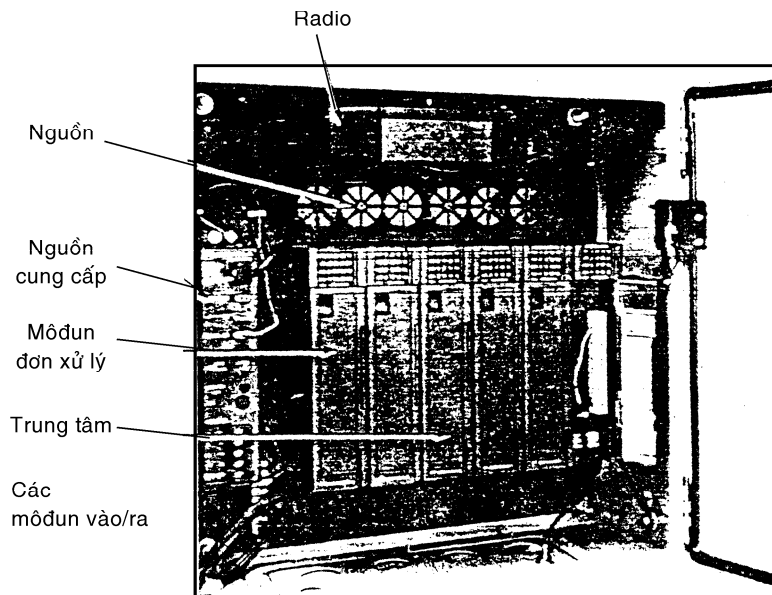
Vào thập niên 1960, người ta bắt đầu nhận ra Robot là một công cụ quan trọng để trợ giúp công việc chế tạo, từ đó các ứng dụng của chúng trong nhiều hệ thống chế tạo khác nhau đã được

phát triển nhanh chóng. Lý thuyết điều khiển tự động, nguyên tắc điều khiển thích nghi, các hàm Lyapunov... được áp dụng để có được Robot cử động theo ý muốn hay lực cần thiết. Lĩnh vực của Robotics cũng tùy thuộc vào cách sử dụng các cảm biến quan sát và các máy tính để lập trình cho Robot hoàn thành công việc theo yêu cầu.

Robot đã được sáng tạo ra để thực hiện nhiều công việc khác nhau, làm cầu nối giữa các lĩnh vực chế tạo, các nhiệm vụ vận chuyển không gian và chăm sóc y tế. Ứng dụng chủ yếu của Robot là tự động hóa quá trình sản xuất. Robot được sử dụng trong dây chuyền sản xuất xe hơi, là một thành phần trong tàu con thoi không gian của NASA, là bạn giúp việc cho con người ... Robot trợ giúp trong các bệnh viện, thực hiện các công việc của y tá chăm sóc bệnh nhân. Các Robot này sử dụng các cảm biến quan sát, siêu âm và hồng ngoại ... điều khiển thang máy, tránh các vật cản dọc theo đường đi, mang các khay thức ăn theo yêu cầu, lấy thuốc hay các vật mẫu của phòng thí nghiệm, ghi lại tình trạng sức khỏe của người bệnh, báo cáo công việc quản lý ...

7- SCADA (*Supervisory Control and Data Acquisition*) giám sát, điều khiển và thu thập dữ liệu.

Motorola SCADA được minh họa ở hình 1.19.

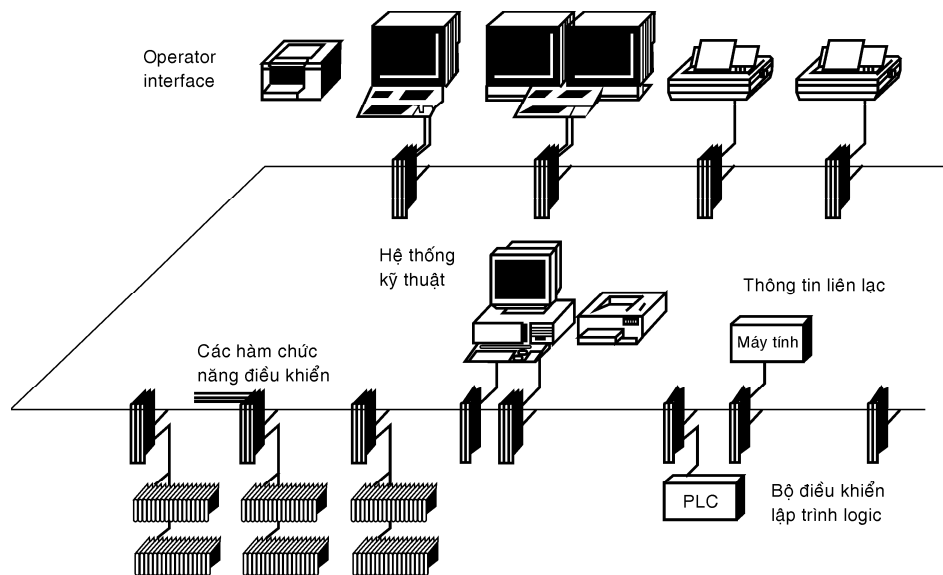




**Hình 1.19** Motorola SCADA

8- Trong điều khiển on-off các đối tượng khác nhau như thang máy, hệ điều hành phân phối điện, các dây chuyền sản xuất, hệ thống phân cấp, điều khiển các quá trình công nghệ ... thường sử dụng bộ logic lập trình được PLC – Programmable logic Control. PLC là một máy tính số công nghiệp bao gồm bộ xử lý, bộ nhớ, bộ điều khiển và thiết bị vào – ra.

9- Hình 1.20 là sơ đồ hệ thống điều khiển quá trình phân phối DCS có sử dụng PLC ở các nhánh.

**Hình 1.20** Hệ thống điều khiển phân phối DCS

Tổng quát, một hệ thống điều khiển phân phối của một dây chuyền sản xuất có thể bao gồm nhiều hệ thống điều khiển máy công cụ CNC, DNC (*Direct Numerical Control*), các Robot công nghiệp cho từng công đoạn, các bộ PLC lập trình mềm dẻo, các moduls thu thập và xử lý dữ liệu, bộ điều khiển trung tâm...

Xu hướng của các sản phẩm tự động hóa trên thế giới là mức độ thông minh của chúng ngày càng cao. Các hệ thống điều khiển tập trung sẽ chuyển dần sang các hệ thống phân tán có hội thoại với nhau liên kết thành mạng. Thiết kế sản phẩm, sẽ được hỗ trợ

của máy tính tới mức tối đa với các thư viện, các chương trình thiết kế đặc chủng có thiết bị ngoại vi mạnh.

Các hệ thống CAD/CAM có độ linh hoạt cao đáp ứng các nhu cầu thay đổi mẫu mã sản phẩm nhanh phù hợp với thị hiếu người tiêu dùng.

Máy tính và Robot sẽ làm cuộc cách mạng công nghiệp thứ hai trên thế giới. Các dây chuyền công nghệ sẽ được mạng máy tính điều khiển (CIM) đảm bảo sản phẩm có chất lượng cao và giá thành rẻ.

Ngành vận chuyển bằng đường ray và đường không đã đạt được những tiến bộ vĩ đại: hệ thống xe lửa điện từ ở Nhật, Berlin, Mỹ với tốc độ siêu cao, buồng lái tiên tiến của McDonnell Douglas với hệ thống tự lái. Các hệ thống quân sự: máy bay, tàu ngầm chạy bằng năng lượng hạt nhân, tàu hiệu ứng bề mặt, tàu cánh ngầm. Các hệ thống điều khiển các bộ phận trong y khoa: các bộ phận nhân tạo trong cơ thể, điều khiển tim của con người...

Hệ thống điều khiển số máy công cụ theo chương trình (CNC) tạo ra các phương pháp gia công mới có tính vệ sinh môi trường cao như phương pháp gia công bằng lazer, điện hóa, siêu âm.

*10- Tự động hóa khép kín – hệ sinh thái công nghiệp loại bỏ các phế thải làm ô nhiễm môi trường.*

Các phế thải ở mỗi khâu được nghiên cứu để dùng như dạng nguyên liệu cho khâu kế tiếp của một ngành sản xuất khác.

Nhà máy tự động hóa - phân hệ sinh thái công nghiệp: Tự động hóa theo bề rộng và bề sâu theo chu trình khép kín: thiết kế → chuẩn bị sản xuất → sản xuất và xử lý phế thải → lắp ráp → thử nghiệm → thiết kế...

Hệ tự động hóa quản lý sản xuất mức độ tích hợp cao; hệ tự động hóa thiết kế và quản lý từ lập kế hoạch lịch tác nghiệp, điều hành, quản lý tác nghiệp quá trình sản xuất và điều khiển thiết bị.

# MÔ TẢ TOÁN HỌC HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN LIÊN TỤC

## 2.1 KHÁI NIỆM

Đối tượng nghiên cứu của lý thuyết điều khiển rất đa dạng và có bản chất vật lý khác nhau như hệ thống điều khiển động cơ, lò nhiệt, máy bay, phản ứng hóa học... Do đó, cần có cơ sở để phân tích, thiết kế các hệ thống điều khiển có bản chất vật lý khác nhau, cơ sở đó chính là toán học. Tổng quát quan hệ giữa tín hiệu vào và tín hiệu ra của hệ thống tuyến tính có thể biểu diễn bằng phương trình vi phân bậc cao. Việc khảo sát hệ thống dựa vào phương trình vi phân bậc cao thường gặp nhiều khó khăn. Có hai phương pháp mô tả toán học hệ thống tự động giúp cho việc khảo sát hệ thống dễ dàng hơn, đó là *phương pháp hàm truyền đạt* và *phương pháp không gian trạng thái*. Phương pháp hàm truyền đạt chuyển quan hệ phương trình vi phân thành quan hệ phân thức đại số nhờ phép biến đổi Laplace, trong khi đó phương pháp không gian trạng thái biến đổi phương trình vi phân bậc cao thành hệ phương trình vi phân bậc nhất bằng cách đặt các biến phụ (biến trạng thái). Mỗi phương pháp mô tả hệ thống đều có những ưu điểm riêng. Trong quyển sách này chúng ta sẽ mô tả hệ thống bằng cả hai phương pháp.

## 2.2 HÀM TRUYỀN ĐẠT VÀ ĐẠI SỐ SƠ ĐỒ KHỐI

### 2.2.1 Phép biến đổi Laplace

#### 1- Định nghĩa

Cho  $f(t)$  là hàm xác định với mọi  $t \geq 0$ , biến đổi Laplace của  $f(t)$  là:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \quad (2.1)$$

trong đó:  $s$  - là biến phức (biến Laplace)  $s = \sigma + j\omega$

$\mathcal{L}$  - là toán tử biến đổi Laplace

$F(s)$  - là ảnh của hàm  $f(t)$  qua phép biến đổi Laplace.

Biến đổi Laplace tồn tại khi tích phân ở biểu thức định nghĩa (2.1) hội tụ.

#### 2- Tính chất của phép biến đổi Laplace

##### Tính tuyến tính

Nếu hàm  $f_1(t)$  có biến đổi Laplace là  $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s)$  và hàm  $f_2(t)$  có biến đổi Laplace là  $\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s)$  thì:

$$\mathcal{L}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s) \quad (2.2)$$

##### Ảnh của đạo hàm

Nếu hàm  $f(t)$  có biến đổi Laplace là  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  thì:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^+) \quad (2.3)$$

trong đó  $f(0^+)$  là điều kiện đầu.

Nếu điều kiện đầu bằng 0 thì:

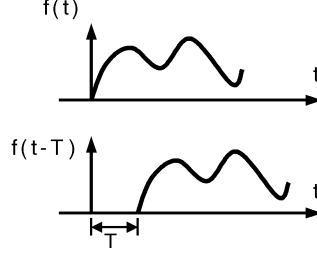
$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) \quad (2.4)$$

##### Ảnh của tích phân

Nếu hàm  $f(t)$  có biến đổi Laplace là  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  thì:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s} \quad (2.5)$$

### Định lý chậm trễ



**Hình 2.1** Làm trễ hàm  $f(t)$  một thời gian là  $T$

Nếu  $f(t)$  được làm trễ một khoảng thời gian  $T$ , ta có hàm  $f(t-T)$ . Khi đó:

$$\mathcal{L}\{f(t-T)\} = e^{-Ts} \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-Ts} \cdot F(s) \quad (2.6)$$

### Định lý giá trị cuối

Nếu hàm  $f(t)$  có biến đổi Laplace là  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  thì:

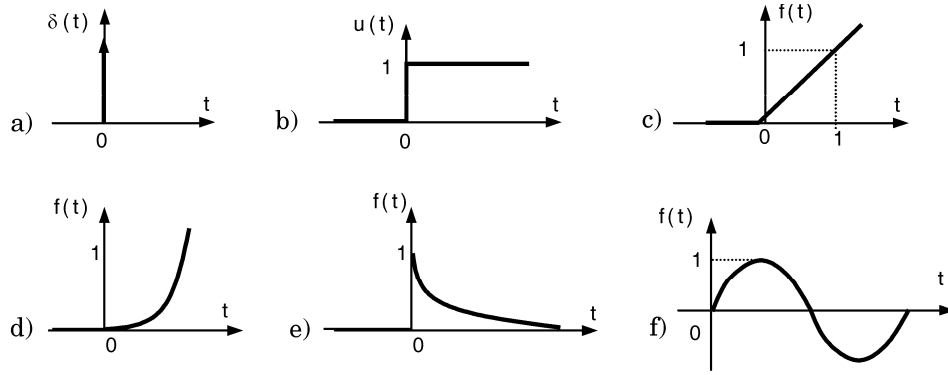
$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (2.7)$$

### 3- Biến đổi Laplace của một số hàm cơ bản

Khi khảo sát hệ thống tự động người ta thường đặt tín hiệu vào là các tín hiệu cơ bản. Ví dụ như để khảo sát hệ thống điều khiển ổn định hóa tín hiệu vào được chọn là hàm nấc, để khảo sát hệ thống điều khiển theo dõi tín hiệu vào được chọn là hàm dốc, nhiễu tác động vào hệ thống có thể mô tả bằng hàm dirac. Tín hiệu ra của hệ thống tự động cũng có dạng là tổ hợp của các tín hiệu cơ bản như hàm nấc, hàm mũ, hàm sin, ... Do đó trong mục này chúng ta xét biến đổi Laplace của các hàm cơ bản để sử dụng trong việc phân tích và thiết kế hệ thống ở những chương sau.

#### Hàm xung đơn vị (hàm dirac) (H.2.2a)

Hàm xung đơn vị thường được sử dụng để mô tả nhiễu tác động vào hệ thống.

**Hình 2.2** Các hàm cơ bản

- a) Hàm xung đơn vị;    b) Hàm nấc đơn vị;    c) Hàm dốc đơn vị  
d) Hàm parabol;    e) Hàm mũ;    f) Hàm sin

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t \neq 0 \\ \infty & \text{nếu } t = 0 \end{cases} \quad \text{thỏa} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2.8)$$

Theo định nghĩa:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{+\infty} \delta(t) \cdot e^{-st} dt = \int_0^{0^+} \delta(t) \cdot e^{-st} dt = \int_0^{0^+} \delta(t) \cdot e^{-0} dt = 1 \quad (2.9)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

#### Hàm nấc đơn vị (H.2.2b)

Trong các hệ thống điều khiển ổn định hóa, tín hiệu vào có dạng hàm nấc đơn vị.

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } t \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } t < 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Theo định nghĩa phép biến đổi Laplace ta có:

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{+\infty} u(t) \cdot e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^{+\infty} = -\left(\frac{e^{-\infty}}{s} - \frac{e^{-0}}{s}\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s} \quad (2.11)$$

**Hàm dốc đơn vị (hàm RAMP) (H.2.2c)**

Hàm dốc đơn vị thường được sử dụng làm tín hiệu vào để khảo sát hệ thống điều khiển theo dõi.

$$r(t) = t.u(t) = \begin{cases} t & \text{nếu } t \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } t < 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Theo định nghĩa

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t).e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} t.e^{-st} dt = \left[ -\frac{t.e^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right]_0^{+\infty}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{t.u(t)\} = \frac{1}{s^2} \quad (2.13)$$

Cũng có thể dùng tính chất ảnh của tích phân để tìm được biến đổi Laplace của hàm dốc đơn vị như sau:

$$\text{Để ý rằng: } r(t) = t.u(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$$

Mặt khác:  $\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$  (biến đổi Laplace của hàm nấc đơn vị).

Nên theo tính chất ảnh của tích phân ta có:

$$\mathcal{L}\{r(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t u(\tau) d\tau\right\} = \frac{\mathcal{L}\{u(t)\}}{s} = \frac{1}{s^2}$$

Dùng tính chất ảnh của tích phân có thể dễ dàng chứng minh được:

$$\mathcal{L}\{t^n u(t)\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (2.14)$$

Trường hợp  $n = 2$  ta có hàm parabol (H.2.2d).

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^2}{2} u(t)\right\} = \frac{1}{s^3}$$

**Hàm mũ**

$$f(t) = e^{-at}.u(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{nếu } t \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } t < 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Theo định nghĩa ta có:

$$\mathcal{L}\{e^{-at}.u(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-at}.e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s+a)t} dt = \left[ -\frac{e^{-(s+a)t}}{s+a} \right]_0^{+\infty}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{e^{-at}.u(t)\} = \frac{1}{s+a} \quad (2.16)$$

**Hàm sin:**  $f(t) = (\sin \omega t).u(t) = \begin{cases} \sin \omega t & \text{nếu } t \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } t < 0 \end{cases} \quad (2.17)$

Để ý công thức Euler:  $\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$

Theo định nghĩa ta có:

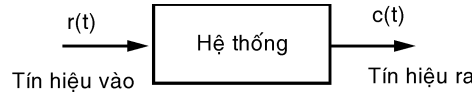
$$\mathcal{L}\{(\sin \omega t)u(t)\} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}.e^{-st} dt = \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{(\sin \omega t)u(t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (2.18)$$

Phần trên vừa trình bày biến đổi Laplace của các hàm cơ bản. Biến đổi Laplace của các hàm khác có thể tra bảng biến đổi Laplace ở phụ lục A.

## 2.2.2 Hàm truyền đạt

### 1- Định nghĩa



**Hình 2.3** Tín hiệu vào và tín hiệu ra của hệ thống tự động

Quan hệ giữa tín hiệu vào và tín hiệu ra của mọi hệ thống tuyến tính bất biến liên tục đều có thể mô tả bởi phương trình vi phân hệ số hằng:

$$a_0 \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dc(t)}{dt} + a_n c(t) =$$

$$= b_0 \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dr(t)}{dt} + b_m r(t) \quad (2.19)$$



trong đó các hệ số  $a_i (i = \overline{0, n})$  và  $b_j (j = \overline{0, m})$  là thông số của hệ thống ( $a_0 \neq 0$ ,  $b_0 \neq 0$ );  $n$  là bậc của hệ thống. Hệ thống được gọi là hợp thức (*proper*) nếu  $n \geq m$ , hệ thống được gọi là không hợp thức nếu  $n < m$ . Chỉ có các hệ thống hợp thức mới tồn tại trong thực tế.

Khảo sát hệ thống dựa vào phương trình vi phân (2.19) rất khó khăn. Một ví dụ đơn giản là giả sử ta biết tất cả các thông số của hệ thống và biết tín hiệu vào, muốn tìm đáp ứng của hệ thống ta phải giải phương trình vi phân cấp  $n$ , một công việc không dễ dàng chút nào. Do đó ta cần một biểu diễn toán học khác giúp cho việc nghiên cứu hệ thống tự động dễ dàng hơn. Nhờ phép biến đổi Laplace, ta có thể thực hiện được điều này.

Giả sử điều kiện đầu bằng 0, biến đổi Laplace hai vế phương trình (2.19) ta được:

$$\begin{aligned} (a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n) C(s) &= (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m) R(s) \\ \Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \\ \text{Đặt: } G(s) &= \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \end{aligned} \quad (2.20)$$

$G(s)$  gọi là hàm truyền của hệ thống.

**Định nghĩa:** Hàm truyền của một hệ thống là tỉ số giữa biến đổi Laplace của tín hiệu ra và biến đổi Laplace của tín hiệu vào khi điều kiện đầu bằng 0.

Cần nhấn mạnh rằng mặc dù hàm truyền được định nghĩa là tỉ số giữa biến đổi Laplace của tín hiệu ra và biến đổi Laplace của tín hiệu vào nhưng hàm truyền không phụ thuộc vào tín hiệu ra và tín hiệu vào mà chỉ phụ thuộc vào bậc và thông số của hệ thống (để ý vế phải của biểu thức (2.20)), do đó ta có thể dùng hàm truyền để mô tả hệ thống. Nói cách khác dựa vào hàm truyền ta có thể đánh giá được đặc tính của hệ thống tự động. Việc mô tả hệ thống tự động bằng phương trình vi phân (2.19) hay hàm truyền (2.20) là hoàn toàn tương đương, tuy nhiên khảo sát hệ thống dựa vào hàm truyền dễ dàng hơn nhiều do hàm

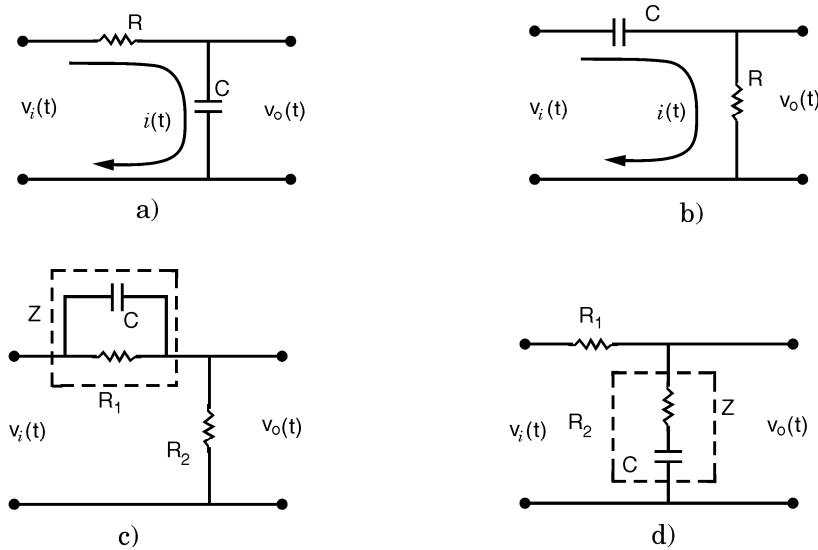
truyền là một phân thức đại số không có phép tính tích phân cũng như vi phân.

Sau đây chúng ta xét hàm truyền của một số khâu hiệu chỉnh và các đối tượng điều khiển thường gặp.

## 2- Hàm truyền đạt của các khâu hiệu chỉnh

Trong hệ thống tự động các khâu hiệu chỉnh chính là các bộ điều khiển đơn giản được sử dụng để biến đổi hàm truyền đạt của hệ thống nhằm mục đích tăng tính ổn định, cải thiện đáp ứng và giảm thiểu ảnh hưởng của nhiễu lên chất lượng của hệ thống. Thường khâu hiệu chỉnh là các mạch điện. Có hai dạng mạch hiệu chỉnh là mạch hiệu chỉnh thụ động và mạch hiệu chỉnh tích cực. Mạch hiệu chỉnh thụ động không có các bộ khuếch đại, độ lợi của các mạch này thường nhỏ hơn hay bằng 1. Ngược lại mạch hiệu chỉnh tích cực có các khâu khuếch đại, độ lợi của các mạch này thường lớn hơn 1. Phần này trình bày hàm truyền một số khâu hiệu chỉnh thường được sử dụng trong thiết kế hệ thống. Đặc tính của các khâu hiệu chỉnh này sẽ được phân tích ở các chương sau.

### Khâu hiệu chỉnh thụ động



**Hình 2.4** Các khâu hiệu chỉnh thụ động

a) Khâu tích phân bậc một; b) Khâu vi phân bậc một

*c) Khâu sớm pha;*

*d) Khâu trễ pha*

□ *Khâu tích phân bậc một* (H.2.4a)

Quan hệ giữa dòng điện và điện áp trên tụ  $C$  cho ta:

$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} = C \frac{dv_o(t)}{dt}$$

Theo định luật Kirchoff ta có:

$$v_R(t) + v_C(t) = v_i(t)$$

$$\Rightarrow R.i(t) + v_C(t) = v_i(t) \Rightarrow RC \frac{dv_o(t)}{dt} + v_o(t) = v_i(t) \quad (2.21)$$

Biểu thức (2.21) chính là phương trình vi phân mô tả khâu tích phân bậc một. Giả sử điều kiện đầu bằng 0, biến đổi Laplace hai vế biểu thức (2.21), ta được:

$$RCsV_o(s) + V_o(s) = V_i(s) \Rightarrow G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

Đặt  $T = RC$ , hàm truyền của khâu tích phân bậc nhất được viết lại:

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1} \quad (2.22)$$

Bằng cách tương tự như trên ta có thể dễ dàng rút ra hàm truyền của các khâu hiệu chỉnh sau:

□ *Khâu vi phân bậc một* (H.2.4b)

$$G(s) = \frac{Ts}{Ts + 1} \quad (T = RC) \quad (2.23)$$

□ *Khâu sớm pha* (H.2.4c)

$$G(s) = K_C \frac{\alpha Ts + 1}{Ts + 1} \quad (2.24)$$

trong đó:  $K_C = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ ;  $T = \frac{R_2 R_1 C}{R_1 + R_2}$

$$\alpha T = R_1 C; \quad \alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \quad (\alpha > 1)$$

□ *Khâu trễ pha* (H.2.4d)

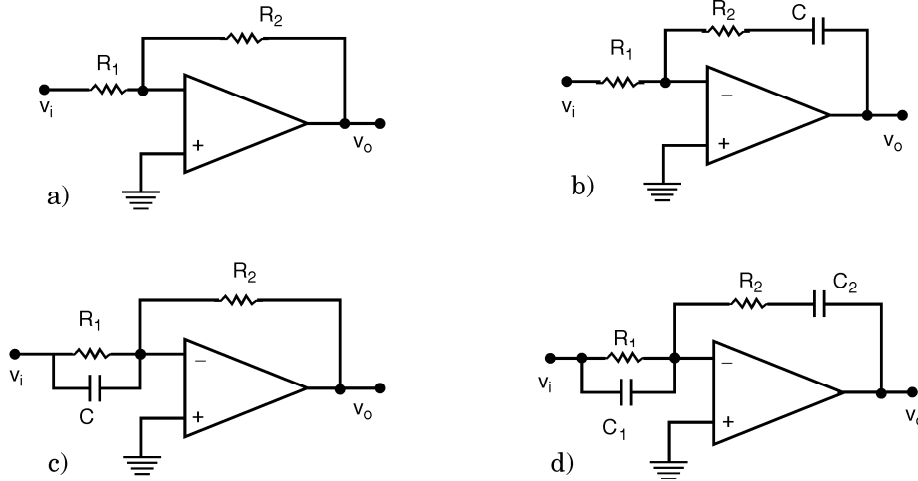
$$G(s) = K_C \frac{\alpha Ts + 1}{Ts + 1} \quad (2.25)$$

trong đó:  $K_C = 1$ ;  $T = (R_1 + R_2)C$

$$\alpha T = R_2 C; \quad \alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (\alpha < 1)$$

Để ý rằng dạng hàm truyền của khâu sớm pha và khâu trễ pha giống nhau, chỉ khác là đối với khâu sớm pha thì  $\alpha > 1$ , đối với khâu trễ pha thì  $\alpha < 1$ . Ở chương 6 ta sẽ thấy do điều kiện ràng buộc đối với hệ số  $\alpha$  là khác nhau nên đặc tính của khâu sớm pha và khâu trễ pha hoàn toàn trái ngược nhau.

### Khâu hiệu chỉnh tích cực



**Hình 2.5** Các khâu hiệu chỉnh tích cực

a) Khâu tỉ lệ;

b) Khâu tích phân tỉ lệ PI

c) Khâu vi phân tỉ lệ;

d) Khâu vi tích phân tỉ lệ PID

□ Khâu tỉ lệ P (**P**roportional) (H.2.5.a)

$$G(s) = K_P \quad (2.26)$$

trong đó:  $K_P = -\frac{R_2}{R_1}$

Khâu tỉ lệ có đặc điểm tín hiệu ra tỉ lệ với tín hiệu vào.

□ Khâu tích phân tỉ lệ PI (**P**roportional **I**ntegral) (H.2.5b)

Hàm truyền của khâu PI

$$G(s) = K_P + \frac{K_I}{s} \quad (2.27)$$

trong đó:  $K_P = -\frac{R_2}{R_1}; K_I = -\frac{1}{R_1 C}$

Quan hệ trong miền thời gian giữa tín hiệu ra và tín hiệu vào của khâu PI là:

$$v_o(t) = K_P v_i(t) + K_I \int_0^t v_i(\tau) d\tau \quad (2.28)$$

Biểu thức (2.28) cho thấy khâu tích phân tỉ lệ PI có đặc điểm tín hiệu ra tỉ lệ với tín hiệu vào và tích phân của tín hiệu vào.

□ *Khâu vi phân tỉ lệ PD (**P**roportional **D**erivative)* (H.2.5c)

Hàm truyền của khâu PD:

$$G(s) = K_P + K_D s \quad (2.29)$$

trong đó:  $K_P = -\frac{R_2}{R_1}$ ;  $K_D = -R_2 C$

Quan hệ giữa tín hiệu ra và tín hiệu vào của khâu PD trong miền thời gian là:

$$v_o(t) = K_P v_i(t) + K_D \frac{dv_i(t)}{dt} \quad (2.30)$$

Khâu vi phân tỉ lệ PD có đặc điểm tín hiệu ra tỉ lệ với tín hiệu vào và vi phân của tín hiệu vào.

□ *Khâu vi tích phân tỉ lệ PID (**P**roportional **I**ntegral **D**erivative)* (H.2.5d)

Hàm truyền của khâu PID:

$$G(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \quad (2.31)$$

trong đó:  $K_P = -\frac{R_1 C_1 + R_2 C_2}{R_1 C_2}$ ;  $K_I = -\frac{1}{R_1 C_2}$ ;  $K_D = -R_2 C_1$

Quan hệ trong miền thời gian giữa tín hiệu ra và tín hiệu vào của khâu PID là:

$$v_o(t) = K_P v_i(t) + K_I \int_0^t v_i(\tau) d\tau + K_D \frac{dv_i(t)}{dt} \quad (2.32)$$

Biểu thức (2.32) cho thấy khâu vi tích phân tỉ lệ PID có đặc điểm tín hiệu ra tỉ lệ với tín hiệu vào, tích phân của tín hiệu vào và vi phân của tín hiệu vào.

### 3- Hàm truyền đạt của một số đối tượng điều khiển

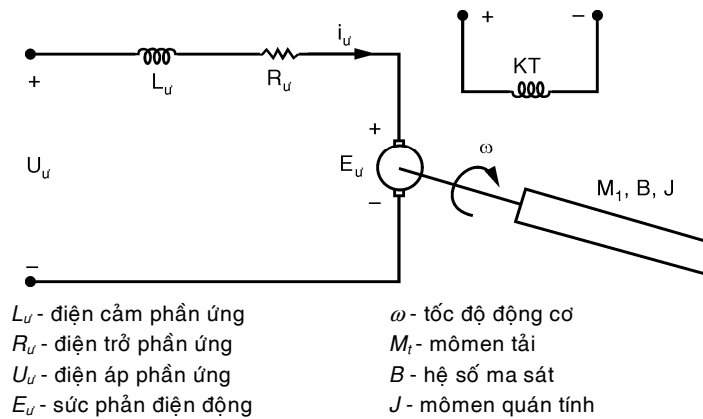
Đối tượng điều khiển rất đa dạng và khác nhau về bản chất vật lý. Nguyên tắc để rút ra được hàm truyền đạt của các đối

tượng điều khiển là dựa vào các định luật vật lý chi phối hoạt động của đối tượng như định luật Kirchoff, định luật Newton, ... để xây dựng phương trình vi phân mô tả quan hệ giữa tín hiệu vào và tín hiệu ra của đối tượng, sau đó suy ra hàm truyền bằng cách áp dụng phép biến đổi Laplace. Đối với những hệ thống phức tạp, một phương pháp rất hiệu quả để tìm hàm truyền nói riêng và mô hình toán học nói chung là phương pháp nhận dạng hệ thống.

Để minh họa mục này chỉ dẫn ra hàm truyền của hai đối tượng điều khiển thông dụng là động cơ một chiều và lò nhiệt. Có thể nói hai đối tượng này có mặt trong hầu hết các dây chuyền sản xuất.

### Động cơ một chiều kích từ độc lập

Động cơ một chiều được sử dụng khá phổ biến trong các hệ điều khiển nhờ đặc tính cơ là tuyến tính, tầm điều chỉnh vận tốc rộng, khả năng mang tải lớn ở vùng vận tốc nhỏ. Sơ đồ nguyên lý của động cơ một chiều được trình bày ở hình 2.2.



**Hình 2.6** Sơ đồ nguyên lý động cơ một chiều kích từ độc lập

Theo định luật Kirchoff ta có phương trình cân bằng điện áp ở mạch điện phản ứng:

$$U_u(t) = i_u(t) \cdot R_u + L_u \frac{di_u(t)}{dt} + E_u(t) \quad (2.33)$$

trong đó:  $E_u(t) = K\Phi\omega(t)$  - là sức phản điện phản ứng (2.34)

$K$  - là hệ số;  $\Phi$  - là từ thông kích từ.

Áp dụng định luật Newton cho chuyển động quay, ta có

phương trình cân bằng mômen trên trục động cơ:

$$M_d(t) = M_t(t) + B\omega(t) + J \frac{d\omega(t)}{dt} \quad (2.35)$$

trong đó:  $M_d(t)$  - là mômen của động cơ:  $M_d(t) = K\Phi i_u(t)$  (2.36)

Biến đổi Laplace (2.33), (2.34), (2.35) và (2.36) ta được:

$$U_u(s) = I_u(s) \cdot R_u + L_u s I_u(s) + E_u(s) \quad (2.37)$$

$$E_u(s) = K\Phi \omega(s) \quad (2.38)$$

$$M_d(s) = M_t(s) + B\omega(s) + Js\omega(s) \quad (2.39)$$

$$M_d(s) = K\Phi i_u(s) \quad (2.40)$$

Đặt:  $T_u = \frac{L_u}{R_u}$  là hằng số thời gian điện từ của động cơ

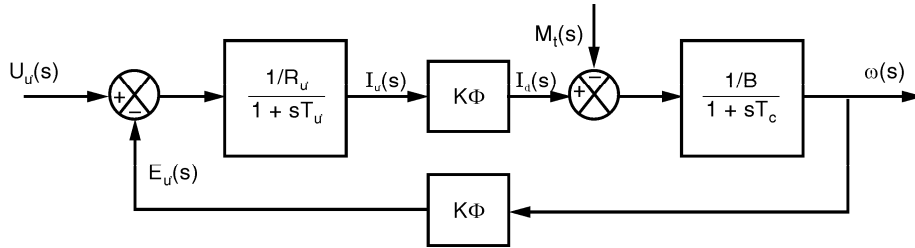
$T_c = \frac{J}{B}$  là hằng số thời gian điện cơ của động cơ.

Ta có thể viết lại (2.37) và (2.39) như sau:

$$\begin{aligned} (2.37) \quad &\Rightarrow U_u(s) - E_u(s) = R_u(1 + T_u s) I_u(s) \\ &\Rightarrow I_u(s) = \frac{U_u(s) - E_u(s)}{R_u(1 + T_u s)} \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} (2.??) \quad &\Rightarrow M_d(s) - M_t(s) = B(1 + T_c s)\omega(s) \\ &\Rightarrow \omega(s) = \frac{M_d(s) - M_t(s)}{B(1 + T_c s)} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Từ các biểu thức (2.38), (2.40), (2.41) và (2.42) ta có sơ đồ cấu trúc của động cơ một chiều như trình bày ở hình 2.7. Mục 2.2.3 sẽ trình bày cách tính hàm truyền tương đương của hệ thống từ sơ đồ khối.

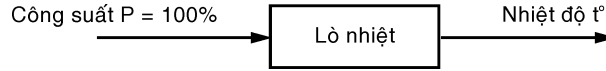


**Hình 2.7** Sơ đồ cấu trúc động cơ một chiều

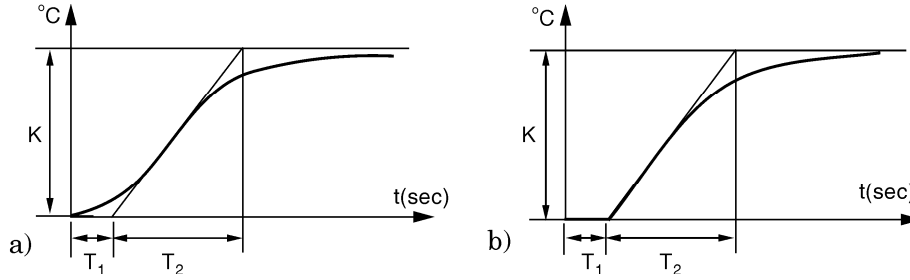


### Lò nhiệt

Hàm truyền của lò nhiệt được xác định bằng phương pháp thực nghiệm. Cấp nhiệt tối đa cho lò (công suất vào  $P = 100\%$ ), nhiệt độ lò tăng dần. Sau một thời gian nhiệt độ lò đạt đến giá trị bão hòa. Đặc tính nhiệt độ theo thời gian có thể biểu diễn như hình 2.9a. Do đặc tính chính xác của lò nhiệt khá phức tạp nên ta xấp xỉ bằng đáp ứng gần đúng như ở hình 2.9b.



**Hình 2.8** Thí nghiệm xác định hàm truyền lò nhiệt



**Hình 2.9** Đặc tính của lò nhiệt

a) Đặc tính chính xác; b) Đặc tính gần đúng

Ta xác định hàm truyền gần đúng của lò nhiệt dùng định nghĩa:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$

Do tín hiệu vào là hàm nấc đơn vị ( $P = 100\%$ ) nên:  $R(s) = \frac{1}{s}$

Tín hiệu ra gần đúng (H.2.9b) chính là hàm:

$$c(t) = f(t - T_1) \quad \text{trong đó: } f(t) = K(1 - e^{-t/T_2})$$

Tra bảng biến đổi Laplace ta được:  $F(s) = \frac{K}{s(1 + T_2 s)}$

Do vậy, áp dụng định lý chậm trễ ta được:  $C(s) = \frac{Ke^{-T_1 s}}{s(1 + T_2 s)}$

Suy ra hàm truyền của lò nhiệt là:  $G(s) = \frac{Ke^{-T_1 s}}{1 + T_2 s} \quad (2.43)$

### 2.2.3 Đại số sơ đồ khối

#### 1- Sơ đồ khối

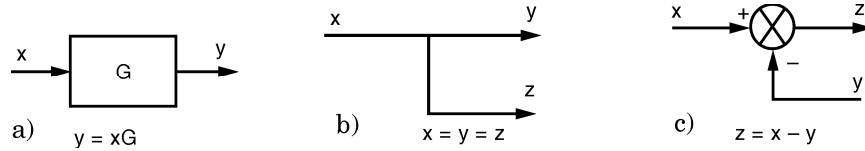
Ở mục 2.2.2 chúng ta đã dẫn ra được hàm truyền của các phần tử cơ bản trong hệ thống điều khiển. Trong thực tế các hệ thống thường gồm nhiều phần tử cơ bản kết nối với nhau. Một cách đơn giản nhưng rất hiệu quả trong việc biểu diễn các hệ thống phức tạp là dùng sơ đồ khối.

Sơ đồ khối của một hệ thống là hình vẽ mô tả chức năng của các phần tử và sự tác động qua lại giữa các phần tử trong hệ thống. Sơ đồ khối gồm có ba thành phần là khối chức năng, bộ tổng và điểm rẽ nhánh.

□ *Khối chức năng*: Tín hiệu ra của khối chức năng bằng tích tín hiệu vào và hàm truyền

□ *Điểm rẽ nhánh*: Tại điểm rẽ nhánh mọi tín hiệu đều bằng nhau.

□ *Bộ tổng*: Tín hiệu ra của bộ tổng bằng tổng đại số của các tín hiệu vào.

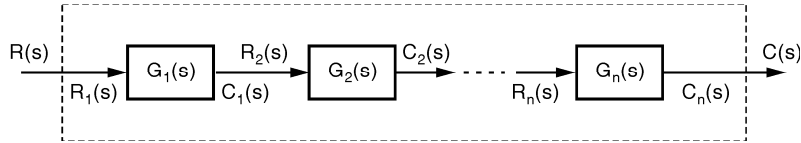


**Hình 2.10** Các thành phần cơ bản của sơ đồ khối

a) Khối chức năng; b) Điểm rẽ nhánh; c) Bộ tổng

#### 2- Hàm truyền đạt của hệ thống biểu diễn bằng sơ đồ khối

##### Hệ thống nối tiếp



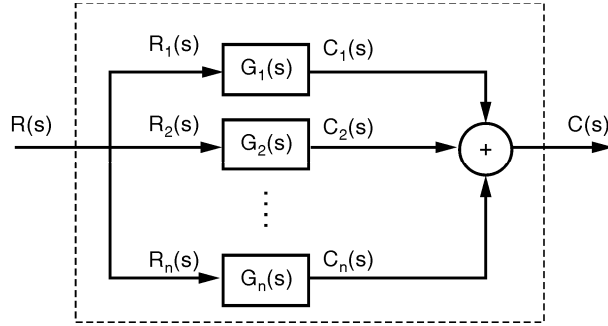
**Hình 2.11** Hệ thống nối tiếp

Hàm truyền tương đương của hệ thống nối tiếp:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{C_n(s)}{R_1(s)} = \frac{C_1(s).C_n(s)}{R_1(s).C_1(s)} = G_1(s). \frac{C_n(s)}{R_2(s)} = G_1(s). \frac{C_2(s).C_n(s)}{R_2(s).C_2(s)} \\
 &= G_1(s).G_2(s). \frac{C_n(s)}{R_3(s)} = \dots = G_1(s).G_2(s)...G_n(s)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G(s) = \prod_{i=1}^n G_i(s) \quad (2.44)$$

### Hệ thống song song



**Hình 2.12** Hệ thống song song

Hàm truyền tương đương của hệ thống song song:

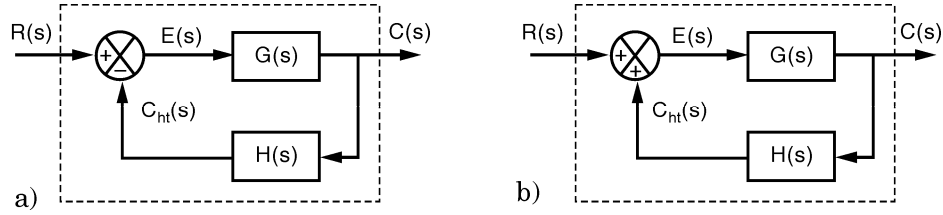
$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{C_1(s) + C_2(s) + \dots + C_n(s)}{R(s)} = \frac{C_1(s)}{R_1(s)} + \frac{C_2(s)}{R_2(s)} + \dots + \frac{C_n(s)}{R_n(s)}$$

$$\Rightarrow G(s) = \sum_{i=1}^n G_i(s) \quad (2.45)$$

Chú ý rằng trong công thức trên tổng là **tổng đại số**.

### Hệ hồi tiếp một vòng

□ *Hồi tiếp âm* (H.2.13a)



**Hình 2.13** Hệ thống hồi tiếp

a) *Hồi tiếp âm*; b) *Hồi tiếp dương*

Hàm truyền hệ thống hồi tiếp âm:  $G_k(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$

Ta có:  $C(s) = E(s).G(s)$

$$R(s) = E(s) + C_{ht}(s) \quad (\text{do } E(s) = R(s) - C_{ht}(s))$$

$$= E(s) + C(s).H(s) \quad (\text{do } C_{ht}(s) = C(s).H(s))$$

$$= E(s) + E(s).G(s).H(s) \text{ (do } C(s) = E(s).G(s) \text{)}$$

Lập tỉ số giữa  $C(s)$  và  $R(s)$  ta được:

$$G_k(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s).H(s)} \quad (2.46)$$

Trường hợp đặc biệt khi  $H(s) = 1$  ta có hệ thống *hồi tiếp âm đơn vị*. Trong trường hợp này công thức (2.46) trở thành:

$$G_k(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad (2.47)$$

□ *Hồi tiếp dương* (H.2.13b)

Tương tự như trường hợp hồi tiếp âm, dễ dàng chứng minh được:

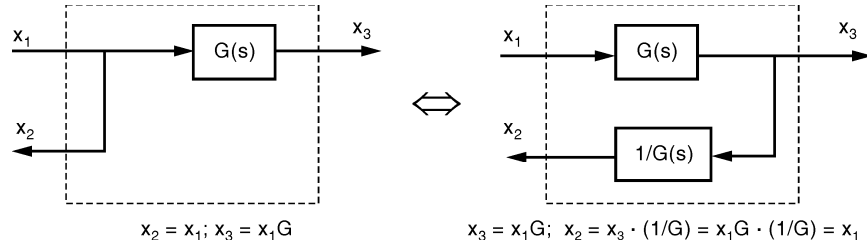
$$G_k(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s).H(s)} \quad (2.48)$$

### Hệ hồi tiếp nhiều vòng

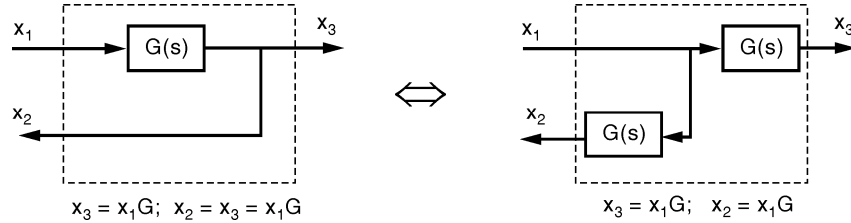
Đối với các hệ thống phức tạp gồm nhiều vòng hồi tiếp, ta thực hiện các phép biến đổi tương đương với sơ đồ khối để làm xuất hiện các dạng kết nối đơn giản (nối tiếp, song song, hồi tiếp một vòng) và tính hàm truyền tương đương theo thứ tự từ trong ra ngoài.

Hai sơ đồ khối được gọi là tương đương nếu hai sơ đồ khối đó có quan hệ giữa các tín hiệu vào và tín hiệu ra như nhau. Các phép biến đổi tương đương sơ đồ khối thường dùng là:

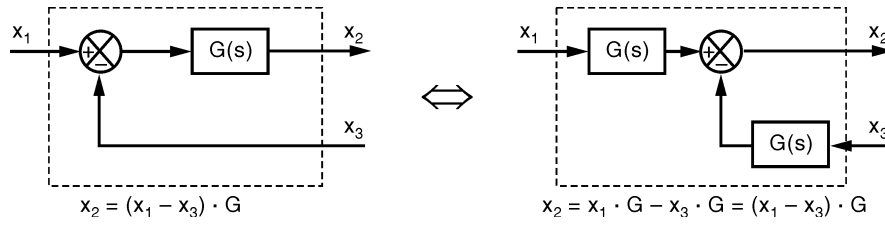
□ *Chuyển điểm rẽ nhánh từ phía trước ra phía sau một khối*



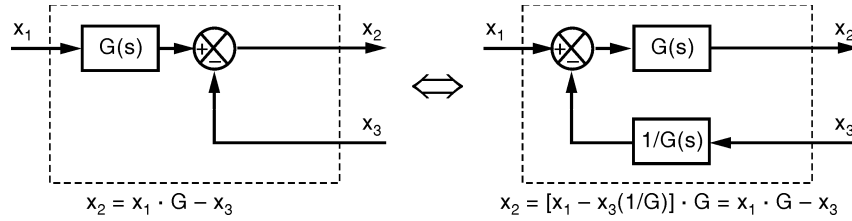
□ *Chuyển điểm rẽ nhánh từ phía sau ra phía trước một khối*



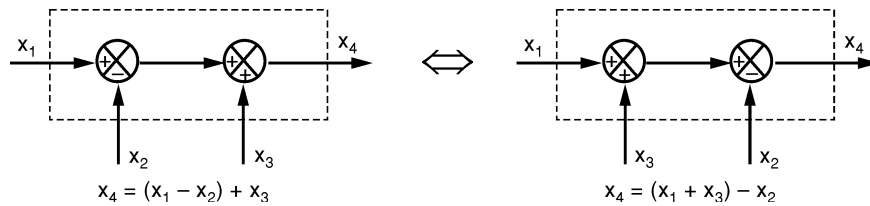
□ Chuyển bộ tổng từ phía trước ra phía sau một khối



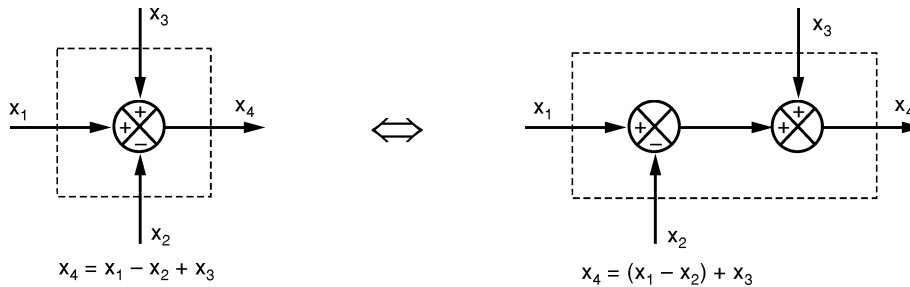
□ Chuyển bộ tổng từ phía sau ra phía trước một khối



□ Chuyển vị trí hai bộ tổng

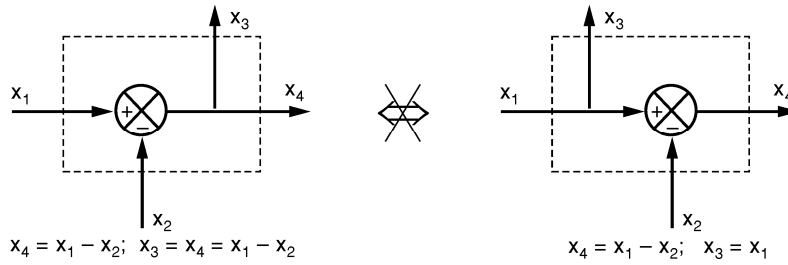


□ Tách một tổng thành hai bộ tổng

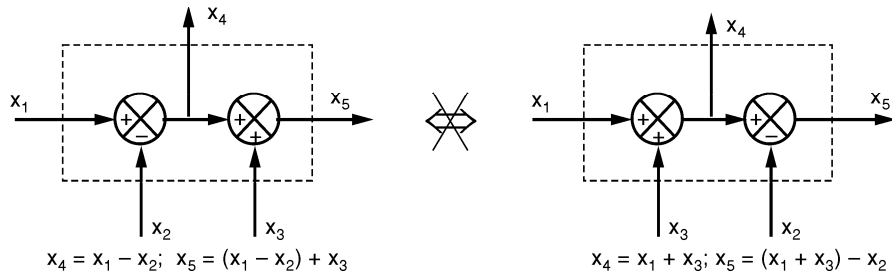


*Chú ý:* Hai cách biến đổi sơ đồ khối dưới đây rất hay bị nhầm lẫn là biến đổi tương đương.

□ *Chuyển vị trí điểm rẽ nhánh và bộ tổng*

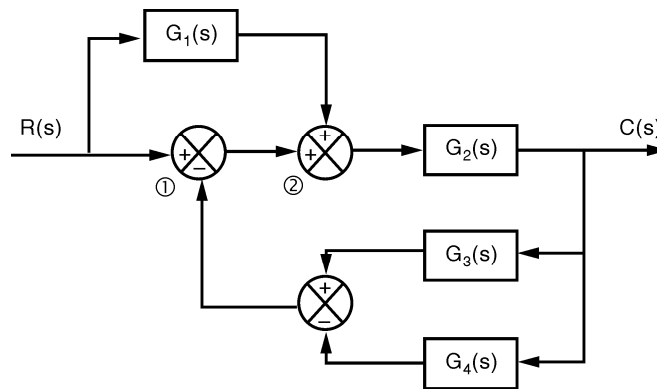


□ *Chuyển vị trí hai bộ tổng khi giữa hai bộ tổng đó có điểm rẽ nhánh*



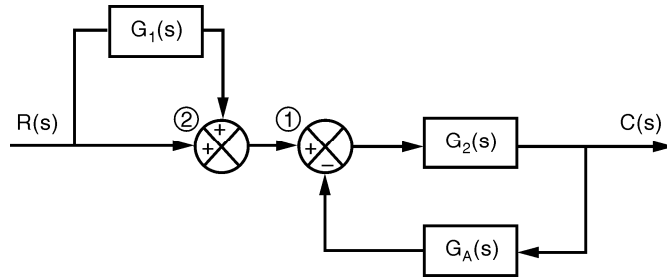
**3- Một số ví dụ tính hàm truyền tương đương của hệ thống**

**Ví dụ 2.1.** Tính hàm truyền tương đương của hệ thống có sơ đồ khối như sau:

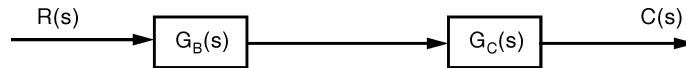


**Giải:** Biến đổi tương đương sơ đồ khối như sau:

- Chuyển vị trí hai bộ tổng ① và ②, đặt  $G_A(s) = [G_3(s)/G_4(s)]$ , ta được sơ đồ khối tương đương:



- $G_B(s) = [G_1(s) // \text{hàm truyền đơn vị}]$ ,  
 $G_C(s) = \text{vòng hồi tiếp } [G_2(s), G_A(s)]$ :



Ta có:  $G_A(s) = G_3(s) - G_4(s)$

$$G_B(s) = 1 + G_1(s)$$

$$G_C(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s).G_A(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s).[G_3(s) - G_4(s)]}$$

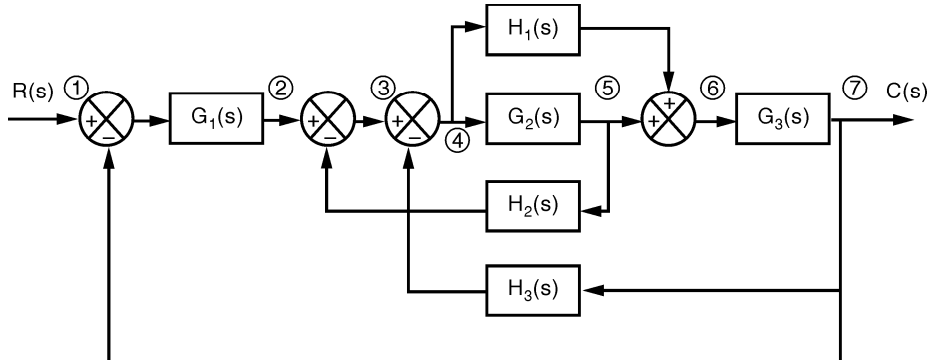
Hàm truyền tương đương của hệ thống:

$$G_{td}(s) = G_B(s).G_C(s)$$

$$\Rightarrow G_{td}(s) = \frac{[1 + G_1(s)].G_2(s)}{1 + G_2(s).[G_3(s) - G_4(s)]}$$

■

**Ví dụ 2.2.** Tính hàm truyền tương đương của hệ thống có sơ đồ khối:

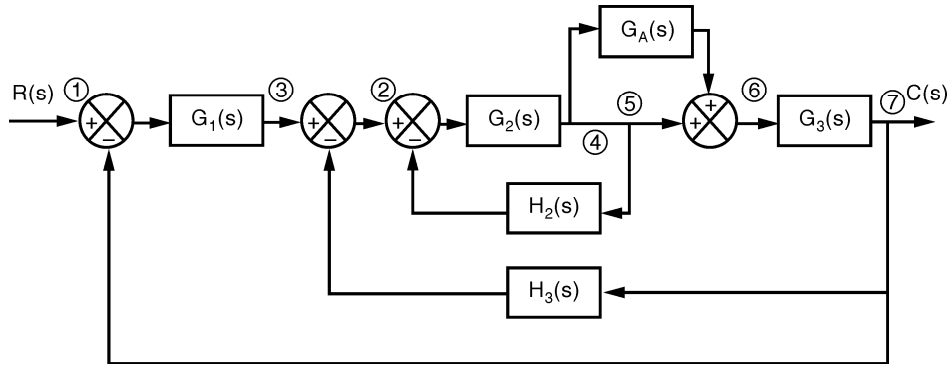


**Giải:** Biến đổi tương đương sơ đồ khối như sau:

Chuyển vị trí hai bộ tổng (2) và (3)

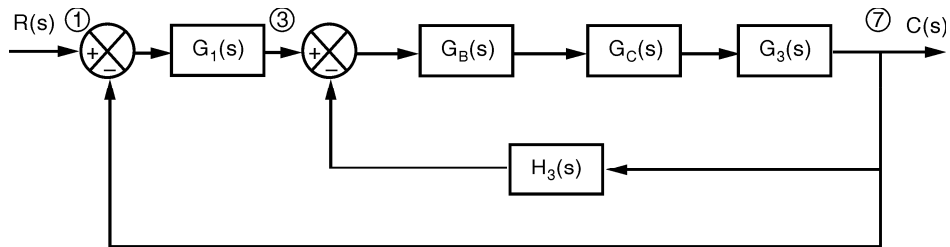
Chuyển điểm rẽ nhánh (4) ra sau  $G_2(s)$



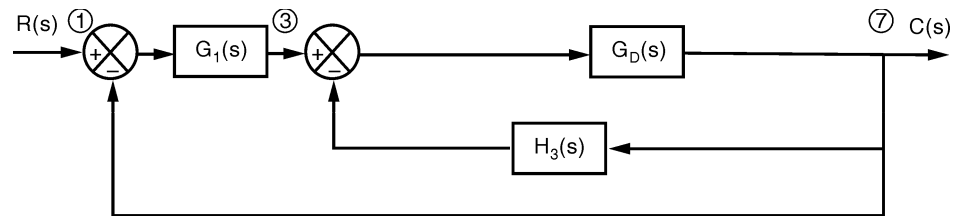


$G_B(s) = \text{vòng hồi tiếp } [G_2(s), H_2(s)]$

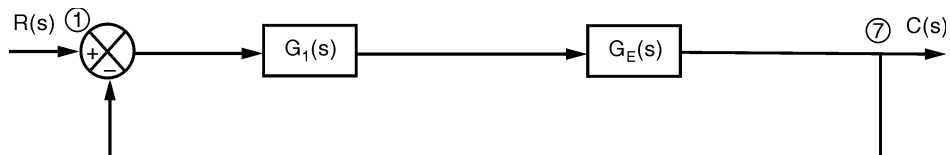
$G_C(s) = [G_A(s) // \text{hàm truyền đơn vị}]$



$G_D(s) = [G_B(s) \text{ nối tiếp } G_C(s) \text{ nối tiếp } G_3(s)]$



$G_E(s) = \text{vòng hồi tiếp } [G_D(s), H_3(s)]$



Trong các phép biến đổi sơ đồ khối trên, các hàm truyền được tính như sau:

$$G_A = \frac{H_1}{G_2}$$

$$G_B = \frac{G_2}{1 + G_2 H_2}$$

$$G_C = 1 + G_A = 1 + \frac{H_1}{G_2} = \frac{G_2 + H_1}{G_2}$$

$$G_D = G_B \cdot G_C \cdot G_3 = \left( \frac{G_2}{1 + G_2 H_2} \right) \left( \frac{G_2 + H_1}{G_2} \right) G_3 = \frac{G_2 G_3 + G_3 H_1}{1 + G_2 H_2}$$

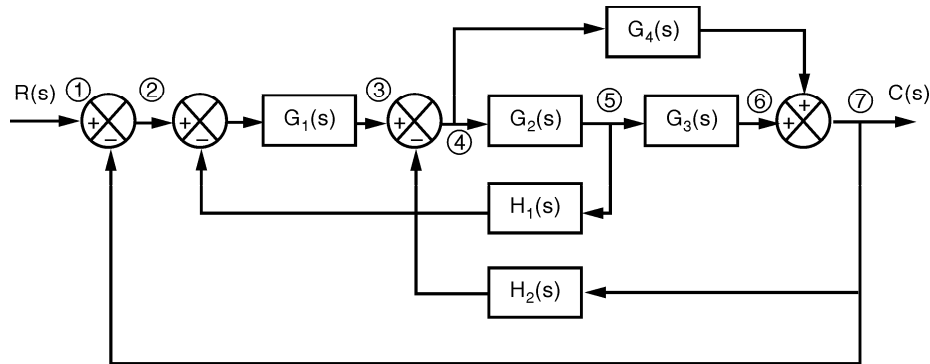
$$G_E = \frac{G_D}{1 + G_D H_3} = \frac{\frac{G_2 G_3 + G_3 H_1}{1 + G_2 H_2}}{1 + \frac{G_2 G_3 + G_3 H_1}{1 + G_2 H_2} H_3} = \frac{G_2 G_3 + G_3 H_1}{1 + G_2 H_2 + G_2 G_3 H_3 + G_3 H_1 H_3}$$

Vậy hàm truyền tương đương của hệ thống là:

$$G = \frac{G_1 G_E}{1 + G_1 G_E} = \frac{G_1 \cdot \frac{G_2 G_3 + G_3 H_1}{1 + G_2 H_2 + G_2 G_3 H_3 + G_3 H_1 H_3}}{1 + G_1 \cdot \frac{G_2 G_3 + G_3 H_1}{1 + G_2 H_2 + G_2 G_3 H_3 + G_3 H_1 H_3}}$$

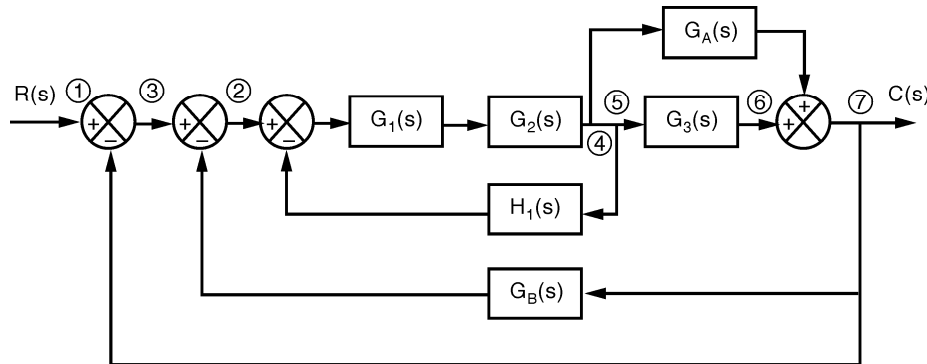
$$\Rightarrow G = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_1 G_3 H_1}{1 + G_2 H_2 + G_2 G_3 H_3 + G_3 H_1 H_3 + G_1 G_2 G_3 + G_1 G_3 H_1} \quad \blacksquare$$

**Ví dụ 2.3.** Tính hàm truyền tương đương của hệ thống biểu diễn bằng sơ đồ khối:



**Gợi ý:** Biến đổi tương đương sơ đồ khối như sau:

Chuyển bộ tổng ③ ra trước  $G_1(s)$ , sau đó đổi vị trí hai bộ tổng ② và ③; chuyển điểm rẽ nhánh ④ ra sau  $G_2(s)$



Sau khi thực hiện phép biến đổi như trên ta được sơ đồ khối tương đương khá đơn giản. Độc giả tiếp tục biến đổi để đi đến kết quả cuối cùng. ■

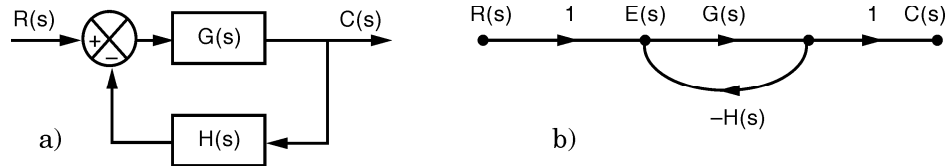
**Nhận xét:** Phương pháp biến đổi sơ đồ khối là một phương pháp đơn giản và trực quan dùng để tìm hàm truyền tương đương của hệ thống. Khuyết điểm của phương pháp biến đổi sơ đồ khối là không mang tính hệ thống, mỗi sơ đồ cụ thể có thể có nhiều cách biến đổi khác nhau, tùy theo trực giác của người giải bài toán. Ngoài ra, khi tính hàm truyền tương đương ta phải thực hiện nhiều phép tính trên các phân thức đại số, đối với các hệ thống phức tạp các phép tính này hay bị nhầm lẫn. Do đó, phương pháp biến đổi tương đương sơ đồ khối chỉ thích hợp để tìm hàm truyền tương đương của các hệ thống đơn giản. Đối với các hệ thống phức tạp ta có một phương pháp hiệu quả hơn, đó là phương pháp sơ đồ dòng tín hiệu sẽ được đề cập đến ở mục tiếp theo.

## 2.3 SƠ ĐỒ DÒNG TÍN HIỆU

### 2.3.1 Sơ đồ dòng tín hiệu và công thức Mason

#### 1- Định nghĩa

Để biểu diễn hệ thống tự động, ngoài phương pháp sử dụng sơ đồ khối, ta còn có thể sử dụng phương pháp sơ đồ dòng tín hiệu. Hãy so sánh hai hình vẽ dưới đây, hình 2.14b là sơ đồ dòng tín hiệu của hệ thống có sơ đồ khối như hình 2.14a.



**Hình 2.14** Biểu diễn hệ thống bằng sơ đồ dòng tín hiệu

a) Sơ đồ khối; b) Sơ đồ dòng tín hiệu

### **Định nghĩa**

Sơ đồ dòng tín hiệu là một mạng gồm các **nút** và **nhánh**.

- **Nút**: một điểm biểu diễn một biến hay tín hiệu trong hệ thống.

- **Nhánh**: đường nối trực tiếp hai nút, trên mỗi nhánh có mũi tên chỉ chiều truyền của tín hiệu và có ghi hàm truyền cho biết mối quan hệ giữa tín hiệu ở hai nút.

- **Nút nguồn**: nút chỉ có các nhánh hướng ra.

- **Nút đích**: nút chỉ có các nhánh hướng vào.

- **Nút hỗn hợp**: nút có cả các nhánh ra và các nhánh vào.

Tại nút hỗn hợp, tất cả các tín hiệu ra đều bằng nhau và bằng tổng đại số của các tín hiệu vào.

- **Đường tiến**: đường gồm các nhánh liên tiếp có cùng hướng tín hiệu đi từ nút nguồn đến nút đích và chỉ qua mỗi nút một lần.

- **Độ lợi của một đường tiến**: tích của các hàm truyền của các nhánh trên đường tiến đó.

- **Vòng kín**: đường khép kín gồm các nhánh liên tiếp có cùng hướng tín hiệu và chỉ qua mỗi nút một lần.

- **Độ lợi của một vòng kín**: tích của các hàm truyền của các nhánh trên vòng kín đó.

### **2- Công thức Mason**

Hàm truyền tương đương của hệ thống tự động biểu diễn bằng sơ đồ dòng tín hiệu có thể tính theo công thức:

$$G = \frac{1}{\Delta} \sum_k \Delta_k P_k \quad (2.49)$$

trong đó: •  $P_k$  - độ lợi của đường tiến thứ  $k$

•  $\Delta$  - định thức của sơ đồ dòng tín hiệu:

$$\Delta = 1 - \sum_i L_i + \sum_{i,j} L_i L_j - \sum_{i,j,m} L_i L_j L_m + \dots \quad (2.50)$$

•  $\sum_i L_i$  - tổng độ lợi vòng của các vòng kín có trong sơ đồ

dòng tín hiệu.

•  $\sum_{i,j} L_i L_j$  - tổng các tích độ lợi vòng của hai vòng **không**

**đính** nhau.

•  $\sum_{i,j,m} L_i L_j L_m$  - tổng các tích độ lợi vòng của ba vòng

**không**

**đính** nhau.

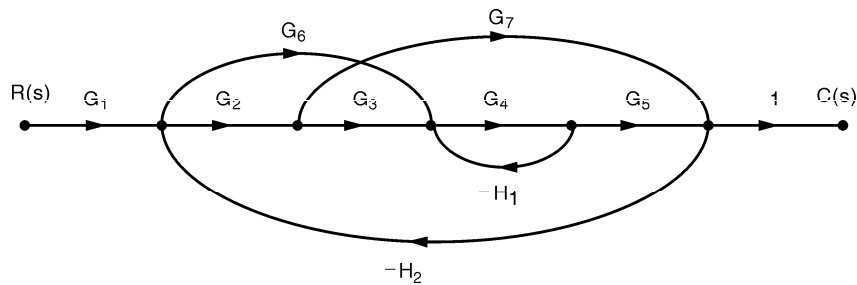
•  $\Delta_k$  - định thức con của sơ đồ dòng tín hiệu.  $\Delta_k$  được suy ra từ  $\Delta$  bằng cách bỏ đi các vòng kín có **đính** tới đường tiến  $P_k$ .

*Chú ý:* \* “**không đính**” = không có nút nào chung.

\* “**đính**” = có ít nhất nút chung.

### 2.3.2 Một số ví dụ tính hàm truyền tương đương dùng công thức Mason

**Ví dụ 2.4.** Tính hàm truyền tương đương của hệ thống mô tả bởi sơ đồ dòng tín hiệu như sau:



**Giải:**

- Độ lợi của các đường tiến:

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5; \quad P_2 = G_1 G_6 G_4 G_5; \quad P_3 = G_1 G_2 G_7$$

- Độ lợi của các vòng kín:

$$L_1 = -G_4 H_1; \quad L_2 = -G_2 G_7 H_2; \quad L_3 = -G_6 G_4 G_5 H_2; \quad L_4 = -G_2 G_3 G_4 G_5 H_2$$

- Định thức của sơ đồ dòng tín hiệu:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_1L_2$$

- Các định thức con:

$$\Delta_1 = 1; \quad \Delta_2 = 1; \quad \Delta_3 = 1 - L_1$$

Hàm truyền tương đương của hệ thống là:

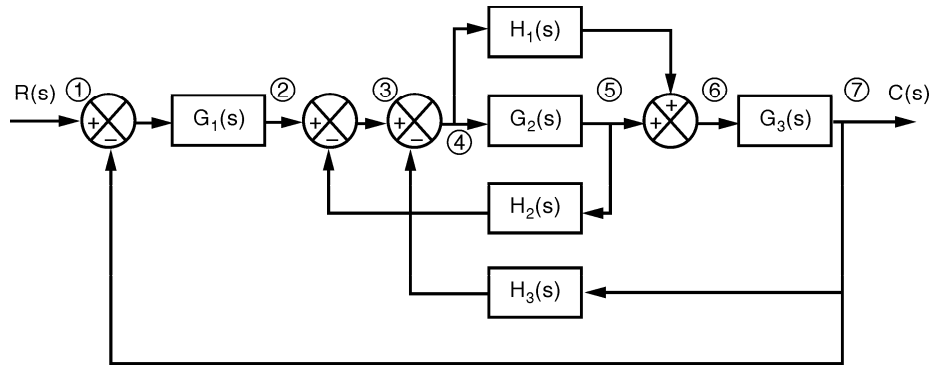
$$G = \frac{1}{\Delta} (P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3)$$

$$G = \frac{G_1G_2G_3G_4G_5 + G_1G_6G_4G_5 + G_1G_2G_7(1 + G_4H_1)}{1 + G_4H_1 + G_2G_7H_2 + G_6G_4G_5H_2 + G_2G_3G_4G_5H_2 + G_4H_1G_2G_7H_2} \quad \blacksquare$$

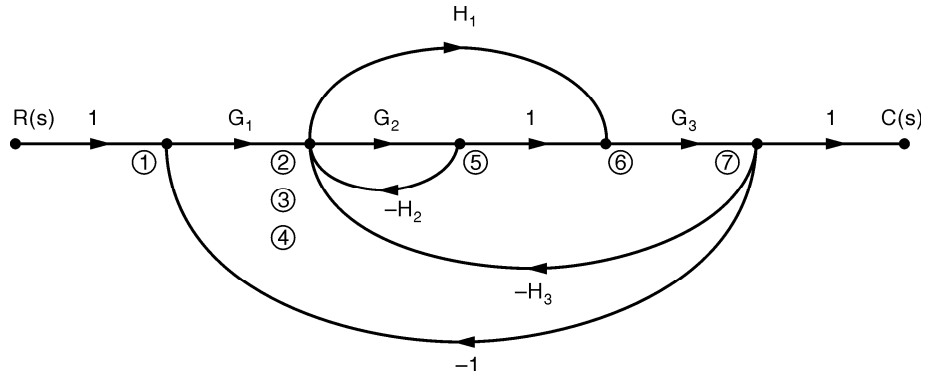
Trong trường hợp hệ thống được cho dưới dạng sơ đồ khối, muốn áp dụng công thức Mason, trước tiên ta phải chuyển sơ đồ khối sang dạng sơ đồ dòng tín hiệu. Khi chuyển từ sơ đồ khối sang sơ đồ dòng tín hiệu cần chú ý:

- Có thể gộp hai bộ tổng liên nhau thành một nút.
- Có thể gộp một bộ tổng và một điểm rẽ nhánh liên sau nó thành một nút.
- Không thể gộp một điểm rẽ nhánh và một bộ tổng liên sau nó thành một nút.

**Ví dụ 2.5.** Tìm hàm truyền tương đương của hệ thống có sơ đồ khối như sau:



**Giải:** Chúng ta đã tìm hàm truyền tương đương của hệ thống có sơ đồ khối như trên ở ví dụ 2.2. Để so sánh trong ví dụ này chúng ta tìm hàm truyền của hệ thống bằng cách áp dụng công thức Mason. Sơ đồ dòng tín hiệu tương đương của hệ thống như sau:



- Độ lợi của các đường tiến:

$$P_1 = G_1 G_2 G_3; \quad P_2 = G_1 H_1 G_3$$

- Độ lợi của các vòng kín:

$$L_1 = -G_2 H_2; \quad L_2 = -G_2 G_3 H_3; \quad L_3 = -G_1 G_2 G_3; \quad L_4 = -G_3 H_1 H_3; \quad L_5 = -G_1 G_3 H_1$$

- Định thức của sơ đồ dòng tín hiệu:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5)$$

- Các định thức con:

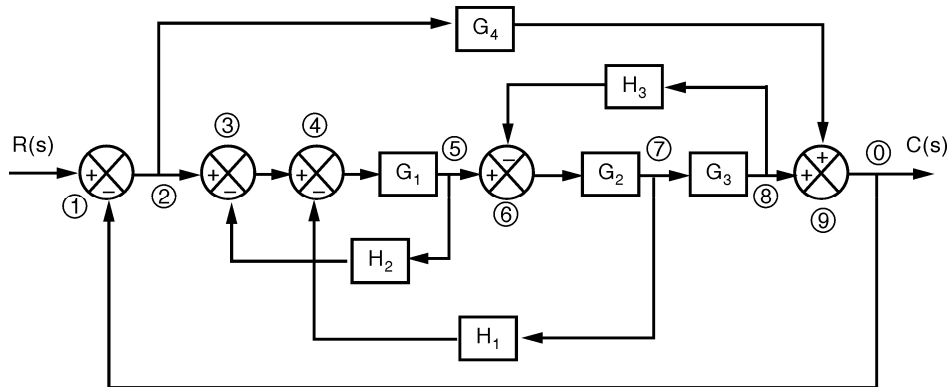
$$\Delta_1 = 1; \quad \Delta_2 = 1$$

Hàm truyền tương đương của hệ thống là:

$$G = \frac{1}{\Delta} (P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2)$$

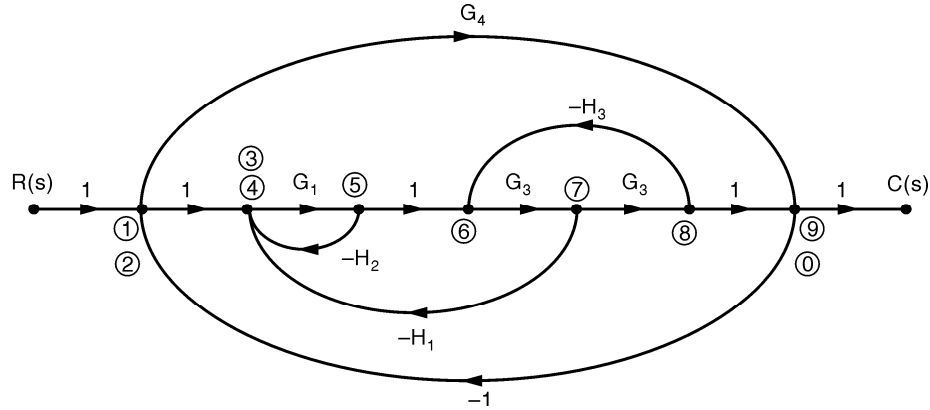
$$G = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_1 G_3 H_1}{1 + G_2 H_2 + G_2 G_3 H_3 + G_1 G_2 G_3 + G_3 H_1 H_3 + G_1 G_3 H_1}$$

**Ví dụ 2.6.** Tìm hàm truyền tương đương của hệ thống có sơ đồ khối như sau:





**Giải.** Sơ đồ dòng tín hiệu tương đương:



- Độ lợi của các đường tiến:

$$P_1 = G_1 G_2 G_3; \quad P_2 = G_4$$

- Độ lợi của các vòng kín:

$$L_1 = -G_1 H_2; \quad L_2 = -G_1 G_2 H_1; \quad L_3 = -G_1 G_2 G_3; \quad L_4 = -G_2 G_3 H_3; \quad L_5 = -G_4$$

- Định thức của sơ đồ dòng tín hiệu:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5) + (L_1 L_4 + L_1 L_5 + L_2 L_5 + L_4 L_5) - L_1 L_4 L_5$$

- Các định thức con:

$$\Delta_1 = 1; \quad \Delta_2 = 1 - (L_1 + L_2 + L_4) + (L_1 L_4)$$

Hàm truyền tương đương của hệ là:

$$G = \frac{1}{\Delta} (P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2) = \frac{TS}{MS}$$

$$\text{với: } TS = G_1 G_2 G_3 + G_4 (1 + G_1 H_2 + G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_3 + G_1 H_2 G_2 G_3 H_3)$$

$$MS = 1 + G_1 H_2 + G_1 G_2 H_1 + G_1 G_2 G_3 + G_2 G_3 H_3 + G_4 + G_1 G_2 G_3 H_2 H_3 \\ + G_1 G_4 H_2 + G_1 G_2 G_4 H_1 + G_2 G_3 G_4 H_3 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_2 H_3 \quad \blacksquare$$

## 2.4 PHƯƠNG PHÁP KHÔNG GIAN TRẠNG THÁI

### 2.4.1 Khái niệm

Như đã trình bày ở đầu chương này, quan hệ giữa ngõ vào và ngõ ra của hệ thống liên tục bất kỳ có thể mô tả bằng phương trình vi phân bậc  $n$ . Nghiên cứu hệ thống dựa trên phương trình

vi phân bậc  $n$  rất khó khăn, do đó cần mô tả toán học khác giúp cho việc nghiên cứu hệ thống dễ dàng hơn. Phương pháp hàm truyền chuyển quan hệ phương trình vi phân cấp  $n$  thành phân thức đại số nhờ phép biến đổi Laplace. Nghiên cứu hệ thống mô tả bằng hàm truyền thuận lợi hơn bằng phương trình vi phân, tuy nhiên hàm truyền có một số khuyết điểm sau:

- Chỉ áp dụng được khi điều kiện đầu bằng 0.
- Chỉ áp dụng được cho hệ thống tuyến tính bất biến, không thể áp dụng để mô tả hệ phi tuyến hay hệ biến đổi theo thời gian.
- Nghiên cứu hệ thống trong miền tần số.

Một phương pháp khác được sử dụng để khảo sát hệ thống tự động là phương pháp không trạng thái. Phương pháp không gian trạng thái chuyển phương trình vi phân bậc  $n$  thành  $n$  phương trình vi phân bậc nhất bằng cách đặt  $n$  biến trạng thái. Phương pháp không gian trạng thái khắc phục được các khuyết điểm của phương pháp hàm truyền.

#### 2.4.2 Trạng thái của hệ thống, hệ phương trình biến trạng thái

##### *Trạng thái*

Trạng thái của một hệ thống là tập hợp nhỏ nhất các biến (gọi là biến trạng thái) mà nếu biết giá trị của các biến này tại thời điểm  $t_0$  và biết các tín hiệu vào ở thời điểm  $t \geq t_0$ , ta hoàn toàn có thể xác định được đáp ứng của hệ thống tại mọi thời điểm  $t \geq t_0$ .

Hệ thống bậc  $n$  có  $n$  biến trạng thái. Các biến trạng thái có thể chọn là biến vật lý hoặc không phải là biến vật lý. Ví dụ động cơ DC là hệ bậc hai, có hai biến trạng thái có thể chọn là tốc độ động cơ và dòng điện phần ứng (biến vật lý). Tuy nhiên ta cũng có thể chọn hai biến trạng thái khác.

Phương pháp mô tả hệ thống bằng cách sử dụng các biến trạng thái gọi là phương pháp không gian trạng thái.

##### *Vectơ trạng thái*

$n$  biến trạng thái hợp thành vectơ cột gọi là vectơ trạng thái, ký hiệu:

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T \quad (2.51)$$

Bằng cách sử dụng các biến trạng thái, ta có thể chuyển phương trình vi phân bậc  $n$  mô tả hệ thống thành hệ  $n$  phương trình vi phân bậc nhất viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}r(t) \\ \mathbf{c}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}r(t) \end{cases} \quad (2.52)$$

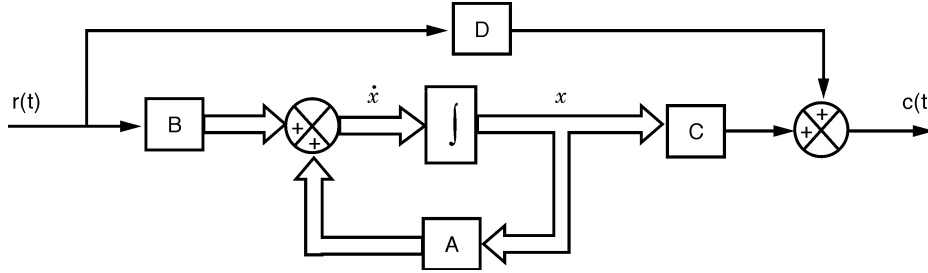
trong đó:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \quad \mathbf{D} = d_1$$

Phương trình (2.52) được gọi là phương trình trạng thái của hệ thống. Nếu  $\mathbf{A}$  là ma trận thường, ta gọi (2.52) là hệ phương trình trạng thái ở dạng thường; nếu  $\mathbf{A}$  là ma trận chéo, ta gọi (2.52) là hệ phương trình trạng thái ở dạng chính tắc.

Đối với các hệ thống hợp thức chặt (bậc tử số hàm truyền nhỏ hơn bậc mẫu số) thì  $\mathbf{D} = 0$ .

Hệ thống mô tả bởi hệ phương trình trạng thái (2.52) có thể biểu diễn dưới dạng sơ đồ trạng thái như sau:



**Hình 2.15:** Sơ đồ trạng thái của hệ thống

Sau đây chúng ta sẽ xét các phương pháp thành lập hệ phương trình trạng thái của hệ thống từ các dạng mô tả toán học khác như phương trình vi phân hay hàm truyền.

### 2.4.3 Thành lập hệ phương trình trạng thái từ phương trình vi phân

**1- Vế phải của phương trình vi phân mô tả hệ thống không có chứa đạo hàm của tín hiệu vào**

Cho hệ thống mô tả bởi phương trình vi phân:

$$\frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dc(t)}{dt} + a_n c(t) = b_o r(t) \quad (2.53)$$

Để ý rằng trong biểu thức (2.53) hệ số  $a_o = 1$ . Nếu  $a_o \neq 1$  ta chia hai vế phương trình vi phân cho  $a_o$  để được dạng (2.53).

#### **Qui tắc đặt biến trạng thái**

- Biến đầu tiên bằng tín hiệu ra:

$$x_1(t) = c(t)$$

- Biến trạng thái thứ  $i$  ( $i = \overline{2, n}$ ) đặt theo qui tắc: biến sau bằng đạo hàm của biến trước:

$$x_i(t) = \dot{x}_{i-1}(t)$$

Phương pháp đặt biến trạng thái như trên (biến sau bằng đạo hàm của biến trước) gọi là *phương pháp tọa độ pha*.

Áp dụng cách đặt biến trạng thái như mô tả ở trên, ta có:

$$x_1(t) = c(t)$$

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) \quad \Rightarrow \quad x_2(t) = \dot{c}(t)$$

$$x_3(t) = \dot{x}_2(t) \quad \Rightarrow \quad x_3(t) = \ddot{c}(t)$$

$$\vdots$$

$$x_n(t) = \dot{x}_{n-1}(t) \quad \Rightarrow \quad x_n(t) = \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_n(t) = \frac{d^n c(t)}{dt^n}$$

Thay các biến trạng thái vào phương trình (2.53) ta được:

$$\dot{x}_n(t) + a_1 x_n(t) + \dots + a_{n-1} x_2(t) + a_n x_1(t) = b_o r(t)$$

Kết hợp phương trình trên với quan hệ giữa các biến trạng thái ta được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) = -a_n x_1(t) - a_{n-1} x_2(t) - \dots - a_2 x_{n-1}(t) - a_1 x_n(t) + b_o r(t) \end{cases} \quad (2.54)$$

Viết lại (2.54) dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_o \end{bmatrix} r(t)$$

Đáp ứng của hệ thống:

$$c(t) = x_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Vậy hệ phương trình trạng thái mô tả hệ thống là:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Br(t) \\ c(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.55)$$

$$\text{với: } x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_o \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Ví dụ 2.7.** Cho hệ thống điều khiển có quan hệ tín hiệu vào - tín hiệu ra mô tả bằng phương trình vi phân sau:

$$2\ddot{c}(t) + 5\dot{c}(t) + 6c(t) + 10c(t) = r(t)$$

**Giải.** Chia hai vế phương trình vi phân cho 2, ta được:

$$\ddot{c}(t) + 2.5\dot{c}(t) + 3c(t) = 0.5r(t)$$

Đặt các biến trạng thái như sau:

$$x_1(t) = c(t); \quad x_2(t) = \dot{x}_1(t); \quad x_3(t) = \dot{x}_2(t)$$

Áp dụng công thức (2.55), ta có hệ phương trình trạng thái mô tả hệ thống như sau:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}r(t) \\ c(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

với: 
$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & -2.5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

■

## 2- Vế phải của phương trình vi phân mô tả hệ thống có chứa đạo hàm của tín hiệu vào

Xét bài toán xây dựng hệ phương trình trạng thái cho hệ thống:

$$\begin{aligned} \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dc(t)}{dt} + a_n c(t) = \\ = b_0 \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dr(t)}{dt} + b_m r(t) \end{aligned} \quad (2.56)$$

Để có thể áp dụng các công thức dưới đây,  $m$  phải thỏa điều kiện  $m = n - 1$  (các hệ số  $b_0, b_1, \dots$  có thể bằng 0).

### Qui tắc đặt biến trạng thái

□ Biến đầu tiên bằng tín hiệu ra:  $x_1(t) = c(t)$

□ Biến trạng thái thứ  $i$  ( $i = \overline{2, n}$ ) đặt theo qui tắc:

$$x_i(t) = \dot{x}_{i-1}(t) - \beta_{i-1}r(t).$$

Với cách đặt biến trạng thái như trên, hệ phương trình biến trạng thái mô tả hệ thống là:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Br(t) \\ c(t) = Cx(t) \end{cases}$$

trong đó:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]$$

$$\text{với: } \begin{cases} \beta_1 = b_o \\ \beta_2 = b_1 - a_1\beta_1 \\ \beta_3 = b_2 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n = b_{n-1} - a_1\beta_{n-1} - \dots - a_{n-1}\beta_1 \end{cases}$$

Sau đây ta sẽ chứng minh kết quả trên cho hệ bậc ba, trường hợp tổng quát hệ bậc  $n$  có thể suy ra tương tự.

Xét hệ bậc ba có quan hệ giữa tín hiệu vào và tín hiệu ra qua phương trình vi phân:

$$\frac{d^3c(t)}{dt^3} + a_1 \frac{d^2c(t)}{dt^2} + a_2 \frac{dc(t)}{dt} + a_3c(t) = b_o \frac{d^2r(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_2r(t) \quad (2.57)$$

Đặt các biến trạng thái như sau:

$$x_1(t) = c(t) \quad (2.58)$$

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) - \beta_1r(t) = \dot{c}(t) - \beta_1r(t) \quad (2.59)$$

$$x_3(t) = \dot{x}_2(t) - \beta_2r(t) = \ddot{c}(t) - \beta_1\dot{r}(t) - \beta_2r(t) \quad (2.60)$$

Với cách đặt biến trạng thái như trên, ta có:

$$(2.59) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{c}(t) = x_2(t) + \beta_1 r(t) \quad (2.61)$$

$$(2.60) \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{c}(t) = x_3(t) + \beta_1 \dot{r}(t) + \beta_2 r(t) \quad (2.62)$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{c}(t) = \dot{x}_3(t) + \beta_1 \ddot{r}(t) + \beta_2 \dot{r}(t) \quad (2.63)$$

Thay (2.58), (2.61), (2.62) và (2.63) vào phương trình (2.57) ta được:

$$\begin{aligned} & [\dot{x}_3(t) + \beta_1 \ddot{r}(t) + \beta_2 \dot{r}(t)] + a_1 [x_3(t) + \beta_1 \dot{r}(t) + \beta_2 r(t)] + \\ & + a_2 [x_2(t) + \beta_1 r(t)] + a_3 x_1(t) = b_o \ddot{r}(t) + b_1 \dot{r}(t) + b_2 r(t) \\ \Leftrightarrow & \dot{x}_3(t) = -\beta_1 \ddot{r}(t) - \beta_2 \dot{r}(t) - a_1 x_3(t) - a_1 \beta_1 \dot{r}(t) - a_1 \beta_2 r(t) \\ & - a_2 x_2(t) - a_2 \beta_1 r(t) - a_3 x_1(t) + b_o \ddot{r}(t) + b_1 \dot{r}(t) + b_2 r(t) \\ \Leftrightarrow & \dot{x}_3(t) = -a_3 x_1(t) - a_2 x_1(t) - a_1 x_3(t) + (b_o - \beta_1) \ddot{r}(t) \\ & + (b_1 - \beta_2 - a_1 \beta_1) \dot{r}(t) + (b_2 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1) r(t) \end{aligned} \quad (2.64)$$

Chọn  $\beta_1, \beta_2$  sao cho đạo hàm của tín hiệu vào trong biểu thức (2.64) bị triệt tiêu:

$$\begin{cases} b_o - \beta_1 = 0 \\ b_1 - \beta_2 - a_1 \beta_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = b_o \\ \beta_2 = b_1 - a_1 \beta_1 \end{cases}$$

Đặt:  $\beta_3 = b_2 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1$

Thay vào (2.64) ta được:

$$\dot{x}_3(t) = -a_3 x_1(t) - a_2 x_1(t) - a_1 x_3(t) + \beta_3 r(t) \quad (2.65)$$

Kết hợp (2.59), (2.60) và (2.65) ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + \beta_1 r(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) + \beta_2 r(t) \\ \dot{x}_3(t) = -a_3 x_1(t) - a_2 x_1(t) - a_1 x_3(t) + \beta_3 r(t) \end{cases}$$

Viết lại dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} r(t)$$

trong đó:  $\begin{cases} \beta_1 = b_o \\ \beta_2 = b_1 - a_1 \beta_1 \\ \beta_3 = b_2 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 \end{cases}$



Đáp ứng của hệ thống:  $c(t) = x_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$

Trên đây vừa chứng minh cách dẫn ra hệ phương trình trạng thái cho hệ bậc ba trong trường hợp vế phải của phương trình vi phân có chứa đạo hàm của tín hiệu vào. Sau đây là một ví dụ áp dụng.

**Ví dụ 2.8.** Thành lập hệ phương trình trạng thái mô tả hệ thống có quan hệ giữa tín hiệu vào và tín hiệu ra qua phương trình vi phân:

$$\ddot{c}(t) + 5\dot{c}(t) + 6c(t) = 10\dot{r}(t) + 20r(t)$$

**Giải.** Đặt các biến trạng thái như sau:

$$x_1(t) = c(t)$$

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) - \beta_1 r(t)$$

$$x_3(t) = \dot{x}_2(t) - \beta_2 r(t)$$

Hệ phương trình trạng thái mô tả hệ thống là:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} r(t)$$

trong đó 
$$\begin{cases} \beta_1 = b_o = 0 \\ \beta_2 = b_1 - a_1\beta_1 = 10 - 5 \times 0 = 10 \\ \beta_3 = b_2 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 = 20 - 5 \times 10 - 6 \times 0 = -30 \end{cases}$$

Thay thông số của hệ vào phương trình trạng thái, ta được:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ -30 \end{bmatrix} r(t)$$

Đáp ứng của hệ thống:

$$c(t) = x_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

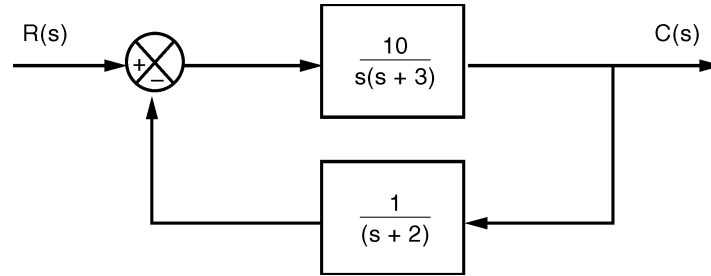
■

### 2.4.4 Thành lập phương trình trạng thái từ hàm truyền và sơ đồ khối

#### 1- Biến đổi hàm truyền thành phương trình vi phân

Nếu hệ thống được cho dưới dạng hàm truyền, ta có thể dùng phép biến đổi Laplace ngược để chuyển quan hệ hàm truyền thành phương trình vi phân, sau đó áp dụng phương pháp thành lập hệ phương trình biến trạng thái đã trình bày ở mục 2.4.3. Sau đây là một ví dụ:

**Ví dụ 2.9.** Hãy thành lập hệ phương trình trạng thái mô tả hệ thống có sơ đồ khối như sau



**Giải:** Hàm truyền của hệ thống kín:

$$G_k(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\frac{10}{s(s+3)}}{1 + \frac{10}{s(s+3)} \cdot \frac{1}{(s+2)}} = \frac{10(s+2)}{s(s+3)(s+2) + 10}$$

$$\Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10(s+2)}{s(s+3)(s+2) + 10} = \frac{10(s+2)}{s^3 + 5s^2 + 6s + 10}$$

$$\Rightarrow (s^3 + 5s^2 + 6s + 10)C(s) = 10(s+2)R(s)$$

$$\Rightarrow \ddot{c}(t) + 5\dot{c}(t) + 6c(t) + 10c(t) = 10\dot{r}(t) + 20r(t)$$

Xem tiếp lời giải đã trình bày ở ví dụ 2.8. ■

#### 2- Phương pháp tọa độ pha

Một phương pháp khác cũng thường được áp dụng để xây dựng hệ phương trình trạng thái từ hàm truyền là *phương pháp tọa độ pha*. Xét hệ thống bậc  $n$  có hàm truyền là:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (2.66)$$

Để thuận lợi cho việc xây dựng hệ phương trình biến trạng thái, trong biểu thức (2.66) hệ số  $a_0 = 1$  (nếu  $a_0 \neq 1$ , ta chia tử số và mẫu số cho  $a_0$ ) và  $m = n-1$  (các hệ số  $b_0, b_1, \dots$  có thể bằng 0).

Đặt biến phụ  $Y(s)$  sao cho:

$$C(s) = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m) Y(s) \quad (2.67)$$

$$R(s) = (s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n) Y(s) \quad (2.68)$$

Dễ thấy rằng, bằng cách đặt  $Y(s)$  như trên, biểu thức (2.66) vẫn được thỏa mãn. Biến đổi Laplace ngược hai vế (2.67) và (2.68) ta được:

$$c(t) = b_0 \frac{d^m y(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dy(t)}{dt} + b_m y(t) \quad (2.69)$$

$$r(t) = \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) \quad (2.70)$$

Xét phương trình vi phân (2.70), ta đặt các biến trạng thái như sau:

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) \\ x_3(t) = \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) \\ \vdots \\ x_n(t) = \dot{x}_{n-1}(t) = \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} \end{cases} \quad (2.71)$$

Áp dụng kết quả đã trình bày ở mục 2.4.2.1, từ phương trình vi phân (2.70) ta suy ra hệ phương trình trạng thái:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Br(t) \quad (2.72)$$

trong đó:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Mặt khác thay các biến trạng thái ở biểu thức (2.71) vào phương trình vi phân (2.69) ta được:

$$c(t) = b_0 x_n(t) + b_1 x_{n-1}(t) + \dots + b_{m-1} x_2(t) + b_m x_1(t)$$

Viết dưới dạng véctơ:

$$c(t) = Cx(t) \quad (2.74)$$

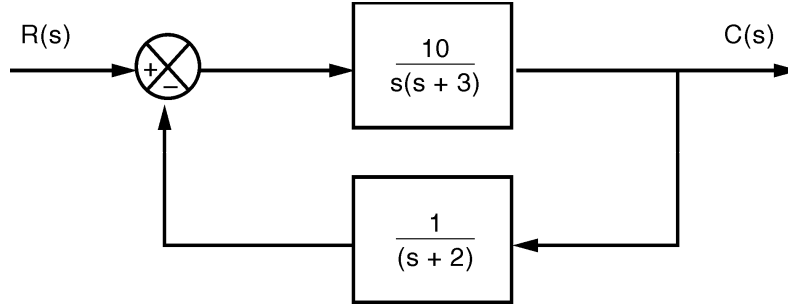
với:  $C = [b_m \quad b_{m-1} \quad \dots \quad b_1 \quad b_0]$  (2.75)

Tóm lại, bằng cách đặt biến trạng thái theo phương pháp tọa độ pha, hệ phương trình biến trạng mô tả hệ thống là:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Br(t) \\ c(t) = Cx(t) \end{cases}$$

với các ma trận trạng thái xác định bằng biểu thức (2.73) và (2.75).

**Ví dụ 2.10.** Hãy thành lập hệ phương trình trạng thái mô tả hệ thống có sơ đồ khối dưới đây bằng phương pháp tọa độ pha.



**Giải:** Hàm truyền của hệ thống là (xem lại ví dụ 2.9):

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10s + 20}{s^3 + 5s^2 + 6s + 10}$$

Đặt biến phụ  $Y(s)$  thỏa:

$$C(s) = (10s + 20)Y(s)$$

$$R(s) = (s^3 + 5s^2 + 6s + 10)Y(s)$$

Suy ra:  $c(t) = 0\ddot{y}(t) + 10\dot{y}(t) + 20y(t)$

$$r(t) = \ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) + 10y(t)$$

Đặt các biến trạng thái:

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t)$$

$$x_3(t) = \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t)$$

Áp dụng các công thức từ (2.72) đến (2.75), ta rút ra được hệ phương trình trạng thái mô tả hệ thống là:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}r(t) \\ c(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

trong đó:  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -6 & -5 \end{bmatrix}$   $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{C} = [b_2 \quad b_1 \quad b_0] = [20 \quad 10 \quad 0]$$

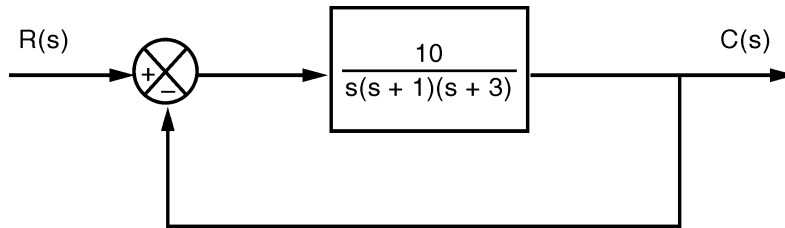
■

**Nhận xét:** Mặc dù hệ thống cho bởi sơ đồ khối ở ví dụ 2.9 và 2.10 là như nhau nhưng hệ phương trình trạng thái thành lập được ở hai ví dụ trên lại khác nhau. Điều này không có gì vô lý vì bản chất các biến trạng thái là các biến phụ được đặt ra nhằm chuyển phương trình vi phân bậc  $n$  thành hệ gồm  $n$  phương trình vi phân bậc nhất, do cách đặt các biến trạng thái ở hai ví dụ trên là khác nhau nên kết quả hệ phương trình biến trạng thái bắt buộc phải khác nhau.

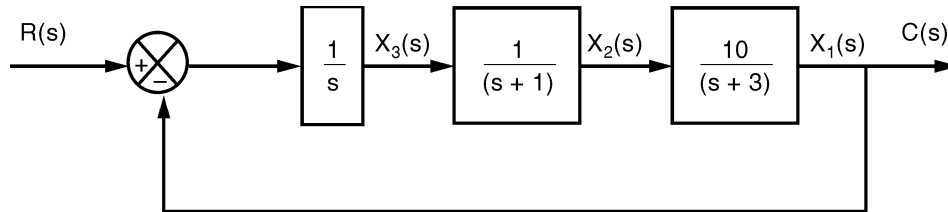
### 3- Phương pháp đặt biến trạng thái trực tiếp trên sơ đồ khối

Nếu hệ thống được cho dưới dạng sơ đồ khối ta có thể đặt biến trạng thái trực tiếp trên sơ đồ khối. Sau đây là một số ví dụ.

**Ví dụ 2.11.** Hãy thành lập hệ phương trình trạng thái mô tả hệ thống có sơ đồ khối như sau:



**Giải.** Vẽ lại sơ đồ khối của hệ thống trên với các biến trạng thái được đặt như sau:



Với cách đặt biến trạng thái như hình vẽ, ta có các quan hệ sau:

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{10}{s+3} X_2(s) \\ \Rightarrow sX_1(s) + 3X_1(s) &= 10X_2(s) \\ \Rightarrow \dot{x}_1(t) &= -3x_1(t) + 10x_2(t) \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} X_2(s) &= \frac{1}{s+1} X_3(s) \\ \Rightarrow sX_2(s) + X_2(s) &= X_3(s) \\ \Rightarrow \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + x_3(t) \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} X_3(s) &= \frac{1}{s} (R(s) - C(s)) \\ \Rightarrow sX_3(s) &= R(s) - X_1(s) \\ \Rightarrow \dot{x}_3(t) &= -x_1(t) + r(t) \end{aligned} \quad (2.78)$$

Kết hợp (2.76), (2.77) và (2.78) ta được hệ phương trình trạng thái:

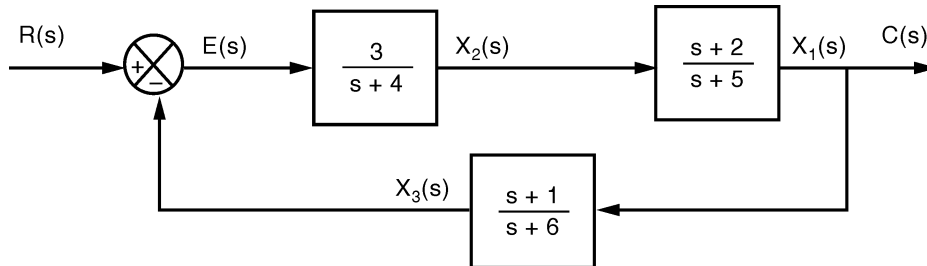
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 10 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad (2.79)$$

Đáp ứng của hệ thống:

$$c(t) = x_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

**Nhận xét:** Dễ thấy rằng tùy theo cách đặt biến trạng thái trên sơ đồ khối mà ta có thể dẫn ra được các hệ phương trình trạng thái hoàn toàn khác nhau. Điều này một lần nữa khẳng định một hệ thống có thể được mô tả bằng nhiều hệ phương trình trạng thái.

**Ví dụ 2.12.** Hãy thành lập hệ phương trình trạng thái mô tả hệ thống với các biến trạng thái được xác định trên sơ đồ khối như sau:



**Giải:** Với các biến trạng thái như trên sơ đồ khối, ta có các quan hệ sau:

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{s+2}{s+5} X_2(s) \\ \Rightarrow sX_1(s) &= -5X_1(s) + 2X_2(s) + sX_2(s) \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} X_2(s) &= \frac{3}{s+4} E(s) = \frac{3}{s+4} [R(s) - X_3(s)] \\ \Rightarrow sX_2(s) &= -4X_2(s) - 3X_3(s) + 3R(s) \end{aligned} \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned} X_3(s) &= \frac{s+1}{s+6} X_1(s) \\ \Rightarrow sX_3(s) &= X_1(s) - 6X_3(s) + sX_1(s) \end{aligned} \quad (2.82)$$

Thay  $sX_2(s)$  ở biểu thức (2.81) vào biểu thức (2.80) ta được:

$$\begin{aligned} sX_1(s) &= -5X_1(s) + 2X_2(s) - 4X_2(s) - 3X_3(s) + 3R(s) \\ \Rightarrow sX_1(s) &= -5X_1(s) - 2X_2(s) - 3X_3(s) + 3R(s) \end{aligned} \quad (2.83)$$

Thay  $sX_1(s)$  ở biểu thức (2.83) vào biểu thức (2.82) ta được:

$$\begin{aligned} sX_3(s) &= X_1(s) - 6X_3(s) - 5X_1(s) - 2X_2(s) - 3X_3(s) + 3R(s) \\ \Rightarrow sX_3(s) &= -4X_1(s) - 2X_2(s) - 9X_3(s) + 3R(s) \end{aligned} \quad (2.84)$$

Từ các biểu thức (2.82), (2.81) và (2.84) ta suy ra hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -5x_1(t) - 2x_2(t) - 3x_3(t) + 3r(t) \\ \dot{x}_2(t) = -4x_2(t) - 3x_3(t) + 3r(t) \\ \dot{x}_3(t) = -4x_1(t) - 2x_2(t) - 9x_3(t) + 3r(t) \end{cases}$$

Viết lại dưới dạng ma trận:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}r(t)$$

trong đó:  $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$   $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & -3 \\ -4 & -2 & -9 \end{bmatrix}$   $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

Đáp ứng của hệ:  $c(t) = x_1(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$

với:

$$\mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0]$$

■

### 2.4.5 Thành lập hệ phương trình biến trạng thái ở dạng chính tắc

Để thành lập hệ phương trình biến trạng thái dạng chính tắc, ta thực hiện theo các bước sau đây:

1- Thành lập hệ phương trình biến trạng thái ở dạng thường:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}r(t) \\ c(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (2.85)$$

2- Thực hiện phép đổi biến trạng thái:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}\mathbf{y}(t)$$

Thay vào phương trình (2.85) ta được:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \mathbf{M}\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}r(t) \\ c(t) = \mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{y}(t) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{y}(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}r(t) \\ c(t) = \mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{y}(t) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \dot{\mathbf{y}}(t) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{y}(t) + \bar{\mathbf{B}}r(t) \\ c(t) = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{y}(t) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$\text{trong đó: } \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \quad \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{M}$$

Hệ phương trình trạng thái (2.86) tương đương với hệ phương trình (2.85). Để (2.86) có dạng chính tắc, phải chọn  $\mathbf{M}$  sao cho ma trận  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$  chỉ có đường chéo khác 0. Theo lý thuyết đại số tuyến tính, ma trận chuyển đổi  $\mathbf{M}$  được chọn như sau:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

trong đó  $\lambda_i$ , ( $i = \overline{1, n}$ ) là các trị riêng của ma trận  $\mathbf{A}$ , tức là nghiệm của phương trình:  $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ .



**Ví dụ 2.13.** Cho hệ thống có hàm truyền:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{3s+1}{s^2+3s+2}$$

Hãy thành lập hệ phương trình trạng thái dạng chính tắc mô tả hệ thống.

**Giải.** Áp dụng phương pháp tọa độ pha dễ dàng suy ra hệ phương trình trạng thái mô tả hệ thống là:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}r(t) \\ c(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

trong đó:  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 3]$

Trị riêng của ma trận  $\mathbf{A}$  là nghiệm của phương trình:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \left( \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \left( \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda+3 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

Thực hiện phép đổi biến:  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}\mathbf{y}(t)$  với ma trận  $\mathbf{M}$  là:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{1 \times (-2) - (-1) \times 1} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Với cách đổi biến trên, ta được hệ phương trình biến trạng thái có dạng:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}(t) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{y}(t) + \bar{\mathbf{B}}r(t) \\ c(t) = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{y}(t) \end{cases}$$

trong đó:

$$\bar{A} = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = M^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CM = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Vậy hệ phương trình biến trạng thái chính tắc mô tả hệ thống là:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} r(t)$$

$$c(t) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

#### 2.4.6 Tính hàm truyền từ hệ phương trình trạng thái

Cho hệ thống mô tả bởi hệ phương trình biến trạng thái:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}r(t) \\ c(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Biến đổi Laplace hai vế phương trình trên (giả sử điều kiện đầu bằng 0), ta được:

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}R(s) \quad (2.88)$$

$$C(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) \quad (2.89)$$

$$(2.88) \Rightarrow (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}R(s)$$

$$\Rightarrow \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}R(s)$$

$$\Rightarrow \mathbf{C}\mathbf{X}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}R(s)$$

Kết hợp với biểu thức (2.89) ta được:

$$C(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}R(s)$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \quad (2.90)$$

Công thức (2.90) cho phép ta tính được hàm truyền khi biết hệ phương trình trạng thái mô tả hệ thống.

**Ví dụ 2.14.** Cho hệ thống có hệ phương trình biến trạng thái là:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

$$c(t) = [1 \quad 3] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Tính hàm truyền của hệ thống.

**Giải.** Hàm truyền của hệ thống là:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B$$

$$\text{Ta có: } (sI - A) = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} B = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}$$

$$C(sI - A)^{-1} B = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} [1 \quad 3] \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} = \frac{3s+1}{s^2 + 3s + 2}$$

$$\text{Vậy: } G(s) = \frac{3s+1}{s^2 + 3s + 2} \quad \blacksquare$$

### 2.4.7 Nghiệm của hệ phương trình trạng thái

Cho hệ thống có phương trình trạng thái như sau:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Br(t) \quad (2.91)$$

$$c(t) = Cx(t) \quad (2.92)$$

Muốn tính được đáp ứng của hệ thống khi biết tín hiệu vào  $r(t)$ , trước tiên ta phải tính được nghiệm  $x(t)$  của phương trình (2.91).

Biến đổi Laplace hai vế phương trình (2.91), ta được:

$$\begin{aligned}
sX(s) - x(0^+) &= AX(s) + BR(s) \\
\Rightarrow (sI - A)X(s) &= x(0^+) + BR(s) \\
\Rightarrow X(s) &= (sI - A)^{-1} x(0^+) + (sI - A)^{-1} BR(s) \quad (2.93)
\end{aligned}$$

Đặt:  $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$ , thay vào biểu thức (2.93) ta được:

$$X(s) = \Phi(s)x(0^+) + \Phi(s)BR(s) \quad (2.94)$$

Biến đổi Laplace ngược hai vế biểu thức (2.94) ta được:

$$x(t) = \Phi(t)x(0^+) + \int_0^t \Phi(t - \tau)BR(\tau)d\tau \quad (2.95)$$

$$\text{trong đó: } \Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)] = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] \quad (2.96)$$

Ma trận  $\Phi(t)$  được gọi là *ma trận quá độ* của hệ thống. Tính  $\Phi(t)$  theo công thức (2.96) tương đối khó khăn, nhất là đối với các hệ thống từ bậc ba trở lên, do trước tiên phải tính ma trận nghịch đảo, sau đó thực hiện phép biến đổi Laplace ngược. Công thức sẽ dẫn ra dưới đây giúp cho việc tính  $\Phi(t)$  dễ dàng hơn.

Dựa vào biểu thức (2.95) ta thấy khi  $r(t) = 0$  thì:

$$x(t) = \Phi(t)x(0^+) \quad (2.97)$$

Mặt khác khi  $r(t) = 0$  phương trình (2.91) trở thành:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (2.98)$$

$$\text{Nghiệm của (2.98) là: } x(t) = e^{At}x(0^+) \quad (2.99)$$

So sánh (2.97) và (2.99) suy ra:

$$\Phi(t) = e^{At} \quad (2.100)$$

Theo định lý Caley - Hamilton, ta có:

$$\Phi(t) = e^{At} = C_0 I + C_1 [A] + C_2 [A]^2 + \dots + C_{n-1} [A]^{n-1} \quad (2.101)$$

Thay  $A = \lambda$ , với  $\lambda$  là các trị riêng của ma trận  $A$  (tức là nghiệm của phương trình  $\det(\lambda I - A) = 0$ ) vào biểu thức (2.101), ta sẽ tính được các hệ số  $C_i$ , ( $i = 0, n-1$ ).

### Tóm lại

□ Để tính nghiệm của hệ phương trình biến trạng thái ta thực hiện các bước sau đây:

1- Tính ma trận quá độ  $\Phi(t)$  theo công thức (2.96) hoặc (2.101).

2- Tính nghiệm của phương trình biến trạng thái theo công thức (2.95). Nếu điều kiện đầu bằng 0 thì:

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t \Phi(t-\tau) \mathbf{B} \mathbf{R}(\tau) d\tau$$

□ Nếu muốn tìm đáp ứng của hệ thống bằng phương pháp biến trạng thái, trước tiên tìm nghiệm của hệ phương trình biến trạng thái, sau đó tính:  $c(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$

**Ví dụ 2.15.** Cho hệ thống có hàm truyền là:

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + 3s + 2}$$

1- Thành lập hệ phương trình biến trạng thái mô tả hệ thống

trên.

2- Tính ma trận quá độ.

3- Tìm đáp ứng của hệ thống khi tín hiệu vào là hàm nấc đơn vị (giả sử điều kiện đầu bằng 0).

**Giải:** 1- Thành lập hệ phương trình biến trạng thái:

$$\text{Theo đề bài ta có: } \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s}{s^2 + 3s + 2}$$

$$\Rightarrow (s^2 + 3s + 2)C(s) = sR(s)$$

$$\Rightarrow \ddot{c}(t) + 3\dot{c}(t) + 2c(t) = \dot{r}(t)$$

Đặt các biến trạng thái như sau:

$$x_1(t) = c(t)$$

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) - \beta_1 r(t)$$

Hệ phương trình biến trạng thái mô tả hệ thống là:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}r(t) \\ c(t) = \mathbf{D}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

trong đó: 
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{do} \quad \beta_1 &= b_o = 1 \\ \beta_2 &= b_1 - a_1\beta_1 = 0 - 3 \times 1 = -3 \\ C &= [1 \quad 0] \end{aligned}$$

2- Tính ma trận quá độ:

$$\text{Cách 1: } \Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)] = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

$$\text{Ta có: } [sI - A] = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(s) = [sI - A]^{-1} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \right\} & \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)(s+2)} \right\} \\ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} \right\} & \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s+1)(s+2)} \right\} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)} \right\} & \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)} \right\} \\ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-2}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)} \right\} & \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-1}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)} \right\} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \quad \Phi(t) &= \begin{bmatrix} (2e^{-t} - e^{-2t}) & (e^{-t} - e^{-2t}) \\ (-2e^{-t} + 2e^{-2t}) & (-e^{-t} + 2e^{-2t}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Cách 2: Đối với hệ bậc hai, công thức (2.101) trở thành:

$$\Phi(t) = e^{At} = C_o I + C_1 [A] \quad (2.102)$$

Các trị riêng của  $A$  là nghiệm của phương trình:  $\det(\lambda I - A) = 0$

$$\Leftrightarrow \det \left( \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

Thay  $A = \lambda_i$  vào công thức (2.102), ta được:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} e^{\lambda_1 t} = C_o + C_1 \lambda_1 \\ e^{\lambda_2 t} = C_o + C_1 \lambda_2 \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} e^{-t} = C_o - C_1 \\ e^{-2t} = C_o - 2C_1 \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} C_o = 2e^{-t} - e^{-2t} \\ C_1 = e^{-t} - e^{-2t} \end{cases} \end{aligned}$$

Thay  $C_o, C_1$  vào công thức (2.102), ta được:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= (2e^{-t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^{-t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \Phi(t) &= \begin{bmatrix} (2e^{-t} - e^{-2t}) & (e^{-t} - e^{-2t}) \\ (-2e^{-t} + 2e^{-2t}) & (-e^{-t} + 2e^{-2t}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ta thấy ma trận quá độ tính theo hai cách đều cho kết quả như nhau.

### 3- Đáp ứng của hệ thống:

Trước tiên ta tìm nghiệm của hệ phương trình biến trạng thái. Với điều kiện đầu bằng 0, nghiệm của phương trình trạng thái là:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \Phi(t-\tau) B R(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \begin{bmatrix} (2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}) & (e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}) \\ (-2e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)}) & (-e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} d\tau \\ &= \int_0^t \begin{bmatrix} (-e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)}) \\ (e^{-(t-\tau)} - 4e^{-2(t-\tau)}) \end{bmatrix} d\tau \\ &= \begin{bmatrix} \int_0^t (-e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)}) d\tau \\ \int_0^t (e^{-(t-\tau)} - 4e^{-2(t-\tau)}) d\tau \end{bmatrix} \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} - e^{-2t} \\ -1 - e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

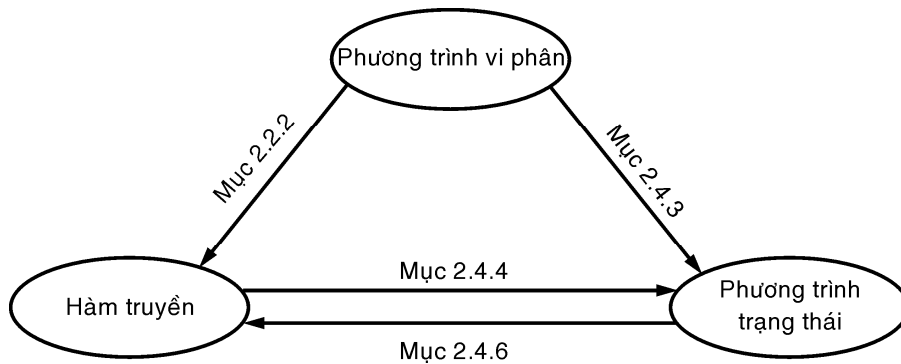
Đáp ứng của hệ thống là:

$$\mathbf{c}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = x_1(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

■

## 2.5 TÓM TẮT

Chương này đã trình bày hai phương pháp mô tả toán học hệ thống tự động là phương pháp hàm truyền đạt và phương pháp không gian trạng thái (H.2.15). Tùy theo hệ thống và bài toán điều khiển cần giải quyết mà chúng ta chọn phương pháp mô tả toán học phù hợp. Nếu bài toán là bài toán phân tích, nếu hệ thống có một ngõ vào, một ngõ ra và nếu quan hệ giữa ngõ vào và ngõ ra có thể biểu diễn bằng một phương trình vi phân hệ số hằng thì có thể chọn phương pháp hàm truyền đạt hay phương pháp không gian trạng thái đều được. Nếu hệ thống khảo sát là hệ biến đổi theo thời gian hay hệ phi tuyến, hệ đa biến thì phương pháp không gian trạng thái nên được sử dụng. Nếu bài toán là bài toán thiết kế hệ thống điều khiển tối ưu thì bất kể hệ thống thuộc loại gì ta phải chọn phương pháp không gian trạng thái. Vì quyển sách này là tài liệu giảng dạy nên cả hai phương pháp mô tả toán học hệ thống sẽ được sử dụng song song.



**Hình 2.16** Quan hệ giữa các cách mô tả toán học hệ thống tự động

## Phụ lục: MÔ TẢ HỆ THỐNG TỰ ĐỘNG DÙNG MATLAB

Control Toolbox của Matlab là một bộ công cụ cho phép phân tích, thiết kế và mô phỏng các hệ thống tự động. Trong phụ lục này chúng ta xét mô tả toán học hệ thống tự động dùng Control Toolbox chạy trên nền Matlab 5.3. Chúng tôi chỉ giới thiệu các lệnh một cách sơ lược đủ để minh họa cho phần lý thuyết điều khiển tự động trình bày trong quyển sách này. Để có thể khai thác tất cả các điểm mạnh của Control Toolbox trong việc phân tích và thiết kế hệ thống tự động, độc giả cần tham khảo thêm tài liệu hướng dẫn của Matlab.

Sau khi kích hoạt phần mềm Matlab, cửa sổ Command Window hiện lên cho phép chúng ta nhập lệnh vào. Cần chú ý một số điểm sau:

- \* Matlab phân biệt ký tự thường và ký tự hoa (case sensitive).

- \* Matlab hiển thị kết quả thực hiện phép tính nếu cuối câu lệnh không có dấu chấm phẩy “;” và không hiển thị kết quả nếu cuối câu lệnh có dấu “;”.

- \* Dấu “%” được sử dụng để chú thích, tất cả các ký tự nằm sau dấu “%” không được xử lý.

- \* Nếu muốn biết chức năng và cú pháp của một lệnh, nhập vào dòng lệnh có dạng: **>> help lenh\_can\_biet**

*Ví dụ:*

```
>> help feedback
```

```
>> help bode
```

### 1- Các lệnh cơ bản

#### • Biểu diễn ma trận, vectơ, đa thức:

```
>> x=[1 4 6 -2 8] %x là vectơ hàng, các cột cách nhau bởi khoảng trắng
```

```
x =
```

```
1    4    6   -2    8
```

```
>> y=[1; 4; 6; -2] %y là vectơ cột, các hàng cách nhau bởi dấu “;”
```

```
y =
```

```
1
```

```
4
```

```
6
```

```
-2
```

```
>> A=[1 2 3; 0 -1 4; 5 7 6] % A là ma trận vuông cấp 3
```

```
A =
```

```
1    2    3
```

```
0   -1    4
```

5 7 6

- Đa thức được biểu diễn bằng véc tơ hàng với các phần tử là các hệ số sắp theo thứ tự số mũ giảm dần.

```
>> A=[1 3 5] %A là đa thức s^2 +3s + 5
```

```
A =
```

1 3 5

```
>> B=[2 4 -7 3] %B là đa thức 2s^3 + 4s^2 -7s + 3
```

```
B =
```

2 4 -7 3

- Nhân đa thức: dùng lệnh **conv** (**convolution** – tích chập)

```
>> C=conv(A,B) % đa thức C=A.B=2s^5 + 10s^4 + 15s^3 + 2s^2 -26s + 15
```

```
C =
```

2 10 15 2 -26 15

```
>> D=conv(conv([2 0],[1 3]),[1 4]) %D=2s(s+3)(s+4)=2s^3 + 14s^2 +24s
```

```
D =
```

2 14 24 0

## 2- Một số lệnh mô tả toán học hệ thống tự động

- Tạo ra hệ thống mô tả bởi hàm truyền: lệnh tf (transfer function).

Cú pháp: **G=tf(TS,MS)** tạo ra hệ thống mô tả bởi hàm truyền G có tử số là đa thức TS và mẫu số là đa thức MS.

*Ví dụ:*

```
>> TS=1; MS=[1 1];
```

```
>> G1=tf(TS,MS) %G1=TS/MS
```

```
Transfer function:
```

1

-----

s + 1

```
>> G2=tf([1 4],conv([1 2],[1 3])) %G2=(s+4)/(s+2)(s+3)
```

```
Transfer function:
```

S + 4

-----

s^2 + 5 s + 6

- Đơn giản hàm truyền: lệnh minreal.

Cú pháp: **G=minreal(G)** triệt tiêu các thành phần giống nhau ở tử số và mẫu số để được dạng hàm truyền tối giản.

*Ví dụ:*

```
>> TS=[1 2]; MS=conv([1 2],[1 3]);
```

```
>> G=tf(TS,MS) % hàm truyền có tử số là (s+2) và mẫu số là (s+2)(s+3)
```

```
Transfer function:
```

s + 2

-----

s^2 + 5 s + 6

```
>> G=minreal(G) % triệt tiêu thành phần (s+2) ở tử số và mẫu số
```

```
Transfer function:
```

1

-----

$s + 3$

- Tính hàm truyền của hệ thống nối tiếp: **lệnh series**.

Cú pháp: **G=series(G1,G2)** hàm truyền  $G = G1 \cdot G2$

*Ví dụ:*

```
>> G=series(G1,G2)
```

Transfer function:

$s + 4$

-----  
 $s^3 + 6 s^2 + 11 s + 6$

Có thể dùng toán tử “\*” thay cho lệnh **series**. Chú ý rằng lệnh **series** chỉ có thể tính hàm truyền của hai hệ thống nối tiếp trong khi sử dụng toán tử “\*” ta có thể tính hàm truyền tương đương của bao nhiêu hệ thống ghép nối tiếp tùy ý.

*Ví dụ:*

```
>> G=G1*G2
```

Transfer function:

$s + 4$

-----  
 $s^3 + 6 s^2 + 11 s + 6$

```
>> G3=tf(2,[1 0]) %G3=2/s
```

Transfer function:

2

-

s

```
>> G=G1*G2*G3
```

Transfer function:

$2 s + 8$

-----  
 $s^4 + 6 s^3 + 11 s^2 + 6 s$

- Tính hàm truyền của hệ thống song song: **lệnh parallel**.

Cú pháp: **G=parallel (G1,G2)** hàm truyền  $G = G1+G2$

*Ví dụ:*

```
>> G=parallel(G1,G2)
```

Transfer function:

$2 s^2 + 10 s + 10$

-----  
 $s^3 + 6 s^2 + 11 s + 6$

Có thể dùng toán tử “+” thay cho lệnh **parallel**. Chú ý rằng lệnh **parallel** chỉ có thể tính hàm truyền của hai hệ thống song song trong khi sử dụng toán tử “+” ta có thể tính hàm truyền tương đương của nhiều hệ thống ghép song song.

*Ví dụ:*

```
>> G=G1+G2+G3
```

Transfer function:

$$4s^3 + 22s^2 + 32s + 12$$

$$s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s$$

□ Tính hàm truyền của hệ thống hồi tiếp: **lệnh feedback**.

Cú pháp:

**Gk= feedback (G,H)** tính hàm truyền hệ thống hồi tiếp âm

$$Gk = G/(1+G*H)$$

**Gk= feedback (G,H,+1)** tính hàm truyền hệ thống hồi tiếp dương

$$Gk = G/(1-G*H)$$

Ví dụ:

```
>> G=tf([1 1],[1 3 2])
```

Transfer function:

$$s + 1$$

$$s^2 + 3s + 2$$

```
>> H=tf(1,[1 5])
```

Transfer function:

$$1$$

$$s + 5$$

```
>> Gk=feedback(G,H) % ham truyen kin he hoi tiep am
```

Transfer function:

$$s^2 + 6s + 5$$

$$s^3 + 8s^2 + 18s + 11$$

```
>> feedback(G,H,+1) % ham truyen kin he hoi tiep duong
```

Transfer function:

$$s^2 + 6s + 5$$

$$s^3 + 8s^2 + 16s + 9$$

```
>> feedback(G,1) % ham truyen kin he hoi tiep am don vi
```

Transfer function:

$$s + 1$$

$$s^2 + 4s + 3$$

```
>> feedback(G,1,+1) % ham truyen kin he hoi tiep duong don vi
```

Transfer function:

$$s + 1$$

$$s^2 + 2s + 1$$

□ Tạo ra hệ thống mô tả bằng phương trình trạng thái: **lệnh ss** (state space).

Cú pháp: **PTTT=ss(A,B,C,D)** tạo ra hệ thống mô tả bởi phương trình trạng thái PTTT có các ma trận trạng thái là A, B, C, D

Ví dụ:

```
>> A=[0 1; -3 -2]; B=[0;1]; C=[1 0]; D=0;
```

```
>> PTTT=ss(A,B,C,D)
```

```
a =
```

	x1	x2
x1	0	1
x2	-3	-2

```
b =
```

	u1
x1	0
x2	1

```
c =
```

	x1	x2
y1	1	0

```
d =
```

	u1
y1	0

Continuous-time model.

□ **Biến đổi mô tả toán học từ dạng phương trình trạng thái về dạng hàm truyền: lệnh tf (transfer function).**

Cú pháp: **G=tf(PTTT)** biến đổi phương trình trạng thái PTTT về dạng hàm truyền G.

*Ví dụ:*

```
>> G=tf(PTTT)
```

Transfer function:

```
1
```

```
s^2 + 2 s + 3
```

□ **Biến đổi mô tả toán học từ dạng hàm truyền về dạng phương trình trạng thái: lệnh ss.**

Cú pháp: **PTTT=ss(G)** biến hàm truyền G đổi về dạng phương trình trạng thái PTTT.

*Ví dụ:*

```
>> PTTT=ss(G)
```

```
a =
```

	x1	x2
x1	-2	-1.5
x2	2	0

```
b =
```

	u1
x1	0.5
x2	0

```
c =
```

	x1	x2
y1	0	1

```
d =
```

	u1
y1	0

Continuous-time model.

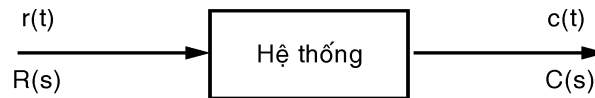
## ĐẶC TÍNH ĐỘNG HỌC CỦA HỆ THỐNG

### 3.1 KHÁI NIỆM VỀ ĐẶC TÍNH ĐỘNG HỌC

Đặc tính động của hệ thống mô tả sự thay đổi tín hiệu ở đầu ra của hệ thống theo thời gian khi có tác động ở đầu vào. Trong thực tế các hệ thống điều khiển rất đa dạng, tuy nhiên những hệ thống được mô tả bằng mô hình toán học có dạng như nhau sẽ có đặc tính động học như nhau. Để khảo sát đặc tính động của hệ thống tín hiệu vào thường được chọn là tín hiệu cơ bản như hàm xung đơn vị, hàm nấc đơn vị hay hàm điều hòa. Tùy theo dạng của tín hiệu vào thử mà đặc tính động thu được là đặc tính thời gian hay đặc tính tần số.

#### 3.1.1 Đặc tính thời gian

*Đặc tính thời gian của hệ thống mô tả sự thay đổi tín hiệu ở đầu ra của hệ thống khi tín hiệu vào là hàm xung đơn vị hay hàm nấc đơn vị.*



**Hình 3.1** Tín hiệu vào và tín hiệu ra của hệ thống

Nếu tín hiệu vào là hàm xung đơn vị  $r(t) = \delta(t)$  thì đáp ứng của hệ thống là:  $C(s) = R(s).G(s) = G(s)$  (do  $R(s) = 1$ )

$$\Rightarrow c(t) = \mathcal{L}^{-1}\{C(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t) \quad (3.1)$$

$g(t)$  được gọi là đáp ứng đáp ứng xung hay còn gọi là hàm trọng lượng của hệ thống.

Vậy *đáp ứng xung* là *đáp ứng của hệ thống khi tín hiệu vào là hàm xung đơn vị*. Theo biểu thức (3.1) *đáp ứng xung* chính là biến đổi Laplace ngược của hàm truyền.

Nếu tín hiệu vào là hàm nấc đơn vị  $r(t) = 1(t)$  thì *đáp ứng* của hệ thống là:

$$\begin{aligned} C(s) &= R(s).G(s) = \frac{G(s)}{s} \quad (\text{do } R(s) = \frac{1}{s}) \\ \Rightarrow c(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{C(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \int_0^t g(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (3.2)$$

Biểu thức (3.2) có được do áp dụng tính chất ảnh của tích phân của phép biến đổi Laplace. Đặt:

$$h(t) = \int_0^t g(\tau)d\tau \quad (3.3)$$

$h(t)$  được gọi là *đáp ứng nấc* hay còn gọi là *hàm quá độ* của hệ thống.

Vậy *đáp ứng nấc* là *đáp ứng của hệ thống khi tín hiệu vào là hàm nấc đơn vị*. Theo biểu thức (3.3) *đáp ứng nấc* chính là tích phân của *đáp ứng xung*.

**Ví dụ 3.1.** Cho hệ thống có hàm truyền là:

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+5)}$$

Xác định hàm trọng lượng và hàm quá độ của hệ thống.

**Giải.** Hàm trọng lượng:

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s(s+5)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{5s} + \frac{4}{5(s+5)}\right\} \\ \Rightarrow g(t) &= \frac{1}{5} + \frac{4}{5}e^{-5t} \end{aligned}$$

Hàm quá độ:

$$\begin{aligned} \text{Cách 1: } h(t) &= \int_0^t g(\tau)d\tau = \int_0^t \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{5}e^{-5\tau}\right)d\tau = \left[\frac{1}{5}\tau - \frac{4}{25}e^{-5\tau}\right]_0^t \\ h(t) &= \frac{1}{5}t - \frac{4}{25}e^{-5t} + \frac{4}{25} \end{aligned}$$



$$\text{Cách 2: } h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+1}{s^2(s+5)} \right\} 1$$

Thực hiện phép biến đổi Laplace ngược ta được kết quả như trên. ■

**Nhận xét:** Ở chương 2 ta đã biết có ba cách mô tả toán học hệ thống tuyến tính liên tục là dùng phương trình vi phân, hàm truyền và hệ phương trình trạng thái. Do quan hệ giữa hàm trọng lượng và hàm quá độ với hàm truyền cho bởi biểu thức (3.1) và (3.3) ta thấy rằng có thể dùng hàm trọng lượng hay hàm quá độ để mô tả toán học hệ thống tự động. Khi đã biết hàm trọng lượng hay hàm quá độ thì sẽ suy ra được hàm truyền dễ dàng bằng các công thức sau đây:

$$G(s) = \mathcal{L} \{g(t)\} \quad (3.4)$$

$$G(s) = \mathcal{L} \left\{ \frac{dh(t)}{dt} \right\} \quad (3.5)$$

**Ví dụ 3.2.** Cho hệ thống có đáp ứng nấc đơn vị là:

$$h(t) = 1 - 3e^{-2t} + 2e^{-3t}$$

Xác định hàm truyền của hệ thống.

**Giải.** Theo đề bài, ta có:

$$G(s) = \mathcal{L} \left\{ \frac{dh(t)}{dt} \right\} = \mathcal{L} \{ 6e^{-2t} - 6e^{-3t} \} = \frac{6}{s+2} - \frac{6}{s+3} = \frac{6}{(s+2)(s+3)} \quad \blacksquare$$

### 3.1.2 Đặc tính tần số

*Đặc tính tần số của hệ thống tuyến tính liên tục mô tả quan hệ giữa tín hiệu ra và tín hiệu vào của hệ thống ở trạng thái xác lập khi thay đổi tần số của tín hiệu dao động điều hòa tác động ở đầu vào của hệ thống.*

Xét hệ tuyến tính liên tục có hàm truyền là  $G(s)$ , giả sử tín hiệu vào là tín hiệu hình sin:

$$r(t) = R_m \sin \omega t \quad \Leftrightarrow \quad R(s) = \frac{\omega R_m}{s^2 + \omega^2}$$

Tín hiệu ra của hệ thống là:

$$C(s) = R(s)G(s) = \left( \frac{\omega R_m}{s^2 + \omega^2} \right) G(s)$$

Giả sử  $G(s)$  có  $n$  cực  $p_i$  phân biệt thỏa  $p_i \neq \pm j\omega$ , ta có thể phân tích  $C(s)$  dưới dạng:

$$C(s) = \frac{\alpha}{s + j\omega} + \frac{\bar{\alpha}}{s - j\omega} + \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{s - p_i}$$

Biến đổi Laplace ngược biểu thức trên, ta được:

$$c(t) = \alpha e^{-j\omega t} + \bar{\alpha} e^{j\omega t} + \sum_{i=1}^n \beta_i e^{p_i t}$$

Nếu hệ thống ổn định thì tất cả các cực  $p_i$  đều có phần thực âm (khái niệm ổn định sẽ nói rõ hơn trong chương 4). Khi đó:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \beta_i e^{p_i t} = 0$$

$$\text{Do đó:} \quad c_{xl}(t) = \alpha e^{-j\omega t} + \bar{\alpha} e^{j\omega t} \quad (3.6)$$

Nếu  $G(s)$  có cực bội thì ta cũng có thể chứng minh được đáp ứng xác lập của hệ thống có dạng (3.6). Các hệ số  $\alpha$  và  $\bar{\alpha}$  xác định bởi công thức:

$$\alpha = G(s) \frac{\omega R_m}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = -\frac{R_m G(-j\omega)}{2j} \quad (3.7)$$

$$\bar{\alpha} = G(s) \frac{\omega R_m}{s^2 + \omega^2} (s - j\omega) \Big|_{s=j\omega} = \frac{R_m G(j\omega)}{2j} \quad (3.8)$$

Thay (3.7) và (3.8) vào (3.6), rút gọn biểu thức ta được:

$$c_{xl}(t) = R_m |G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega)) \quad (3.9)$$

Biểu thức (3.9) cho thấy ở trạng thái xác lập tín hiệu ra của hệ thống là tín hiệu hình sin, cùng tần số với tín hiệu vào, biên độ tỉ lệ với biên độ tín hiệu vào (hệ số tỉ lệ là  $|G(j\omega)|$ ) và lệch pha so với tín hiệu vào (độ lệch pha là  $\angle G(j\omega)$ ).

**Định nghĩa:** Đặc tính tần số của hệ thống là tỉ số giữa tín hiệu ra ở trạng thái xác lập và tín hiệu vào hình sin.

$$\text{Đặc tính tần số} = \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} \quad (3.10)$$

Từ định nghĩa (3.10) và biểu thức (3.9) ta rút ra:

$$\text{Đặc tính tần số} = G(s) \Big|_{s=j\omega} = G(j\omega) \quad (3.11)$$

**Ví dụ 3.3.** Nếu hệ thống có hàm truyền là  $G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+1)}$  thì đặc

tính tần số của hệ thống là  $G(j\omega) = \frac{10(j\omega+3)}{j\omega(j\omega+1)}$  ■

Tổng quát đặc tính tần số  $G(j\omega)$  là một hàm phức nên có thể biểu diễn dưới dạng đại số hoặc dạng cực:

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = M(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad (3.12)$$

trong đó:  $P(\omega)$  là phần thực;  $Q(\omega)$  là phần ảo của đặc tính tần số

$M(\omega)$  là đáp ứng biên độ;  $\varphi(\omega)$  là đáp ứng pha.

Quan hệ giữa hai cách biểu diễn  $G(j\omega)$  như sau:

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \quad (3.13)$$

$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \right] \quad (3.14)$$

$$P(\omega) = M(\omega) \cos [\varphi(\omega)] \quad (3.15)$$

$$Q(\omega) = M(\omega) \sin [\varphi(\omega)] \quad (3.16)$$

Để biểu diễn đặc tính tần số một cách trực quan, ta có thể dùng đồ thị. Có hai dạng đồ thị thường sử dụng:

**1- Biểu đồ Bode** là hình vẽ gồm hai thành phần:

• **Biểu đồ Bode biên độ:** đồ thị biểu diễn mối quan hệ giữa logarith của đáp ứng biên độ  $L(\omega)$  theo tần số  $\omega$ .

$$L(\omega) = 20 \lg M(\omega) \quad (3.17)$$

$L(\omega)$  - là đáp ứng biên độ tính theo đơn vị dB (*decibel*).

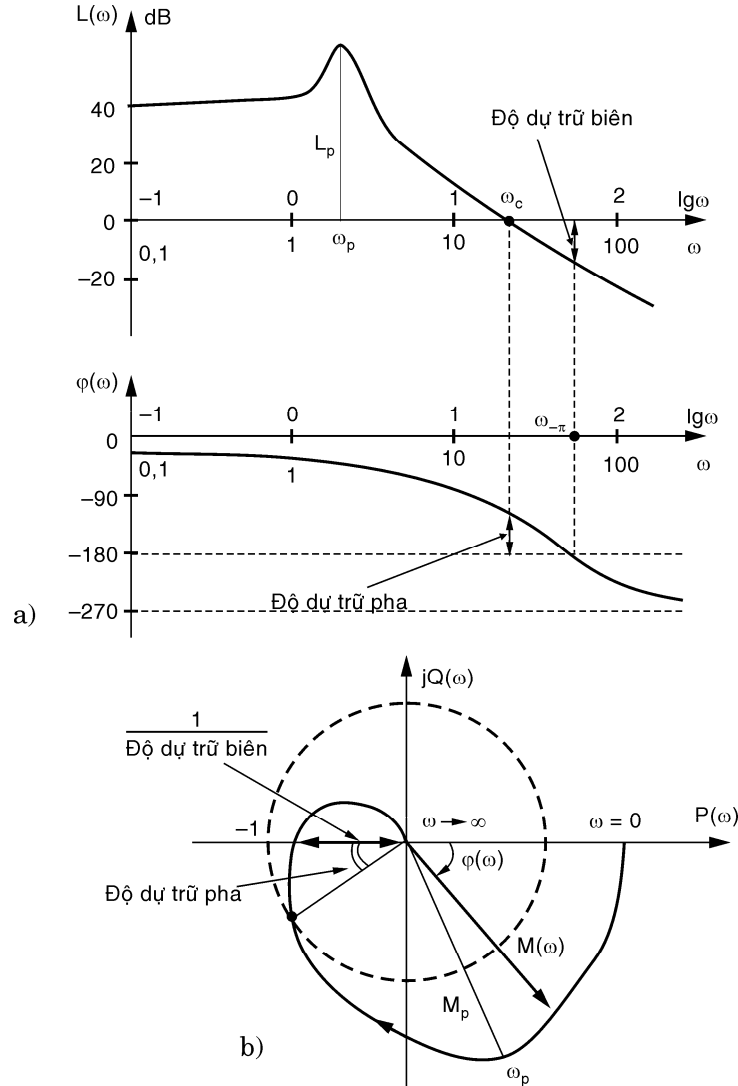
• **Biểu đồ Bode pha:** đồ thị biểu diễn mối quan hệ giữa đáp ứng pha  $\varphi(\omega)$  theo tần số  $\omega$ .

Cả hai đồ thị trên đều được vẽ trong hệ tọa độ vuông góc với trục hoành  $\omega$  chia theo thang logarith cơ số 10 (H.3.2a). Khoảng cách giữa hai tần số hơn kém nhau 10 lần gọi là một decade.

**2- Biểu đồ Nyquist:** (đường cong Nyquist) là đồ thị biểu diễn đặc tính tần số  $G(j\omega)$  trong hệ tọa độ cực khi  $\omega$  thay đổi từ

$0 \rightarrow \infty$ . Nói cách khác đường cong Nyquist chính là tập hợp tất cả các điểm ngọn của vectơ biểu diễn số phức  $G(j\omega)$  (biên độ vectơ là  $M(\omega)$ , góc của vectơ là  $\varphi(\omega)$ ) khi  $\omega$  thay đổi từ  $0 \rightarrow \infty$  (H.3.2b).

Mặc dù biểu diễn dưới hai dạng đồ thị khác nhau nhưng thông tin có được về hệ thống từ biểu đồ Bode và biểu đồ Nyquist là như nhau. Từ biểu đồ Bode ta có thể suy ra được biểu đồ Nyquist và ngược lại.



**Hình 3.2:** Biểu diễn đặc tính tần số dùng đồ thị  
a) Biểu đồ Bode; b) Biểu đồ Nyquist

Đặc tính tần số của hệ thống có các thông số quan trọng sau đây:

**Đỉnh cộng hưởng** ( $M_p$ ): đỉnh cộng hưởng là giá trị cực đại của  $M(\omega)$ .

**Tần số cộng hưởng** ( $\omega_p$ ): là tần số tại đó có đỉnh cộng hưởng.

**Tần số cắt biên** ( $\omega_c$ ): là tần số tại đó biên độ của đặc tính tần số bằng 1 (hay bằng 0dB).

$$M(\omega_c) = 1 \quad (3.18)$$

hay 
$$L(\omega_c) = 0 \quad (3.19)$$

**Tần số cắt pha** ( $\omega_{-\pi}$ ): là tần số tại đó pha của đặc tính tần số bằng  $-\pi$  (hay  $-180^\circ$ )

$$\varphi(\omega_{-\pi}) = -180^\circ \quad (3.20)$$

**Độ dự trữ biên** (GM - Gain Margin)

$$GM = \frac{1}{M(\omega_{-\pi})} \quad (3.21)$$

hay 
$$GM = -L(\omega_{-\pi}) \text{ [dB]} \quad (3.22)$$

Công thức tính theo đơn vị dB được sử dụng nhiều hơn

**Độ dự trữ pha** ( $\Phi M$  - Phase Margin)

$$\Phi M = 180^\circ + \varphi(\omega_c) \quad (3.23)$$

Độ dự trữ biên và độ dự trữ pha của hệ thống cho biết hệ thống có ổn định hay không. Chương 4 sẽ đề cập chi tiết về vấn đề này.

## 3.2 CÁC KHÂU ĐỘNG HỌC ĐIỂN HÌNH

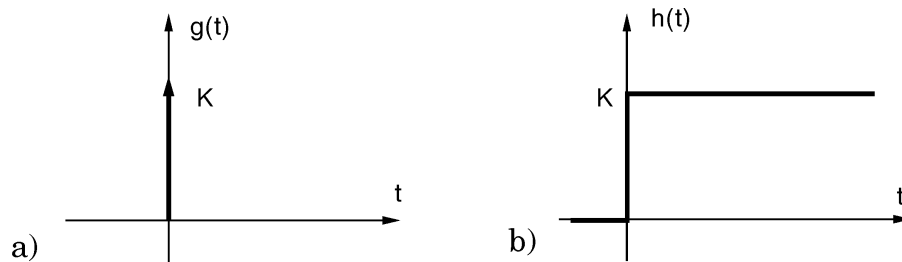
Ở trên chúng ta vừa đề cập đến khái niệm đặc tính động học của hệ thống tự động. Trong mục này, chúng ta sẽ xét đặc tính động học của một số khâu cơ bản như khâu tỉ lệ, vi phân, tích phân, quán tính bậc một, dao động bậc hai, ... Trên cơ sở đặc tính động học của các khâu cơ bản, mục 3.3 sẽ trình bày cách xây dựng đặc tính động học của hệ thống tự động.

### 3.2.1 Khâu tỉ lệ (khâu khuếch đại)

Hàm truyền:  $G(s) = K \quad (K > 0) \quad (3.24)$

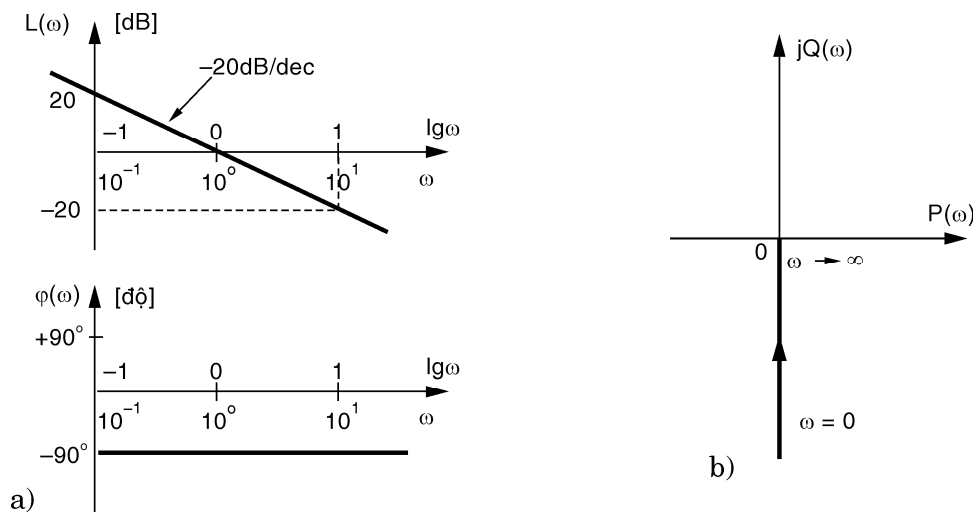
□ Đặc tính thời gian:  $C(s) = G(s)R(s) = KR(s)$   
 $c(t) = Kr(t) \quad (3.25)$

Vậy tín hiệu ra của khâu tỉ lệ bằng tín hiệu vào khuếch đại lên  $K$  lần. Hình 3.3 mô tả hàm trọng lượng và hàm quá độ của khâu tỉ lệ.



**Hình 3.3** Đặc tính thời gian của khâu tỉ lệ

a) Hàm trọng lượng; b) Hàm quá độ



**Hình 3.4:** Đặc tính tần số của khâu tỉ lệ

a) Biểu đồ Bode; b) Biểu đồ Nyquist

□ Đặc tính tần số:  $G(j\omega) = K$

Biên độ:  $M(\omega) = K \Rightarrow L(\omega) = 20 \lg K$

Pha:  $\varphi(\omega) = 0$

Các biểu thức trên cho thấy đặc tính tần số của khâu tỉ lệ là hằng số với mọi  $\omega$ , do đó biểu đồ Bode về biên độ là một đường song song với trục hoành, cách trục hoành  $20 \lg K$ ; biểu đồ Bode về pha là một đường nằm ngang trùng với trục hoành; biểu đồ Nyquist là một điểm do vectơ  $G(j\omega)$  không đổi với mọi  $\omega$ . Xem hình 3.4.

### 3.2.2 Khâu tích phân lý tưởng

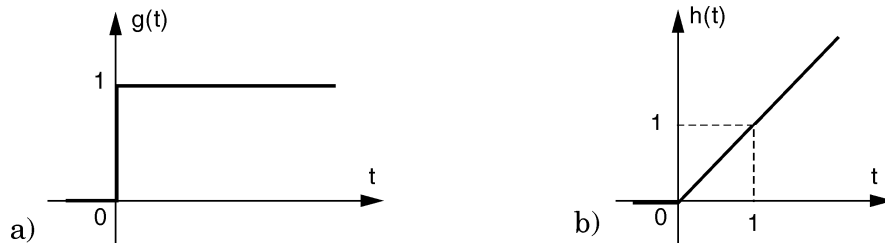
Hàm truyền:  $G(s) = \frac{1}{s}$  (3.26)

□ Đặc tính thời gian:  $C(s) = R(s).G(s) = \frac{R(s)}{s}$

Hàm trọng lượng:  $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1(t)$  (3.27)

Hàm quá độ:  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t.1(t)$  (3.28)

Vậy hàm trọng lượng và hàm quá độ của khâu tích phân lý tưởng tương ứng là hàm nấc đơn vị và hàm dốc đơn vị (H.3.5). Một đặc điểm quan trọng cần quan tâm là hàm quá độ của khâu tích phân lý tưởng tăng đến vô cùng.



**Hình 3.5:** Đặc tính thời gian của khâu tích phân lý tưởng

a) Hàm trọng lượng; b) Hàm quá độ

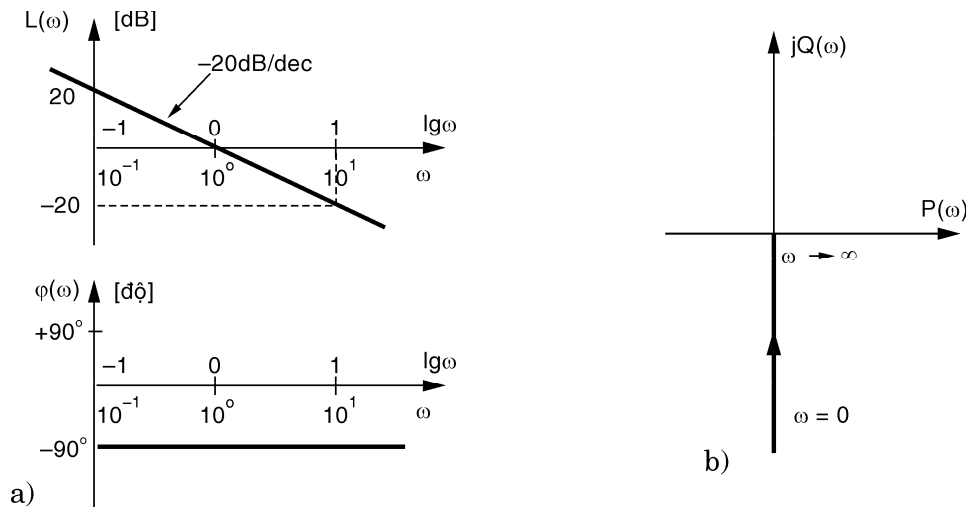
$$\square \text{ Đặc tính tần số: } G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j \frac{1}{\omega} \quad (3.29)$$

$$\text{Biên độ: } M(\omega) = \frac{1}{\omega} \quad (3.30)$$

$$\Rightarrow L(\omega) = 20 \lg M(\omega) = 20 \lg \left( \frac{1}{\omega} \right) = -20 \lg \omega \quad (3.31)$$

$$\text{Pha: } \varphi(\omega) = -90^\circ \quad (3.32)$$

Nếu vẽ  $L(\omega)$  trong hệ tọa độ vuông góc thông thường thì đồ thị  $L(\omega)$  là đường cong. Tuy nhiên do trục hoành của biểu đồ Bode được chia theo thang logarith cơ số 10 nên dễ dàng thấy rằng biểu đồ Bode về biên độ của khâu tích phân lý tưởng là đường thẳng có độ dốc  $-20\text{dB/dec}$ . Biểu đồ Bode về pha của khâu tích phân lý tưởng là đường nằm ngang do  $\varphi(\omega) = -90^\circ$  với mọi  $\omega$ . Biểu đồ Nyquist là nửa dưới của trục tung do  $G(j\omega)$  có phần thực bằng 0, phần ảo luôn luôn âm (H.3.6).



**Hình 3.6:** Đặc tính tần số của khâu tích phân lý tưởng

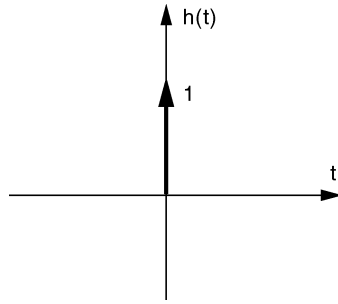
a) Biểu đồ Bode; b) Biểu đồ Nyquist

### 3.2.3 Khâu vi phân lý tưởng

$$\text{Hàm truyền: } G(s) = s \quad (3.33)$$

$$\square \text{ Đặc tính thời gian: } C(s) = R(s).G(s) = sR(s)$$





**Hình 3.1:** Hàm quá độ của khâu vi phân lý tưởng

Hàm quá độ:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \{1\} = \delta(t) \quad (3.34)$$

Hàm trọng lượng:

$$g(t) = \frac{d}{dt} h(t) = \dot{\delta}(t) \quad (3.35)$$

Hàm quá độ của khâu vi phân lý tưởng hàm xung đơn vị (H.3.7), hàm trọng lượng là đạo hàm của hàm quá độ, chỉ có thể mô tả bằng biểu thức toán học (H.3.8), không biểu diễn bằng đồ thị được.

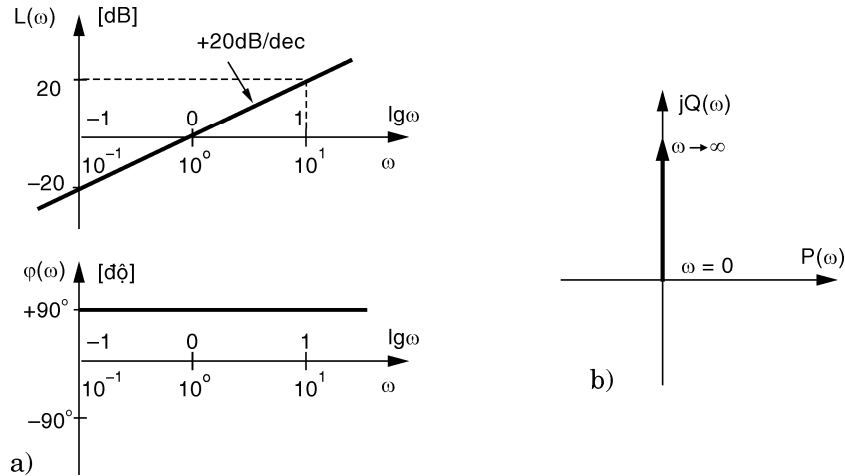
$$\square \text{ Đặc tính tần số: } G(j\omega) = j\omega \quad (3.36)$$

$$\text{Biên độ: } M(\omega) = \omega \quad (3.37)$$

$$\Rightarrow L(\omega) = 20 \lg M(\omega) = 20 \lg \omega \quad (3.38)$$

$$\text{Pha: } \varphi(\omega) = +90^\circ \quad (3.39)$$

Đặc tính tần số của khâu vi phân lý tưởng hoàn toàn trái ngược so với khâu tích phân lý tưởng. Biểu đồ Bode về biên độ của khâu vi phân lý tưởng là đường thẳng có độ dốc  $+20\text{dB/dec}$ , biểu đồ Bode về pha là đường nằm ngang  $\varphi(\omega) = +90^\circ$ . Biểu đồ Nyquist là nửa trên của trục tung do  $G(j\omega)$  có phần thực bằng 0, phần ảo luôn luôn dương (H.3.8).



**Hình 3.8:** Đặc tính tần số của khâu vi phân lý tưởng  
a) Biểu đồ Bode; b) Biểu đồ Nyquist

### 3.2.4 Khâu quán tính bậc nhất

Hàm truyền: 
$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1} \quad (3.40)$$

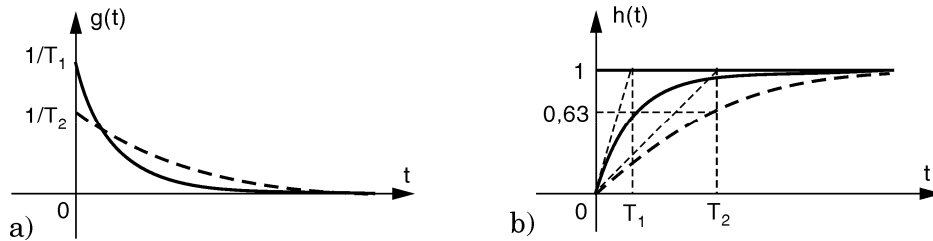
□ Đặc tính thời gian: 
$$C(s) = R(s).G(s) = \frac{R(s)}{Ts + 1}$$

Hàm trọng lượng: 
$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{Ts + 1} \right\} = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} 1(t) \quad (3.41)$$

Hàm quá độ: 
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(Ts + 1)} \right\} = (1 - e^{-\frac{t}{T}}) 1(t) \quad (3.42)$$

Hàm trọng lượng của khâu quán tính bậc nhất là hàm mũ suy giảm về 0, hàm quá độ tăng theo qui luật hàm mũ đến giá trị xác lập bằng 1. Tốc độ biến thiên của hàm trọng lượng và hàm quá độ tỉ lệ với  $T$  nên  $T$  được gọi là thời hằng của khâu quán tính bậc nhất.  $T$  càng nhỏ thì đáp ứng càng nhanh,  $T$  càng lớn thì đáp ứng càng chậm. Hình 3.9 minh họa đặc tính thời gian của hai khâu quán tính bậc nhất có thời hằng tương ứng là  $T_1$  và  $T_2$ , trong đó  $T_1 < T_2$ .

Thay  $t = T$  vào biểu thức 3.42 ta được  $h(T) = 0,63$ , do đó thời hằng của khâu quán tính bậc nhất chính là thời gian cần thiết để hàm quá độ tăng lên bằng 63% giá trị xác lập (giá trị xác lập của  $h(t) = 1$ ). Một cách khác để xác định thời hằng  $T$  là vẽ tiếp tuyến với hàm quá độ tại gốc tọa độ, khoảng cách từ giao điểm của tiếp tuyến này với đường nằm ngang có tung độ bằng 1 chính là  $T$ .



**Hình 3.9:** Đặc tính thời gian của khâu quán tính bậc nhất

a) Hàm trọng lượng; b) Hàm quá độ

$$\square \text{ Đặc tính tần số: } G(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega + 1} = \frac{1 - Tj\omega}{1 + T^2\omega^2} \quad (3.43)$$

$$\text{Phần thực: } P(\omega) = \frac{1}{1 + T^2\omega^2}$$

$$\text{Phần ảo: } Q(\omega) = \frac{-T\omega}{1 + T^2\omega^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Biên độ: } M(\omega) &= \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{1 + T^2\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{T\omega}{1 + T^2\omega^2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\Rightarrow L(\omega) = 20 \lg M(\omega) = -20 \lg \sqrt{1 + T^2\omega^2} \quad (3.45)$$

$$\text{Pha: } \varphi(\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \right] = -\operatorname{tg}^{-1}(T\omega) \quad (3.46)$$

Biểu thức (3.45) cho thấy biểu đồ Bode biên độ là một đường cong. Có thể vẽ gần đúng biểu đồ Bode biên độ bằng các đường tiệm cận như sau:

- Nếu  $\omega < 1/T \Leftrightarrow \omega T < 1$ :  $L(\omega) \approx -20 \lg \sqrt{1} = 0$ , do đó ta có thể vẽ gần đúng bằng đường thẳng nằm trên trục hoành (độ dốc bằng 0).

- Nếu  $\omega > 1/T \Leftrightarrow \omega T > 1$ :  $L(\omega) \approx -20 \lg \sqrt{\omega^2 T^2} = -20 \lg \omega T$ , do đó ta vẽ gần đúng bằng đường thẳng có độ dốc  $-20 \text{ dB/dec}$ .

Như phân tích ở trên, ta thấy tại tần số  $1/T$  độ dốc của các đường tiệm cận thay đổi, biểu đồ Bode là một đường gấp khúc nên tần số  $1/T$  gọi là tần số gãy của khâu quán tính bậc nhất.

Thay giá trị  $\omega$  vào biểu thức (3.46) ta vẽ được biểu đồ Bode về pha. Để ý một số điểm đặc biệt như sau:

$$\begin{aligned} \omega \rightarrow 0: & \quad \varphi(\omega) \rightarrow 0 \\ \omega = 1/T: & \quad \varphi(\omega) = -45^\circ \\ \omega \rightarrow \infty: & \quad \varphi(\omega) \rightarrow -90^\circ \end{aligned}$$

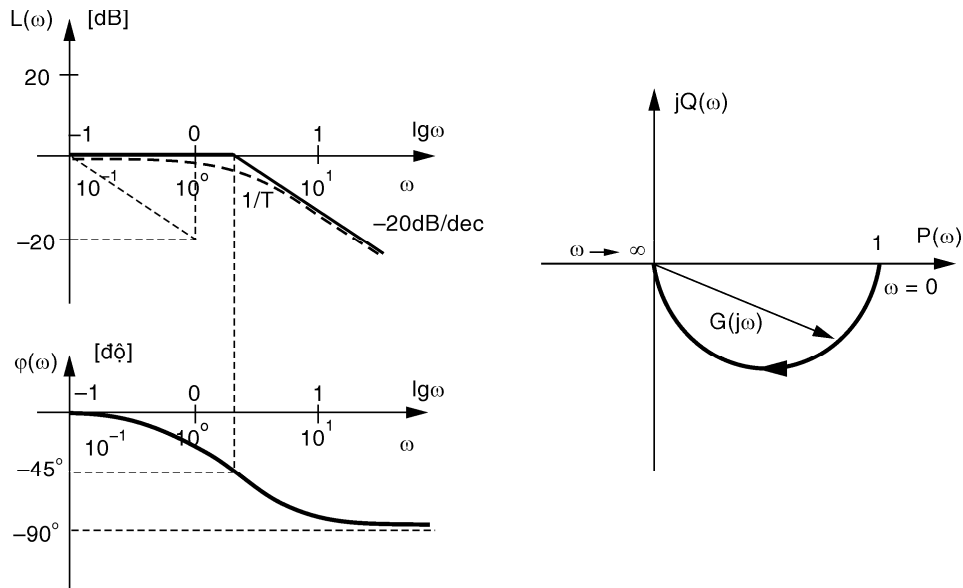
Hình 3.10a minh họa biểu đồ Bode của khâu quán tính bậc nhất. Đường cong đứt nét ở biểu đồ Bode biên độ chính là đường  $L(\omega)$  vẽ chính xác. Sai lệch cực đại giữa đường cong vẽ chính xác

và các đường tiệm cận xuất hiện tại tần số gãy, tại tần số này giá trị chính xác của  $L(\omega)$  là  $-20\lg\sqrt{2} \approx -3\text{dB}$ , trong khi giá trị gần đúng là  $0\text{dB}$ , sai lệch này khá bé có thể bỏ qua được. Do đó khi phân tích và thiết kế hệ thống tự động trong miền tần số ta có thể dùng biểu đồ Bode biên độ vẽ bằng các đường tiệm cận thay cho biểu đồ Bode biên độ vẽ chính xác.

Để vẽ biểu đồ Nyquist ta có nhận xét sau:

$$\begin{aligned} \left[ P(\omega) - \frac{1}{2} \right]^2 + Q^2(\omega) &= \left[ \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} - \frac{1}{2} \right]^2 + \left[ \frac{-\omega T}{1 + \omega^2 T^2} \right]^2 \\ &= \left[ \frac{1 - \omega^2 T^2}{2(1 + \omega^2 T^2)} \right]^2 + \left[ \frac{-\omega T}{1 + \omega^2 T^2} \right]^2 = \frac{1 - 2\omega^2 T^2 + \omega^4 T^4}{4(1 + \omega^2 T^2)^2} + \frac{4\omega^2 T^2}{4(1 + \omega^2 T^2)^2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ biểu đồ Nyquist của khâu quán tính bậc nhất nằm trên đường tròn tâm  $(\frac{1}{2}, 0)$ , bán kính  $\frac{1}{2}$ . Do pha của  $G(j\omega)$  luôn âm khi  $\omega$  thay đổi từ 0 đến  $+\infty$  (xem biểu thức 3.46) nên biểu đồ Nyquist là nửa dưới của đường tròn (H.3.10b).



**Hình 3.10:** Đặc tính tần số của khâu quán tính bậc nhất

a) Biểu đồ Bode; b) Biểu đồ Nyquist

### 3.2.5 Khâu vi phân bậc nhất

Hàm truyền:  $G(s) = Ts + 1$  (3.47)

□ Đặc tính thời gian:  $C(s) = R(s).G(s) = R(s)(Ts + 1)$

Hàm quá độ:  $h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(Ts + 1)}{s} \right\} = T\delta(t) + 1(t)$  (3.48)

Hàm trọng lượng:  $g(t) = \dot{h}(t) = T\delta(t) + \delta(t)$  (3.49)

Hàm quá độ của khâu vi phân bậc nhất là tổ hợp tuyến tính của hàm xung đơn vị và hàm nấc đơn vị (H.3.11). Ta thấy rằng khâu vi phân lý tưởng và vi phân bậc nhất có đặc điểm chung là giá trị hàm quá độ vô cùng lớn tại  $t = 0$ . Hàm trọng lượng là đạo hàm của hàm quá độ, chỉ có thể mô tả bằng biểu thức toán học (3.49), không biểu diễn bằng đồ thị được.



Hình 3.11: Hàm quá độ của khâu vi phân bậc nhất

□ Đặc tính tần số:  $G(j\omega) = Tj\omega + 1$  (3.50)

Phần thực:  $P(\omega) = 1$  (3.51)

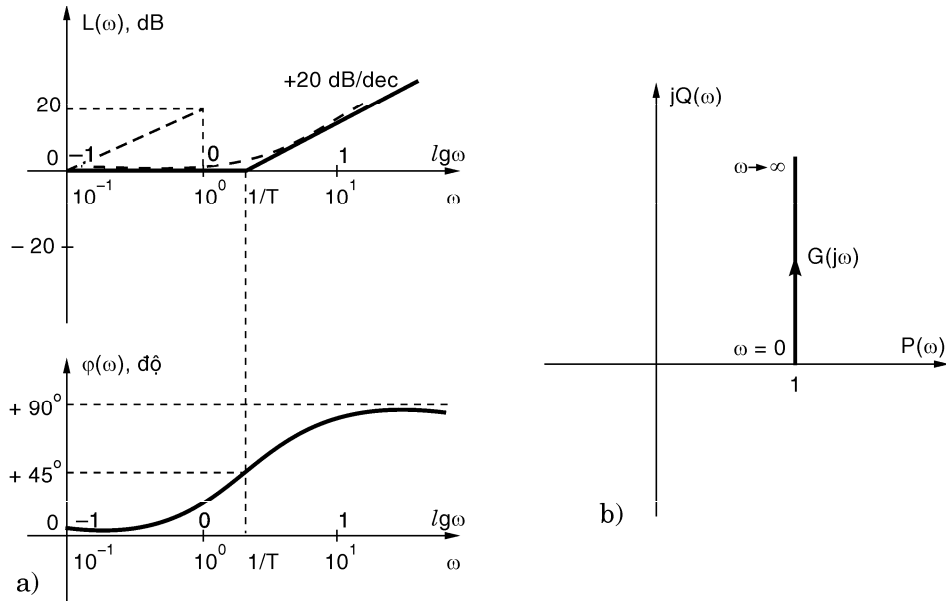
Phần ảo:  $Q(\omega) = T\omega$  (3.52)

Biên độ:  $M(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \sqrt{1^2 + (T\omega)^2}$   
 $\Rightarrow L(\omega) = 20 \lg M(\omega) = 20 \lg \sqrt{1 + T^2\omega^2}$  (3.53)

Pha:  $\varphi(\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \right] = \operatorname{tg}^{-1}(T\omega)$  (3.54)

So sánh biểu thức (3.53) và (3.54) với (3.45) và (3.46) ta rút ra được kết luận: biểu đồ Bode của khâu vi phân bậc nhất và khâu quán tính bậc nhất đối xứng nhau qua trục hoành (H.3.12a).

Do  $G(j\omega)$  có phần thực  $P(\omega)$  luôn luôn bằng 1, phần ảo  $Q(\omega)$  có giá trị dương tăng dần từ 0 đến  $+\infty$  khi thay đổi từ 0 đến  $+\infty$  nên biểu đồ Nyquist của khâu vi phân bậc nhất là nửa đường thẳng qua điểm có hoành độ bằng 1 và song song với trục tung như hình 3.12b.



**Hình 3.12:** Đặc tính tần số của khâu vi phân bậc nhất

a) Biểu đồ Bode; b) Biểu đồ Nyquist

### 3.2.6 Khâu dao động bậc hai

Hàm truyền:

$$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1} \quad (0 < \xi < 1) \quad (3.55)$$

hay

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{với } \omega_n = \frac{1}{T}) \quad (3.56)$$

□ Đặc tính thời gian:

$$C(s) = R(s).G(s) = \frac{R(s)\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Hàm trọng lượng:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \right\}$$

$$\Rightarrow g(t) = \frac{\omega_n e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \left[ (\omega_n \sqrt{1-\xi^2}) t \right] \quad (3.57)$$

Hàm quá độ:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \right\}$$

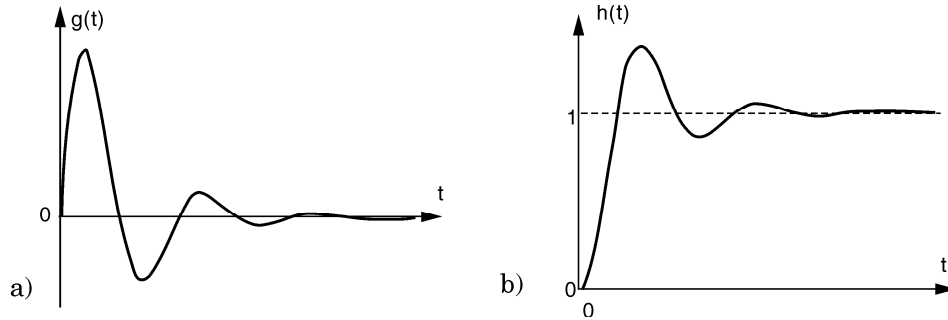
$$\Rightarrow h(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \left[ (\omega_n \sqrt{1-\xi^2})t + \theta \right] \quad (3.58)$$

trong đó độ lệch pha  $\theta$  xác định bởi  $\theta = \cos^{-1} \xi$ .

Biểu thức (3.57) và (3.58) cho thấy đặc tính thời gian của khâu dao động bậc hai có dạng dao động suy giảm, hàm trọng lượng là dao động suy giảm về 0, hàm quá độ là dao động suy giảm đến giá trị xác lập là 1 (H.3.13).

- Nếu  $\xi = 0$ :  $h(t) = 1 - \sin(\omega_n t + 90^\circ)$ , đáp ứng của hệ là dao động không suy giảm với tần số  $\omega_n$ , do đó  $\omega_n$  gọi là tần số dao động tự nhiên của khâu dao động bậc hai.

- Nếu  $0 < \xi < 1$ : đáp ứng của hệ là dao động với biên độ giảm dần,  $\xi$  càng lớn dao động suy giảm càng nhanh, do đó  $\xi$  gọi là hệ số tắt (hay hệ số suy giảm).



**Hình 3.13:** Đặc tính thời gian của khâu dao động bậc hai

a) Hàm trọng lượng; b) Hàm quá độ

$$\square \text{ Đặc tính tần số: } G(j\omega) = \frac{1}{-T^2\omega^2 + 2\xi Tj\omega + 1} \quad (3.59)$$

$$\text{Biên độ: } M(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}} \quad (3.60)$$

$$\Rightarrow L(\omega) = 20 \lg M(\omega) = -20 \lg \sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2} \quad (3.61)$$

$$\text{Pha:} \quad \varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = -tg^{-1} \left( \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2} \right) \quad (3.62)$$

Biểu thức (3.61) cho thấy biểu đồ Bode biên độ của khâu dao động bậc hai là một đường cong. Tương tự như đã làm đối với khâu quán tính bậc nhất, ta có thể vẽ gần đúng biểu đồ Bode biên độ bằng các đường tiệm cận như sau:

- Nếu  $\omega < 1/T \Leftrightarrow \omega T < 1$  thì  $L(\omega) \approx -20 \lg \sqrt{1} = 0$ , do đó ta có thể vẽ gần đúng bằng đường thẳng nằm trên trục hoành (độ dốc bằng 0).

- Nếu  $\omega > 1/T \Leftrightarrow \omega T > 1$  thì  $L(\omega) \approx -20 \lg \sqrt{(-\omega^2 T^2)^2} = -40 \lg \omega T$ , do đó ta vẽ gần đúng bằng đường thẳng có độ dốc  $-40 \text{ dB/dec}$ .

Ta thấy rằng tại tần số  $1/T$  độ dốc của các đường tiệm cận thay đổi nên tần số  $1/T$  gọi là tần số gãy của khâu dao động bậc hai.

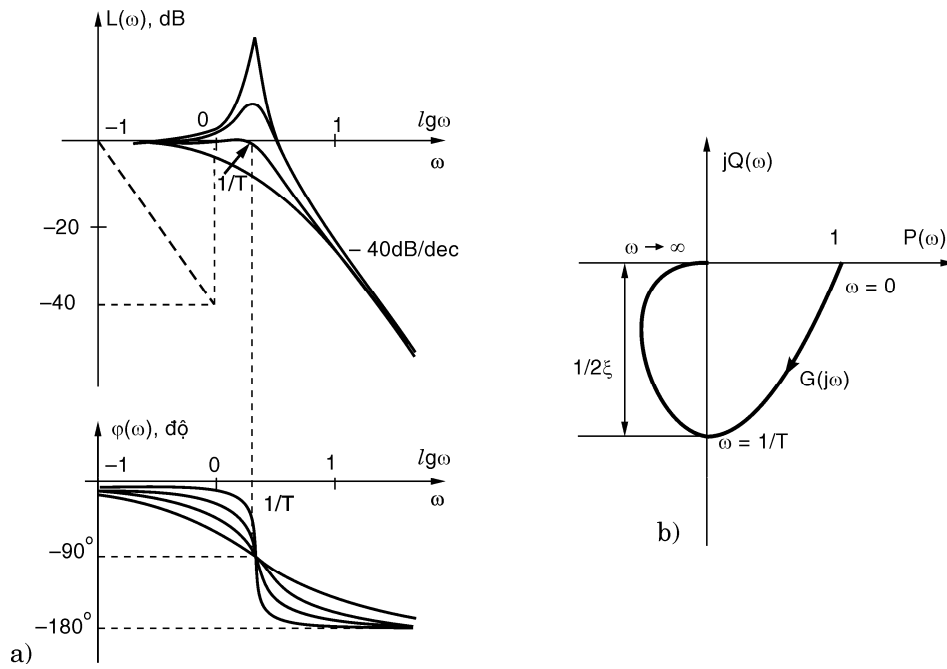
Biểu đồ Bode về pha của khâu dao động bậc hai là một đường cong, để ý biểu thức (3.62) ta thấy biểu đồ Bode về pha có điểm đặc biệt sau đây:

$$\begin{aligned} \omega \rightarrow 0: \quad \varphi(\omega) &\rightarrow 0 \\ \omega = \frac{1}{T}: \quad \varphi(\omega) &= -90^\circ \\ \omega \rightarrow \infty: \quad \varphi(\omega) &\rightarrow -180^\circ \end{aligned}$$

Hình 3.14a minh họa biểu đồ Bode của khâu dao động bậc hai. Các đường cong ở biểu đồ Bode biên độ chính là đường  $L(\omega)$  vẽ chính xác. Biểu đồ Bode biên độ chính xác có đỉnh cộng hưởng  $M_p = 1/(2\xi\sqrt{1-\xi^2})$  tại tần số  $\omega_p = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2}$ , do đó dễ thấy rằng nếu  $\xi$  càng nhỏ thì đỉnh cộng hưởng càng cao. Khi  $\xi \rightarrow 0$  thì tần số cộng hưởng tiến đến tần số dao động tự nhiên  $\omega_p \rightarrow \omega_n = 1/T$ .

Biểu đồ Nyquist của khâu dao động bậc hai có dạng đường cong như minh họa ở hình 3.14b. Khi  $\omega = 0$  thì  $G(j\omega)$  có biên độ bằng 1, pha bằng  $0^\circ$ ; khi  $\omega \rightarrow \infty$  thì  $G(j\omega)$  có biên độ bằng 0, pha bằng  $-180^\circ$ . Giao điểm của đường cong Nyquist với trục tung có  $\angle G(j\omega) = -90^\circ$ , do đó tương ứng với tần số  $\omega = 1/T$ , thay  $\omega = 1/T$  vào biểu thức (3.60) ta suy ra biên độ tại giao điểm với trục tung là  $1/2\xi$ .





**Hình 3.14:** Đặc tính tần số của khâu dao động bậc hai

a) Biểu đồ Bode; b) Biểu đồ Nyquist

### 3.2.7 Khâu trì hoãn (khâu trễ)

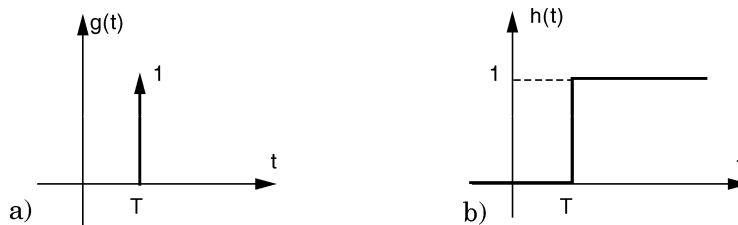
Hàm truyền:  $G(s) = e^{-Ts}$  (3.63)

□ Đặc tính thời gian:  $C(s) = R(s).G(s) = R(s)e^{-Ts}$

Hàm trọng lượng:  $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-Ts}\} = \delta(t - T)$  (3.64)

Hàm quá độ:  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-Ts}}{s}\right\} = 1(t - T)$  (3.65)

Đặc điểm của khâu trễ là tín hiệu ra trễ hơn tín hiệu vào một khoảng thời gian là  $T$ .



**Hình 3.15** Đặc tính thời gian của khâu trễ

a) Hàm trọng lượng; b) Hàm quá độ

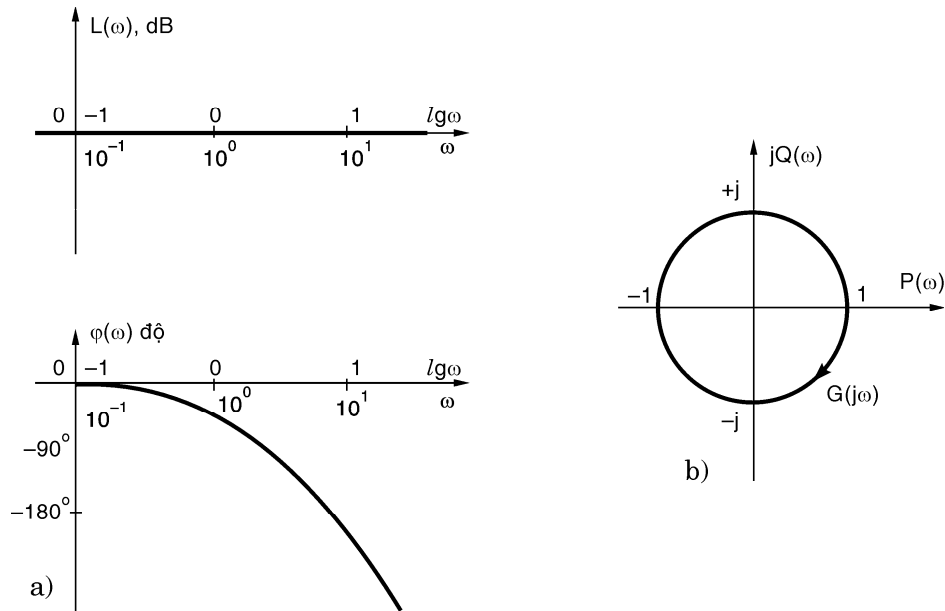
$$\square \text{ Đặc tính tần số: } G(j\omega) = e^{-Tj\omega} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} \text{Biên độ: } M(\omega) &= |G(j\omega)| = 1 \\ \Rightarrow L(\omega) &= 20 \lg M(\omega) = -20 \lg 1 = 0 \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\text{Pha: } \varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = -T\omega \quad (3.68)$$

Biểu đồ Bode biên độ của khâu trì hoãn là đường thẳng nằm ngang trùng với trục hoành do  $L(\omega) = 0$  với mọi  $\omega$ . Để ý rằng biểu thức (3.68) là phương trình của một đường thẳng nếu trục hoành  $\omega$  chia theo thang tuyến tính. Tuy nhiên do trục hoành của biểu đồ Bode lại chia theo thang logarith nên biểu đồ Bode về pha của khâu trì hoãn là đường cong dạng hàm mũ, xem hình 3.16a.

Do  $G(j\omega)$  có biên độ bằng 1 với mọi  $\omega$  và có pha giảm từ 0 đến  $-\infty$  nên biểu đồ Nyquist của khâu trễ là đường tròn đơn vị có mũi tên chỉ chiều tăng của  $\omega$  như hình 3.16b.



**Hình 3.16:** Đặc tính tần số của khâu trì hoãn

a) Biểu đồ Bode; b) Biểu đồ Nyquist

### 3.3 ĐẶC TÍNH ĐỘNG HỌC CỦA HỆ THỐNG TỰ ĐỘNG

#### 3.3.1 Đặc tính thời gian của hệ thống

Xét hệ thống có hàm truyền:

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (3.69)$$

Biến đổi Laplace của hàm quá độ là:

$$H(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{1}{s} \left( \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \right) \quad (3.70)$$

Tùy theo đặc điểm của hệ thống mà đặc tính thời gian của hệ thống có thể có các dạng khác nhau. Tuy vậy chúng ta có thể rút ra một số kết luận quan trọng sau đây:

□ Nếu  $G(s)$  không có khâu tích phân, vi phân lý tưởng thì hàm trọng lượng suy giảm về 0, hàm quá độ có giá trị xác lập khác 0.

$$g(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \right) = 0$$

$$h(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{1}{s} \cdot \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \right) = \frac{b_m}{a_n} \neq 0$$

□ Nếu  $G(s)$  có khâu tích phân lý tưởng ( $a_n = 0$ ) thì hàm trọng lượng có giá trị xác lập khác 0, hàm quá độ tăng đến vô cùng.

$$g(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s} \right) = \frac{b_m}{a_{n-1}} \neq 0$$

$$h(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{1}{s} \cdot \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s} \right) = \infty$$

□ Nếu  $G(s)$  có khâu vi phân lý tưởng ( $b_m = 0$ ) thì hàm quá độ suy giảm về 0.

$$h(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{1}{s} \cdot \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \right) = 0$$

□ Nếu  $G(s)$  là hệ thống hợp thức ( $m \leq n$ ) thì  $h(0)=0$ .

$$h(0) = \lim_{s \rightarrow +\infty} H(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{s} \cdot \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \right) = 0$$

□ Nếu  $G(s)$  là hệ thống hợp thức chặt ( $m < n$ ) thì  $g(0)=0$ .

$$g(0) = \lim_{s \rightarrow +\infty} G(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \left( \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \right) = 0$$

□ Nếu  $G(s)$  không có khâu tích phân, vi phân lý tưởng và có  $n$  cực phân biệt,  $H(s)$  có thể phân tích dưới dạng:

$$H(s) = \frac{h_0}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{s - p_i} \quad (3.71)$$

Biến đổi Laplace ngược biểu thức (3.71) ta được hàm quá độ của hệ thống là:

$$h(t) = h_0 + \sum_{i=1}^n h_i e^{p_i t} \quad (3.72)$$

Do đó hàm quá độ là tổ hợp tuyến tính của các hàm mũ cơ số tự nhiên. Nếu tất cả các cực  $p_i$  đều là cực thực thì hàm quá độ không có dao động; ngược lại nếu có ít nhất một cặp cực phức thì hàm quá độ có dao động.

Trên đây vừa trình bày một vài nhận xét về đặc tính thời gian của hệ thống tự động. Thông qua đặc tính thời gian chúng ta có thể biết được hệ thống có khâu tích phân, vi phân lý tưởng hay không? Hệ thống chỉ gồm toàn cực thực hay có cực phức? ... Những nhận xét này giúp chúng ta có được hình dung ban đầu về những đặc điểm cơ bản nhất của hệ thống, từ đó chúng ta có thể chọn được phương pháp phân tích, thiết kế hệ thống phù hợp.

### 3.3.2 Đặc tính tần số của hệ thống

Xét hệ thống tự động có hàm truyền  $G(s)$ . Giả sử  $G(s)$  có thể phân tích thành tích của các hàm truyền cơ bản như sau:

$$G(s) = \prod_{i=1}^l G_i(s) \quad (3.73)$$

Đặc tính tần số của hệ thống là:

$$G(j\omega) = \prod_{i=1}^l G_i(j\omega) \quad (3.74)$$

Biên độ:

$$\begin{aligned} \square \quad M(\omega) &= |G(j\omega)| = \left| \prod_{i=1}^l G_i(j\omega) \right| = \prod_{i=1}^l |G_i(j\omega)| \\ \Rightarrow \quad M(\omega) &= \prod_{i=1}^l M_i(\omega) \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} \square \quad L(\omega) &= 20 \lg M(\omega) = 20 \lg \prod_{i=1}^l M_i(\omega) = 20 \sum_{i=1}^l \lg M_i(\omega) \\ \Rightarrow \quad L(\omega) &= \sum_{i=1}^l L_i(\omega) \end{aligned} \quad (3.76)$$

Biểu thức (3.76) cho thấy *biểu đồ Bode biên độ của hệ thống bằng tổng các biểu đồ Bode biên độ của các khâu cơ bản thành phần*.

$$\begin{aligned} \text{Pha:} \quad \varphi(\omega) &= \angle G(j\omega) = \arg \left[ \prod_{i=1}^l G_i(j\omega) \right] = \sum_{i=1}^l \angle G_i(j\omega) \\ \Rightarrow \quad \varphi(\omega) &= \sum_{i=1}^l \varphi_i(\omega) \end{aligned} \quad (3.77)$$

Biểu thức (3.77) chứng tỏ biểu đồ Bode pha của hệ thống bằng tổng các biểu đồ Bode pha của các khâu cơ bản thành phần.

Từ hai nhận xét trên ta thấy rằng để vẽ được biểu đồ Bode của hệ thống, ta vẽ biểu đồ Bode của các khâu thành phần, sau đó cộng đồ thị lại. Dựa trên nguyên tắc cộng đồ thị, ta có phương pháp vẽ biểu đồ Bode biên độ gần đúng của hệ thống bằng các đường tiệm cận như sau:

#### **Phương pháp vẽ biểu đồ Bode biên độ bằng các đường tiệm cận**

Giả sử hàm truyền của hệ thống có dạng:

$$G(s) = K \prod G_i(s)$$

**Bước 1:** Xác định tất cả các tần số gãy  $\omega_i = \frac{1}{T_i}$ , và sắp xếp theo thứ tự tăng dần:  $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 \dots$

**Bước 2:** Nếu tất cả các tần số  $\omega_i \geq 1$  thì biểu đồ Bode gần đúng phải qua điểm A có tọa độ:

$$\begin{cases} \omega = 1 \\ L(\omega) = 20 \lg K \end{cases}$$

**Bước 3:** Qua điểm A, vẽ đường thẳng có độ dốc:

□  $(-20 \text{ dB/dec} \times \alpha)$  nếu  $G(s)$  có  $\alpha$  khâu tích phân lý tưởng

□  $(+20 \text{ dB/dec} \times \alpha)$  nếu  $G(s)$  có  $\alpha$  khâu vi phân lý tưởng

Đường thẳng này kéo dài đến tần số gãy kế tiếp

**Bước 4:** Tại tần số gãy  $\omega_i = \frac{1}{T_i}$ , độ dốc của đường tiệm cận được cộng thêm:

□  $(-20 \text{ dB/dec} \times \beta)$  nếu  $\omega_i$  là tần số gãy của khâu quán tính bậc một.

□  $(+20 \text{ dB/dec} \times \beta)$  nếu  $\omega_i$  là tần số gãy của khâu vi phân bậc một.

□  $(-40 \text{ dB/dec} \times \beta)$  nếu  $\omega_i$  là tần số gãy của khâu dao động bậc hai.

□  $(+40 \text{ dB/dec} \times \beta)$  nếu  $\omega_i$  là tần số gãy của khâu vi phân bậc hai,  $(T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1)$ .

( $\beta$  là số nghiệm bội tại  $\omega_i$ )

Đường thẳng này kéo dài đến tần số gãy kế tiếp.

**Bước 5:** Lặp lại bước 4 cho đến khi vẽ xong đường tiệm cận tại tần số gãy cuối cùng.

**Ví dụ 3.4.** Vẽ biểu đồ Bode biên độ gần đúng của hệ thống có hàm

truyền: 
$$G(s) = \frac{100(0,1s + 1)}{s(0,01s + 1)}$$

Dựa vào biểu đồ Bode gần đúng, hãy xác định tần số cắt biên của hệ thống.

**Giải.** Các tần số gãy:

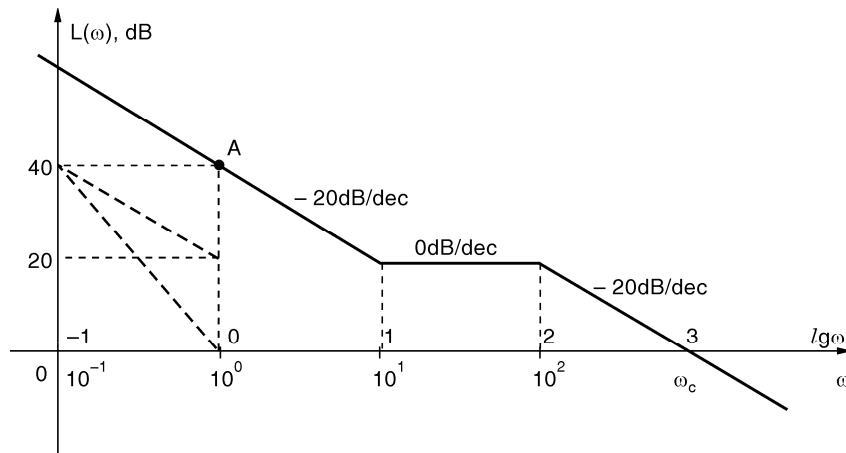
$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ (rad/sec)}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0,01} = 100 \text{ (rad/sec)}$$

Biểu đồ Bode qua điểm A có tọa độ:

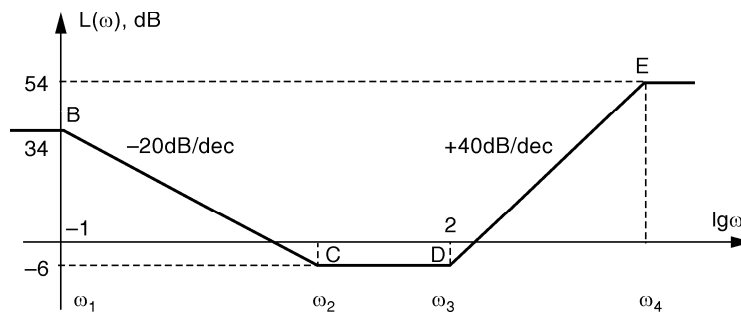
$$\begin{cases} \omega = 1 \\ L(\omega) = 20 \lg K = 20 \lg 100 = 40 \text{ dB} \end{cases}$$

Biểu đồ Bode biên độ gần đúng có dạng như hình 3.17. Theo hình vẽ, tần số cắt biên của hệ thống là  $10^3 \text{ rad/sec}$ .



**Hình 3.17:** Biểu đồ Bode biên độ của hệ thống ở ví dụ 3.4 ■

**Ví dụ 3.5.** Hãy xác định hàm truyền của hệ thống, biết rằng biểu đồ Bode biên độ gần đúng của hệ thống có dạng như hình 3.18.



**Hình 3.18:** Biểu đồ Bode biên độ của hệ thống ở ví dụ 3.5

**Giải:** Hệ thống có bốn tần số gãy  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ . Dựa vào sự thay đổi độ dốc của biểu đồ Bode, ta thấy hàm truyền của hệ thống phải có dạng:

$$G(s) = \frac{K(T_2s + 1)(T_3s + 1)^2}{(T_1s + 1)(T_4s + 1)^2}$$

Vấn đề còn lại là xác định thông số của hệ thống. Theo hình vẽ:

$$\square 20\lg K = 34 \quad \Rightarrow \quad K = 50$$

$$\square \lg \omega_1 = -1 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 0,1 \quad \Rightarrow \quad T_1 = 10$$

$\square$  Độ dốc đoạn  $BC$  là  $-20\text{dB/dec}$ , mà từ điểm  $B$  đến điểm  $C$  biên độ của biểu đồ Bode giảm  $40\text{dB}$  (từ  $34\text{dB}$  giảm xuống  $-6\text{dB}$ ), do đó từ  $B$  đến  $C$  tần số phải thay đổi là 2 decade. Suy ra:

$$\square \lg \omega_2 = \lg \omega_1 + 2 = 1 \Rightarrow \omega_2 = 10 \quad \Rightarrow \quad T_2 = 0,1$$

$$\square \lg \omega_3 = 2 \quad \Rightarrow \quad \omega_3 = 100 \quad \Rightarrow \quad T_3 = 0,01$$

$\square$  Độ dốc đoạn  $DE$  là  $+40\text{dB/dec}$ , mà từ điểm  $D$  đến điểm  $E$  biên độ của biểu đồ Bode tăng  $60\text{dB}$  (từ  $-6\text{dB}$  tăng lên  $+54\text{dB}$ ), do đó từ  $D$  đến  $E$  tần số phải thay đổi là 1,5 decade. Suy ra:

$$\lg \omega_4 = \lg \omega_3 + 1,5 = 3,5 \Rightarrow \omega_4 = 3162 \quad \Rightarrow \quad T_4 = 0,0003$$

Do đó hàm truyền của hệ thống là:

$$G(s) = \frac{50(0,1s + 1)(0,01s + 1)^2}{(10s + 1)(0,003s + 1)^2} \quad \blacksquare$$

### 3.4 TÓM TẮT

Chương này trình bày khái niệm đặc tính động học của hệ thống tự động, bao gồm đặc tính thời gian và đặc tính tần số. Đặc tính động học của các khâu cơ bản được khảo sát và cách xây dựng đặc tính động học của hệ thống đã được đề cập đến. Kỹ sư điều khiển phải nắm vững đặc tính động học của các khâu cơ bản và cách xây dựng đặc tính động học của hệ thống mới có thể giải quyết tốt bài toán thiết kế hệ thống tự động sẽ trình bày trong các chương sau.



## Phụ lục: KHẢO SÁT ĐẶC TÍNH ĐỘNG HỌC CỦA HỆ THỐNG DÙNG MATLAB

Control Toolbox 5.0 hỗ trợ đầy đủ các lệnh khảo sát đặc tính động của hệ thống, cú pháp các lệnh rất gợi nhớ nên rất dễ sử dụng.

- ☐ Vẽ đáp ứng xung:      lệnh **impulse**
- ☐ Vẽ đáp ứng nấc:      lệnh **step**
- ☐ Vẽ biểu đồ Bode:      lệnh **bode**
- ☐ Vẽ biểu đồ Nyquist:    lệnh **nyquist**

Có thể nhấp chuột vào một điểm bất kỳ trên đặc tính động học mà Matlab vẽ được để biết giá trị cụ thể của tung độ, hoành độ tại điểm đó.

*Vi dụ:* Khảo sát đặc tính thời gian và đặc tính tần số của hệ thống sau: 
$$G(s) = \frac{30}{s^2 + 4s + 30}$$

Ta lần lượt gõ vào các lệnh sau:

```
>> TS=30; MS=[1 4 30]; G=tf(TS,MS)
```

Transfer function:

30

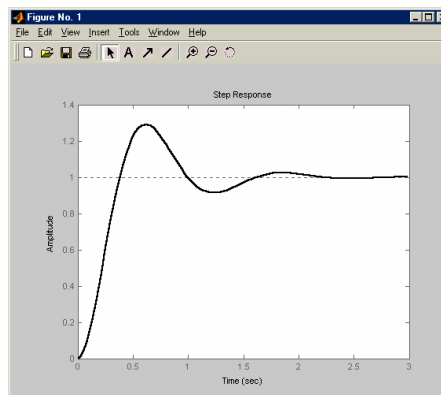
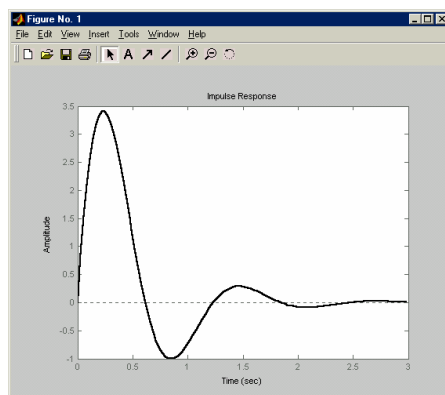
-----  
s^2 + 4 s + 30

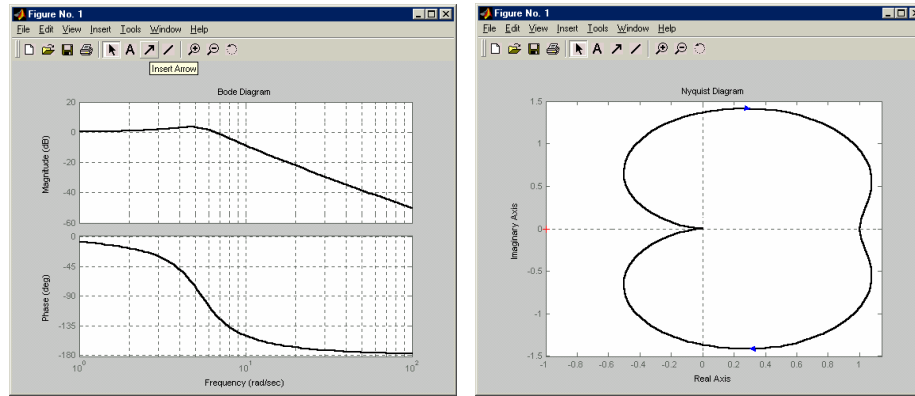
```
>> impulse(G)
```

```
>> step(G)
```

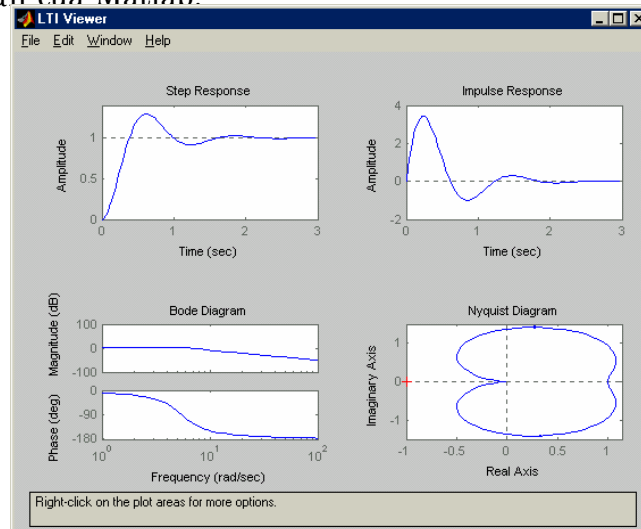
```
>> bode(G)
```

```
>> nyquist(G)
```





□ Để tạo sự tiện ích cho người dùng, Control Toolbox 5.0 hỗ trợ giao diện khảo sát đặc tính động học **LTViewer** (lệnh **ltiview**). LTViewer cho phép khảo sát đặc tính động học của nhiều hệ thống tuyến tính bất biến cùng lúc, và đối với mỗi hệ thống có thể vẽ được tất cả các dạng đặc tính động học. Hình dưới đây là đặc tính động học của hệ thống đã xét ở ví dụ trên được vẽ trong cửa sổ LTViewer. Do có thể vẽ được tất cả các đặc tính động học trên cùng một cửa sổ, người sử dụng có thể dễ dàng nhận thấy được mối liên hệ giữa các dạng đặc tính động học: đáp ứng xung là đạo hàm của đáp ứng nấc, đỉnh cộng hưởng trên biểu đồ Bode biên độ càng cao thì độ vọt lố trên đáp ứng nấc càng cao, sự liên hệ giữa biểu đồ Bode và biểu đồ Nyquist, ... Hướng dẫn chi tiết cách sử dụng lệnh **ltiview** nằm ngoài nội dung của quyển sách này, độc giả quan tâm có thể tham khảo tài liệu hướng dẫn của Matlab.



## **KHẢO SÁT TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA HỆ THỐNG**

### **4.1 KHÁI NIỆM VỀ ỔN ĐỊNH**

#### **4.1.1 Định nghĩa**

Hệ thống được gọi là ở trạng thái ổn định, nếu với tín hiệu vào bị chặn thì đáp ứng của hệ cũng bị chặn (Bounded Input Bounded Output = BIBO)

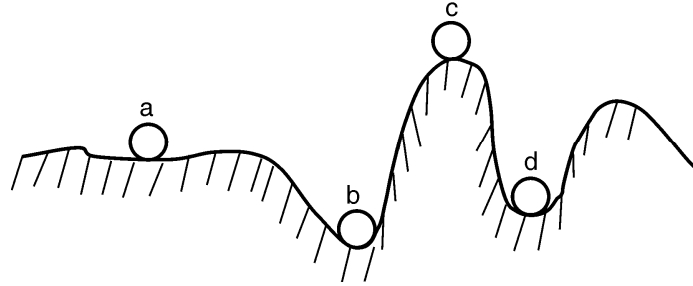
Yêu cầu đầu tiên đối với một hệ thống ĐKTD là hệ thống phải giữ được trạng thái ổn định khi chịu tác động của tín hiệu vào và chịu ảnh hưởng của nhiễu lên hệ thống.

Hệ phi tuyến có thể ổn định trong phạm vi hẹp khi độ lệch ban đầu là nhỏ và không ổn định trong phạm vi rộng nếu độ lệch ban đầu là lớn.

Đối với hệ tuyến tính đặc tính của quá trình quá độ không phụ thuộc vào giá trị tác động kích thích. Tính ổn định của hệ tuyến tính không phụ thuộc vào thể loại và giá trị của tín hiệu vào và trong hệ tuyến tính chỉ tồn tại một trạng thái cân bằng.

Phân biệt ba trạng thái cân bằng: Biên giới ổn định, ổn định và không ổn định. Trên hình 4.1 nếu thay đổi nhỏ trạng thái cân bằng của quả cầu, chẳng hạn cho nó một vận tốc ban đầu đủ bé thì quả cầu sẽ tiến tới một trạng thái cân bằng mới (Hình 4.1a), hoặc sẽ dao động quanh vị trí cân bằng (Hình 4.1b và d), hoặc sẽ không trở về trạng thái ban đầu (Hình 4.1c). Trong trường hợp đầu, ta có vị trí cân bằng ở biên giới ổn định, trường hợp sau là ổn định và trường hợp thứ ba là không ổn định. Cũng ở vị trí b

và d trên hình 4.1, nếu quả cầu với độ lệch ban đầu là lớn thì cũng sẽ không trở về trạng thái cân bằng ban đầu được - Hai trạng thái b và d của quả cầu chỉ ổn định trong phạm vi hẹp mà không ổn định trong phạm vi rộng.



**Hình 4.1**

Trong trường hợp này việc khảo sát tính ổn định được giới hạn cho các hệ tuyến tính bất biến theo thời gian. Đó là những hệ thống được mô tả bằng phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng và có thể áp dụng được nguyên lý xếp chồng.

#### 4.1.2 Ổn định của hệ tuyến tính

Một hệ thống ĐKTD được biểu diễn bằng một phương trình vi phân dạng tổng quát:

$$a_o \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n c(t) = b_o \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_m r(t) \quad (4.1)$$

Phương trình (4.1) ứng với tín hiệu vào hệ thống là  $r(t)$  và tín hiệu ra  $c(t)$ . Hàm truyền đạt của hệ thống được mô tả bằng (4.1) có dạng:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_o s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_o s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (4.2)$$

Nghiệm của (4.1) gồm hai thành phần:

$$c(t) = c_o(t) + c_{qd}(t) \quad (4.3)$$

trong đó:  $c_o(t)$  - là nghiệm riêng của (4.1) có vế phải, đặc trưng cho quá trình xác lập

$c_{qd}(t)$  - là nghiệm tổng quát của (4.1) không có vế phải, đặc trưng cho quá trình quá độ.

Dạng nghiệm tổng quát đặc trưng cho quá trình quá độ trong hệ thống: 
$$c_{qd}(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e^{p_i t} \quad (4.4)$$

trong đó  $p_i$  là nghiệm của phương trình đặc tính:

$$A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (4.5)$$

$p_i$  có thể là nghiệm thực cũng có thể là nghiệm phức liên hợp và được gọi là nghiệm cực của hệ thống. Đa thức mẫu số hàm truyền đạt là  $A(s)$  bậc  $n$  do đó hệ thống có  $n$  nghiệm cực  $p_i$  (Pole),  $i = 1, 2, \dots, n$

Zero là nghiệm của phương trình  $B(s) = 0$ . Tử số hàm truyền đạt  $G(s)$  là đa thức bậc  $m$  ( $m < n$ ) nên hệ thống có  $m$  nghiệm zero -  $z_j$  với  $j = 1, 2, \dots, m$

Hệ thống ổn định nếu:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_{qd}(t) = 0 \quad (4.6)$$

Hệ thống không ổn định nếu:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_{qd}(t) = \infty \quad (4.7)$$

Trong phương trình (4.4) hệ số  $\lambda_i$  là hằng số phụ thuộc vào thông số của hệ và trạng thái ban đầu.

Nghiệm cực  $p_i$  được viết dưới dạng  $p_i = \alpha_i \pm j\beta_i$  (4.8)

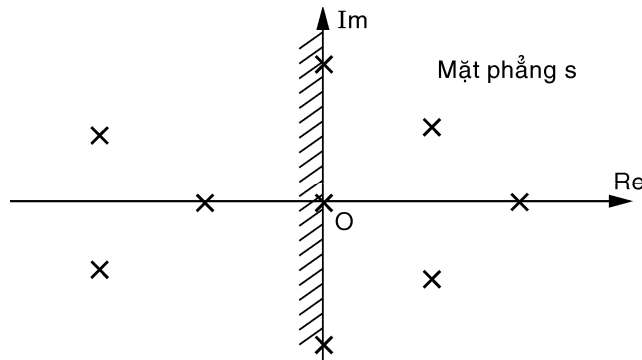
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_i e^{p_i t} = \begin{cases} 0 \text{ nếu } \alpha_i < 0 & \text{Hệ ổn định} \\ \begin{cases} 2Me^{\alpha_i t} \cdot \cos(\beta_i t + \varphi_i) \text{ nếu } p_i \text{ là nghiệm phức} \\ \lambda_i \text{ nếu } \alpha_i = 0 & \text{nếu } p_i \text{ là nghiệm thực} \end{cases} & \text{(Hệ ở biên giới ổn định)} \\ \infty \text{ nếu } \alpha_i > 0 & \text{Hệ không ổn định} \end{cases}$$

Phân biệt ba trường hợp phân bố cực trên mặt phẳng phức số (H.4.2):

- 1- Phần thực của nghiệm cực dương  $\alpha_i > 0$
- 2- Phần thực của nghiệm cực bằng không  $\alpha_i = 0$
- 3- Phần thực của nghiệm cực âm  $\alpha_i < 0$

Ổn định của hệ thống chỉ phụ thuộc vào nghiệm cực mà không phụ thuộc vào nghiệm zero, do đó mẫu số hàm truyền đạt

là  $A(s) = 0$  được gọi là phương trình đặc tính hay phương trình đặc trưng của hệ thống.



**Hình 4.2:** Phân bố cực trên mặt phẳng S

*Kết luận:*

1- Hệ thống ổn định nếu tất cả nghiệm của phương trình đặc tính đều có phần thực âm:  $\text{Re}\{p_i\} < 0$ ,  $\alpha_i < 0$  các nghiệm nằm bên trái mặt phẳng phức:

$$A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (4.9)$$

2- Hệ thống không ổn định nếu có dù chỉ là một nghiệm phương trình đặc tính (4.9) có phần thực dương (một nghiệm phải) còn lại là các nghiệm đều có phần thực âm (nghiệm trái)

3- Hệ thống ở biên giới ổn định nếu có dù chỉ là một nghiệm có phần thực bằng không còn lại là các nghiệm có phần thực âm (một nghiệm hoặc một cặp nghiệm phức liên hợp nằm trên trục ảo).

Vùng ổn định của hệ thống là nửa trái mặt phẳng phức số S. Đáp ứng quá độ có thể dao động hoặc không dao động tương ứng với nghiệm của phương trình đặc tính là nghiệm phức hay nghiệm thực.

Tất cả các phương pháp khảo sát ổn định đều xét đến phương trình đặc tính (4.9) theo một cách nào đó. Tổng quát, ba cách đánh giá sau đây thường được dùng để xét ổn định:

- 1- Tiêu chuẩn ổn định đại số Routh - Hurwitz
- 2- Tiêu chuẩn ổn định tần số Mikhailov - Nyquist - Bode
- 3- Phương pháp chia miền ổn định và phương pháp quỹ đạo nghiệm số.

## 4.2 TIÊU CHUẨN ỔN ĐỊNH ĐẠI SỐ

### 4.2.1 Điều kiện cần

Điều kiện cần để hệ thống ổn định là tất cả các hệ số của phương trình đặc trưng phải khác 0 và cùng dấu.

Ví dụ: Hệ thống có phương trình đặc trưng:

$$\square s^3 + 3s^2 - 2s + 1 = 0 \quad \text{không ổn định}$$

$$\square s^4 + 2s^2 + 5s + 3 = 0 \quad \text{không ổn định}$$

$$\square s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 2s + 1 = 0 \quad \text{chưa kết luận được} \quad \blacksquare$$

### 4.2.2 Tiêu chuẩn ổn định Routh

Cho hệ thống có phương trình đặc trưng

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

Muốn xét tính ổn định của hệ thống theo tiêu chuẩn Routh, trước tiên ta thành lập *bảng Routh* theo qui tắc:

- Bảng Routh có  $n+1$  hàng.
- Hàng 1 của bảng Routh gồm các hệ số có chỉ số chẵn.
- Hàng 2 của bảng Routh gồm các hệ số có chỉ số lẻ.
- Phần tử ở hàng  $i$  cột  $j$  của bảng Routh ( $i \geq 3$ ) được tính theo công thức:

$$c_{ij} = c_{i-2,j+1} - \alpha_i \cdot c_{i-1,j+1}$$

với 
$$\alpha_i = \frac{c_{i-2,1}}{c_{i-1,1}}$$

	$s^n$	$c_{11} = a_0$	$c_{12} = a_2$	$c_{13} = a_4$	$c_{14} = a_6$	...
	$s^{n-1}$	$c_{21} = a_1$	$c_{22} = a_3$	$c_{23} = a_5$	$c_{24} = a_7$	...
$\alpha_3 = \frac{c_{11}}{c_{21}}$	$s^{n-2}$	$c_{31} = c_{12} - \alpha_3 c_{22}$	$c_{32} = c_{13} - \alpha_3 c_{23}$	$c_{33} = c_{14} - \alpha_3 c_{24}$	$c_{34} = c_{15} - \alpha_3 c_{25}$	...
$\alpha_4 = \frac{c_{21}}{c_{31}}$	$s^{n-3}$	$c_{41} = c_{22} - \alpha_4 c_{32}$	$c_{42} = c_{23} - \alpha_4 c_{33}$	$c_{43} = c_{24} - \alpha_4 c_{34}$	$c_{44} = c_{25} - \alpha_4 c_{35}$	...
...	...	...	...	...	...	...
$\alpha_n = \frac{c_{n-2,1}}{c_{n-1,1}}$	$s^0$	$c_{n1} = c_{n-2,2} - \alpha_n c_{n-1,2}$				

**Phát biểu tiêu chuẩn Routh**

Điều kiện cần và đủ để tất cả các nghiệm của phương trình đặc trưng nằm bên trái mặt phẳng phức là tất cả các phần tử nằm ở cột 1 của bảng Routh đều **dương**. Số lần đổi dấu của các phần tử ở cột 1 của bảng Routh bằng số nghiệm nằm bên phải mặt phẳng phức.

**Ví dụ 4.1.** Hãy xét tính ổn định của hệ thống có phương trình đặc trưng là  $s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 2s + 1 = 0$

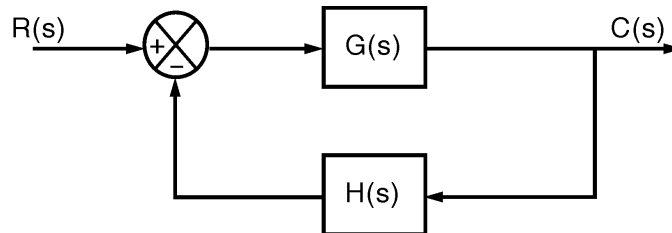
**Giải**

*Bảng Routh*

	$s^4$	1	5	1
	$s^3$	4	2	0
$\alpha_3 = \frac{1}{4}$	$s^2$	$5 - \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{9}{2}$	1	
$\alpha_4 = \frac{8}{9}$	$s^1$	$2 - \frac{8}{9} \cdot 1 = \frac{10}{9}$	0	
$\alpha_5 = \frac{81}{20}$	$s^0$	1		

Vì tất cả các phần tử ở cột 1 bảng Routh đều dương nên tất cả các nghiệm của phương trình đặc tính đều nằm bên trái mặt phẳng phức, do đó *hệ thống ổn định*. ■

**Ví dụ 4.2.** Hãy xét tính ổn định của hệ thống tự động có sơ đồ khối như sau



**Hình 4.3**

$$G(s) = \frac{50}{s(s+3)(s^2+s+5)} \quad H(s) = \frac{1}{s+2}$$



**Giải.** Phương trình đặc trưng của hệ thống là

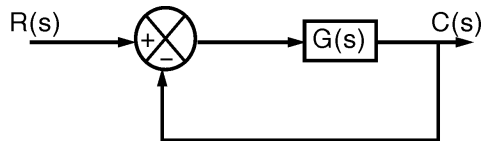
$$\begin{aligned}
 & 1 + G(s) \cdot H(s) = 0 \\
 \Leftrightarrow & 1 + \frac{50}{s(s+3)(s^2+s+5)} \cdot \frac{1}{(s+2)} = 0 \\
 \Leftrightarrow & s(s+3)(s^2+s+5)(s+2) + 50 = 0 \\
 \Leftrightarrow & s^5 + 6s^4 + 16s^3 + 31s^2 + 30s + 50 = 0
 \end{aligned}$$

*Bảng Routh*

	$s^5$	1	16	30
	$s^4$	6	31	50
$\alpha_3 = \frac{1}{6}$	$s^3$	$16 - \frac{1}{6} \cdot 31 = 10,83$	$30 - \frac{1}{6} \cdot 50 = 21,67$	0
$\alpha_4 = \frac{6}{10,83}$	$s^2$	$31 - \frac{6}{10,83} \times 21,67 = 18,99$	50	
$\alpha_5 = \frac{10,83}{18,99}$	$s^1$	$21,67 - \frac{10,83}{18,99} \times 50 = -6,84$	0	
	$s^0$	50		

Vì các phần tử ở cột 1 bảng Routh đổi dấu hai lần nên phương trình đặc tính đều có hai nghiệm nằm bên phải mặt phẳng phức, do đó *hệ thống không ổn định*. ■

**Ví dụ 4.3.** Cho hệ thống có sơ đồ khối như sau



$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 2)}$$

**Hình 4.4**

Xác định điều kiện của  $K$  để hệ thống ổn định.

**Giải.** Phương trình đặc tính

$$\begin{aligned}
 & 1 + G(s) = 0 \\
 \Leftrightarrow & 1 + \frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 2)} = 0 \\
 \Leftrightarrow & s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0
 \end{aligned}$$

Bảng Routh

	$s^4$	1	3	$K$
	$s^3$	3	2	0
$\alpha_3 = \frac{1}{3}$	$s^2$	$3 - \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{7}{3}$	$K$	
$\alpha_4 = \frac{9}{7}$	$s^1$	$2 - \frac{9}{7} \cdot K$	0	
	$s^0$	$K$		

Điều kiện để hệ thống ổn định

$$\begin{cases} 2 - \frac{9}{7}K > 0 \\ K > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < K < \frac{14}{9} \quad \blacksquare$$

#### Các trường hợp đặc biệt

□ *Trường hợp 1:* nếu có hệ số ở cột 1 của hàng nào đó bằng 0, các hệ số còn lại của hàng đó khác 0 thì ta thay hệ số bằng 0 ở cột 1 bởi số  $\varepsilon$  dương, nhỏ tùy ý, sau đó quá trình tính toán được tiếp tục.

**Ví dụ 4.4.** Xét tính ổn định của hệ thống có phương trình đặc trưng:  $s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 8s + 3 = 0$

**Giải**

Bảng Routh

	$s^4$	1	4	3
	$s^3$	2	8	0
$\alpha_3 = \frac{1}{2}$	$s^2$	$4 - \frac{1}{2} \cdot 8 = 0$	3	
$\Rightarrow$	$s^2$	$\varepsilon > 0$	3	
$\alpha_4 = \frac{2}{\varepsilon}$	$s^1$	$8 - \frac{2}{\varepsilon} \cdot 3 < 0$	0	
	$s^0$	3		

Vì các hệ số ở cột 1 bảng Routh đổi dấu hai lần nên phương trình đặc tính của hệ thống có hai nghiệm nằm bên phải mặt phẳng phức, do đó *hệ thống không ổn định*.  $\blacksquare$

□ *Trường hợp 2:* nếu tất cả các hệ số của hàng nào đó bằng 0

- Thành lập đa thức phụ từ các hệ số của hàng trước hàng có tất cả các hệ số bằng 0, gọi đa thức đó là  $A_p(s)$ .
- Thay hàng có tất cả các hệ số bằng 0 bởi một hàng khác có các hệ số chính là các hệ số của  $\frac{dA_p(s)}{ds}$ . Sau đó quá trình tính toán tiếp tục.

*Chú ý:* Nghiệm của đa thức phụ  $A_p(s)$  cũng chính là nghiệm của phương trình đặc trưng.

**Ví dụ 4.5.** Xét tính ổn định của hệ thống có phương trình đặc trưng:

$$s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 7s + 4 = 0$$

Xác định số nghiệm của phương trình đặc tính nằm bên trái, bên phải hay trên trục ảo của mặt phẳng phức.

**Giải**

*Bảng Routh*

	$s^5$	1	8	7
	$s^4$	4	8	4
$\alpha_3 = \frac{1}{4}$	$s^3$	$8 - \frac{1}{4} \times 8 = 6$	$7 - \frac{1}{4} \times 4 = 6$	0
$\alpha_4 = \frac{4}{6}$	$s^2$	$8 - \frac{4}{6} \times 6 = 4$	4	
$\alpha_5 = \frac{6}{4}$	$s^1$	$6 - \frac{6}{4} \times 4 = 0$	0	
$\Rightarrow$	$s^1$	8	0	
$\alpha_6 = \frac{4}{8}$	$s^0$	$4 - \frac{4}{8} \times 0 = 4$		

$$\text{Đa thức phụ } A_p(s) = 4s^2 + 4 \Rightarrow \frac{dA_p(s)}{ds} = 8s + 0$$

Nghiệm của đa thức phụ (cũng chính là nghiệm của phương trình đặc trưng)

$$A_p(s) = 4s^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow s = \pm j$$

*Kết luận*

- Các hệ số cột 1 bảng Routh không đổi dấu nên phương

trình đặc trưng không có nghiệm nằm bên phải mặt phẳng phức.

- Phương trình đặc tính có hai nghiệm nằm trên trục ảo.
  - Số nghiệm nằm bên trái mặt phẳng phức là  $5 - 2 = 3$ .
- $\Rightarrow$  Hệ thống ở biên giới ổn định. ■

#### 4.2.3 Tiêu chuẩn ổn định Hurwitz

Cho hệ thống có phương trình đặc trưng

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

Muốn xét tính ổn định của hệ thống theo tiêu chuẩn Hurwitz, trước tiên ta thành lập *ma trận Hurwitz* theo qui tắc:

- Ma trận Hurwitz là ma trận vuông cấp  $n \times n$ .
- Đường chéo của ma trận Hurwitz là các hệ số từ  $a_1$  đến  $a_n$ .
- *Hàng lẻ* của ma trận Hurwitz gồm các hệ số có chỉ số lẻ theo thứ tự tăng dần nếu ở bên phải đường chéo và giảm dần nếu ở bên trái đường chéo.
- *Hàng chẵn* của ma trận Hurwitz gồm các hệ số có chỉ số chẵn theo thứ tự tăng dần nếu ở bên phải đường chéo và giảm dần nếu ở bên trái đường chéo.

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

#### Phát biểu tiêu chuẩn Hurwitz

*Điều kiện cần và đủ để hệ thống ổn định là tất cả các định thức con chứa đường chéo của ma trận Hurwitz đều dương*

**Ví dụ 4.6.** Cho hệ thống tự động có phương trình đặc trưng là

$$s^3 + 4s^2 + 3s + 2 = 0$$

Hỏi hệ thống có ổn định không?

**Giải.** Ma trận Hurwitz

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_o & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Các định thức

$$\Delta_1 = a_1 = 1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_o & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times 3 - 1 \times 2 = 10$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_o & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_o & a_2 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 10 = 20$$

Vì tất cả các định thức con chứa đường chéo của ma trận Hurwitz đều dương nên hệ thống ổn định. ■

## 4.3 PHƯƠNG PHÁP QUỸ ĐẠO NGHIỆM SỐ

### 4.3.1 Khái niệm

- Xét hệ thống có phương trình đặc tính

$$s^2 + 4s + K = 0 \quad (4.10)$$

- Nghiệm của phương trình đặc tính ứng với các giá trị khác nhau của  $K$

$$K = 0: \quad s_1 = 0, \quad s_2 = -4$$

$$K = 1: \quad s_1 = -0,268, \quad s_2 = -3,732$$

$$K = 2: \quad s_1 = -0,586, \quad s_2 = -3,414$$

$$K = 3: \quad s_1 = -1, \quad s_2 = -3$$

$$K = 4: \quad s_1 = -2, \quad s_2 = -2$$

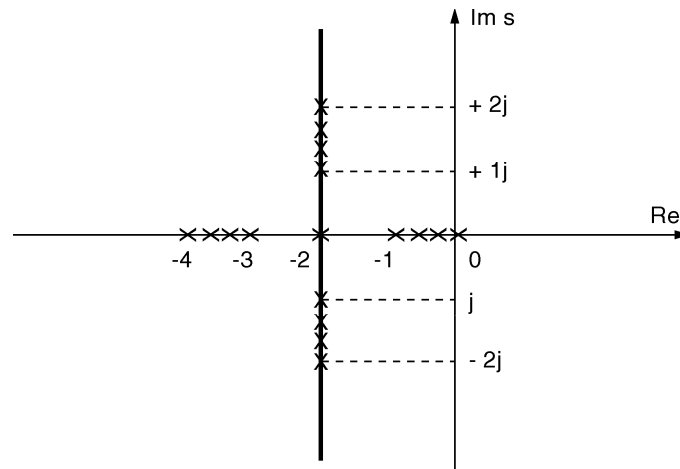
$$K = 5: \quad s_1 = -2 + j, \quad s_2 = -2 - j$$

$$K = 6: \quad s_1 = -2 + j1,414, \quad s_2 = -2 - j1,414$$

$$K = 7: \quad s_1 = -2 + j1,732, \quad s_2 = -2 - j1,732$$

$$K = 8: \quad s_1 = -2 + j2, \quad s_2 = -2 - j2$$

...



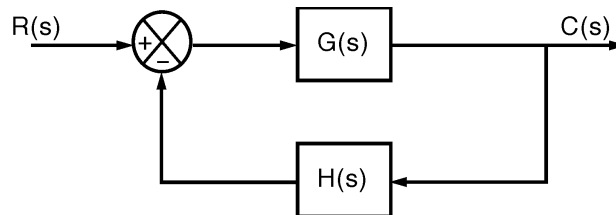
**Hình 4.5: Quỹ đạo nghiệm số**

Vẽ các nghiệm của phương trình (4.10) tương ứng với các giá trị của  $K$  lên mặt phẳng phức. Nếu cho  $K$  thay đổi liên tục từ 0 đến  $+\infty$ , tập hợp tất cả các nghiệm của phương trình (4.10) tạo thành đường đậm nét như trên hình vẽ. Đường đậm nét trên hình vẽ được gọi là quỹ đạo nghiệm số.

#### **Định nghĩa**

*Quỹ đạo nghiệm số là tập hợp tất cả các nghiệm của phương trình đặc tính của hệ thống khi có một thông số nào đó trong hệ thay đổi từ  $0 \rightarrow \infty$ .*

#### **4.3.2 Quy tắc vẽ quỹ đạo nghiệm số**



**Hình 4.6**

Xét hệ thống điều khiển có sơ đồ khối ở hình 4.6.

Phương trình đặc tính của hệ

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad (4.11)$$

Muốn áp dụng các quy tắc vẽ quỹ đạo nghiệm số, trước tiên ta phải *biến đổi tương đương* phương trình đặc tính về dạng

$$1 + K \frac{N(s)}{D(s)} = 0 \quad (4.12)$$

trong đó  $K$  là thông số thay đổi.

$$\text{Đặt} \quad G_o(s) = K \frac{N(s)}{D(s)}$$

Gọi  $n$  là số cực của  $G_o(s)$ ,  $m$  là số zero của  $G_o(s)$

$$(4.12) \quad \Leftrightarrow \quad 1 + G_o(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} |G_o(s)| = 1 & \text{Điều kiện biên độ} \\ \angle G_o(s) = (2l+1)\pi & \text{Điều kiện pha} \end{cases}$$

Sau đây là 11 qui tắc vẽ quỹ đạo nghiệm số của hệ thống có phương trình đặc tính có dạng (4.12):

*Qui tắc 1:* Số nhánh của quỹ đạo nghiệm số = bậc của phương trình đặc tính = số cực của  $G_o(s) = n$ .

*Qui tắc 2:* Khi  $K = 0$ : các nhánh của quỹ đạo nghiệm số xuất phát từ các cực của  $G_o(s)$ .

Khi  $K$  tiến đến  $+\infty$ :  $m$  nhánh của quỹ đạo nghiệm số tiến đến  $m$  zero của  $G_o(s)$ ,  $n-m$  nhánh còn lại tiến đến  $\infty$  theo các tiệm cận xác định bởi qui tắc 5 và 6.

*Qui tắc 3:* Quỹ đạo nghiệm số đối xứng qua trục thực.

*Qui tắc 4:* Một điểm trên trục thực thuộc về quỹ đạo nghiệm số nếu tổng số cực và zero của  $G_o(s)$  bên phải nó là một số lẻ.

*Qui tắc 5:* Góc tạo bởi các đường tiệm cận của quỹ đạo nghiệm số với trục thực xác định bởi

$$\alpha = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4.13)$$

*Qui tắc 6:* Giao điểm giữa các tiệm cận với trục thực là điểm A có tọa độ xác định bởi

$$OA = \frac{\sum \text{cực} - \sum \text{zero}}{n-m} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} \quad (4.14)$$

( $p_i$  và  $z_i$  là các cực và các zero của  $G_o(s)$ ).

*Qui tắc 7:* Điểm tách nhập (nếu có) của quỹ đạo nghiệm số

nằm trên trục thực và là nghiệm của phương trình:  $\frac{dK}{ds} = 0$

**Qui tắc 8:** Giao điểm của quỹ đạo nghiệm số với trục ảo có thể xác định bằng một trong hai cách sau đây

- Áp dụng tiêu chuẩn Routh-Hurwitz.
- Thay  $s = j\omega$  vào phương trình đặc tính (4.12), cân bằng phần thực và phần ảo sẽ tìm được giao điểm với trục ảo và giá trị  $K$ .

**Qui tắc 9:** Góc xuất phát của quỹ đạo nghiệm số tại cực phức  $p_j$  được xác định bởi

$$\theta_j = 180^\circ + \sum_{i=1}^m \arg(p_j - z_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \arg(p_j - p_i) \quad (4.15)$$

Dạng hình học của công thức trên là

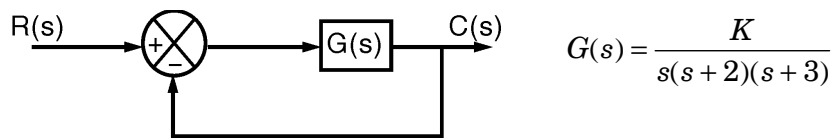
$$\theta_j = 180^\circ + (\sum \text{góc từ các zero đến cực } p_j) - (\sum \text{góc từ các cực còn lại đến cực } p_j)$$

**Qui tắc 10:** Tổng các nghiệm là hằng số khi  $K$  thay đổi từ  $0 \rightarrow +\infty$

**Qui tắc 11:** Hệ số khuếch đại dọc theo quỹ đạo nghiệm số có thể xác định từ điều kiện biên độ

$$\left| K \frac{N(s)}{D(s)} \right| = 1 \quad (4.16)$$

**Ví dụ 4.7.** Cho hệ thống tự động có sơ đồ khối như sau



**Hình 4.7**

Hãy vẽ QĐNS của hệ thống khi  $K = 0 \rightarrow +\infty$ .

**Giải.** Phương trình đặc tính của hệ thống

$$1 + G(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{K}{s(s+2)(s+3)} = 0 \quad (1)$$

Các cực: ba cực.



$$p_1 = 0, \quad p_2 = -2, \quad p_3 = -3$$

Các zero: không có.

$\Rightarrow$  QĐNS gồm có ba nhánh xuất phát từ các cực khi  $K = 0$ .

Khi  $K \rightarrow +\infty$ , ba nhánh của QĐNS sẽ tiến đến vô cùng theo các tiệm cận xác định bởi:

- Góc giữa các tiệm cận và trục thực

$$\alpha = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} = \frac{(2l+1)\pi}{3-0} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{\pi}{3} & (l=0) \\ \alpha_2 = -\frac{\pi}{3} & (l=-1) \\ \alpha_3 = \pi & (l=1) \end{cases}$$

- Giao điểm giữa các tiệm cận và trục thực

$$OA = \frac{\sum \text{cực} - \sum \text{zero}}{n-m} = \frac{[0 + (-2) + (-3)] - 0}{3-0} = -\frac{5}{3}$$

- Điểm tách nhập là nghiệm của phương trình  $\frac{dK}{ds} = 0$

$$\text{Ta có (1)} \quad \Leftrightarrow \quad K = -s(s+2)(s+3) = -(s^3 + 5s^2 + 6s)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 10s + 6)$$

$$\text{Do đó } \frac{dK}{ds} = 0 \Leftrightarrow -(3s^2 + 10s + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} s_1 = -2,549 \text{ (loại)} \\ s_2 = -0,785 \end{cases}$$

- Giao điểm của QĐNS với trục ảo có thể xác định bằng một trong hai cách sau đây:

*Cách 1*

Áp dụng tiêu chuẩn Routh

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad s^3 + 5s^2 + 6s + K = 0$$

*Bảng Routh*

	$s^3$	1	6
	$s^2$	5	$K$
$\alpha_3 = \frac{1}{5}$	$s^1$	$6 - \frac{1}{5} \times K = 0$	0

	$s^0$	$K$	
--	-------	-----	--

Điều kiện để hệ thống ổn định

$$\begin{cases} 6 - \frac{1}{5}K > 0 \\ K > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < K < 30$$

Vậy hệ số khuếch đại giới hạn là  $K_{gh} = 30$ .

Thay giá trị  $K_{gh} = 30$  vào phương trình (2), giải phương trình ta được giao điểm của QĐNS với trục ảo.

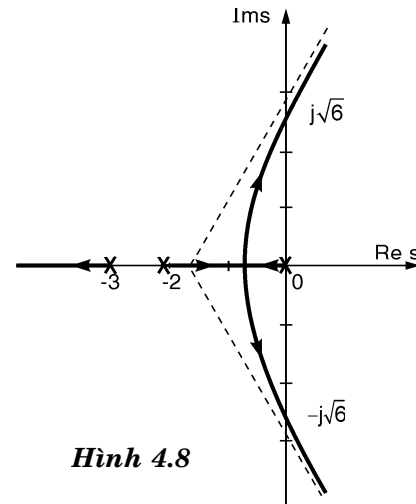
$$\begin{aligned} s^3 + 5s^2 + 6s + 30 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} s_1 = -5 \\ s_2 = j\sqrt{6} \\ s_3 = -j\sqrt{6} \end{cases} \end{aligned}$$

Cách 2

Giao điểm (nếu có) của QĐNS và trục ảo phải có dạng  $s = j\omega$ .

Thay  $s = j\omega$  vào phương trình (1) ta được

$$\begin{aligned} (j\omega)^3 + 5(j\omega)^2 + 6(j\omega) + K &= 0 \\ \Leftrightarrow -j\omega^3 - 5\omega^2 + 6j\omega + K &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -j\omega^3 + 6j\omega = 0 \\ -5\omega^2 + K = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 0 \\ K = 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} \omega = \pm\sqrt{6} \\ K = 30 \end{cases} \end{aligned}$$



Hình 4.8

**Ví dụ 4.8.** Cho hệ thống hồi tiếp âm đơn vị, trong đó hàm truyền

hở là: 
$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 8s + 20)}$$

Hãy vẽ QĐNS của hệ thống khi  $K = 0 \rightarrow +\infty$ .

**Giải.** Phương trình đặc trưng của hệ thống

$$1 + G(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{K}{s(s^2 + 8s + 20)} = 0 \quad (1)$$

Các cực  $p_1 = 0, \quad p_{2,3} = -4 \pm j2$

Các zero không có

$\Rightarrow$  QĐNS gồm ba nhánh xuất phát tại các cực khi  $K = 0$ . Khi  $K \rightarrow +\infty$ , ba nhánh tiến đến vô cùng theo tiệm cận xác định bởi

- Góc giữa các tiệm cận và trục thực

$$\alpha = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} = \frac{(2l+1)\pi}{3-0} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{\pi}{3} & (l=0) \\ \alpha_2 = -\frac{\pi}{3} & (l=-1) \\ \alpha_3 = \pi & (l=1) \end{cases}$$

- Giao điểm giữa các tiệm cận và trục thực

$$OA = \frac{\sum \text{cực} - \sum \text{zero}}{n-m} = \frac{[0 + (-4 + j2) + (-4 - j2)] - (0)}{3-0} = -\frac{8}{3}$$

- Điểm tách nhập là nghiệm của phương trình  $\frac{dK}{ds} = 0$

Ta có

$$\begin{aligned} (1) \quad & \Leftrightarrow s^3 + 8s^2 + 20s + K = 0 \\ & \Leftrightarrow K = -(s^3 + 8s^2 + 20s) \\ & \Rightarrow \frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 16s + 20) \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \frac{dK}{ds} = 0 \Leftrightarrow 3s^2 + 16s + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} s_1 = -3,33 \\ s_2 = -2,00 \end{cases}$$

Vậy QĐNS có hai điểm tách nhập.

- Giao điểm của QĐNS với trục ảo được xác định cách thay  $s = j\omega$  vào phương trình đặc tính.

$$(1) \quad \Leftrightarrow s^3 + 8s^2 + 20s + K = 0$$

Thay  $s = j\omega$  ta được

$$(j\omega)^3 + 8(j\omega)^2 + 20(j\omega) + K = 0 \Leftrightarrow -j\omega^3 - 8\omega^2 + 20j\omega + K = 0$$

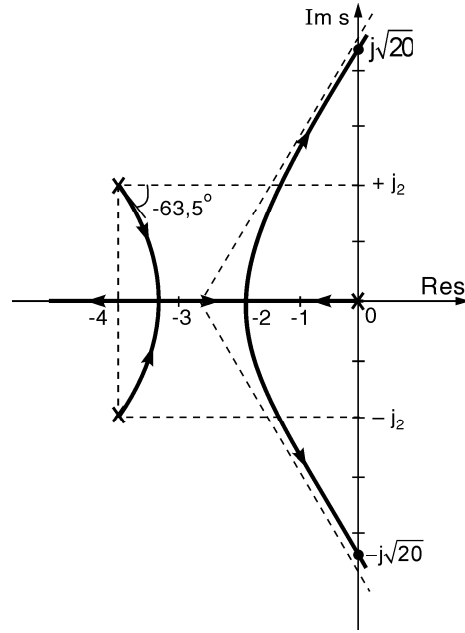
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8\omega^2 + K = 0 \\ -\omega^3 + 20\omega = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 0 \\ K = 0 \\ \omega = \pm\sqrt{20} \\ K = 160 \end{cases}$$

Vậy giao điểm của QĐNS và trục ảo là  $s = \pm j\sqrt{20}$ .

- Góc xuất phát của QĐNS tại cực phức  $p_2$  là

$$\begin{aligned} \theta_2 &= 180^\circ - [\arg(p_2 - p_1) + \arg(p_2 - p_3)] \\ &= 180^\circ - \{\arg[(-4 + j2) - 0] + \arg[(-4 + j2) - (-4 - j2)]\} \\ &= 180^\circ - \left\{ \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2}{-4}\right) + 90^\circ \right\} = 180^\circ - \{153,5 + 90\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \theta_2 = -63,5^\circ$$



**Hình 4.9**

**Ví dụ 4.9.** Cho hệ thống hồi tiếp âm đơn vị, trong đó hàm truyền

$$\text{hở là: } G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+3)(s^2+8s+20)}$$

Hãy vẽ QĐNS của hệ thống khi  $K = 0 \rightarrow +\infty$ .

**Giải.** Phương trình đặc trưng của hệ thống

$$1 + G(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{K(s+1)}{s(s+3)(s^2+8s+20)} = 0 \quad (1)$$

Các cực  $p_1 = 0, \quad p_2 = -3, \quad p_{3,4} = -4 \pm j2$

Các zero  $z_1 = -1$

$\Rightarrow$  QĐNS gồm bốn nhánh xuất phát tại các cực khi  $K = 0$ . Khi  $K \rightarrow +\infty$ , một nhánh tiến đến zero, ba nhánh còn lại tiến đến vô cùng theo tiệm cận xác định bởi:

- Góc giữa các tiệm cận và trục thực

$$\alpha = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} = \frac{(2l+1)\pi}{4-1} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{\pi}{3} & (l=0) \\ \alpha_2 = -\frac{\pi}{3} & (l=-1) \\ \alpha_3 = \pi & (l=1) \end{cases}$$

- Giao điểm giữa các tiệm cận và trục thực

$$OA = \frac{\sum \text{cực} - \sum \text{zero}}{n-m} = \frac{[0 + (-3) + (-4 + j2) + (-4 - j2)] - (-1)}{3-0} = -\frac{10}{3}$$

- Điểm tách nhập là nghiệm của phương trình  $\frac{dK}{ds} = 0$

Ta có

$$(1) \quad \Leftrightarrow s(s+3)(s^2+8s+20) + K(s+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow K = -\frac{s(s+3)(s^2+8s+20)}{(s+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{ds} = -\frac{3s^4 + 26s^3 + 77s^2 + 88s + 60}{(s+1)^2}$$

$$\text{Do đó } \frac{dK}{ds} = 0 \Leftrightarrow 3s^4 + 26s^3 + 77s^2 + 88s + 60 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s_{1,2} = -3,67 \pm j1,05 \\ s_{3,4} = -0,66 \pm j0,97 \end{cases} \quad (\text{loại})$$

Vậy QĐNS không có điểm tách nhập.

- Giao điểm của QĐNS với trục ảo được xác định cách thay  $s = j\omega$  vào phương trình đặc tính.

$$\begin{aligned} (1) \quad &\Leftrightarrow s(s+3)(s^2+8s+20)+K(s+1)=0 \\ &\Leftrightarrow s^4+11s^3+44s^2+(60+K)s+K=0 \end{aligned}$$

Thay  $s = j\omega$  ta được

$$\omega^4 - 11j\omega^3 - 44\omega^2 + (60+K)j\omega + K = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega^4 - 44\omega^2 + K = 0 \\ -11\omega^3 + (60+K)\omega = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 0 \\ K = 0 \\ \omega = \pm 5,893 \\ K = 322 \\ \omega = \pm j1,314 \text{ (loại)} \\ K = -61,7 \end{cases}$$

Vậy giao điểm cần tìm là:

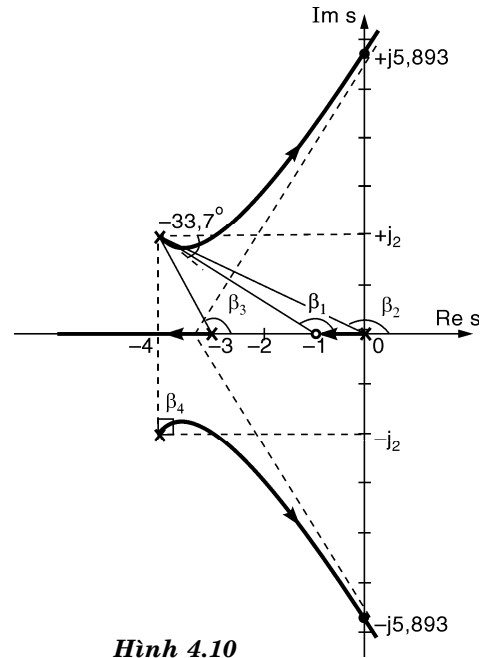
$$s = \pm j5,893$$

Hệ số khuếch đại giới hạn là  $K_{gh} = 322$

- Góc xuất phát của QĐNS tại cực phức  $p_3$

$$\begin{aligned} \theta_3 &= 180 + \beta_1 - (\beta_2 + \beta_3 + \beta_4) \\ &= 180 + 146,3 - (153,4 + 116,6 + 90) \\ \theta_3 &= -33,7 \end{aligned}$$

Hình 4.10



**Ví dụ 4.10.** Cho hệ thống hồi tiếp âm đơn vị, trong đó hàm truyền hở là:

$$G(s) = \frac{400}{s(s+6)(s+a)}$$

Hãy vẽ QĐNS của hệ thống khi  $a = 0 \rightarrow +\infty$ .

**Giải.** Phương trình đặc trưng của hệ thống

$$1 + G(s) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 1 + \frac{400}{s(s+6)(s+a)} = 0 \\
&\Leftrightarrow s(s+6)(s+a) + 400 = 0 \\
&\Leftrightarrow s^2(s+6) + 400 + as(s+6) = 0 \\
&\Leftrightarrow 1 + \frac{as(s+6)}{s^3 + 6s^2 + 400} = 0 \quad (1)
\end{aligned}$$

Các cực  $p_1 = -10$ ,  $p_{2,3} = 2 \pm j6$

Các zero  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = -6$

$\Rightarrow$  QĐNS gồm ba nhánh xuất phát tại các cực khi  $K = 0$ . Khi  $K \rightarrow +\infty$ , hai nhánh tiến đến hai zero, nhánh còn lại tiến đến vô cùng theo tiệm cận xác định bởi

- Góc giữa các tiệm cận và trục thực

$$\alpha = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} = \frac{(2l+1)\pi}{3-2} \Rightarrow \alpha = \pi, (l=0)$$

- Giao điểm giữa các tiệm cận và trục thực

$$OA = \frac{\sum \text{cực} - \sum \text{zero}}{n-m} = \frac{[-10 + (-2 + j6) + (-2 - j6)] - [0 + (-6)]}{3-2} = -8$$

- Điểm tách nhập là nghiệm của phương trình  $\frac{da}{ds} = 0$

$$\text{Ta có (1)} \quad \Leftrightarrow s^3 + 6s^2 + 400 + as(s+6) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{s^3 + 6s^2 + 400}{s^2 + 6s}$$

$$\Rightarrow \frac{da}{ds} = -\frac{s^3 + 6s^2 + 400}{s^2 + 6s} = \frac{s^4 + 12s^3 + 36s^2 - 800s - 2400}{(s^2 + 6s)^2}$$

$$\text{Do đó } \frac{da}{ds} = 0 \Leftrightarrow s^4 + 12s^3 + 36s^2 - 800s - 2400 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s_1 = +6,9 & (\text{loại}) \\ s_2 = -2,9 \\ s_{3,4} = -8 \pm j7,48 & (\text{loại}) \end{cases}$$

Vậy QĐNS 1 có điểm tách nhập tại  $-2,9$ .

- Giao điểm của QĐNS với trục ảo được xác định bằng cách thay  $s = j\omega$  vào phương trình đặc tính.

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad s^3 + 6s^2 + 400 + as(s+6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad s^3 + (6+a)s^2 + 6as + 400 = 0$$

Thay  $s = j\omega$  ta được

$$-j\omega^3 - (6+a)\omega^2 + 6aj\omega + 400 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -(6+a)\omega^2 + 400 = 0 \\ -\omega^3 + 6a\omega = 0 \end{cases}$$

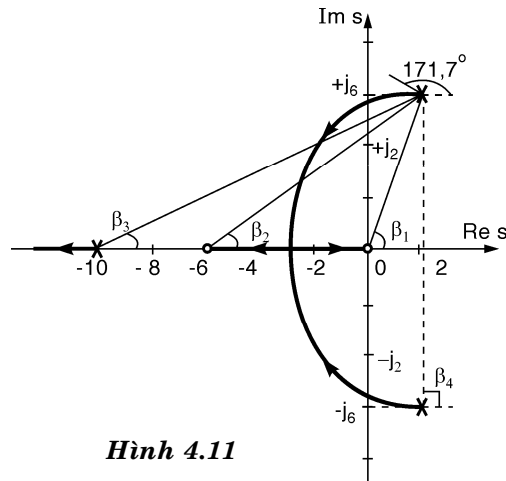
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \omega = 0 \\ a = \infty \end{cases} \quad \begin{cases} \omega = \pm 5,85 \\ a = 5,7 \end{cases} \quad \begin{cases} \omega = \pm j8,38 \\ a = -11,7 \end{cases} \quad (loại)$$

Vậy giao điểm cần tìm là  $s = \pm j5,85$ , tương ứng với giá trị giới hạn của hệ số  $a$  là  $a_{gh} = 5,7$

- Góc xuất phát của QĐNS tại cực phức  $p_2$

$$\theta_2 = 180 + (\beta_1 + \beta_2) - (\beta_3 + \beta_4) = 180 + (71,6 + 36,7) - (26,6 + 90)$$

$$\theta_2 = 171,7^\circ$$



Hình 4.11



## 4.4 TIÊU CHUẨN ỔN ĐỊNH TẦN SỐ

### 4.4.1 Nguyên lý góc quay

Xét hệ thống bậc  $n$  có phương trình đặc tính hệ số hằng:

$$A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (4.17)$$

Đa thức  $A(s)$  được viết dưới dạng:

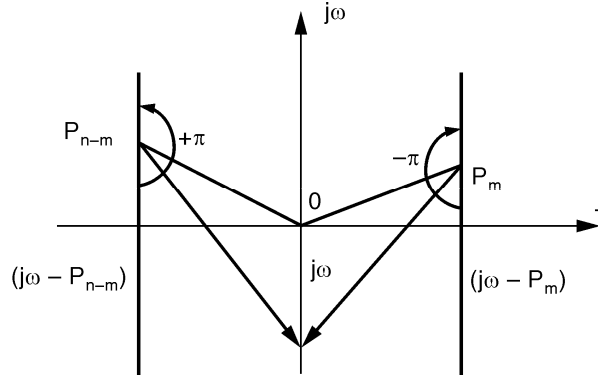
$$A(s) = a_0(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)$$

với  $p_1, p_2, \dots, p_n$  là cực của hệ thống, là nghiệm của phương trình đặc tính.

Thay  $s = j\omega$  vào (4.17) ta có:

$$A(j\omega) = a_0(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n)$$

Giả sử phương trình (4.17) có  $m$  nghiệm phải (có phần thực dương), còn  $(n - m)$  nghiệm trái (có phần thực âm)



**Hình 4.12**

Góc quay của vectơ đa thức đặc tính tần số  $A(j\omega)$

$$\arg A(j\omega) = \sum_{i=1}^n \arg(j\omega - p_i)$$

Khi tần số  $\omega$  thay đổi từ  $-\infty$  đến  $+\infty$  thì sự thay đổi góc quay của vectơ đa thức đặc tính tần số  $A(j\omega)$  sẽ là:

$$\begin{aligned} \Delta \arg A(j\omega) &= \sum_{i=1}^n \arg(j\omega - p_i) \\ -\infty < \omega < +\infty & \quad -\infty < \omega < +\infty \end{aligned}$$

Ký hiệu  $\Delta$  chỉ sự thay đổi góc quay

Nếu qui định chiều quay dương là chiều ngược chiều kim đồng hồ thì ta có biểu thức sau đối với nghiệm trái và phải:

$$\begin{aligned}\Delta \arg(j\omega - p_{n-m}) &= \pi & \Delta \arg(j\omega - p_m) &= -\pi \\ -\infty < \omega < +\infty & & -\infty < \omega < +\infty\end{aligned}$$

Hệ có  $m$  nghiệm phải và  $(n - m)$  nghiệm trái:

$$\begin{aligned}\Delta \arg A(j\omega) &= (n - m)\pi - m\pi = (n - 2m)\pi \\ -\infty < \omega < +\infty\end{aligned}$$

Nguyên lý góc quay

*Hệ thống bậc  $n$  có  $m$  nghiệm phải và  $(n - m)$  nghiệm trái có vectơ đa thức đặc tính tần số  $A(j\omega)$  sẽ quay một góc là  $((n - 2m)/2)$  vòng kín theo chiều ngược chiều kim đồng hồ khi tần số  $\omega$  biến thiên từ  $-\infty$  đến  $+\infty$*

$$\begin{aligned}\Delta \arg A(j\omega) &= \left( \frac{n - 2m}{2} \right) \cdot 2\pi \\ -\infty < \omega < +\infty\end{aligned}$$

Vectơ đa thức đặc tính tần số  $A(j\omega)$  sẽ quay một góc bằng hiệu số nghiệm trái  $(n - m)$  và nghiệm phải  $(m)$  nhân với  $\pi$  khi  $\omega$  biến thiên từ  $-\infty$  đến  $+\infty$ .

#### 4.4.2 Tiêu chuẩn ổn định tần số Mikhailov

♦ Tiêu chuẩn ổn định dựa vào nguyên lý góc quay được A. V. Mikhailov phát biểu vào năm 1938:

*Điều kiện cần và đủ để hệ tuyến tính ổn định là biểu đồ vectơ đa thức đặc tính  $A(j\omega)$  xuất phát từ nửa trục thực dương tại  $\omega$  bằng không, phải quay  $n$  góc phần tư theo chiều ngược chiều kim đồng hồ khi  $\omega$  biến thiên từ 0 đến  $+\infty$ , với  $n$  là bậc của phương trình đặc tính của hệ thống*

♦ Chứng minh:

Xét hệ thống bậc  $n$  có phương trình đặc tính:

$$A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (4.18)$$

Hệ thống ổn định nếu  $n$  cực nằm bên trái mặt phẳng phức. Theo nguyên lý góc quay:

$$\Delta \arg A(j\omega) = n\pi \quad (4.19)$$

$$-\infty < \omega < +\infty$$

Vì  $A(j\omega)$  và  $A(-j\omega)$  là phức liên hợp nên

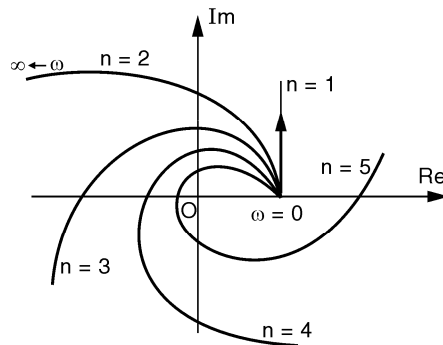
$$\Delta \arg A(j\omega) = \Delta \arg A(j\omega) \quad (4.20)$$

$$-\infty < \omega < 0 \quad 0 < \omega < +\infty$$

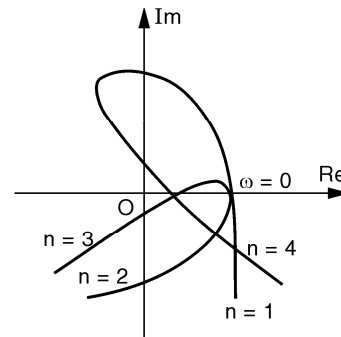
Do đó phương trình (4.20) có thể được viết dưới dạng

$$\Delta \arg A(j\omega) = n \frac{\pi}{2}$$

$$0 < \omega < +\infty$$



Hệ ổn định



Hệ không ổn định

Hình 4.13

♦ Xây dựng biểu đồ Mikhailov

□ Thay  $S = j\omega$  vào phương trình đặc tính sau đó tách phần thực và phần ảo

$$A(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

trong đó:  $P(\omega)$  là hàm chẵn với  $\omega$ :  $P(-\omega) = P(\omega)$

$Q(\omega)$  là hàm lẻ với  $\omega$ :  $Q(-\omega) = -Q(\omega)$

□ Từ biểu thức  $A(j\omega)$  nhận được bằng cách thế  $S = j\omega$  vào mẫu số hàm truyền:

$$A(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n$$

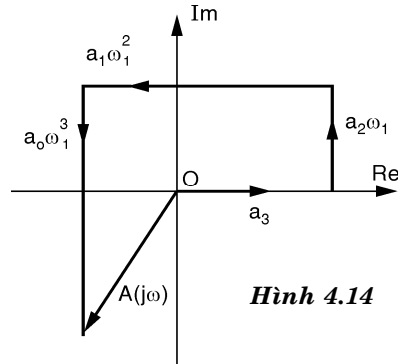
Ta nhận thấy  $A(j\omega)$  chính là đường chéo của đa giác có cạnh tương ứng bằng  $a_k \omega^{n-k}$  và các cạnh vuông góc với nhau.

**Ví dụ 4.12.** xét hệ bậc ba  $n = 3$

$$A(j\omega) = a_0(j\omega)^3 + a_1(j\omega)^2 + a_2(j\omega) + a_3$$

Cho  $\omega$  biến thiên từ 0 đến vô cùng bằng phương pháp trên xây dựng toàn bộ biểu đồ vectơ đa thức đặc tính  $A(j\omega)$ .

□ Đa thức đặc tính (mẫu số hàm truyền đạt của hệ cần xét ổn định ở trạng thái hở hoặc trạng thái kín) được phân tích thành hai thành phần:



**Hình 4.14**

$$A(s) = D(s) + K(s)$$

**Ví dụ 4.13:**  $A(s) = (1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3) + K = D(s) + K = 0$

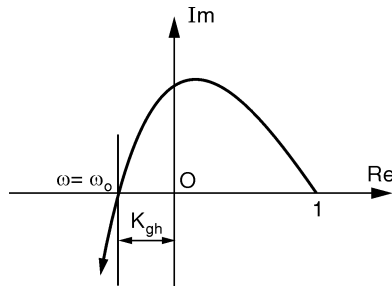
$$T_1 = 0,5 ; T_2 = 2 ; T_3 = 0,1. \text{ Tính } K_{gh}$$

$$\Delta \arg A(j\omega) = D(j\omega) + K$$

$$0 < \omega < +\infty \quad 0 < \omega < +\infty$$

Xây dựng biểu đồ

Từ đó suy ra:



**Hình 4.15**

$$D(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$P(\omega) = 1 - 1,25 \omega^2$$

$$P(\omega) = \omega(2,6 - 0,1\omega^2)$$

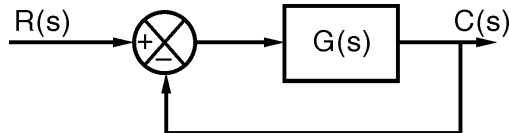
$$K_{gh} = ? \begin{cases} P(\omega_o) = K_{gh} \\ Q(\omega_o) = 0 \end{cases}$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{2,6}{0,1}}$$

$$K_{gh} = (1 - 1,25 \times \frac{2,6}{0,1}) = 31,5 \quad \blacksquare$$

#### 4.4.3 Tiêu chuẩn ổn định Nyquist

Cho hệ thống tự động có sơ đồ khối



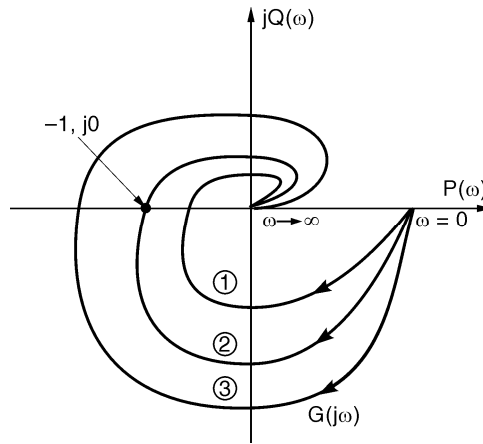
**Hình 4.16**

Cho biết đặc tính tần số của hệ hở  $G(s)$ , bài toán đặt ra là xét tính ổn định của hệ thống kín  $G_k(s)$ .

### **Tiêu chuẩn Nyquist**

Hệ thống kín  $G_k(s)$  ổn định nếu đường cong Nyquist của hệ hở  $G(s)$  bao điểm  $(-1, j0)$   $\frac{l}{2}$  vòng theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ) khi  $\omega$  thay đổi từ 0 đến  $+\infty$ , trong đó  $l$  là số cực của hệ hở  $G(s)$  nằm bên phải mặt phẳng phức.

**Ví dụ 4.14.** Cho hệ thống hồi tiếp âm đơn vị, trong đó hệ hở  $G(s)$  có đường cong Nyquist như hình vẽ. Biết rằng  $G(s)$  ổn định. Xét tính ổn định của hệ thống kín



**Hình 4.17**

Vì  $G(s)$  ổn định nên  $G(s)$  không có cực nằm bên phải mặt phẳng phức. Do đó theo tiêu chuẩn Nyquist hệ kín ổn định nếu đường cong Nyquist  $G(j\omega)$  của hệ hở không bao điểm  $(-1, j0)$ . Vì vậy:

Trường hợp ①:  $G(j\omega)$  không bao điểm  $(-1, j0) \Rightarrow$  hệ kín ổn định.

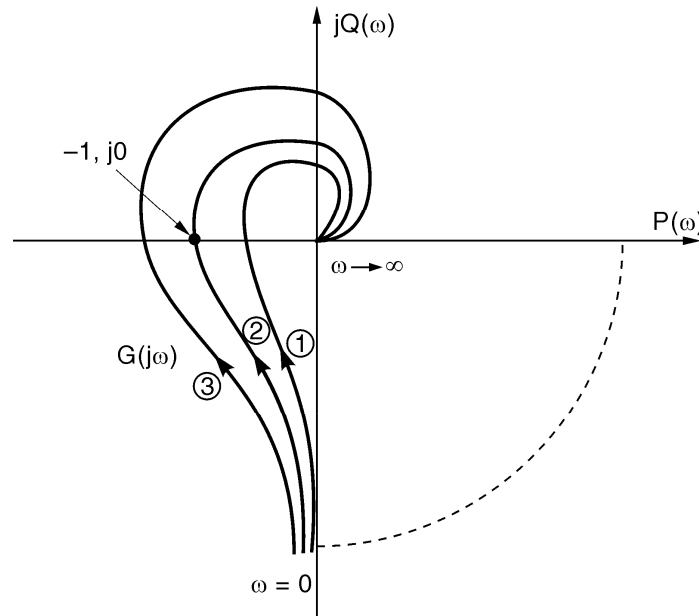
Trường hợp ②:  $G(j\omega)$  qua điểm  $(-1, j0)$  hệ kín ở biên giới ổn định;

Trường hợp ③:  $G(j\omega)$  bao điểm  $(-1, j0) \Rightarrow$  hệ kín không ổn định. ■

**Chú ý:** Đối với các hệ thống có khâu tích phân lý tưởng, để xác định đường cong Nyquist có bao điểm  $(-1, j0)$  hay không, ta vẽ thêm cung  $-\frac{\gamma}{2}$  bán kính vô cùng lớn ( $\gamma$  là số khâu tích phân lý tưởng trong hàm truyền hệ hở).

**Ví dụ 4.15.** Xét tính ổn định của hệ hồi tiếp âm đơn vị biết hàm truyền của hệ hở là: 
$$G(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)}$$

**Giải.** Tùy theo giá trị của  $K, T_1, T_2, T_3$  mà biểu đồ Nyquist của hệ hở có thể có một trong ba dạng sau

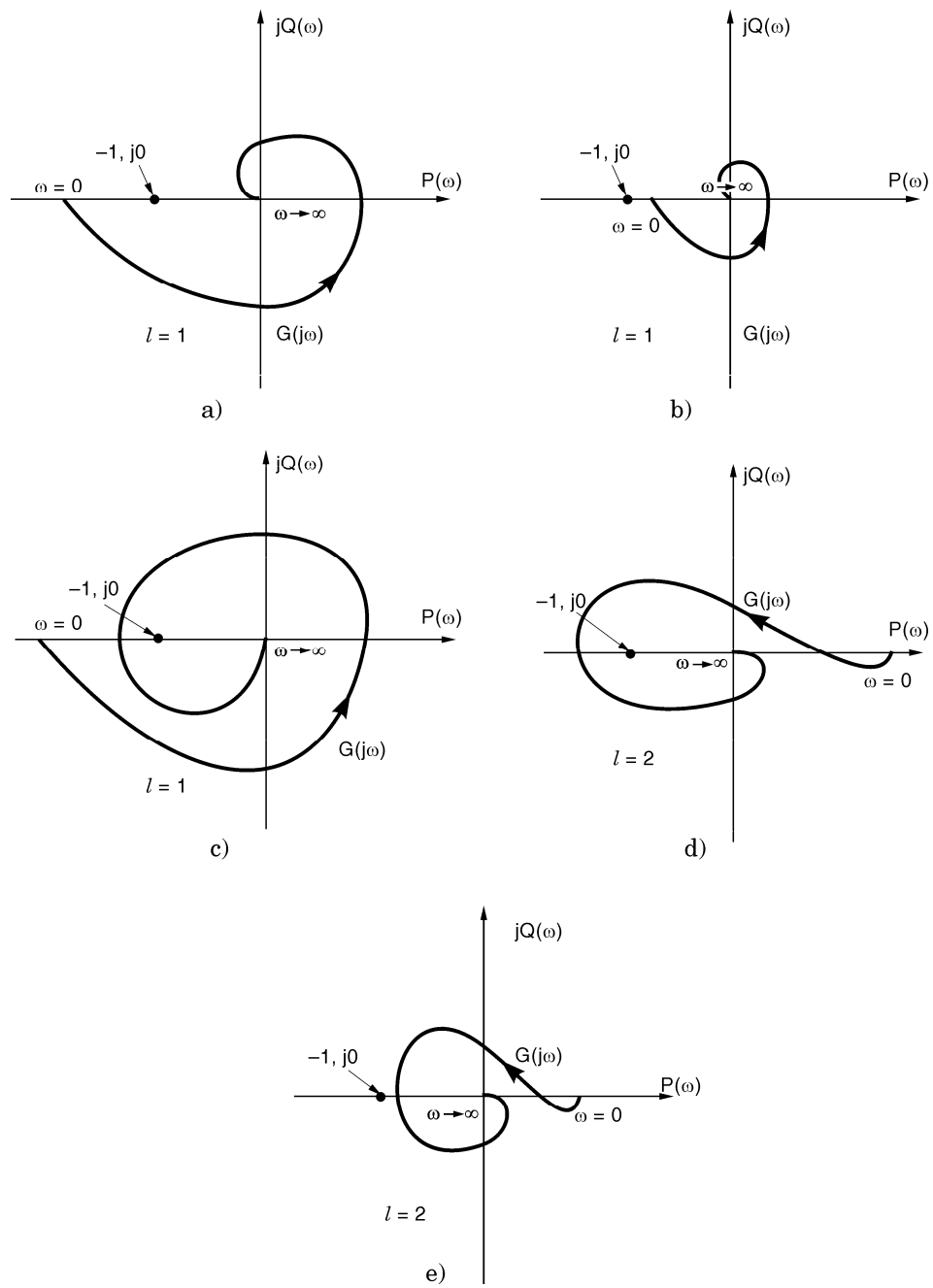


**Hình 4.18**

Vì hệ kín không có cực nằm bên phải mặt phẳng phức nên

- Trường hợp ①:  $G(j\omega)$  không bao điểm  $(-1, j0) \Rightarrow$  hệ kín ổn định.
- Trường hợp ②:  $G(j\omega)$  qua điểm  $(-1, j0) \Rightarrow$  hệ kín ở biên giới ổn định.
- Trường hợp ③:  $G(j\omega)$  bao điểm  $(-1, j0) \Rightarrow$  hệ kín không ổn định. ■

**Ví dụ 4.16.** Cho hệ thống hở không ổn định có đặc tính tần số như các hình vẽ dưới đây. Hỏi trường hợp nào hệ kín ổn định?



Hình 4.19

**Giải:** (a) Ổn định (b) Không ổn định (c) Không ổn định  
(d) Ổn định (e) Không ổn định

**Ví dụ 4.17.** Cho hệ thống hở có hàm truyền đạt là

$$G(s) = \frac{K}{(Ts+1)^n} \quad (K > 0, T > 0, n > 2)$$

$P(\omega)$

Tìm điều kiện của K và T để hệ thống kín (hồi tiếp âm đơn vị) ổn định.

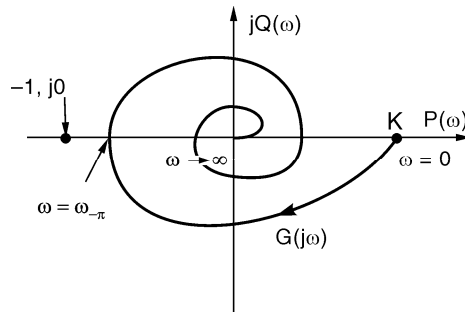
**Giải.** Đặc tính tần số của hệ thống là

$$G(j\omega) = \frac{K}{(Tj\omega+1)^n}$$

$$\text{Biên độ} \quad M(\omega) = \frac{K}{\left(\sqrt{T^2\omega^2+1}\right)^n}$$

$$\text{Pha} \quad \varphi(\omega) = -n\operatorname{tg}^{-1}(T\omega)$$

Biểu đồ Nyquist của hệ thống hở có dạng như hình 4.29.



**Hình 4.20**

Do hệ hở không có cực nằm bên phải mặt phẳng phức nên để hệ thống kín ổn định thì đường cong Nyquist của hệ hở không bao điểm  $(-1, j0)$ , theo hình vẽ ta thấy điều này xảy ra khi  $M(\omega_{-\pi}) < 1$ .



Ta có  $\varphi(\omega_{-\pi}) = -n \operatorname{tg}^{-1}(T\omega_{-\pi}) = -\pi$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}^{-1}(T\omega_{-\pi}) = \frac{\pi}{n} \Rightarrow (T\omega_{-\pi}) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right) \Rightarrow \omega_{-\pi} = \frac{1}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

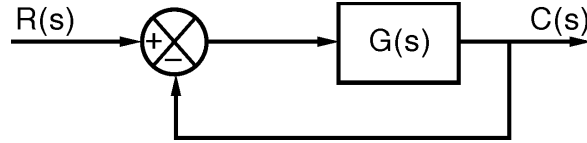
$$\text{Do đó } M(\omega_{-\pi}) < 1 \Leftrightarrow \frac{K}{\left(\sqrt{T^2 \left[\frac{1}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]^2 + 1}\right)^n} < 1$$

$$\Leftrightarrow K < \left(\sqrt{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{n}\right) + 1}\right)^n \quad \blacksquare$$

#### 4.4.4 Tiêu chuẩn ổn định Bode

Cho hệ thống tự động có sơ đồ khối như hình 4.30.

Cho biết đặc tính tần số của hệ hở  $G(s)$ , bài toán đặt ra là xét tính ổn định của hệ thống kín  $G_k(s)$ .



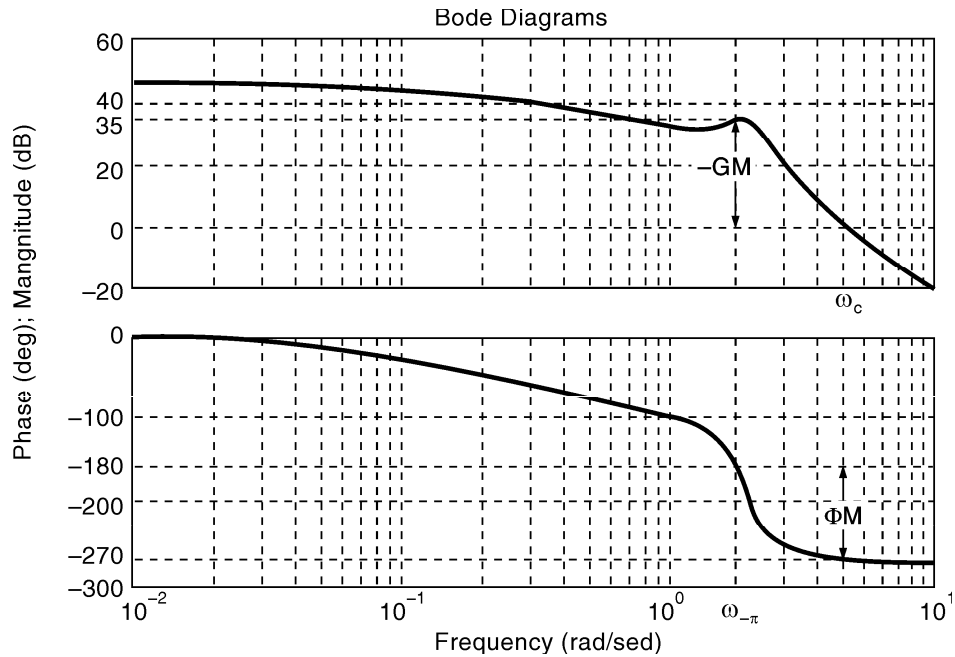
Hình 4.21

##### Tiêu chuẩn Bode

Hệ thống kín  $G_k(s)$  ổn định nếu hệ thống hở  $G(s)$  có độ dự trữ biên và độ dự trữ pha dương

$$\begin{cases} GM > 0 \\ \Phi M > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{hệ thống ổn định}$$

**Ví dụ 4.18.** Cho hệ thống hở có biểu đồ Bode như hình vẽ. Hỏi hệ kín có ổn định không?

**Hình 4.22**

**Giải.** Trên biểu đồ Bode ta xác định được:

$$\omega_c = 5,1 \text{ (rad/sec)}, \quad \omega_{-\pi} = 2 \text{ (rad/sec)}$$

$$L(\omega_{-\pi}) = 35 \text{ dB} \quad \Rightarrow \quad GM = -35 \text{ dB}$$

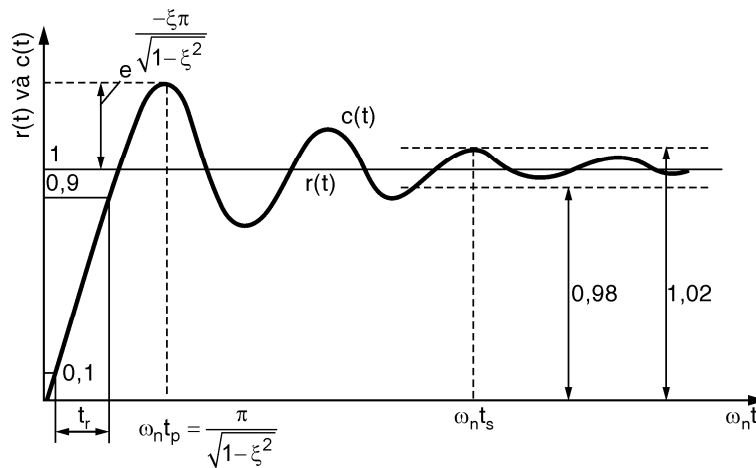
$$\varphi(\omega_c) = -270^\circ \quad \Rightarrow \quad \Phi M = 180^\circ + (-270^\circ) = -90^\circ$$

Do  $GM < 0$  và  $\Phi M < 0$  nên hệ thống kín không ổn định. ■

## ĐÁNH GIÁ CHẤT LƯỢNG HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN

### 5.1 CÁC TIÊU CHUẨN CHẤT LƯỢNG

Ổn định là điều kiện cần đối với một hệ ĐKTD, song chưa phải là đủ để hệ thống được sử dụng trong thực tế. Nhiều yêu cầu đòi hỏi hệ thống phải thỏa mãn được cùng một lúc các tiêu chuẩn chất lượng khác nhau như độ chính xác, độ ổn định, đáp ứng quá độ, độ nhạy, khả năng chống nhiễu... Sau đây là một số tiêu chuẩn thường dùng để đánh giá chất lượng hệ thống điều khiển.



Hình 5.1

#### 1- Sai số xác lập

$$e_{xl} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (5.1)$$

$$e(t) = r(t) - c(t)$$

Sai số là hiệu số giữa tín hiệu vào và tín hiệu hồi tiếp. Mục đích muốn tín hiệu ra qua vòng hồi tiếp luôn luôn bám được tín hiệu vào mong muốn. Điều đó có nghĩa sai số xác lập bằng không.

### 2- Độ vọt lố (độ quá điều chỉnh )

$$POT\% = \frac{c_{\max} - c_{xl}}{c_{xl}} \times 100 \quad (5.2)$$

### 3- Thời gian đáp ứng

- Thời gian lên đỉnh là thời gian đáp ứng ra đạt giá trị cực đại ( $t_p = t_{peak}$ ).

- Thời gian quá độ  $t_s = t_{set}$  xác định bởi thời điểm đáp ứng ra từ sau đó trở đi không vượt ra khỏi miền giới hạn sai số  $\Delta$  quanh giá trị xác lập. Ví dụ:  $\Delta$  có thể là  $\pm 2\%$ ,  $\pm 5\%$ ...

### 4- Độ dữ trữ ổn định

*Định nghĩa:* Khoảng cách từ trục ảo đến nghiệm cực gần nhất (nghiệm thực hoặc phức) được gọi là độ dữ trữ ổn định của hệ. Ký hiệu khoảng cách gần nhất ấy là  $\lambda_o$ , nếu  $\lambda_o$  càng lớn thì quá trình quá độ càng nhanh về xác lập. Đáp ứng quá độ của hệ bậc n:

$$c(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e^{p_i t} = e^{-\lambda_o t} \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e^{(p_i + \lambda_o) t} \quad (5.3)$$

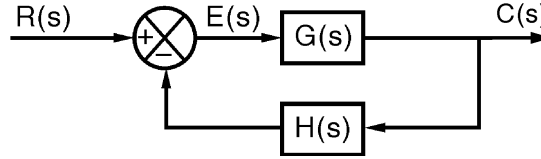
trong đó  $\text{Re}(p_i + \lambda_o) \leq 0$

### 5- Tiêu chuẩn tích phân

Trong thực tế một hệ thống ĐKTD được thiết kế phải thỏa yêu cầu ở cả hai chế độ xác lập và quá độ. Quá trình quá độ có thể được đánh giá thông qua giá trị tích phân của sai lệch giữa giá trị đặt và giá trị tức thời đo được của đại lượng cần điều chỉnh.

## 5.2 SAI SỐ XÁC LẬP

Xét hệ thống hồi tiếp âm có sơ đồ khối như hình vẽ:



**Hình 5.2** Hệ thống hồi tiếp âm

Sai số của hệ thống là

$$E(s) = R(s) - C(s)H(s) = R(s) - \left[ R(s) \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \right] H(s)$$

$$\Rightarrow E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Sai số xác lập

$$e_{xl} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

$$\Rightarrow e_{xl} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (5.4)$$

Sai số xác lập không những phụ thuộc vào cấu trúc và thông số của hệ thống mà còn phụ thuộc vào tín hiệu vào.

**1- Tín hiệu vào là hàm bậc đơn vị**

$$r(t) = u(t) \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s}$$

$$e_{xl} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \frac{1}{s}}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)}$$

Đặt  $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$ : hệ số vị trí

$$\Rightarrow e_{xl} = \frac{1}{1 + K_p} \quad (5.5)$$

**2- Tín hiệu vào là hàm dốc đơn vị**

$$r(t) = tu(t) \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$e_{xl} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \frac{1}{s^2}}{1 + G(s)H(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + sG(s)H(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)}$$

Đặt  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)$ : hệ số vận tốc

$$e_{xl} = \frac{1}{K_v} \quad (5.6)$$

### 3- Tín hiệu vào là hàm parabol

$$r(t) = \frac{t^2}{2} u(t) \quad \Rightarrow \quad R(s) = \frac{1}{s^3}$$

$$e_{xl} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \frac{1}{s^3}}{1 + G(s)H(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 + s^2G(s)H(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2G(s)H(s)}$$

Đặt  $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2G(s)H(s)$ : hệ số gia tốc

$$e_{xl} = \frac{1}{K_a} \quad (5.7)$$

#### Nhận xét

Tùy theo số khâu tích phân lý tưởng có trong hàm truyền hở  $G(s)H(s)$  mà  $K_p$ ,  $K_v$ ,  $K_a$  có giá trị như bảng sau:

Số khâu tích phân trong $G(s)H(s)$	Hệ số vị trí $K_p$	Hệ số vận tốc $K_v$	Hệ số gia tốc $K_a$
0	$K_p < \infty$	0	0
1	$\infty$	$K_v < \infty$	0
2	$\infty$	$\infty$	$K_a < \infty$
> 3	$\infty$	$\infty$	$\infty$

- Nếu  $G(s)H(s)$  không có khâu tích phân lý tưởng thì hệ thống kín theo kịp sự thay đổi của tín hiệu vào là hàm bậc với sai số  $e_{xl} = \frac{1}{1 + K_p}$  và không theo kịp sự thay đổi của tín hiệu vào là hàm dốc và hàm parabol.

- Nếu  $G(s)H(s)$  có một khâu tích phân lý tưởng thì hệ thống kín theo kịp sự thay đổi của tín hiệu vào là hàm nấc với sai số  $e_{xl} = 0$ , và theo kịp sự thay đổi của tín hiệu vào là hàm dốc với sai số  $e_{xl} = \frac{1}{K_v}$  và không theo kịp sự thay đổi của tín hiệu vào là

hàm parabol  $\Rightarrow$  hệ thống có một khâu tích phân lý tưởng gọi là hệ vô sai bậc một.

- Nếu  $G(s)H(s)$  có hai khâu tích phân lý tưởng thì hệ thống kín theo kịp sự thay đổi của tín hiệu vào là hàm nấc và hàm dốc với sai số  $e_{xl} = 0$ , theo kịp sự thay đổi của tín hiệu vào là hàm parabol với sai số  $e_{xl} = \frac{1}{K_a} \Rightarrow$  hệ thống có hai khâu tích phân lý tưởng gọi là hệ vô sai bậc hai.

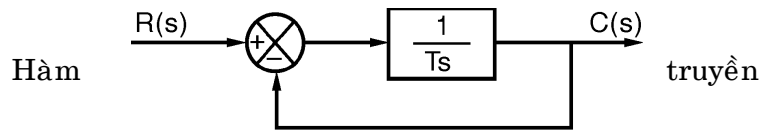
- Nếu  $G(s)H(s)$  có ba khâu tích phân lý tưởng thì hệ thống kín theo kịp sự thay đổi của tín hiệu vào là hàm nấc, hàm dốc và hàm parabol với sai số  $e_{xl} = 0 \Rightarrow$  hệ thống có ba khâu tích phân lý tưởng gọi là hệ vô sai bậc ba.

$\Rightarrow$  Hệ thống có  $n$  khâu tích phân lý tưởng gọi là hệ vô sai bậc  $n$ .

## 5.3 ĐÁP ỨNG QUÁ ĐỘ

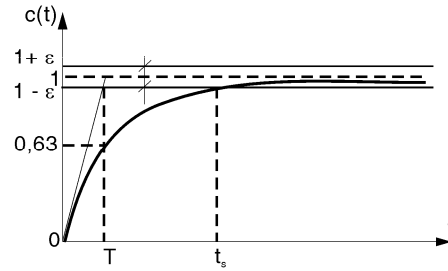
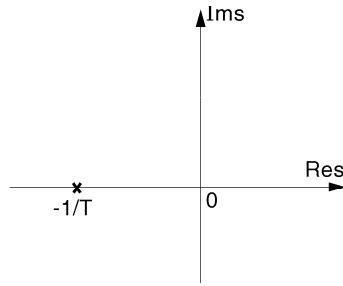
Đáp ứng quá độ là đáp ứng của hệ thống khi tín hiệu vào là hàm nấc đơn vị.

### 5.3.1 Hệ quán tính bậc một



$$G_k(s) = \frac{1/Ts}{1 + 1/Ts} = \frac{1}{Ts + 1}$$

Hệ thống kín chỉ có một cực thực  $s = -\frac{1}{T}$ .



**Hình 5.3** Giải đồ cực - zero của hệ quán tính bậc nhất

**Hình 5.4** Đáp ứng quá độ của hệ quán tính bậc nhất

Đáp ứng của hệ thống khi tín hiệu vào là hàm nấc

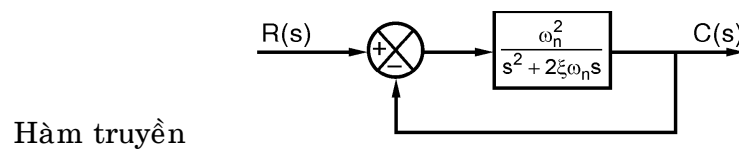
$$C(s) = R(s) \cdot G_k(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{Ts + 1} = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts + 1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/T}$$

$$\Rightarrow c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

Nhận xét (xem hình 5.4)

- Đáp ứng quá độ của khâu quán tính bậc nhất không có vọt lố.
- Thời hằng  $T$  là thời điểm  $c(t)$  đạt 63.2% giá trị xác lập,  $T$  càng nhỏ đáp ứng càng nhanh.
- Thời gian xác lập  $t_s$  (*settling time*) là thời gian để sai số giữa  $c(t)$  và giá trị xác lập nhỏ hơn  $\varepsilon$  ( $\varepsilon = 5\%$  hay  $2\%$ ).
- Sai số xác lập bằng 0.

### 5.3.2 Hệ dao động bậc hai



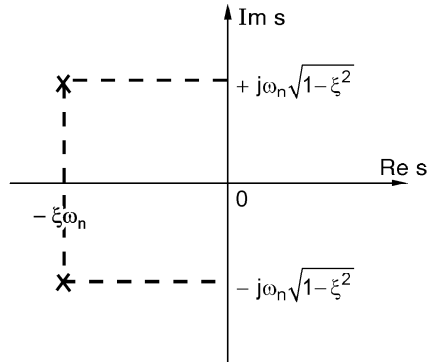
$$G_k(s) = \frac{\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s}}{1 + \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$$



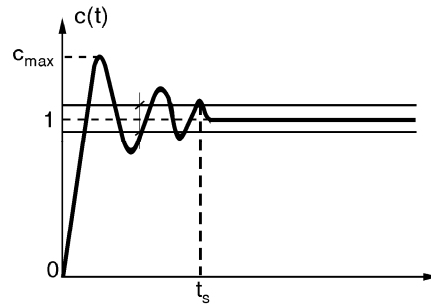
trong đó  $T = \frac{1}{\omega_n}$

Hệ thống có cặp cực phức liên hợp (H.5.5)

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$



**Hình 5.5** Giản đồ cực - zero của hệ dao động bậc hai



**Hình 5.6** Đáp ứng quá độ của hệ dao động bậc hai

Đáp ứng của hệ thống khi tín hiệu vào là hàm nấc

$$C(s) = R(s) \cdot G_k(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}$$

$$\Rightarrow c(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left[(\omega_n\sqrt{1-\xi^2})t + \theta\right]$$

trong đó độ lệch pha  $\theta$  xác định bởi  $\cos \theta = \xi$

*Nhận xét* (xem hình 5.6)

- Đáp ứng quá độ của khâu dao động bậc hai có dạng dao động với biên độ giảm dần.

- Nếu  $\xi = 0$ :  $c(t) = 1 - \sin \omega_n t$ , đáp ứng của hệ là dao động không suy giảm với tần số  $\omega_n \Rightarrow \omega_n$  gọi là tần số dao động tự nhiên.

- Nếu  $0 < \xi < 1$ : đáp ứng của hệ là dao động với biên độ giảm dần  $\Rightarrow \xi$  gọi là hệ số tắt (hay hệ số suy giảm),  $\xi$  càng lớn dao động suy giảm càng nhanh.

- Đáp ứng của khâu dao động bậc hai có vọt lố.

Tổng quát, độ vọt lố (POT – Percent of Overshoot) được định nghĩa là

$$POT = \frac{c_{\max} - c_{xl}}{c_{xl}} \cdot 100\% \quad (5.8)$$

( $c_{\max}$  - giá trị cực đại của  $c(t)$ ;  $c_{xl}$  - giá trị xác lập của  $c(t)$ )

Đối với hệ dao động bậc hai, độ vọt lố POT được tính bởi công thức

$$POT = \exp\left(-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \cdot 100\% \quad (5.9)$$

- Thời gian xác lập  $t_s$  là thời gian để sai số giữa  $c(t)$  và giá trị xác lập nhỏ hơn  $\varepsilon$  ( $\varepsilon = 5\%$  hay  $2\%$ ).

Đối với hệ bậc hai

- Theo tiêu chuẩn 5%:  $t_{xl} = \frac{3}{\xi\omega_n} \quad (5.10)$

- Theo tiêu chuẩn 2%:  $t_{xl} = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad (5.11)$

- Thời gian lên tr: (rise time) là thời gian để  $c(t)$  tăng từ 10% đến 90% giá trị xác lập.

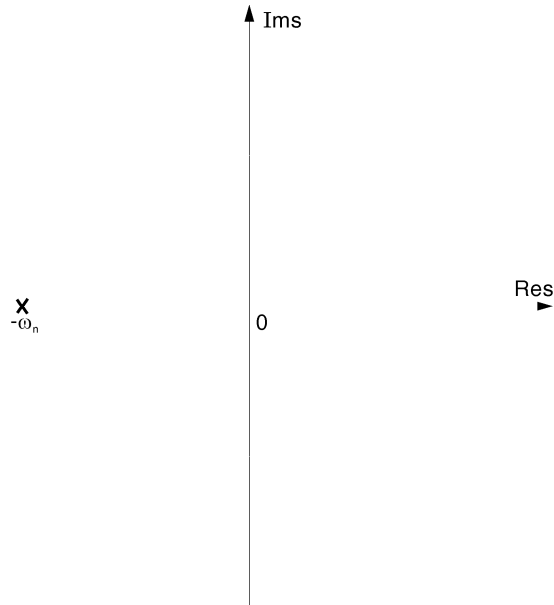
Đối với hệ bậc hai

$$t_r = \frac{1}{\omega_n} (1,589\xi^3 - 0,1562\xi^2 + 0,924\xi + 1,0141) \quad (5.12)$$

*Chú ý:* Nếu  $\xi \geq 1$  ta không gọi là hệ dao động bậc hai vì trong trường hợp này đáp ứng của hệ không có dao động.

- Nếu  $\xi = 1$  hệ thống kín có một nghiệm kép (thực).

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

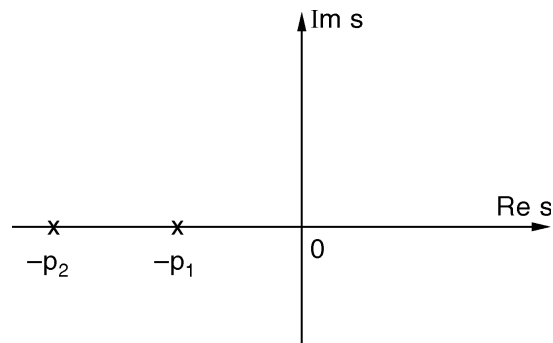


Đáp ứng của hệ thống

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2)}$$

$$\Rightarrow c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t \cdot e^{-\omega_n t}$$

- Nếu  $\xi > 1$  hệ thống kín có hai nghiệm thực phân biệt

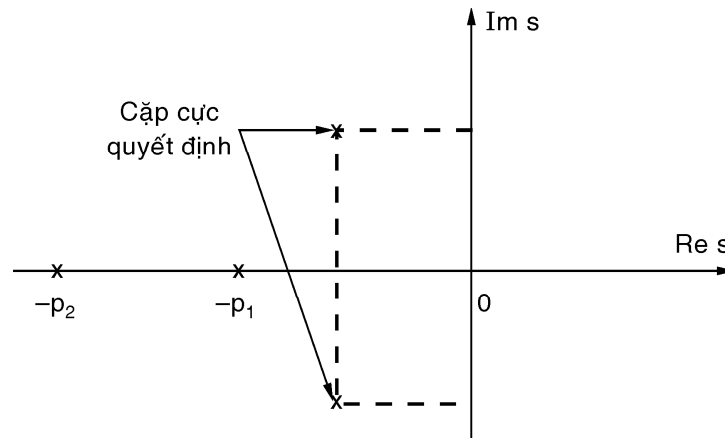


Đáp ứng của hệ thống

$$C(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + p_1} + \frac{C}{s + p_2}$$

$$\Rightarrow c(t) = A - Be^{-p_1 t} - Ce^{-p_2 t}$$

### 5.3.3 Hệ bậc cao



Hình 5.7 Cặp cực quyết định của hệ bậc cao

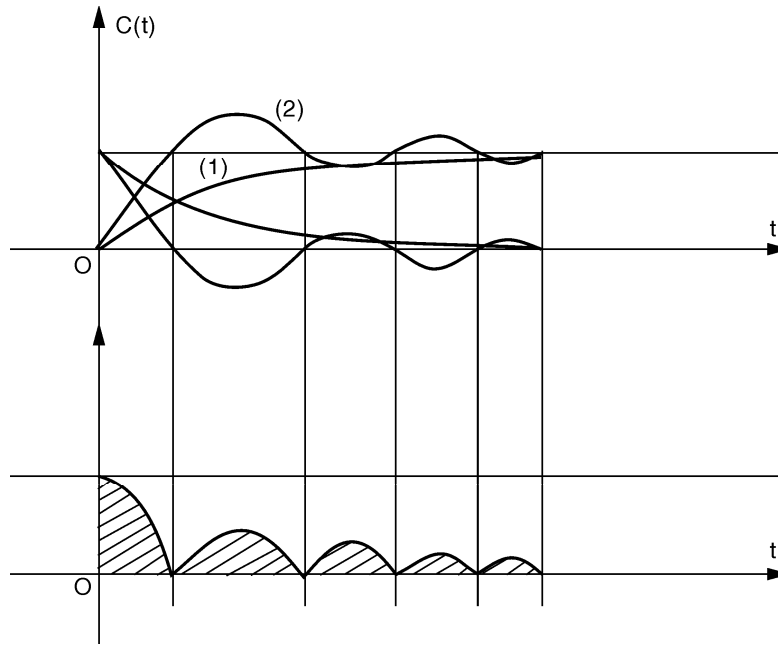
Hệ bậc cao có nhiều hơn hai cực. Đáp ứng tương ứng với các cực nằm càng xa trục ảo suy giảm càng nhanh. Do đó có thể xấp xỉ hệ bậc cao về hệ bậc hai với cặp cực là hai cực nằm gần trục ảo nhất. Cặp cực nằm gần trục ảo nhất của hệ bậc cao gọi là cặp cực quyết định.

## 5.4 CÁC TIÊU CHUẨN TỐI ƯU HÓA ĐÁP ỨNG QUÁ ĐỘ

### 1- Tiêu chuẩn tích phân sai lệch *IE* (*Integrated Error*)

$$IE = \int_0^{\infty} e(t)dt \rightarrow MIN$$

Đối với hệ có đáp ứng quá độ không dao động (đường 1 hình 5.3) thì tiêu chuẩn *IE* chính là diện tích của hàm sai lệch  $e(t)$  tạo với trục thời gian  $t$  cần đạt giá trị cực tiểu thì chất lượng đạt tốt nhất.



**Hình 5.8** Tiêu chuẩn IE và IAE

Song đối với hệ có đáp ứng quá độ dao động ổn định (đường 2) thì tiêu chuẩn IE không phản ánh đúng chất lượng của hệ thống do có miền diện tích âm đã được trừ bớt đi. Kết quả giá trị tích phân nhỏ nhưng quá trình quá độ xấu. Vì vậy phải sử dụng tiêu chuẩn tích phân trị số tuyệt đối của sai lệch.

**2- Tiêu chuẩn IAE** (*Integral of the Absolute Magnitude of the Error* - tích phân trị tuyệt đối biên độ sai số)

$$J_1 = \int_0^{+\infty} |e(t)| dt \quad (5.13)$$

Đối với hệ bậc hai:  $J_1 \rightarrow \min$  khi  $\xi = 0,707$

**3- Tiêu chuẩn ISE** (*Integral of the Square of the Error* - tích phân của bình phương sai số)

$$J_2 = \int_0^{+\infty} e^2(t) dt \quad (5.14)$$

ISE xem nhẹ những diện tích bé vì bình phương một số nhỏ hơn 1 bé hơn trị số tuyệt đối của số ấy. Một trong những lý do khiến tiêu chuẩn ISE thường được sử dụng là công việc tính toán và thực hiện đơn giản. Có thể tính ước lượng ISE theo biến đổi Fourier hoặc theo công thức (phụ lục...)

$$ISE = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |E(j\omega)|^2 d\omega$$

Đối với hệ bậc hai:  $J_2 \rightarrow \min$  khi  $\xi = 0,5$

**4- Tiêu chuẩn ITAE** (*Integral of Time multiplied by the Absolute Value of the Error*- tích phân của thời gian nhân với trị tuyệt đối của sai số)

$$J_3 = \int_0^{+\infty} t|e(t)|dt \quad (5.15)$$

Đối với hệ bậc hai:  $J_3 \rightarrow \min$  khi  $\xi = 0,707$

Trong ba tiêu chuẩn tối ưu hóa đáp ứng quá độ vừa trình bày ở trên, tiêu chuẩn ITAE được sử dụng nhiều nhất. Để đáp ứng quá độ của hệ thống bậc n là tối ưu theo chuẩn ITAE thì mẫu số hàm truyền kín hệ bậc n phải có dạng

Bậc	Mẫu số hàm truyền
1	$s + \omega_n$
2	$s^2 + 1,414\omega_n s + \omega_n^2$
3	$s^3 + 1,75\omega_n s^2 + 2,15\omega_n^2 s + \omega_n^3$
4	$s^4 + 2,1\omega_n s^3 + 3,4\omega_n^2 s^2 + 2,7\omega_n^3 s + \omega_n^4$

Nếu mẫu số hàm truyền hệ kín có dạng như trên và **tử số hàm truyền hệ kín của hệ bậc n** là  $\omega_n^n$  thì đáp ứng quá độ của hệ thống là tối ưu và **sai số xác lập bằng 0**.

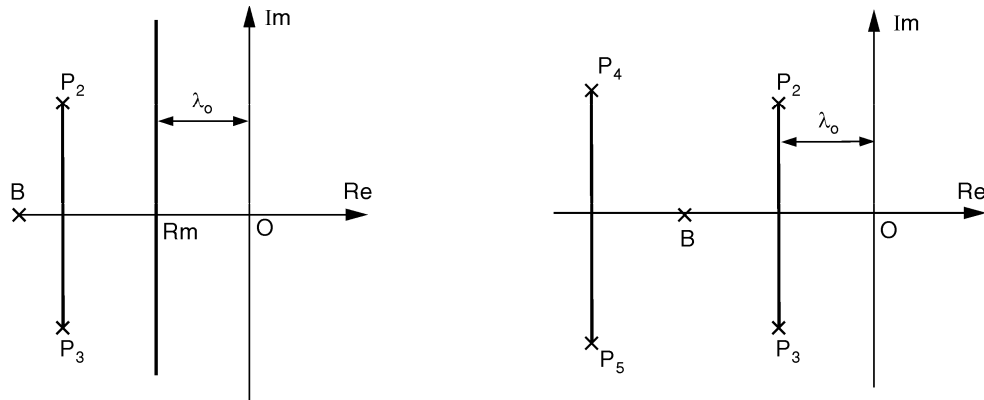
5- Tiêu chuẩn tích phân có tính đến ảnh hưởng của tốc độ thay đổi của sai lệch  $e(t)$

$$J = \int_0^{\infty} \left[ e^2(t) + \alpha \left( \frac{de}{dt} \right)^2 \right] dt$$

với  $\alpha$  là hằng số được chọn thích hợp cho từng trường hợp.

Ví dụ:  $\alpha$  lớn không cho phép dao động lớn. Ngược lại,  $\alpha$  nhỏ cho phép quá độ dao động lớn.

## 5.5 ĐÁNH GIÁ CHẤT LƯỢNG QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ THEO ĐẶC TÍNH TẦN SỐ CỦA HỆ THỐNG



Hình 5.9

1- Đánh giá theo phân bố cực zero của hàm truyền hệ thống kín hoặc theo nghiệm phương trình đặc tính và theo điều kiện ban đầu.

2- Đánh giá theo tiêu chuẩn tích phân.

3- Đánh giá quá trình quá độ theo đặc tính tần số của hệ thống.

4- Tiêu chuẩn tích của tích thời gian nhân với trị tuyệt đối của sai số ITAE (*Integral of Time Multiplied by the Absolute Value of Error*)

$$ITAE = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt$$

ITAE rút ngắn thời gian quá độ (tính tra bảng)

Tần số cắt  $L(\omega_c) = 0$

Hoặc  $|G(j\omega_c)| = 1$  với độ nghiêng tại  $\omega_c$  là  $-20\text{dB/dec}$

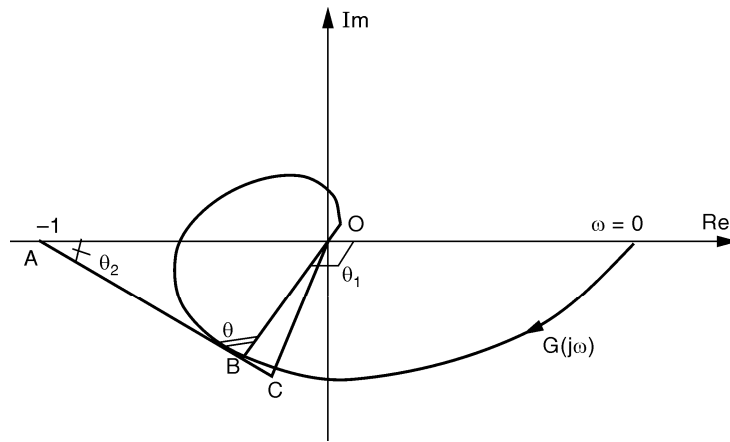
Độ dự trữ pha  $\Phi M = 30^\circ \div 60^\circ$

Thời gian quá độ:  $\frac{\pi}{\omega_c^*} < t_s < \frac{4\pi}{\omega_c^*}$

$\omega_c^*$  là tần số cắt mới thỏa độ dự trữ pha theo yêu cầu.

Xây dựng phần thực đặc tính tần số hệ kín theo đặc tính biên độ pha của hệ hở (Biểu đồ Nichols)

Xét hệ hồi tiếp - một đơn vị có đường cong Nyquist vẽ trên hình 5.10.



**Hình 5.10**

$$G_K(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = P(\omega) + jQ(\omega)$$

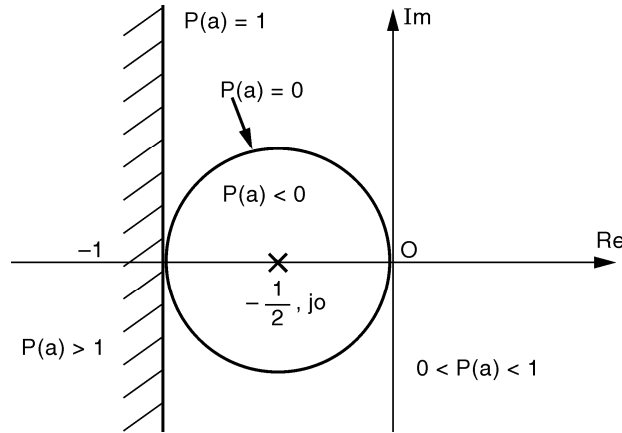
$$\text{Phần thực: } P(\omega) = \operatorname{Re} \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \left| \frac{\overline{OB}}{AB} \right| \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$P(\omega) = \left| \frac{\overline{OB}}{AB} \right| \cos \theta = \frac{CB}{AB}$$



trong đó  $CB$  là hình chiếu của vectơ  $\overline{OB}$  lên vectơ  $\overline{AB}$  trong mặt phẳng phức  $G(j\omega)$

Đường cong  $P(\omega) = 0$  là đường tròn đường kính bằng một tâm nằm trên trục thực có tâm  $(-\frac{1}{2}, j0)$  (H.5.11).



**Hình 5.11**

Phương trình đường cong  $P(\omega) = \text{const} = C$  dễ dàng nhận được bằng cách:

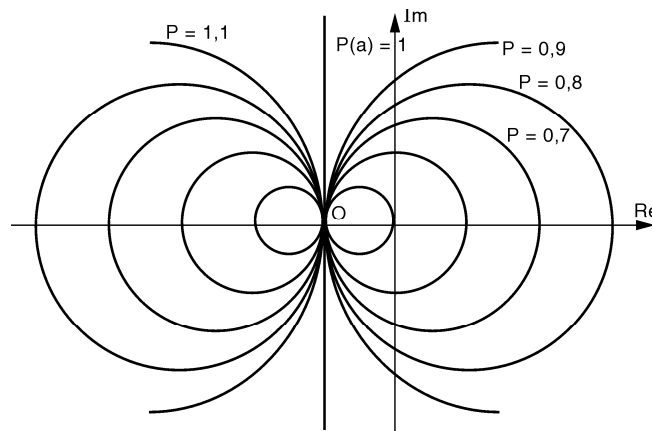
$$P(\omega) = \text{Re} \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)}$$

trong đó:  $G(j\omega) = X + jY$

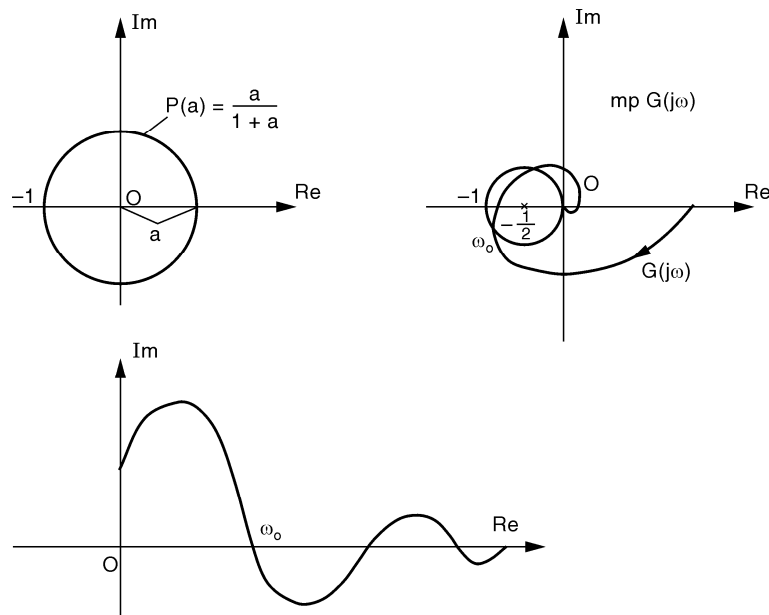
$$\text{Từ đó: } P(\omega) = \text{Re} \frac{X + jY}{1 + X + jY} = \frac{X(1 + X) + Y^2}{(1 + X)^2 + Y^2}$$

$$\text{Với } P(\omega) = C \text{ ta có phương trình: } \frac{X(1 + X) + Y^2}{(1 + X)^2 + Y^2} = C$$

Đây là phương trình của các đường tròn có tâm nằm trên trục thực và tâm điểm có tọa độ  $(-\frac{1 - 2C}{2(1 - C)}, j0)$  với bán kính bằng **Error!** (H.5.12).

**Hình 5.12**

Cách xây dựng đường tròn  $P(\omega) = \text{const}$

**Hình 5.13**

Thời gian quá độ được tính gần đúng:  $t_s = \frac{4\pi}{\omega_0}$

$\omega_0$  là tần số nhỏ nhất mà đường tròn tâm  $(-1/2, j0)$  bán kính  $1/2$  cắt đường cong Nyquist  $G(j\omega)$

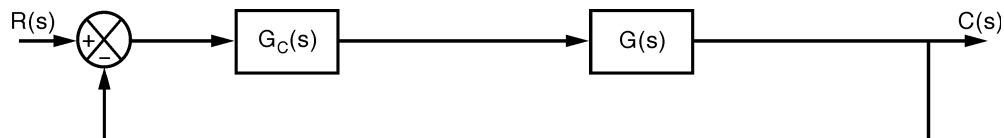
Hoặc  $\omega_0$  có thể xác định là giao điểm đầu tiên của đường cong  $P(\omega)$  với trục hoành  $\omega$ .

# THIẾT KẾ HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN LIÊN TỤC

## 6.1 KHÁI NIỆM

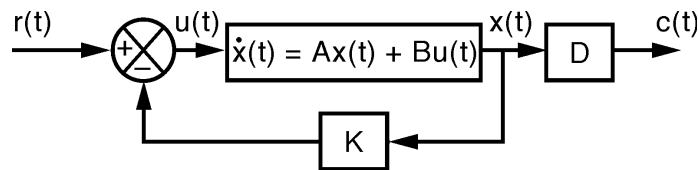
Thiết kế là toàn bộ quá trình bổ sung các thiết bị phần cứng cũng như thuật toán phần mềm vào hệ cho trước để được hệ mới thỏa mãn yêu cầu về tính ổn định, độ chính xác, đáp ứng quá độ, ... Có nhiều cách bổ sung bộ điều khiển vào hệ thống cho trước, trong khuôn khổ quyển sách này chúng ta chủ yếu xét hai cách sau:

*Cách 1:* thêm bộ điều khiển nối tiếp với hàm truyền của hệ hở, phương pháp này gọi là hiệu chỉnh nối tiếp (H.6.1). Bộ điều khiển được sử dụng có thể là bộ hiệu chỉnh sớm pha, trễ pha, sớm trễ pha, P, PD, PI, PID,... Để thiết kế hệ thống hiệu chỉnh nối tiếp chúng ta có thể sử dụng phương pháp QĐNS hay phương pháp biểu đồ Bode. Ngoài ra một phương pháp cũng thường được sử dụng là thiết kế theo đặc tính quá độ chuẩn.



**Hình 6.1** Hệ thống hiệu chỉnh nối tiếp

*Cách 2:* điều khiển hồi tiếp trạng thái, theo phương pháp này tất cả các trạng thái của hệ thống được phản hồi trở về ngõ vào và tín hiệu điều khiển có dạng  $u(t) = r(t) - Kx(t)$  (H.6.2). Tùy theo cách tính vectơ hồi tiếp trạng thái  $K$  mà ta có phương pháp điều khiển phân bố cực, điều khiển tối ưu LQR, ....



**Hình 6.2** Hệ thống điều khiển hồi tiếp trạng thái

Quá trình thiết kế hệ thống là quá trình đòi hỏi tính sáng tạo do trong khi thiết kế thường có nhiều thông số phải chọn lựa. Người thiết kế cần thiết phải hiểu được ảnh hưởng của các khâu hiệu chỉnh đến chất lượng của hệ thống và bản chất của từng phương pháp thiết kế thì mới có thể thiết kế được hệ thống có chất lượng tốt. Do đó các phương pháp thiết kế trình bày trong chương này chỉ mang tính gợi ý, đó là những cách thường được sử dụng chứ không phải là phương pháp bắt buộc phải tuân theo. Việc áp dụng một cách máy móc thường không đạt được kết quả mong muốn trong thực tế. Dù thiết kế theo phương pháp nào yêu cầu cuối cùng vẫn là thỏa mãn chất lượng mong muốn, cách thiết kế, cách chọn lựa thông số không quan trọng.

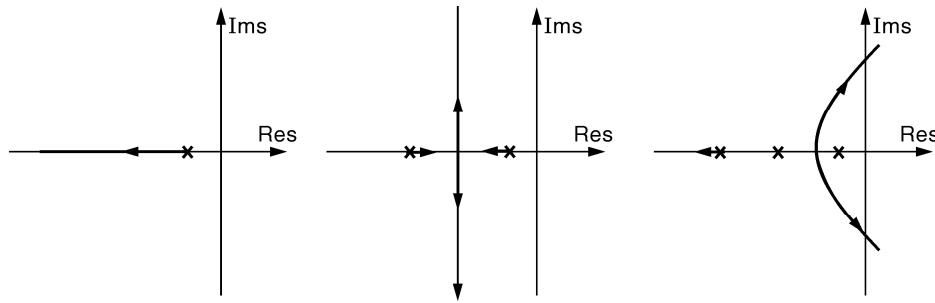
Trước khi xét đến các phương pháp thiết kế bộ điều khiển, chúng ta xét ảnh hưởng của các bộ điều khiển đến chất lượng của hệ thống. Chương này chỉ trình bày bộ điều khiển dưới dạng mô tả toán học, đối với mạch điều khiển cụ thể, xem lại chương 2.

## 6.2 ẢNH HƯỞNG CỦA CÁC BỘ ĐIỀU KHIỂN ĐẾN CHẤT LƯỢNG CỦA HỆ THỐNG

### 6.2.1 Ảnh hưởng của cực và zero

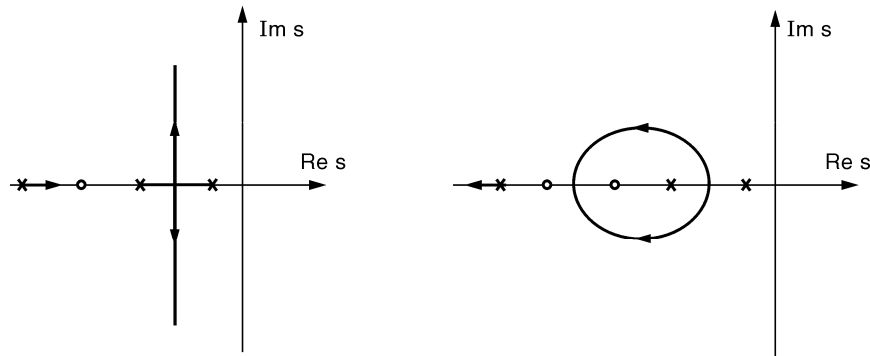
Trong mục này chúng ta khảo sát ảnh hưởng của việc thêm cực và zero vào hệ thống bằng cách dựa vào quỹ đạo nghiệm số. Ta thấy:

- Khi thêm một cực có phần thực âm vào hàm truyền hệ hở thì QĐNS của hệ kín có xu hướng tiến gần về phía trục ảo (H.6.3), hệ thống sẽ kém ổn định hơn, độ dự trữ biên và độ dự trữ pha giảm, độ vọt lố tăng.



**Hình 6.3** Sự thay đổi dạng QĐNS khi thêm cực vào hệ thống

- Khi thêm một zero có phần thực âm vào hàm truyền hệ hở thì QĐNS của hệ kín có xu hướng tiến xa trục ảo (H.6.4), do đó hệ thống sẽ ổn định hơn, độ dự trữ biên và độ dự trữ pha tăng, độ vọt lố giảm.



**Hình 6.4** Sự thay đổi dạng QĐNS khi thêm zero vào hệ thống

## 6.2.2 Ảnh hưởng của hiệu chỉnh sớm trễ pha

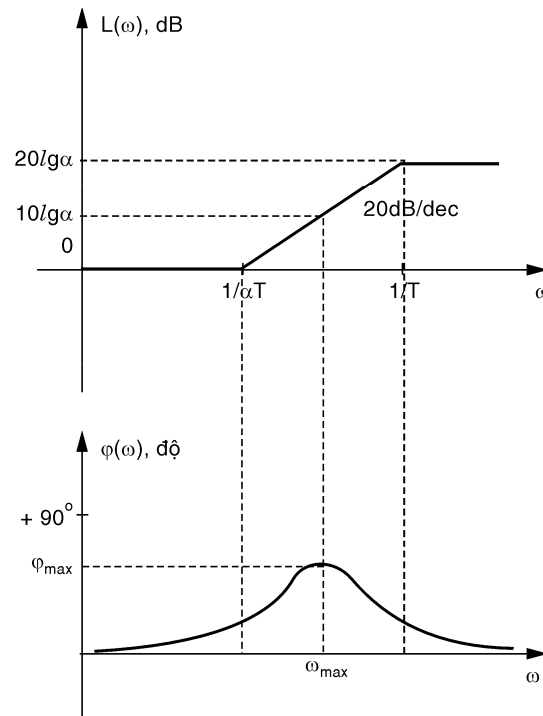
### 1- Hiệu chỉnh sớm pha

Hàm truyền: 
$$G_c(s) = \frac{1 + \alpha T s}{1 + T s} \quad (\alpha > 1) \quad (6.1)$$

Đặc tính tần số: 
$$G_c(j\omega) = \frac{1 + \alpha T j\omega}{1 + T j\omega}$$

Hình 6.5 là biểu đồ Bode của khâu hiệu chỉnh sớm pha. Dựa vào biểu đồ Bode của khâu sớm pha chúng ta thấy đặc tính pha luôn dương ( $\varphi(\omega) > 0, \forall \omega$ ), do đó tín hiệu ra luôn luôn sớm pha hơn tín hiệu vào. Khâu hiệu chỉnh sớm pha là một bộ lọc thông cao (xem biểu đồ Bode biên độ), sử dụng khâu hiệu chỉnh sớm pha

sẽ mở rộng được băng thông của hệ thống, làm cho đáp ứng của hệ thống nhanh hơn, do đó khâu hiệu chỉnh sớm pha cải thiện đáp ứng quá độ. Tuy nhiên cũng do tác dụng mở rộng băng thông mà khâu hiệu chỉnh sớm pha làm cho hệ thống nhạy với nhiễu tần số cao.



**Hình 6.5** Biểu đồ Bode của khâu hiệu chỉnh sớm pha

Các thông số cần chú ý trên đặc tính tần số của khâu hiệu chỉnh sớm pha:

- Độ lệch pha cực đại:

$$\varphi_{\max} = \sin^{-1} \left( \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right) \quad (6.2)$$

- Tần số tại đó độ lệch pha cực đại:

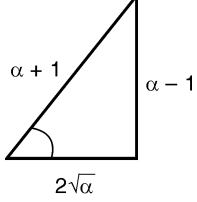
$$\omega_{\max} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \quad (6.3)$$

- Biên độ tại pha cực đại:

$$L(\omega_{\max}) = 10 \lg \alpha \quad (6.4)$$

*Chứng minh:*

$$\begin{aligned}
 \varphi(\omega) &= \arg \left( \frac{1 + j\alpha T\omega}{1 + jT\omega} \right) = \arg \left[ \frac{(1 + j\alpha T\omega)(1 - jT\omega)}{1 + T^2\omega^2} \right] \\
 &= \arg \left[ 1 + \alpha T^2\omega^2 + jT\omega(\alpha - 1) \right] = \arctan \left[ \frac{T\omega(\alpha - 1)}{1 + \alpha T^2\omega^2} \right] \\
 &\leq \arctan \left[ \frac{T\omega(\alpha - 1)}{(2\sqrt{\alpha})T\omega} \right] = \arctan \left( \frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha}} \right) = \arcsin \left( \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right)
 \end{aligned}$$



Do đó:  $\varphi_{\max} = \arcsin \left( \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right)$

Dấu đẳng thức xảy ra khi:  $1 = \alpha T^2\omega_{\max}^2 \Leftrightarrow \omega_{\max} = 1/(T\sqrt{\alpha})$

Thay  $\omega_{\max} = 1/(T\sqrt{\alpha})$  vào biểu thức biên độ của khâu sớm pha ta dễ dàng rút ra công thức (6.4).

## 2- Hiệu chỉnh trễ pha

Hàm truyền:  $G_c(s) = \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts} \quad (\alpha < 1) \quad (6.5)$

Đặc tính tần số:  $G_c(j\omega) = \frac{1 + \alpha Tj\omega}{1 + Tj\omega}$

Hình 6.6 là biểu đồ Bode của khâu hiệu chỉnh trễ pha. Dựa vào biểu đồ Bode của khâu trễ pha ta thấy đặc tính pha luôn âm ( $\varphi(\omega) < 0, \forall \omega$ ) nên tín hiệu ra luôn luôn trễ pha hơn tín hiệu vào. Khâu hiệu chỉnh trễ pha là một bộ lọc thông thấp (xem biểu đồ Bode biên độ), sử dụng khâu hiệu chỉnh trễ pha sẽ thu hẹp băng thông của hệ thống, làm cho hệ số khuếch đại của hệ thống đối với tín hiệu vào tần số cao giảm đi, do đó khâu hiệu chỉnh trễ pha không có tác dụng cải thiện đáp ứng quá độ. Tuy nhiên cũng do tác dụng làm giảm hệ số khuếch đại ở miền tần số cao mà khâu trễ pha có tác dụng lọc nhiễu tần số cao ảnh hưởng đến hệ thống. Do hệ số khuếch đại ở miền tần số thấp lớn nên khâu hiệu chỉnh trễ pha làm giảm sai số xác lập của hệ thống (xem biểu thức sai số xác lập đã trình bày ở chương 5).

Các thông số cần chú ý trên đặc tính tần số của khâu trễ pha:

- Độ lệch pha cực tiểu:

$$\varphi_{\min} = \sin^{-1} \left( \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right) \quad (6.6)$$

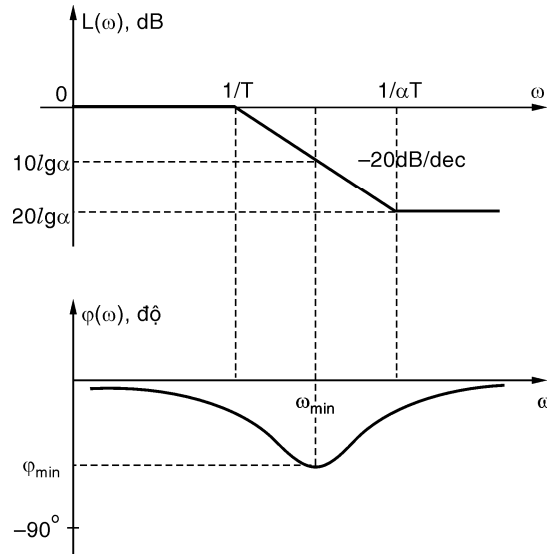
- Tần số tại đó độ lệch pha cực tiểu:

$$\omega_{\min} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \quad (6.7)$$

- Biên độ tại pha cực tiểu:

$$L(\omega_{\min}) = 10 \lg \alpha \quad (6.8)$$

*Chứng minh:* Tương tự như đã làm đối với khâu sớm pha.



**Hình 6.6** Biểu đồ Bode của khâu hiệu chỉnh trễ pha

### 3- Hiệu chỉnh sớm trễ pha

Khâu hiệu chỉnh sớm trễ pha gồm một khâu trễ pha mắc nối tiếp với một khâu sớm pha. Hàm truyền của khâu hiệu chỉnh sớm trễ có thể viết dưới dạng:

$$G_C(s) = G_{C1}(s) \cdot G_{C2}(s) = \left( \frac{1 + \alpha_1 T_1 s}{1 + T_1 s} \right) \left( \frac{1 + \alpha_2 T_2 s}{1 + T_2 s} \right) \quad (6.9)$$

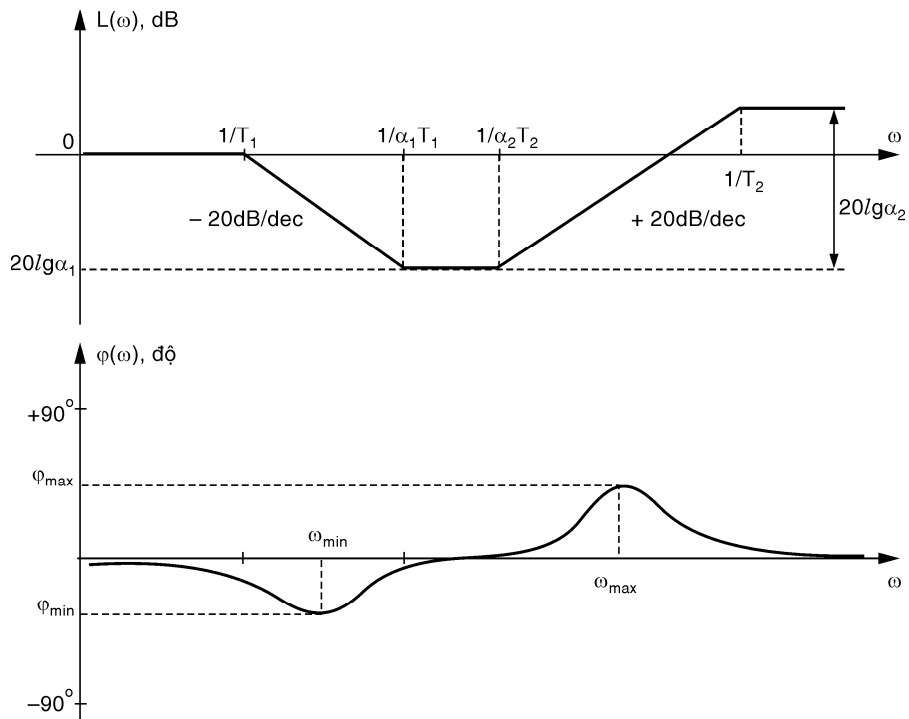
Để biểu thức (6.9) là hàm truyền của khâu sớm trễ pha thì các thông số phải thỏa điều kiện:

$$\alpha_1 < 1, \alpha_2 > 1, 1/(\alpha_1 T_1) < 1/(\alpha_2 T_2)$$



Đặc tính tần số của khâu sớm trễ pha:

$$G_c(j\omega) = \left( \frac{1 + \alpha_1 T_1 j\omega}{1 + T_1 j\omega} \right) \left( \frac{1 + \alpha_2 T_2 j\omega}{1 + T_2 j\omega} \right) \quad (6.10)$$



**Hình 6.7** Biểu đồ Bode của khâu hiệu chỉnh sớm trễ pha

Hình 6.7 là biểu đồ Bode của khâu hiệu chỉnh sớm trễ pha. Ở miền tần số cao tín hiệu ra sớm pha hơn tín hiệu vào; ở miền tần số thấp tín hiệu ra trễ pha hơn tín hiệu vào nên khâu hiệu chỉnh này được gọi là khâu hiệu chỉnh sớm trễ pha. Khâu hiệu chỉnh sớm trễ pha là một bộ lọc chắn dải (xem biểu đồ Bode biên độ), hệ số khuếch đại ở miền tần số cao lớn làm cải thiện đáp ứng quá độ; hệ số khuếch đại ở miền tần số thấp lớn làm giảm sai số xác lập, do đó khâu hiệu chỉnh sớm trễ pha kết hợp các ưu điểm của khâu hiệu chỉnh sớm pha và trễ pha.

### 6.2.3 Hiệu chỉnh PID

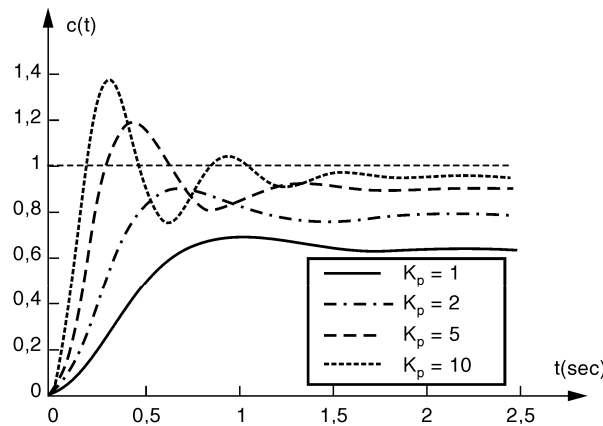
#### 1- Hiệu chỉnh tỉ lệ P (Proportional)

Hàm truyền:  $G_c(s) = K_P \quad (6.11)$

Đặc tính tần số của khâu hiệu chỉnh tỉ lệ đã được trình bày ở chương 3. Dựa vào các biểu thức sai số xác lập đã trình bày ở chương 5 ta thấy nếu hệ số khuếch đại  $K_P$  càng lớn thì sai số xác lập càng nhỏ, tuy nhiên khi  $K_P$  tăng thì các cực của hệ thống nói chung có xu hướng di chuyển ra xa trục thực, điều đó có nghĩa là đáp ứng của hệ thống càng dao động, độ vọt lố càng cao. Nếu  $K_P$  tăng quá giá trị hệ số khuếch đại giới hạn thì hệ thống sẽ trở nên mất ổn định. Do đó nếu không thể có sai số của hệ thống bằng 0 thì cũng không thể tăng hệ số khuếch đại lên vô cùng.

**Ví dụ 6.1.** *Khảo sát ảnh hưởng của bộ điều khiển tỉ lệ.*

Xét hệ thống hiệu chỉnh nối tiếp có sơ đồ khối như hình 6.1, trong đó hàm truyền của đối tượng là:  $G(s) = \frac{10}{(s+2)(s+3)}$ . Bộ điều khiển được sử dụng là bộ điều khiển tỉ lệ. Đường liền nét trong hình 6.8 là đáp ứng của hệ thống khi chưa hiệu chỉnh  $K_P = 1$ . Theo hình vẽ ta thấy khi tăng  $K_P$  thì sai số xác lập giảm, đồng thời độ vọt lố cũng tăng lên (các đường đứt nét). ■



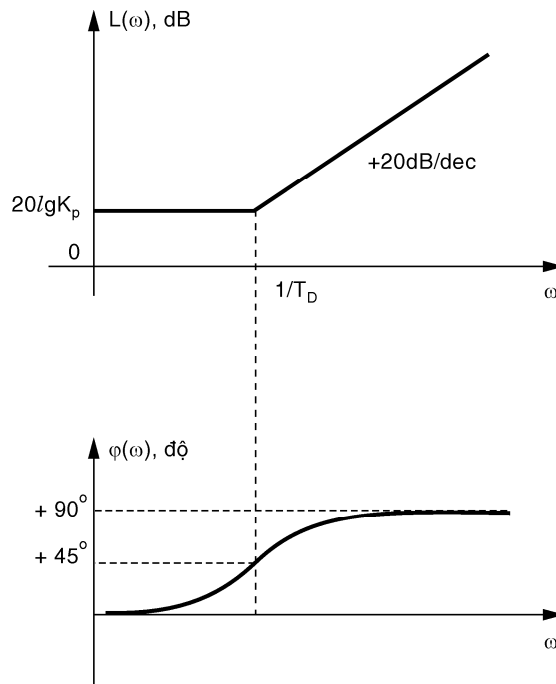
**Hình 6.8** Đáp ứng nấc của hệ thống kín khi thay đổi hệ số khuếch đại của bộ điều khiển tỉ lệ

## 2- Hiệu chỉnh vi phân tỉ lệ PD (Proportional Derivative)

Hàm truyền:  $G_C(s) = K_P + K_D s = K_P(1 + T_D s)$  (6.12)

trong đó  $K_D = K_P T_D$ ,  $T_D$  được gọi là thời hằng vi phân của bộ điều khiển PD.

Đặc tính tần số:  $G_C(j\omega) = K_P + K_D j\omega = K_P(1 + jT_D \omega)$  (6.13)



**Hình 6.9** Biểu đồ Bode của khâu hiệu chỉnh PD

Mắc nối tiếp khâu hiệu chỉnh PD với hàm truyền của đối tượng tương đương với việc thêm vào hệ thống một zero tại vị trí  $-1/T_D$ . Như đã trình bày ở mục 6.2.1, việc thêm vào hệ thống một zero làm cho QĐNS có xu hướng rời xa trục ảo và tiến gần về phía trục thực, do đó làm giảm độ vọt lố của hệ thống.

Hình 6.9 là đặc tính tần số của khâu hiệu chỉnh PD. Dựa vào biểu đồ Bode của khâu hiệu chỉnh PD ta thấy khâu hiệu chỉnh PD là một trường hợp riêng của khâu hiệu chỉnh sớm pha, trong đó độ lệch pha cực đại giữa tín hiệu ra và tín hiệu vào là  $\varphi_{\max} = 90^\circ$ , tương ứng với tần số  $\omega_{\max} = +\infty$ . Khâu hiệu chỉnh PD có đặc điểm của khâu hiệu chỉnh sớm pha, nghĩa là làm nhanh đáp ứng của hệ thống, giảm thời gian quá độ. Tuy nhiên do hệ số khuếch đại ở tần số cao của khâu hiệu chỉnh PD là vô cùng lớn nên khâu hiệu chỉnh PD làm cho hệ thống rất nhạy với nhiễu tần số cao. Do đó xét về ảnh hưởng của nhiễu tần số cao thì khâu hiệu chỉnh sớm pha có ưu thế hơn khâu hiệu chỉnh PD.

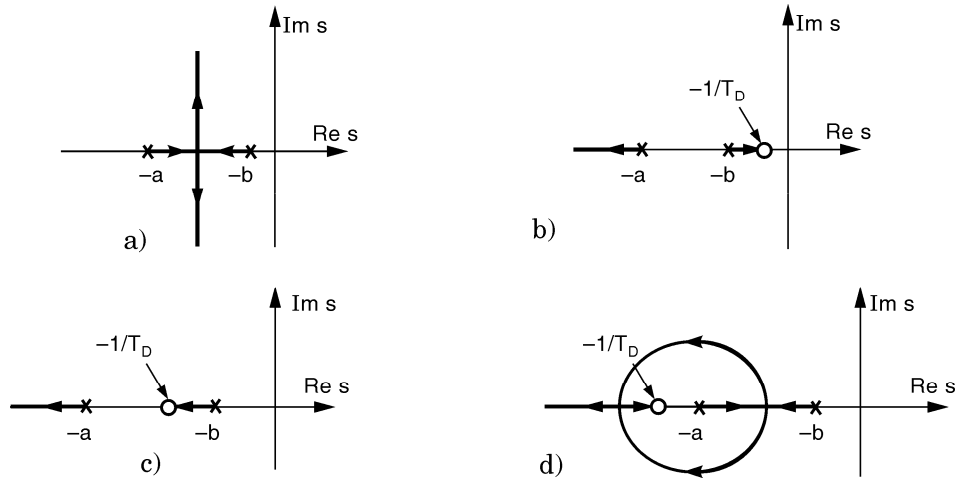
**Ví dụ 6.2.** Khảo sát ảnh hưởng của bộ điều khiển vi phân tỉ lệ.

Xét hệ thống hiệu chỉnh nối tiếp có sơ đồ khối như hình 6.1, trong đó hàm truyền của đối tượng là:  $G(s) = \frac{K}{(s+a)(s+b)}$  ( $a > b > 0$ ).

Bộ điều khiển được sử dụng là bộ điều khiển vi phân tỉ lệ. Phương trình đặc tính của hệ thống sau khi hiệu chỉnh là:

$$1 + K_P(1 + T_D s) \frac{K}{(s+a)(s+b)} = 0$$

Ảnh hưởng đặc trưng của khâu PD quyết định bởi thời hằng vi phân  $T_D$  (cũng chính là vị trí zero  $-1/T_D$  trên QĐNS hay tần số gây  $1/T_D$  trên đặc tính tần số). Tùy theo giá trị của  $T_D$  mà QĐNS của hệ thống sau khi hiệu chỉnh có thể có các dạng như hình 6.10.



**Hình 6.10** Sự thay đổi dạng QĐNS khi thêm khâu hiệu chỉnh PD vào hệ thống

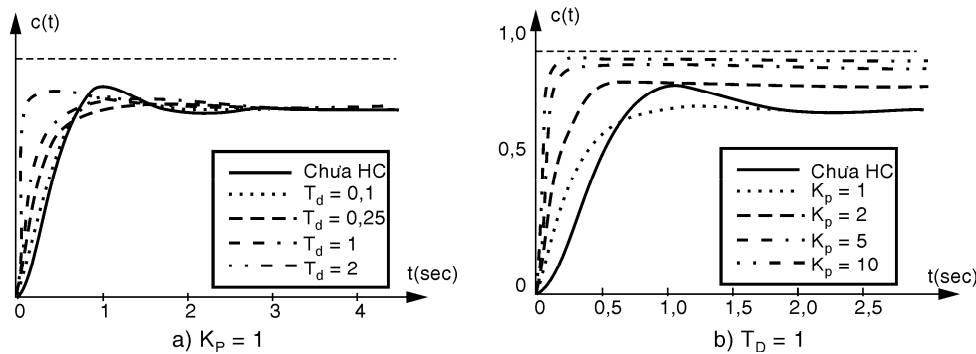
a) Chưa hiệu chỉnh; b) Đã hiệu chỉnh ( $0 < 1/T_D < b$ )

c) Đã hiệu chỉnh ( $b < 1/T_D < a$ ); d) Đã hiệu chỉnh ( $1/T_D > a$ )

Ta thấy nếu  $0 < 1/T_D < a$  thì QĐNS của hệ thống sau khi hiệu chỉnh nằm hoàn toàn trên trục thực (hình 6.10b và 6.10c), do đó đáp ứng của hệ thống hoàn toàn không có dao động. Nếu  $1/T_D > a$  thì tùy giá trị của  $K_P$  mà hệ thống có thể có nghiệm phức, tuy nhiên nghiệm phức này gần trục thực hơn so với trục ảo (nghĩa là  $\xi > 0,707$ ), do đó độ vọt lố của hệ thống thấp hơn so với chưa hiệu chỉnh.

Hình 6.11a trình bày đáp ứng quá độ của hệ thống khi thay đổi giá trị  $T_D$  và giữ hệ số  $K_P$  bằng hằng số. Ta thấy  $T_D$  càng lớn thì đáp ứng càng nhanh, thời gian lên càng ngắn. Tuy nhiên nếu thời gian lên nhanh quá thì sẽ dẫn đến vọt lố mặc dù đáp ứng không có dao động.

Khi đã xác định được  $T_D$  thì ảnh hưởng của  $K_P$  tương tự như ảnh hưởng của khâu khuếch đại, nghĩa là nếu  $K_P$  càng tăng (nhưng phải nhỏ hơn  $K_{gh}$ ) thì sai số xác lập càng giảm (H.6.11b), tuy nhiên sai số xác lập lúc nào cũng khác 0. Mặt khác trong trường hợp hệ thống đang khảo sát, khi  $K_P$  càng tăng thì QĐNS càng rời xa trục ảo nên thời gian đáp ứng cũng nhanh lên. Tuy nhiên ảnh hưởng này không phải là ảnh hưởng đặc trưng của khâu PD.



**Hình 6.11** Ảnh hưởng của khâu hiệu chỉnh PD đến đáp ứng quá độ của hệ thống

### 3- Hiệu chỉnh tích phân tỉ lệ PI (Proportional Integral)

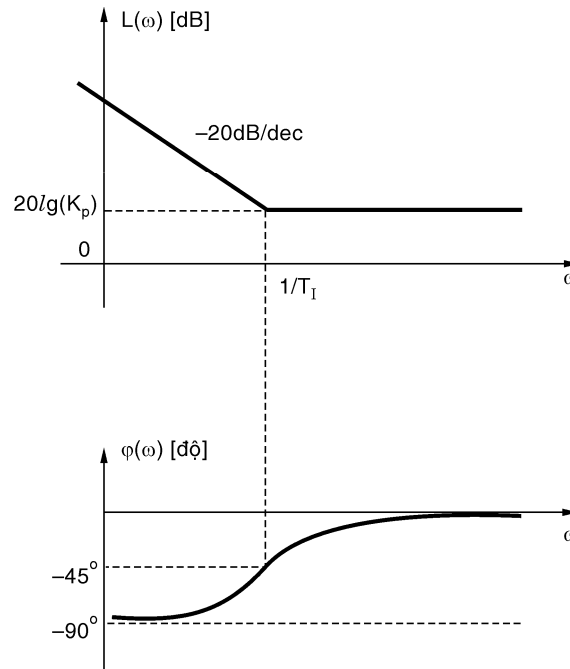
$$\text{Hàm truyền: } G_C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right) \quad (6.14)$$

trong đó  $K_I = K_P / T_I$ ,  $T_I$  được gọi là thời hằng tích phân của bộ điều khiển PI.

$$\text{Đặc tính tần số: } G_C(j\omega) = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I j\omega} \right) \quad (6.15)$$

Mắc nối tiếp khâu hiệu chỉnh PI với hàm truyền của đối tượng tương đương với việc thêm vào hệ thống một zero tại vị trí  $-1/T_I$  và một cực tại góc tọa độ, điều này làm cho QĐNS của hệ

thống sau khi hiệu chỉnh bị đẩy về phía phải mặt phẳng phức, nên hệ thống kém ổn định hơn.



**Hình 6.12** Biểu đồ Bode của khâu hiệu chỉnh PI

Hình 6.12 là biểu đồ Bode của khâu hiệu chỉnh PI. Dựa vào biểu đồ Bode của khâu hiệu chỉnh PI ta thấy khâu hiệu chỉnh PI là một trường hợp riêng của khâu hiệu chỉnh trễ pha, trong đó độ lệch pha cực tiểu giữa tín hiệu ra và tín hiệu vào là  $\varphi_{\min} = -90^\circ$ , tương ứng với tần số  $\omega_{\min} = 0$ . Khâu hiệu chỉnh PI có đặc điểm của khâu hiệu chỉnh trễ pha, nghĩa là làm chậm đáp ứng quá độ, tăng độ vọt lố, giảm sai số xác lập. Do hệ số khuếch đại của khâu PI bằng vô cùng tại tần số bằng 0 nên khâu hiệu chỉnh PI làm cho sai số đối với tín hiệu vào là hàm nấc của hệ thống không có khâu vi phân lý tưởng bằng 0 (hệ vô sai bậc một). Ngoài ra do khâu PI là một bộ lọc thông thấp nên nó còn có tác dụng triệt tiêu nhiễu tần số cao tác động vào hệ thống.

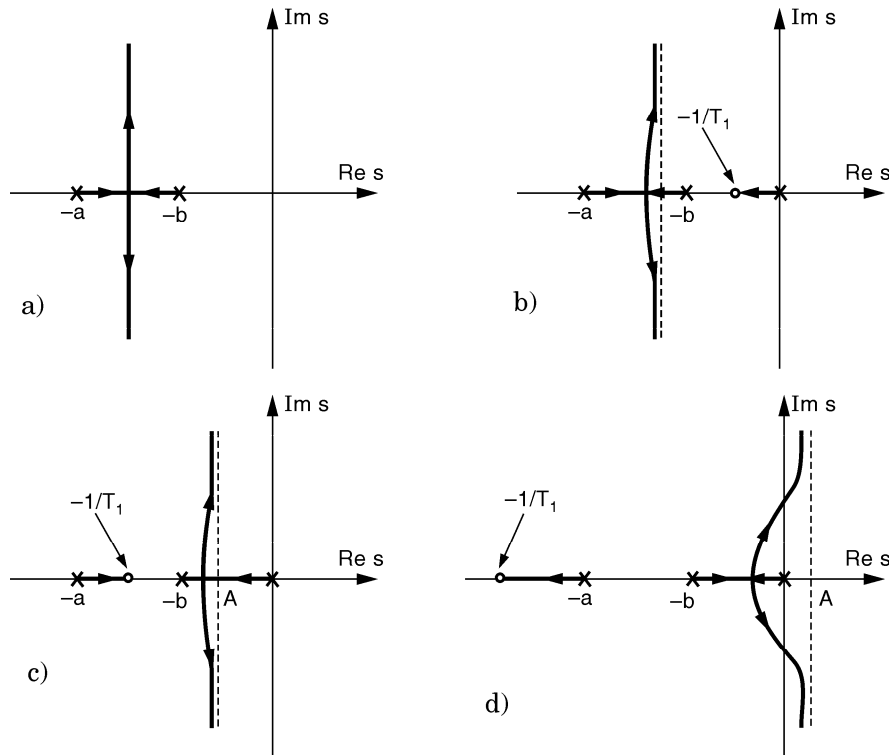
**Ví dụ 6.3.** Khảo sát ảnh hưởng của bộ điều khiển tích phân tỉ lệ.

Xét hệ thống hiệu chỉnh nối tiếp có sơ đồ khối như hình 6.1, trong đó hàm truyền của đối tượng là:  $G(s) = \frac{K}{(s+a)(s+b)}$  ( $a > b > 0$ ).

Bộ điều khiển được sử dụng là bộ điều khiển tích phân tỉ lệ. Phương trình đặc tính của hệ thống sau khi hiệu chỉnh là:

$$1 + K_P \left( \frac{T_I s + 1}{T_I s} \right) \frac{K}{(s+a)(s+b)} = 0$$

Ảnh hưởng đặc trưng của khâu *PI* quyết định bởi thời hằng tích phân  $T_I$  (cũng chính là vị trí zero  $-1/T_I$  trên QĐNS hay tần số gây  $1/T_I$  trên đặc tính tần số). Tùy theo giá trị của  $T_I$  mà QĐNS của hệ thống sau khi hiệu chỉnh có thể có các dạng như hình 6.13.



**Hình 6.13** Sự thay đổi dạng QĐNS

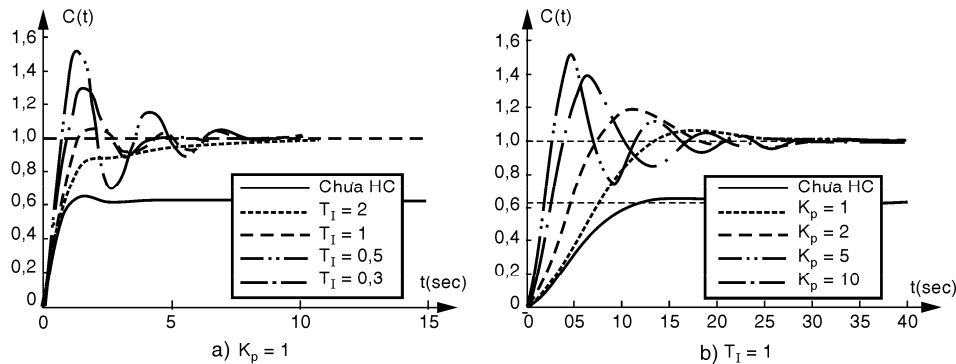
khi thêm khâu hiệu chỉnh *PI* vào hệ thống

a) Chưa hiệu chỉnh; b) Đã hiệu chỉnh ( $0 < 1/T_I < b$ )

c) Đã hiệu chỉnh ( $b < 1/T_I < a$ ); d) Đã hiệu chỉnh ( $1/T_I > a$ )

Theo công thức sai số (5.4), ta thấy khâu hiệu chỉnh PI làm cho sai số xác lập của hệ thống đối với tín hiệu vào là hàm bậc bằng 0. Tuy nhiên khâu hiệu chỉnh PI làm cho hệ thống kém ổn định. Ta có thể kiểm chứng được điều này bằng cách phân tích sự thay đổi dạng QĐNS của hệ thống sau khi hiệu chỉnh. Theo công thức (4.14), giao điểm của tiệm cận với trục thực là:  $OA = (-a - b + 1/T_I)$ . Do đó khi  $1/T_I$  càng tăng thì QĐNS của hệ thống càng di chuyển về phía phải mặt phẳng phức (H.6.13b,c), hệ thống càng kém ổn định. Khi  $1/T_I$  đủ lớn thỏa điều kiện  $1/T_I > a + b$  thì QĐNS có đoạn nằm bên phải mặt phẳng phức (H.6.13d), hệ thống không ổn định nếu hệ số khuếch đại của hệ thống lớn hơn giá trị  $K_{gh}$ .

Hình 6.14 minh họa đáp ứng quá độ của hệ thống khi thay đổi thông số của bộ điều khiển PI. Ở hình 6.14a ta thấy khi càng giảm thời hằng tích phân  $T_I$  thì độ vọt lố của hệ thống càng cao, hệ thống càng chậm xác lập. Từ đây ta rút ra kết luận khi thiết kế khâu hiệu chỉnh PI nên chọn zero  $-1/T_I$  nằm gần gốc tọa độ để thời hằng tích phân  $T_I$  có giá trị lớn nhằm hạn chế độ vọt lố. Khi giữ  $T_I$  bằng hằng số thì ảnh hưởng của  $K_P$  đến chất lượng của hệ thống chính là ảnh hưởng của khâu khuếch đại,  $K_P$  càng tăng thì độ vọt lố càng tăng, tuy nhiên thời gian quá độ gần như không đổi (H.6.14b). Nếu  $K_P$  vượt quá giá trị hệ số khuếch đại giới hạn thì hệ thống trở nên mất ổn định.



**Hình 6.14** Ảnh hưởng của khâu hiệu chỉnh PI đến đáp ứng bậc đơn vị của hệ thống



#### 4- Hiệu chỉnh vi tích phân tỉ lệ PID

(Proportional Integral Derivative)

$$\text{Hàm truyền: } G_C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \quad (6.16)$$

Có thể xem khâu hiệu chỉnh PID gồm một khâu PI mắc nối tiếp với một khâu PD.

$$G_C(s) = K_{P1} \left( 1 + \frac{1}{T_{I1}s} \right) (1 + T_{D2}s) \quad (6.17)$$

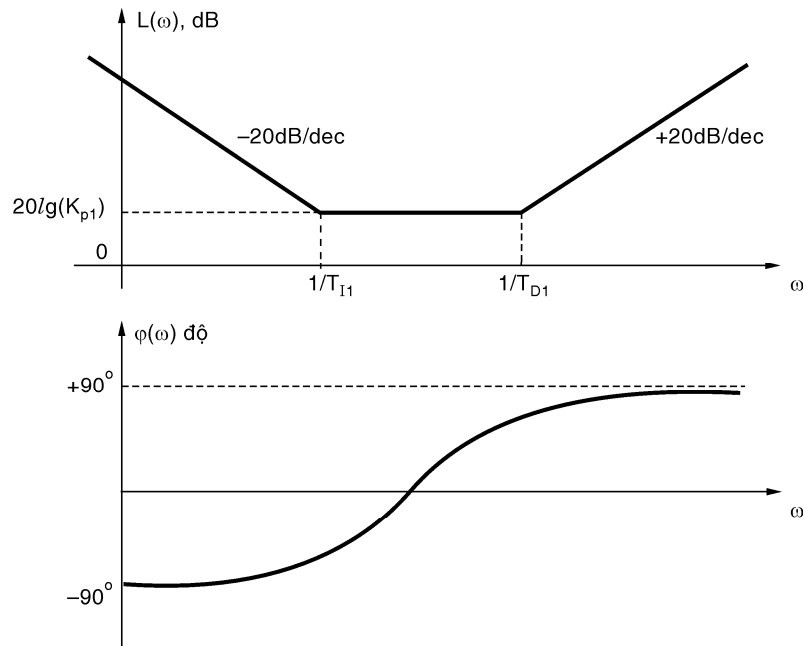
trong đó  $T_{I1} > T_{D2}$ . Dễ dàng suy ra được mối quan hệ giữa các hệ số trong hai cách biểu diễn (6.16) và (6.17) như sau:

$$K_P = K_{P1} \left( 1 + \frac{T_{D2}}{T_{I1}} \right) \quad (6.18)$$

$$K_I = \frac{K_{P1}}{T_{I1}} \quad (6.19)$$

$$K_D = K_{P1} \cdot T_{D2} \quad (6.20)$$

$$\text{Đặc tính tần số: } G_C(j\omega) = K_{P1} \left( 1 + \frac{1}{T_{I1}j\omega} \right) (1 + T_{D2}j\omega) \quad (6.21)$$



**Hình 6.15** Biểu đồ Bode của khâu hiệu chỉnh PID

Khâu hiệu chỉnh PID là một trường hợp riêng của hiệu chỉnh sớm trễ pha, trong đó độ lệch pha cực tiểu giữa tín hiệu ra và tín hiệu vào là  $\varphi_{\min} = -90^\circ$ , tương ứng với tần số  $\omega_{\min} = 0$ ; độ lệch pha cực đại giữa tín hiệu ra và tín hiệu vào là  $\varphi_{\max} = +90^\circ$ , tương ứng với tần số  $\omega_{\max} = \infty$ .

Do khâu hiệu chỉnh PID có thể xem là khâu PI mắc nối tiếp với khâu PD nên nó có các ưu điểm của khâu PI và PD. Nghĩa là khâu hiệu chỉnh PID cải thiện đáp ứng quá độ (giảm vọt lố, giảm thời gian quá độ) và giảm sai số xác lập (nếu đối tượng không có khâu vi phân lý tưởng thì sai số xác lập đối với tín hiệu vào là hàm bậc bằng 0).

Chúng ta vừa khảo sát xong ảnh hưởng của các khâu hiệu chỉnh nối tiếp thường dùng đến chất lượng của hệ thống, mỗi khâu hiệu chỉnh có những ưu điểm cũng như khuyết điểm riêng. Do vậy cần phải hiểu rõ đặc điểm của từng khâu hiệu chỉnh chúng ta mới có thể sử dụng linh hoạt và hiệu quả được. Tùy theo đặc điểm của từng đối tượng điều khiển cụ thể và yêu cầu chất lượng mong muốn mà chúng ta phải sử dụng khâu hiệu chỉnh thích hợp. Khi đã xác định được khâu hiệu chỉnh cần dùng thì vấn đề còn lại là xác định thông số của nó. Các mục tiếp sẽ đề cập đến vấn đề này.

## 6.3 THIẾT KẾ HỆ THỐNG DÙNG QĐNS

Nguyên tắc thiết kế hệ thống dùng phương pháp QĐNS là dựa vào phương trình đặc tính của hệ thống sau khi hiệu chỉnh:

$$1 + G_C(s)G(s) = 0 \quad (6.22)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |G_C(s)G(s)| = 1 & \text{điều kiện biên độ} \\ \angle G_C(s)G(s) = -180^\circ & \text{điều kiện pha} \end{cases} \quad (6.23)$$

Ta cần chọn thông số của bộ điều khiển  $G_C(s)$  sao cho phương trình (6.22) có nghiệm tại vị trí mong muốn.

### 6.3.1 Hiệu chỉnh sớm pha

Để thuận lợi cho việc vẽ QĐNS chúng ta biểu diễn hàm truyền khâu hiệu chỉnh sớm pha dưới dạng sau (so sánh với biểu

thức (6.1):

$$G_C(s) = K_C \frac{s + (1/\alpha T)}{s + (1/T)} \quad (\alpha > 1) \quad (6.24)$$

Bài toán đặt ra là chọn giá trị  $K_C$ ,  $\alpha$  và  $T$  để đáp ứng của hệ thống thỏa mãn yêu cầu về chất lượng quá độ (độ vọt lố, thời gian xác lập, ...)

Ta đã biết chất lượng quá độ của hệ thống hoàn toàn xác định bởi vị trí của cặp cực quyết định. Do đó nguyên tắc thiết kế khâu hiệu chỉnh sớm pha dùng phương pháp QĐNS là chọn cực và zero của khâu hiệu chỉnh sao cho QĐNS của hệ thống sau khi hiệu chỉnh phải **đi qua** cặp cực quyết định mong muốn. Sau đó bằng cách chọn hệ số khuếch đại  $K_C$  thích hợp ta sẽ chọn được cực của hệ thống chính là cặp cực mong muốn. Nguyên tắc trên được cụ thể hóa thành trình tự thiết kế sau:

### **Trình tự thiết kế**

*Khâu hiệu chỉnh: Sớm pha*

*Phương pháp thiết kế: QĐNS*

**Bước 1:** *Xác định cặp cực quyết định* từ yêu cầu thiết kế về chất lượng của hệ thống trong quá trình quá độ:

$$\begin{cases} \text{Độ vọt lố } POT \\ \text{Thời gian quá độ, ...} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi \\ \omega_n \end{cases} \Rightarrow s_{1,2}^* = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

**Bước 2:** *Xác định góc pha cần bù* để cặp cực quyết định  $s_{1,2}^*$  nằm trên QĐNS của hệ thống sau khi hiệu chỉnh bằng công thức:

$$\Phi^* = -180^\circ + \sum_{i=1}^n \arg(s_1^* - p_i) - \sum_{i=1}^m \arg(s_1^* - z_i) \quad (6.25)$$

trong đó  $p_i$  và  $z_i$  là các cực của hệ thống  $G(s)$  trước khi hiệu chỉnh.

Dạng hình học của công thức trên là:

$$\begin{aligned} \Phi^* = -180^\circ + \sum \text{góc từ các cực của } G(s) \text{ đến cực } s_1^* \\ - \sum \text{góc từ các zero của } G(s) \text{ đến cực } s_1^* \end{aligned} \quad (6.26)$$

**Bước 3:** *Xác định vị trí cực và zero của khâu hiệu chỉnh*

Vẽ hai nửa đường thẳng *bất kỳ* xuất phát từ cực quyết định  $s^*$  sao cho hai nửa đường thẳng này tạo với nhau một góc bằng  $\Phi^*$ . Giao điểm của hai nửa đường thẳng này với trục thực là vị trí cực và zero của khâu hiệu chỉnh.

Có hai cách vẽ thường dùng:

- PP đường phân giác (để cực và zero của khâu hiệu chỉnh gần nhau).
- PP triệt tiêu nghiệm (để hạ bậc của hệ thống).

**Bước 4:** *Tính hệ số khuếch đại  $K_C$  bằng cách áp dụng công thức:*

$$\left| G_C(s)G(s) \right|_{s=s_1^*} = 1$$

### **Giải thích**

*Bước 1:* Do chất lượng quá độ phụ thuộc vào vị trí cặp cực quyết định nên để thiết kế hệ thống thỏa mãn chất lượng quá độ mong muốn ta phải xác định cặp cực quyết định tương ứng. Gọi cặp cực quyết định mong muốn là  $s_{1,2}^*$ .

*Bước 2:* Để hệ thống có chất lượng quá độ như mong muốn thì cặp cực quyết định  $s_{1,2}^*$  phải là nghiệm của phương trình đặc tính sau khi hiệu chỉnh (6.22). Xét điều kiện về pha:

$$\begin{aligned} \angle G_C(s)G(s) \Big|_{s=s^*} &= -180^\circ \\ \Leftrightarrow \angle G_C(s) \Big|_{s=s^*} + \angle G(s) \Big|_{s=s^*} &= -180^\circ \\ \Leftrightarrow \angle G_C(s) \Big|_{s=s^*} + \left( \sum_{i=1}^m \arg(s^* - z_i) - \sum_{i=1}^n \arg(s^* - p_i) \right) &= -180^\circ \quad (6.27) \end{aligned}$$

trong đó  $z_i$  và  $p_i$  là các zero và các cực của hệ thống hở trước khi hiệu chỉnh. Đặt góc pha cần bù  $\Phi^* = \angle G_C(s) \Big|_{s=s^*}$ , từ biểu thức (6.27) ta suy ra:

$$\Phi^* = -180^\circ + \sum_{i=1}^n \arg(s^* - p_i) - \sum_{i=1}^m \arg(s^* - z_i)$$

Do số phức có thể biểu diễn dưới dạng vectơ nên công thức

trên tương đương với công thức hình học sau:

$$\Phi^* = -180^\circ + \sum \text{góc từ các cực của } G(s) \text{ đến cực } s^* \\ - \sum \text{góc từ các zero của } G(s) \text{ đến cực } s^*$$

Bước 3: Bây giờ ta phải chọn cực và zero của khâu hiệu chỉnh sao cho:  $\Phi^* = \angle G_C(s) \Big|_{s=s^*}$

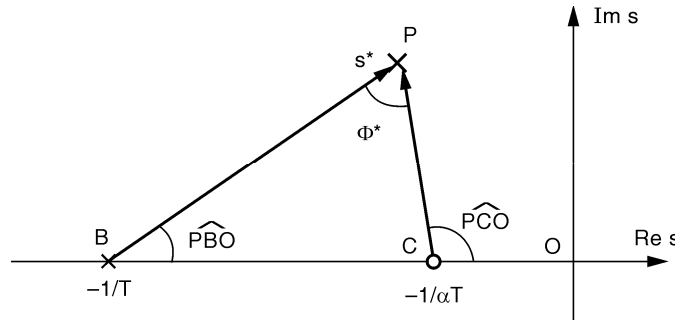
$$\Leftrightarrow \Phi^* = \arg(s^* + 1/\alpha T) - \arg(s^* + 1/T) \quad (6.28)$$

Do  $\Phi^*$  và  $s^*$  đã biết nên phương trình (6.28) có hai ẩn số cần tìm là  $1/\alpha T$  và  $1/T$ . Chọn trước giá trị  $1/\alpha T$  bất kỳ thay vào phương trình (6.28) ta sẽ tính được  $1/T$  và ngược lại, nghĩa là bài toán thiết kế có vô số nghiệm.

Thay vì chọn nghiệm bằng phương pháp giải tích (giải phương trình (6.28)) như vừa trình bày chúng ta có thể chọn bằng phương pháp hình học. Theo hình 6.16 hai số phức  $(s^* + 1/T)$  và  $(s^* + 1/\alpha T)$  được biểu diễn bởi hai vectơ  $\overline{BP}$  và  $\overline{CP}$ , do đó  $\arg(s^* + 1/T) = \widehat{PBO}$  và  $\arg(s^* + 1/\alpha T) = \widehat{PCO}$ . Thay các góc hình học vào phương trình (6.28) ta được:

$$\Phi^* = \arg(s^* + 1/\alpha T) - \arg(s^* + 1/T) = \widehat{PCO} - \widehat{PBO} = \widehat{BPC}$$

Từ phân tích trên ta thấy cực và zero của khâu hiệu chỉnh sớm pha phải nằm tại điểm B và C sao cho  $\widehat{BPC} = \Phi^*$ . Đây chính là cơ sở toán học của cách chọn cực và zero như đã trình bày trong trình tự thiết kế.



**Hình 6.16** Quan hệ hình học giữa vị trí cực và zero của khâu hiệu chỉnh sớm pha với góc pha cần bù

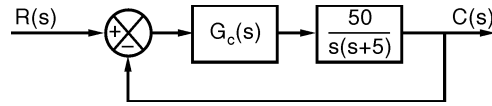
Bước 4: Muốn  $s^*$  là nghiệm của phương trình đặc tính (6.22) thì ngoài điều kiện về pha ta phải chọn  $K_C$  sao cho  $s^*$  thỏa điều

kiện biên độ. Do đó ta phải chọn  $K_C$  bằng công thức:

$$\left| G_C(s)G(s) \right|_{s=s_1^*} = 1 \quad \blacksquare$$

**Ví dụ 6.4.** Thiết kế khâu hiệu chỉnh sớm pha dùng phương pháp QĐNS.

Cho hệ thống điều khiển như hình vẽ. Hãy thiết kế khâu hiệu chỉnh  $G_C(s)$  để đáp ứng quá độ của hệ thống sau



khi hiệu chỉnh thỏa:  $POT < 20\%$ ;  $t_{qd} < 0,5$  sec (tiêu chuẩn 2%).

**Giải:** Vì yêu cầu thiết kế cải thiện đáp ứng quá độ nên sử dụng khâu hiệu chỉnh sớm pha:

$$G_C(s) = K_C \frac{s + (1/\alpha T)}{s + (1/T)} \quad (\alpha > 1)$$

**Bước 1:** Xác định cặp cực quyết định

Theo yêu cầu thiết kế, ta có:

$$\square POT = \exp\left(-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) < 0,2 \Rightarrow -\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} < \ln 0,2 = -1,6$$

$$\Rightarrow 1,95\xi > \sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow 4,8\xi^2 > 1 \Rightarrow \xi > 0,45$$

Chọn  $\xi = 0,707$

$$\square t_{qd} = \frac{4}{\xi\omega_n} < 0,5 \Rightarrow \omega_n > \frac{4}{0,5 \times \xi} \Rightarrow \omega_n > 11,4$$

Chọn  $\omega_n = 15$

Vậy cặp cực quyết định là:

$$s_{1,2}^* = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -0,707 \times 15 \pm j15\sqrt{1-0,707^2}$$

$$\Rightarrow s_{1,2}^* = -10,5 \pm j10,5$$

**Bước 2:** Xác định góc pha cần bù

**Cách 1.** Dùng công thức đại số

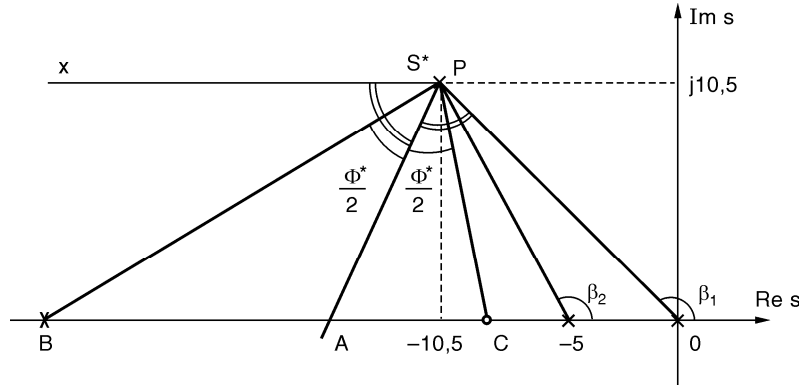
$$\Phi^* = -180^\circ + \{\arg[(-10,5 + j10,5) - 0] + \arg[(-10,5 + j10,5) - (-5)]\}$$

$$= -180^\circ + \left\{ \arctan\left(\frac{10,5}{-10,5}\right) + \arctan\left(\frac{10,5}{-5,5}\right) \right\}$$

$$= -180^\circ + (135 + 117,6)$$

$$\Rightarrow \Phi^* = 72,6^\circ$$

Cách 2. Dùng công thức hình học



$$\begin{aligned}\Phi^* &= -180^\circ + (\beta_1 + \beta_2) \\ &= -180^\circ + (135^\circ + 117,6^\circ) = 72,6^\circ\end{aligned}$$

**Bước 3:** Xác định cực và zero của khâu hiệu chỉnh bằng phương pháp đường phân giác.

- Vẽ  $PA$  là phân giác của góc  $OPx$ .

- Vẽ  $PB$  và  $PC$  sao cho  $\widehat{APB} = \frac{\Phi^*}{2}$ ,  $\widehat{APC} = \frac{\Phi^*}{2}$

Điểm B chính là vị trí cực và C là vị trí zero của khâu hiệu chỉnh:

$$\frac{1}{T} = OB \quad \frac{1}{\alpha T} = OC$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác ta suy ra:

$$\square OB = OP \frac{\sin\left(\frac{\widehat{OPx}}{2} + \frac{\Phi^*}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\widehat{OPx}}{2} - \frac{\Phi^*}{2}\right)} = 15 \frac{\sin\left(\frac{135^\circ}{2} + \frac{72,6^\circ}{2}\right)}{\sin\left(\frac{135^\circ}{2} - \frac{72,6^\circ}{2}\right)} = 28,12$$

$$\square OC = OP \frac{\sin\left(\frac{\widehat{OPx}}{2} - \frac{\Phi^*}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\widehat{OPx}}{2} + \frac{\Phi^*}{2}\right)} = 15 \frac{\sin\left(\frac{135^\circ}{2} - \frac{72,6^\circ}{2}\right)}{\sin\left(\frac{135^\circ}{2} + \frac{72,6^\circ}{2}\right)} = 8,0$$

$$\Rightarrow G_C(s) = K_C \frac{s+8}{s+28}$$



**Bước 4: Tính  $K_C$ .**

$$\begin{aligned}
 & |G_C(s)G(s)|_{s=s^*} = 1 \\
 \Rightarrow & \left| K_C \frac{s+8}{s+28} \cdot \frac{50}{s(s+5)} \right|_{s=-10,5+j10,5} = 1 \\
 \Rightarrow & \left| K_C \frac{-10,5+j10,5+8}{-10,5+j10,5+28} \cdot \frac{50}{(-10,5+j10,5)(-10,5+j10,5+5)} \right| = 1 \\
 \Rightarrow & K_C \frac{10,79 \times 50}{20,41 \times 15 \times 11,85} = 1 \\
 \Rightarrow & K_C = 6,7
 \end{aligned}$$

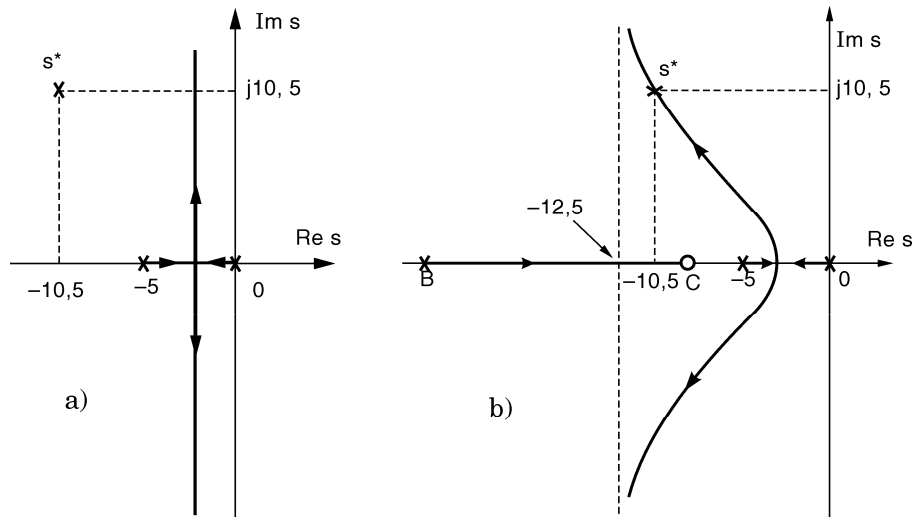
Vậy hàm truyền của khâu hiệu chỉnh sớm pha cần thiết kế là:

$$G_C(s) = 6,7 \frac{s+8}{s+28}$$

■

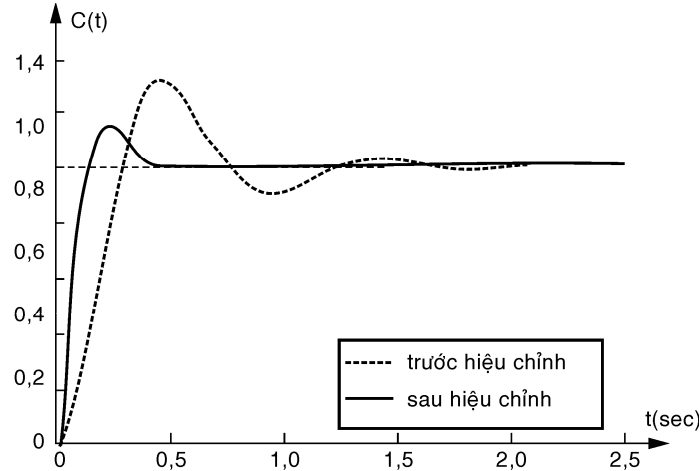
### Nhận xét

Quỹ đạo nghiệm số của hệ thống trước khi hiệu chỉnh không qua điểm  $s^*$  (H.6.17a) do đó hệ thống sẽ không bao giờ đạt được chất lượng đáp ứng quá độ như yêu cầu dù có thay đổi hệ số khuếch đại của hệ thống.



**Hình 6.17** Sự thay đổi dạng QĐNS khi hiệu chỉnh sớm pha  
 a) QĐNS trước khi hiệu chỉnh; b) QĐNS sau khi hiệu chỉnh

Bằng cách sử dụng khâu hiệu chỉnh sớm pha, quỹ đạo nghiệm số của hệ thống bị sửa dạng và qua điểm  $s^*$  (H.6.17b). Bằng cách chọn hệ số khuếch đại thích hợp (như đã thực hiện ở bước 4) hệ thống sẽ có cặp cực quyết định như mong muốn, do đó đáp ứng quá độ đạt yêu cầu thiết kế (H.6.18).



**Hình 6.18** Đáp ứng nấc của hệ thống ở ví dụ 6.4 trước và sau khi hiệu chỉnh

### 6.3.2 Hiệu chỉnh trễ pha

Hàm truyền khâu hiệu chỉnh trễ pha cần thiết kế có dạng:

$$G_C(s) = K_C \frac{s + (1/\beta T)}{s + (1/T)} \quad (\beta < 1)$$

Bài toán đặt ra là chọn giá trị  $K_C$ ,  $\beta$  và  $T$  để đáp ứng của hệ thống thỏa mãn yêu cầu về sai số xác lập mà “không” làm ảnh hưởng đến đáp ứng quá độ (ảnh hưởng không đáng kể).

Ta đã biết do khâu hiệu chỉnh trễ pha có hệ số khuếch đại ở miền tần số thấp lớn nên có tác dụng làm giảm sai số xác lập của hệ thống. Để đáp ứng quá độ của hệ thống sau khi hiệu chỉnh trễ pha gần như không đổi thì cặp cực quyết định của hệ thống trước và sau khi hiệu chỉnh phải nằm rất gần nhau. Để đạt được điều này ta phải đặt thêm cực và zero của khâu hiệu chỉnh trễ pha sao cho dạng QĐNS thay đổi không đáng kể. Đây là nguyên tắc cần tuân theo khi thiết kế khâu hiệu chỉnh trễ pha. Trình tự thiết kế dưới đây cụ thể hóa nguyên tắc trên:

**Trình tự thiết kế****Khâu hiệu chỉnh: Trễ pha****Phương pháp thiết kế: QDNS****Bước 1:** Xác định  $\beta$  từ yêu cầu về sai số xác lập.

Nếu yêu cầu về sai số xác lập cho dưới dạng hệ số vận tốc  $K_V^*$  thì tính  $\beta$  bằng công thức:  $\beta = \frac{K_V}{K_V^*}$

trong đó  $K_V$  và  $K_V^*$  là hệ số vận tốc của hệ thống trước và sau khi hiệu chỉnh.

**Bước 2:** Chọn zero của khâu hiệu chỉnh sao cho:

$$\frac{1}{\beta T} \ll |\operatorname{Re}(s_{1,2}^*)|$$

trong đó  $s_{1,2}^*$  là cặp cực quyết định của hệ thống sau khi hiệu chỉnh.

**Bước 3:** Tính cực của khâu hiệu chỉnh:  $\frac{1}{T} = \beta \cdot \frac{1}{\beta T}$ **Bước 4:** Tính  $K_C$  bằng cách áp dụng công thức:

$$|G_C(s)G(s)|_{s=s_{1,2}^*} = 1$$

trong đó  $s_{1,2}^*$  là cặp cực quyết định của hệ thống sau khi hiệu chỉnh. Do yêu cầu thiết kế không làm ảnh hưởng đáng kể đến đáp ứng quá độ nên có thể tính gần đúng:  $s_{1,2}^* \approx s_{1,2}$

**Giải thích**

**Bước 1:** Ta có hệ số vận tốc của hệ thống trước và sau khi hiệu chỉnh là:

$$\begin{aligned}
 K_V &= \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \\
 K_V^* &= \lim_{s \rightarrow 0} sG_C(s)G(s) = \left( \lim_{s \rightarrow 0} G_C(s) \right) \left( \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \right) \\
 &= \left( \lim_{s \rightarrow 0} K_C \frac{s + 1/\beta T}{s + 1/T} \right) \left( \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \right) = \frac{K_C \cdot K_V}{\beta} \\
 \Rightarrow \quad \beta &= \frac{K_C K_V}{K_V^*}
 \end{aligned}$$

$$\text{Nếu } K_C \approx 1 \text{ thì } \beta = \frac{K_V}{K_V^*}$$

Do đó ta chọn  $\beta$  bằng công thức trên. Các bước thiết kế tiếp theo đảm bảo  $K_C \approx 1$ .

*Bước 2:* Gọi  $s_{1,2}$  là cặp cực quyết định của hệ thống trước khi hiệu chỉnh:

$$1 + G(s) \Big|_{s=s_{1,2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |G(s)|_{s=s_{1,2}} = 1 \\ \angle G(s) \Big|_{s=s_{1,2}} = -180^\circ \end{cases}$$

Gọi  $s_{1,2}^*$  là cặp cực quyết định của hệ thống sau khi hiệu chỉnh:

$$1 + G_C(s)G(s) \Big|_{s=s_{1,2}^*} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |G_C(s)G(s)|_{s=s_{1,2}^*} = 1 \\ \angle G_C(s)G(s) \Big|_{s=s_{1,2}^*} = -180^\circ \end{cases}$$

Xét điều kiện về pha. Để hệ thống có chất lượng quá độ gần như không thay đổi thì  $s_{1,2}^* \approx s_{1,2}$ . Suy ra:

$$\begin{aligned} \angle G_C(s)G(s) \Big|_{s=s_{1,2}^*} &= -180^\circ \\ \Rightarrow \angle G_C(s) \Big|_{s=s_{1,2}^*} + \angle G(s) \Big|_{s=s_{1,2}^*} &= -180^\circ \\ \Rightarrow \angle G_C(s) \Big|_{s=s_{1,2}^*} &= -180^\circ - \angle G(s) \Big|_{s=s_{1,2}^*} \\ &\approx -180^\circ - \angle G(s) \Big|_{s=s_{1,2}} = -180^\circ - (-180^\circ) \\ \Rightarrow \angle G_C(s) \Big|_{s=s_{1,2}^*} &\approx 0^\circ \end{aligned} \quad (6.29)$$

Phân tích ở trên cho thấy cực và zero của khâu hiệu chỉnh trễ pha phải thỏa mãn biểu thức (6.29). Khi thiết kế ta thường chọn khâu hiệu chỉnh trễ pha sao cho  $-5^\circ < \angle G_C(s) \Big|_{s=s_{1,2}^*} < 0^\circ$ , để đạt được điều này có thể đặt cực và zero của khâu hiệu chỉnh trễ pha nằm rất gần góc tọa độ so với phần thực của nghiệm  $s_{1,2}^*$ . Do

đó ta chọn vị trí zero sao cho:  $\frac{1}{\beta T} \ll |\operatorname{Re}(s_{1,2}^*)|$

*Bước 3:* Suy ra:  $\frac{1}{T} = \beta \frac{1}{\beta T}$

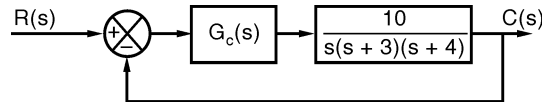
Để ý rằng bằng cách chọn như trên  $1/T$  cũng nằm rất gần gốc tọa độ do  $\beta < 1$ .

*Bước 4:* Ở bước 2 và 3 ta mới chọn cực và zero của khâu hiệu chỉnh trễ pha để thỏa mãn điều kiện về pha. Để thỏa mãn điều kiện biên độ ta chọn  $K_C$  bằng công thức:  $|G_C(s)G(s)|_{s=s_{1,2}^*} = 1$

Có thể dễ dàng kiểm chứng được rằng do cách chọn zero và cực của khâu hiệu chỉnh như ở bước 2 và bước 3 mà ở bước 4 ta luôn tính được  $K_C \approx 1$ . Như vậy  $K_C$  thỏa mãn giả thiết ban đầu khi tính hệ số  $\beta$  ở bước 1. ■

**Ví dụ 6.5.** Thiết kế khâu hiệu chỉnh trễ pha dùng phương pháp QĐNS.

Hãy thiết kế khâu hiệu chỉnh  $G_C(s)$  sao cho hệ thống có sơ đồ khối dưới đây sau khi hiệu chỉnh có sai số đối với tín hiệu vào là hàm dốc là 0,02 và đáp ứng quá độ thay đổi không đáng kể.



**Giải.** Hệ số vận tốc của hệ thống trước khi hiệu chỉnh:

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{10}{s(s+3)(s+4)} = 0,83$$

Sai số xác lập của hệ thống khi tín hiệu vào là hàm dốc là:

$$e_{xl} = \frac{1}{K_V} = \frac{1}{0,83} = 1,2$$

Vì yêu cầu thiết kế làm giảm sai số xác lập nên sử dụng khâu hiệu chỉnh trễ pha:  $G_C(s) = K_C \frac{s + (1/\beta T)}{s + (1/T)}$  ( $\beta < 1$ )

**Bước 1: Tính  $\beta$** 

Hệ số vận tốc của hệ sau khi hiệu chỉnh:

$$K_V^* = \frac{1}{e_{xl}^*} = \frac{1}{0,02} = 50$$

$$\text{Do đó: } \beta = \frac{K_V}{K_V^*} = \frac{0,83}{50} = 0,017$$

**Bước 2: Chọn zero của khâu hiệu chỉnh**

Các cực của hệ thống trước khi hiệu chỉnh là nghiệm của phương trình:

$$1 + G(s) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{10}{s(s+3)(s+4)} = 0 \Leftrightarrow s^3 + 7s^2 + 12s + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s_{1,2} = -1 \pm j \\ s_3 = -5 \end{cases}$$

Vậy cặp cực quyết định trước khi hiệu chỉnh là  $s_{1,2} = -1 \pm j$

$$\text{Chọn } \frac{1}{\beta T} \text{ sao cho: } \frac{1}{\beta T} \ll |\operatorname{Re}\{s_1\}| = 1 \Rightarrow \frac{1}{\beta T} = 0,1$$

**Bước 3: Tính cực của khâu hiệu chỉnh**

$$\frac{1}{T} = \beta \frac{1}{\beta T} = (0,017)(0,1) \Rightarrow \frac{1}{T} = 0,0017$$

$$\Rightarrow G_C(s) = K_C \frac{s + 0,1}{s + 0,0017}$$

**Bước 4: Tính  $K_C$ :**

$$\left| G_C(s)G(s) \right|_{s=s^*} = 1$$

$$\Rightarrow \left| K_C \frac{s + 0,1}{s + 0,0017} \cdot \frac{10}{s(s+3)(s+4)} \right|_{s=s^*} = 1$$

Để đáp ứng quá độ không thay đổi đáng kể thì:

$$s_{1,2}^* = s_{1,2} = -1 \pm j$$

Thế vào công thức trên ta được:

$$\left| K_C \frac{(-1 + j + 0,1)}{(-1 + j + 0,0017)} \cdot \frac{10}{(-1 + j)(-1 + j + 3)(-1 + j + 4)} \right| = 1$$

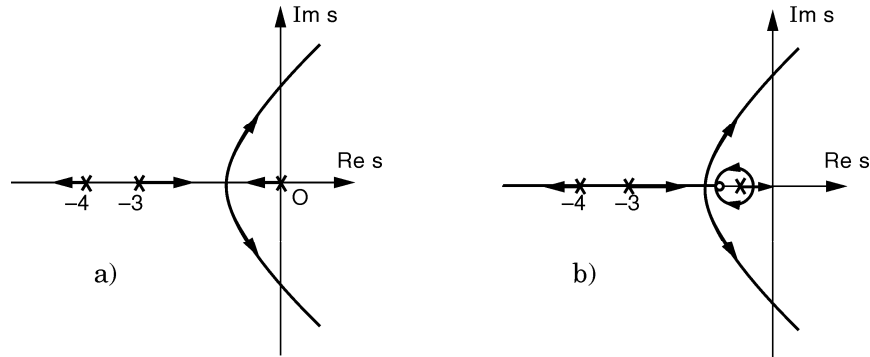
$$\Rightarrow K_C = 1,0042 \approx 1$$

Vậy khâu hiệu chỉnh trễ pha cần thiết kế là:

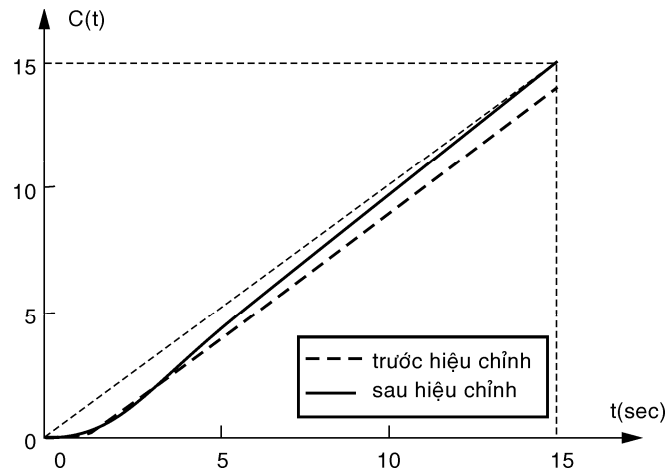
$$G_C(s) = \frac{s + 0,1}{s + 0,0017}$$

■

Hình 6.19 cho thấy QĐNS của hệ thống trước và sau khi hiệu chỉnh trễ pha gần như trùng nhau. Do vị trí cặp cực phức quyết định gần trùng nhau nên đáp ứng quá độ của hệ thống trước và sau khi hiệu chỉnh gần như nhau (H.6.20). Hình 6.20 cũng cho thấy sai số xác lập của hệ thống sau khi hiệu chỉnh nhỏ hơn rất nhiều so với trước khi hiệu chỉnh. Như vậy khâu hiệu chỉnh trễ pha vừa thiết kế ở trên thỏa mãn yêu cầu đặt ra.



**Hình 6.19** QĐNS của hệ thống ở ví dụ 6.5  
a) Trước khi hiệu chỉnh; b) Sau khi hiệu chỉnh



**Hình 6.20** Đáp ứng của hệ thống ở ví dụ 6.5 đối với tín hiệu vào là hàm dốc trước và sau khi hiệu chỉnh

### 6.3.3 Hiệu chỉnh sớm trễ pha

Hàm truyền khâu hiệu chỉnh sớm trễ pha cần thiết kế có dạng:  $G_C(s) = G_{C1}(s)G_{C2}(s)$

trong đó:  $G_{C1}(s)$  là khâu hiệu chỉnh sớm pha

$G_{C2}(s)$  là khâu hiệu chỉnh trễ pha.

Bài toán đặt ra thiết kế  $G_C(s)$  để cải thiện đáp ứng quá độ và sai số xác lập của hệ thống.

#### *Trình tự thiết kế*

*Khâu hiệu chỉnh: Sớm trễ pha*

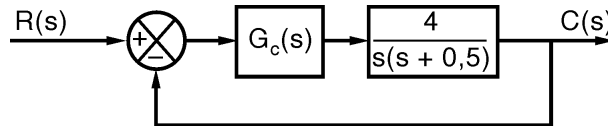
*Phương pháp thiết kế: QĐNS*

**Bước 1:** Thiết kế khâu sớm pha  $G_{C1}(s)$  để thỏa mãn yêu cầu về đáp ứng quá độ (xem phương pháp thiết kế khâu hiệu chỉnh sớm pha ở mục 6.3.1).

**Bước 2:** Đặt  $G_1(s) = G_{C1}(s).G(s)$ .

Thiết kế khâu hiệu chỉnh trễ pha  $G_{C2}(s)$  mắc nối tiếp vào  $G_1(s)$  để thỏa mãn yêu cầu về sai số xác lập mà không thay đổi đáng kể đáp ứng quá độ của hệ thống sau khi đã hiệu chỉnh sớm pha (xem phương pháp thiết kế khâu hiệu chỉnh trễ pha ở mục 6.3.2).

**Ví dụ 6.6.** Thiết kế khâu hiệu chỉnh sớm trễ pha dùng phương pháp QĐNS.



Hãy thiết kế khâu hiệu chỉnh  $G_C(s)$  sao cho hệ thống sau khi hiệu chỉnh có cặp cực phức với  $\xi = 0,5$ ,  $\omega_n = 5$  (rad/sec); hệ số vận tốc  $K_V = 80$ .

**Giải:** Hệ chưa hiệu chỉnh có  $\xi = 0,125$ ,  $\omega_n = 2$  (rad/sec);  $K_V = 8$ . Vì yêu cầu thiết kế bộ hiệu chỉnh để cải thiện đáp ứng quá độ và sai số xác lập nên  $G_C(s)$  là khâu hiệu chỉnh sớm trễ pha.

$$G_C(s) = G_{C1}(s)G_{C2}(s)$$



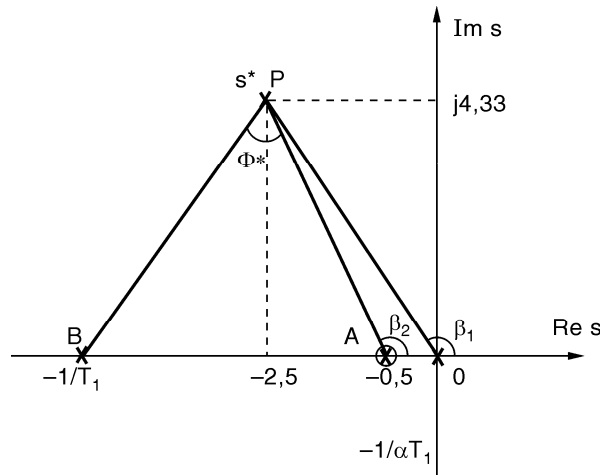
**Bước 1:** Thiết kế khâu hiệu chỉnh sớm pha  $G_{C1}(s)$

$$G_{C1}(s) = K_{C1} \frac{s + \frac{1}{\alpha T_1}}{s + \frac{1}{T_1}}$$

- Cặp cực quyết định sau khi hiệu chỉnh:

$$\begin{aligned} s_{1,2}^* &= -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \\ &= -(0,5)(5) \pm j(5)\sqrt{1-(0,5)^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow s_{1,2}^* = -2,5 \pm j4,33$$



**Hình 6.21** Góc pha cần bù

- Góc pha cần bù:

$$\begin{aligned} \Phi^* &= -180^\circ + (\beta_1 + \beta_2) \\ &= -180^\circ + (120^\circ + 115^\circ) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Phi^* = 55^\circ$$

- Chọn zero của khâu sớm pha trùng với cực  $s = -0,5$  của  $G(s)$  để hạ bậc hệ thống sau khi hiệu chỉnh.

$$\frac{1}{\alpha T_1} = 0,5$$

Từ cực  $s_1^*$  vẽ hai nửa đường thẳng tạo với nhau một góc là  $\Phi^*$  như hình 6.21. Cực của khâu sớm pha tại điểm B.

$$\frac{1}{T_1} = OB$$

Ta có:  $OB = OA + AB$

$$OA = 0,5$$

$$AB = PA \frac{\sin \hat{APB}}{\sin PAB}$$

Dễ thấy:  $PA = \sqrt{2^2 + 4,33^2} = 4,76$

$$APB = \Phi^* = 55^\circ$$

$$PAB = \beta_2 - \Phi^* = 115^\circ - 55^\circ = 60^\circ$$

Nên:  $AB = 4,76 \frac{\sin 55^\circ}{\sin 60^\circ} = 4,5$

$$\Rightarrow \frac{1}{T_1} = OB = 0,5 + 4,5 = 5$$

Do đó:  $G_{C1}(s) = K_{C1} \frac{s + 0,5}{s + 5}$

- Tính  $K_{C1}$ :  $|G_{C1}(s)G(s)|_{s=s^*} = 1$

$$\Rightarrow \left| K_{C1} \frac{s + 0,5}{s + 5} \cdot \frac{4}{s(s + 0,5)} \right|_{s=-2,5+j4,33} = 1$$

$$\Rightarrow \left| K_{C1} \frac{1}{(-2,5 + j4,33 + 5)} \cdot \frac{4}{(-2,5 + j4,33)} \right| = 1$$

$$\Rightarrow K_{C1} = 6,25$$

Vậy  $G_{C1}(s) = 6,25 \frac{s + 0,5}{s + 5}$

Hàm truyền hở sau khi hiệu chỉnh sớm pha là:

$$G_1(s) = G_{C1}(s)G(s) = \left( 6,25 \frac{s + 0,5}{s + 5} \right) \left( \frac{4}{s(s + 0,5)} \right)$$

$$\Rightarrow G_1(s) = \frac{25}{s(s + 5)}$$

**Bước 2:** Thiết kế khâu hiệu chỉnh trễ pha  $G_{C2}(s)$

$$G_{C2}(s) = K_{C2} \frac{s + \frac{1}{\beta T_2}}{s + \frac{1}{T_2}}$$

- Xác định  $\beta$ :

Hệ số vận tốc của hệ sau khi hiệu chỉnh sớm pha:

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} s G_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{25}{s(s+5)} = 5$$

Hệ số vận tốc mong muốn:  $K_V^* = 80$

$$\text{Suy ra: } \beta = \frac{K_V}{K_V^*} = \frac{5}{80} = \frac{1}{16}$$

- Xác định zero của khâu trễ pha:

$$\frac{1}{\beta T_2} < |\operatorname{Re}(s^*)| = |\operatorname{Re}(-2,5 + j4,33)| = 2,5$$

$$\text{Chọn } \frac{1}{\beta T_2} = 0,16$$

- Xác định cực của khâu trễ pha:

$$\frac{1}{T_2} = \beta \cdot \frac{1}{\beta T_2} = \frac{1}{16} \cdot (0,16) = 0,01$$

$$\Rightarrow G_{C2}(s) = K_{C2} \frac{s + 0,16}{s + 0,01}$$

- Tính  $K_{C2}$ :  $|G_{C2}(s)G_1(s)|_{s=s^*} = 1$

$$\Rightarrow (|G_{C2}(s)|_{s=s^*}) (|G_1(s)|_{s=s^*}) = 1$$

$$\Rightarrow |G_{C2}(s)|_{s=s^*} = 1$$

$$\Rightarrow \left| K_{C2} \frac{-2,5 + j4,33 + 0,16}{-2,5 + j4,33 + 0,01} \right| = 1$$

$$\Rightarrow K_{C2} = \frac{4,995}{4,992} = 1,01$$

$$\Rightarrow G_{C2}(s) = 1,01 \frac{s + 0,16}{s + 0,01}$$

Tóm lại khâu hiệu chỉnh sớm trễ pha cần thiết kế là:

$$G_C(s) = G_{C1}(s)G_{C2}(s) = \left(6,25 \frac{s+0,5}{s+5}\right) \left(1,01 \frac{s+0,16}{s+0,01}\right)$$

$$\Rightarrow G_C(s) = 6,31 \frac{(s+0,5)(s+0,16)}{(s+5)(s+0,01)} \quad \blacksquare$$

## 6.4 THIẾT KẾ HỆ THỐNG DÙNG BIỂU ĐỒ BODE

### 6.4.1 Hiệu chỉnh sớm pha

Hàm truyền khâu hiệu chỉnh sớm pha cần thiết kế có dạng:

$$G_C(s) = K_C \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts} \quad (\alpha > 1)$$

Chúng ta cần chọn giá trị  $K_C$ ,  $\alpha$  và  $T$  để đáp ứng của hệ thống thỏa mãn yêu cầu về độ dự trữ biên, độ dự trữ pha và sai số xác lập.

Nguyên tắc thiết kế khâu hiệu chỉnh sớm pha dùng biểu đồ Bode là chọn hệ số khuếch đại  $K_C$  để hệ thống thỏa mãn yêu cầu về sai số xác lập, sau đó chọn vị trí cực và zero của khâu sớm pha để thêm pha dương vào hệ thống xung quanh tần số cắt, nhờ đó tăng độ dự trữ pha, băng thông của hệ thống sau khi hiệu chỉnh sớm pha được mở rộng. Tuy nhiên nếu góc pha cần bù quá lớn (hơn  $70^\circ$ ) thì không thể dùng khâu hiệu chỉnh sớm pha. Các bước thiết kế dưới đây cụ thể hóa nguyên tắc trên.

#### ***Trình tự thiết kế***

*Khâu hiệu chỉnh: Sớm pha*

*Phương pháp thiết kế: Biểu đồ Bode*

**Bước 1:** Xác định  $K_C$  để thỏa mãn yêu cầu thiết kế về sai số xác lập

**Bước 2:** Đặt  $G_1(s) = K_C G(s)$ . Vẽ biểu đồ Bode của  $G_1(s)$

**Bước 3:** Xác định tần số cắt biên của  $G_1(s)$  từ điều kiện:

$$L_1(\omega_C) = 0 \quad \text{hoặc} \quad |G_1(j\omega_C)| = 1$$

**Bước 4:** Xác định độ dự trữ pha của  $G_1(s)$  (độ dự trữ pha của hệ trước khi hiệu chỉnh):

$$\Phi M = 180 + \varphi_1(\omega_C)$$

**Bước 5:** Xác định góc pha cần bù

$$\varphi_{\max} = \Phi M^* - \Phi M + \theta$$

trong đó  $\Phi M^*$  là độ dự trữ pha mong muốn,  $\theta = 5^\circ \div 20^\circ$

**Bước 6:** Tính  $\alpha$  bằng cách áp dụng công thức:

$$\alpha = \frac{1 + \sin \varphi_{\max}}{1 - \sin \varphi_{\max}}$$

**Bước 7:** Xác định tần số cắt mới  $\omega'_C$  (tần số cắt của hệ sau khi hiệu chỉnh) từ điều kiện:

$$L_1(\omega'_C) = -10 \lg \alpha \quad \text{hoặc} \quad |G_1(j\omega'_C)| = 1/\sqrt{\alpha}$$

**Bước 8:** Tính hằng số thời gian  $T$  từ điều kiện:

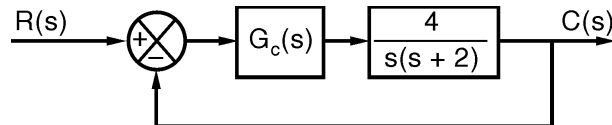
$$T = \frac{1}{\omega'_C \sqrt{\alpha}}$$

**Bước 9:** Kiểm tra lại hệ thống có thỏa mãn điều kiện về độ dự trữ biên hay không? Nếu không thỏa mãn thì trở lại bước 6.

**Chú ý:** Trong trường hợp hệ thống quá phức tạp khó tìm được lời giải giải tích thì có thể xác định  $\omega_C$  (bước 3),  $\Phi M$  (bước 4) và  $\omega'_C$  (bước 7) bằng cách dựa vào biểu đồ Bode.

**Ví dụ 6.7.** Thiết kế khâu hiệu chỉnh sớm pha dùng phương pháp biểu đồ Bode.

Hãy thiết kế khâu hiệu chỉnh sớm pha sao cho hệ thống sau khi hiệu chỉnh có:  $K_V^* = 20$ ;  $\Phi M^* \geq 50^\circ$ ;  $GM^* \geq 10dB$ .



**Giải.** Hàm truyền khâu hiệu chỉnh sớm pha cần thiết kế là:

$$G_C(s) = K_C \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts} \quad (\alpha > 1)$$

**Bước 1: Xác định  $K_C$** 

Hệ số vận tốc của hệ sau khi hiệu chỉnh là:

$$K_V^* = \lim_{s \rightarrow 0} s G_C(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s K_C \frac{1 + \alpha T s}{1 + T s} \cdot \frac{4}{s(s+2)} = 2K_C$$

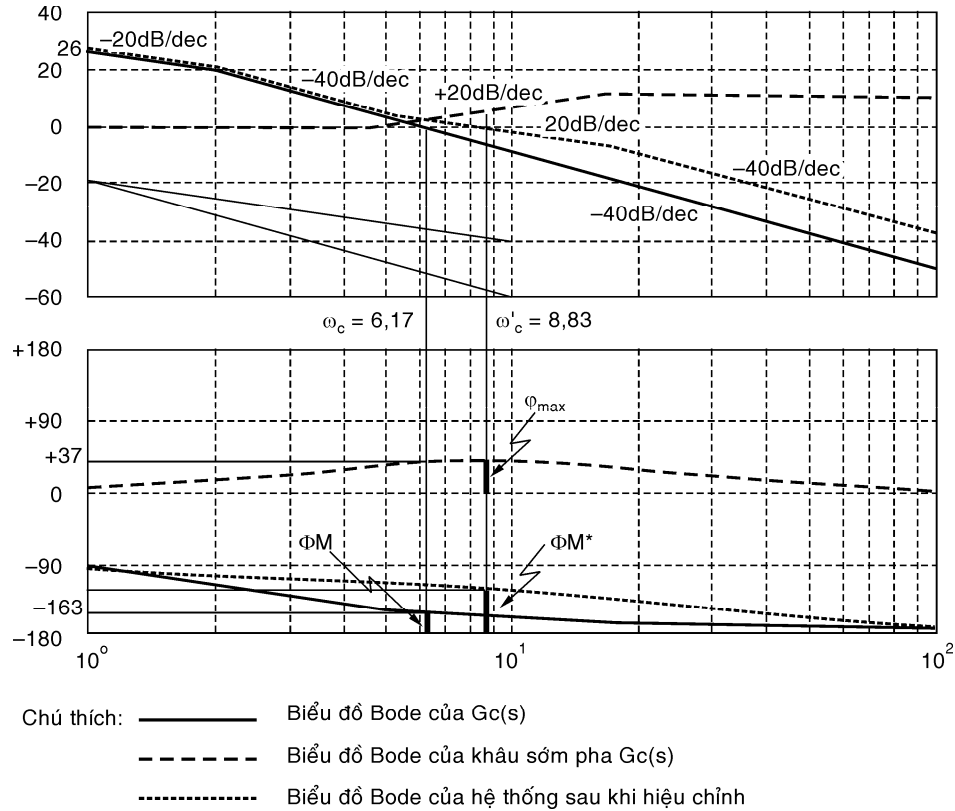
$$\Rightarrow K_C = \frac{K_V^*}{2} = \frac{20}{2} \Rightarrow K_C = 10$$

**Bước 2**

$$\text{Đặt: } G_1(s) = K_C G(s) = 10 \cdot \frac{4}{s(s+2)}$$

$$\Rightarrow G_1(s) = \frac{20}{s(0,5s+1)}$$

Biểu đồ Bode của  $G_1(s)$  là đường liền nét ở đường 6.22.



**Hình 6.22** Biểu đồ Bode của hệ thống trước và sau khi hiệu chỉnh sớm pha

**Bước 3:** Tần số cắt của hệ trước khi hiệu chỉnh

$$|G_1(j\omega_C)| = 1$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{40}{j\omega_C(j\omega_C + 2)} \right| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{40}{\omega_C \sqrt{\omega_C^2 + 4}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \omega_C^4 + 4\omega_C^2 - 1600 = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega_C = 6,17 \text{ (rad/sec)}$$

**Bước 4:** Độ dự trữ pha của hệ khi chưa hiệu chỉnh

$$\Phi M = 180 + \varphi_1(\omega_C)$$

$$\Rightarrow \Phi M = 180^\circ + \arg \left[ \frac{40}{j\omega_C(j\omega_C + 2)} \right] = 180^\circ - \left[ 90^\circ + \arctan \left( \frac{\omega_C}{2} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \Phi M = 180^\circ - \left[ 90^\circ + \arctan \left( \frac{6,17}{2} \right) \right] = 180^\circ - 90^\circ - 72^\circ$$

$$\Rightarrow \Phi M = 18^\circ$$

**Bước 5:** Góc pha cần bù

$$\varphi_{\max} = \Phi M^* - \Phi M + \theta \quad (\text{chọn } \theta = 5^\circ)$$

$$\Rightarrow \varphi_{\max} = 50^\circ - 18^\circ + 5^\circ$$

$$\Rightarrow \varphi_{\max} = 37^\circ$$

**Bước 6:** Tính  $\alpha$

$$\alpha = \frac{1 + \sin \varphi_{\max}}{1 - \sin \varphi_{\max}} = \frac{1 + \sin 37^\circ}{1 - \sin 37^\circ} \Rightarrow \alpha = 4$$

**Bước 7:** Tính tần số cắt mới

$$|G_1(j\omega'_C)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{40}{j\omega'_C(j\omega'_C + 2)} \right| = \frac{1}{\sqrt{4}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{40}{\omega'_C \sqrt{(\omega'_C)^2 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{4}}$$

$$\Leftrightarrow (\omega'_C)^4 + 4(\omega'_C)^2 - 6400 = 0$$

$$\Rightarrow \omega'_C = 8,83 \text{ (rad/sec)}$$

**Bước 8:** Tính  $T$

$$T = \frac{1}{\omega_C' \sqrt{\alpha}} = \frac{1}{(8,83)(\sqrt{4})}$$

$$\Rightarrow T = 0,057$$

$$\Rightarrow \alpha T = 4 \times 0,057 = 0,228$$

$$\text{Vậy: } G_C(s) = 10 \frac{1 + 0,228s}{1 + 0,057s}$$

**Bước 9:** Kiểm tra lại điều kiện về biên độ

Vì tần số cắt pha  $\omega_{-\pi}$  trước và sau khi hiệu chỉnh đều bằng vô cùng nên độ dự trữ biên của hệ trước và sau khi hiệu chỉnh đều bằng vô cùng ( $>10\text{dB}$ ).

**Kết luận:** Khâu hiệu chỉnh cần thiết kế là có hàm truyền như trên. ■

### 6.4.2 Hiệu chỉnh trễ pha

Hàm truyền khâu hiệu chỉnh sớm pha cần thiết kế có dạng:

$$G_C(s) = K_C \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts} \quad (\alpha < 1)$$

Bài toán đặt ra là chọn giá trị  $K_C$ ,  $\alpha$  và  $T$  để đáp ứng của hệ thống thỏa mãn yêu cầu về độ dự trữ biên, độ dự trữ pha và sai số xác lập.

Nguyên tắc thiết kế khâu hiệu chỉnh trễ pha dùng biểu đồ Bode là chọn hệ số khuếch đại  $K_C$  để hệ thống thỏa mãn yêu cầu về sai số xác lập, sau đó chọn vị trí cực và zero của khâu trễ pha để làm giảm biên độ ở miền tần số cao, bằng thông của hệ thống sau khi hiệu chỉnh trễ pha bị thu hẹp, nhờ đó mà đạt yêu cầu về độ dự trữ pha và độ dự trữ biên. Các bước thiết kế dưới đây cụ thể hóa nguyên tắc trên.

**Trình tự thiết kế**

*Khâu hiệu chỉnh: Trễ pha*

*Phương pháp thiết kế: Biểu đồ Bode*

**Bước 1:** Xác định  $K_C$  để thỏa mãn yêu cầu thiết kế về sai số xác lập

**Bước 2:** Đặt  $G_1(s) = K_C G(s)$ . Vẽ biểu đồ Bode của  $G_1(s)$



**Bước 3:** Xác định tần số cắt biên  $\omega'_C$  của hệ sau khi hiệu chỉnh từ điều kiện:

$$\varphi_1(\omega'_C) = -180^\circ + \Phi M^* + \theta$$

trong đó  $\Phi M^*$  là độ dự trữ pha mong muốn,  $\theta = 5^\circ \div 20^\circ$

**Bước 4:** Tính  $\alpha$  từ điều kiện:

$$L_1(\omega'_C) = -20 \lg \alpha \quad \text{hoặc} \quad |G_1(j\omega'_C)| = \frac{1}{\alpha}$$

**Bước 5:** Chọn zero của khâu hiệu chỉnh trễ pha sao cho:

$$\frac{1}{\alpha T} \ll \omega'_C \Rightarrow \alpha T$$

**Bước 6:** Tính hằng số thời gian  $T$

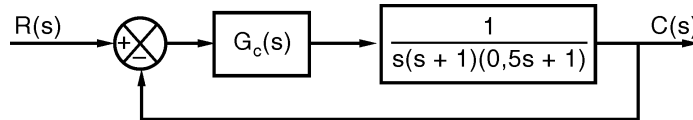
$$\frac{1}{T} = \alpha \frac{1}{\alpha T} \Rightarrow T$$

**Bước 7:** Kiểm tra lại hệ thống có thỏa mãn điều kiện về độ dự trữ biên hay không? Nếu không thỏa mãn thì trở lại bước 3.

**Chú ý:** Trong trường hợp hệ thống quá phức tạp khó tìm được lời giải giải tích thì có thể xác định  $\varphi_1(\omega'_C)$ ,  $\omega'_C$  (bước 3) và  $L_1(\omega'_C)$  (bước 4) bằng cách dựa vào biểu đồ Bode.

**Ví dụ 6.1.** Thiết kế khâu hiệu chỉnh trễ pha dùng phương pháp biểu đồ Bode.

Hãy thiết kế khâu hiệu chỉnh trễ pha sao cho hệ thống sau khi hiệu chỉnh có:  $K_V^* = 5$ ;  $\Phi M^* \geq 40$ ;  $GM^* \geq 10dB$ .



**Giải.** Hàm truyền khâu hiệu chỉnh trễ pha cần thiết kế là:

$$G_C(s) = K_C \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts} \quad (\alpha < 1)$$

**Bước 1:** Xác định  $K_C$

Hệ số vận tốc của hệ sau khi hiệu chỉnh là:

$$K_V^* = \lim_{s \rightarrow 0} s G_C(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s K_C \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts} \cdot \frac{1}{s(s+1)(0.5s+1)} = K_C$$

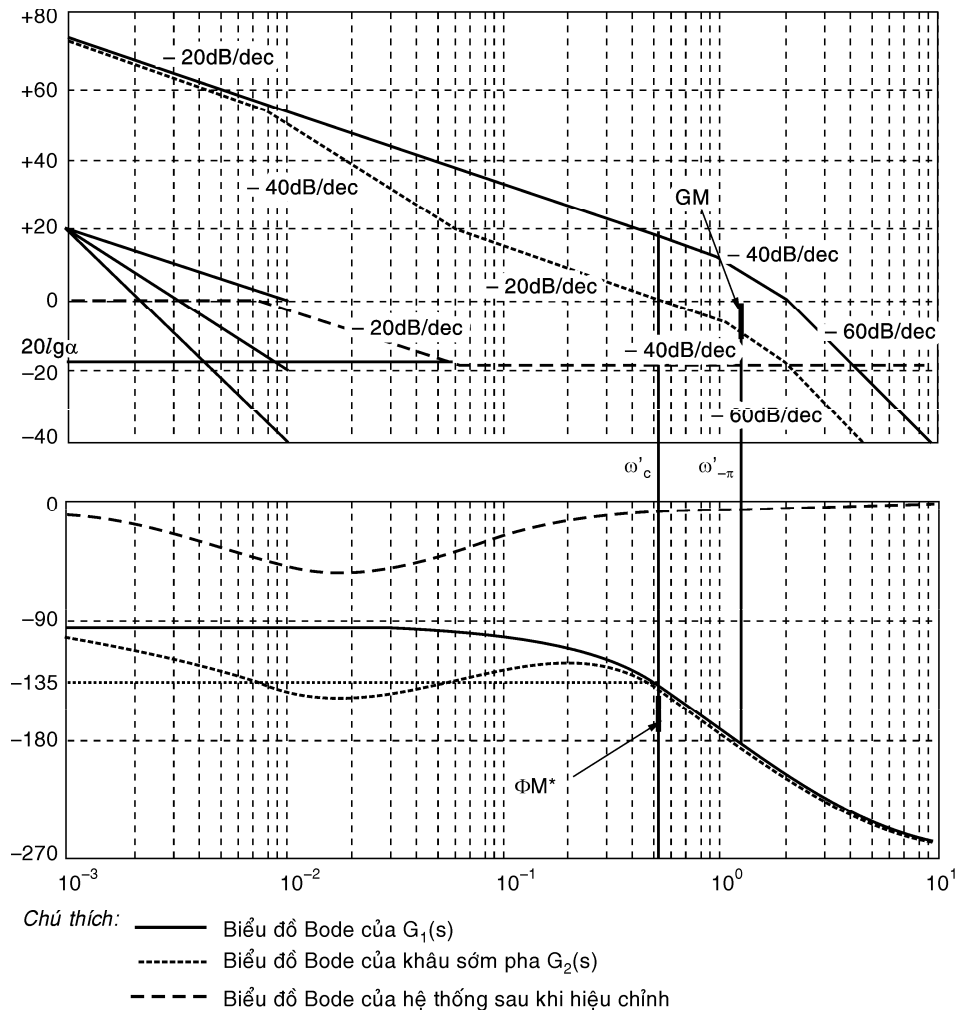
$$\Rightarrow K_C = K_V^* \Rightarrow K_C = 5$$

**Bước 2**

$$\text{Đặt: } G_1(s) = K_C G(s) = 5 \cdot \frac{1}{s(s+1)(0,5s+1)}$$

$$\Rightarrow G_1(s) = \frac{5}{s(s+1)(0,5s+1)}$$

Biểu đồ Bode của  $G_1(s)$  (H.6.23)



**Hình 6.23** Biểu đồ Bode của hệ thống trước và sau khi hiệu chỉnh trễ pha

**Bước 3: Xác định tần số cắt mới**

*Cách 1:* Tìm  $\omega'_C$  bằng phương pháp giải tích. Ta có:

$$\varphi_1(\omega'_C) = -180^\circ + \Phi M^* + \theta$$

$$\Rightarrow -90^\circ - \arctan(\omega'_C) - \arctan(0,5\omega'_C) = -180^\circ + 40^\circ + 5^\circ$$

$$\Rightarrow \arctan(\omega'_C) + \arctan(0,5\omega'_C) = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{(\omega'_C) + (0,5\omega'_C)}{1 - 0,5(\omega'_C)^2} = \tan(45^\circ) = 1$$

$$\Rightarrow 0,5(\omega'_C)^2 + 1,5\omega'_C - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \omega'_C = 0,56 \text{ (rad/sec)}$$

*Cách 2:* Dựa vào biểu đồ Bode

Ta có:  $\varphi_1(\omega'_C) = -180^\circ + \Phi M^* + \theta$

$$\Rightarrow \varphi_1(\omega'_C) = -180^\circ + 40^\circ + 5^\circ$$

$$\Rightarrow \varphi_1(\omega'_C) = -135^\circ$$

Vẽ đường thẳng có hoành độ  $-135^\circ$ . Hoành độ giao điểm của đường thẳng này với biểu đồ Bode về pha  $\varphi_1(\omega)$  chính là giá trị tần số cắt mới.

Theo hình 6.23 ta thấy:  $\omega'_C \approx 0,5 \text{ (rad/sec)}$

**Bước 4**

*Cách 1:* Tính  $\alpha$  từ điều kiện:

$$|G_1(j\omega'_C)| = \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{5}{s(s+1)(0,5s+1)} \right|_{s=j\omega'_C} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{5}{j0,56(j0,56+1)(0,5 \times j0,56+1)} \right| = \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{0,56(\sqrt{0,56^2+1})(\sqrt{0,28^2+1})} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{0,56 \times 1,146 \times 1,038} = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = 0,133$$

Cách 2: Tính  $\alpha$  từ điều kiện:  $L_1(\omega'_C) = -20 \lg \alpha$

Dựa vào biểu đồ Bode ta thấy:  $L_1(\omega'_C) \approx 18 \text{ dB}$

Suy ra:  $18 = -20 \lg \alpha$

$$\Rightarrow \lg \alpha = -0,9$$

$$\Rightarrow \alpha = 10^{-0,9}$$

$$\Rightarrow \alpha = 0,126$$

Ta thấy giá trị  $\alpha$  tính theo hai cách không sai khác nhau đáng kể. Ở các bước thiết kế tiếp theo ta sử dụng giá trị  $\alpha = 0,133$ .

**Bước 5:** Chọn zero của khâu trễ pha

$$\frac{1}{\alpha T} \ll \omega'_C = 0,56$$

$$\text{Chọn } \frac{1}{\alpha T} = 0,05$$

$$\Rightarrow \alpha T = 20$$

**Bước 6:** Tính thời hằng  $T$

$$\frac{1}{T} = \alpha \frac{1}{\alpha T} = 0,133 \times 0,05 = 0,067$$

$$\Rightarrow T = 150$$

$$\text{Vậy: } G_C(s) = 5 \frac{(20s + 1)}{(150s + 1)}$$

**Bước 7:** Kiểm tra lại điều kiện biên độ

Dựa vào biểu đồ Bode ta thấy độ dự trữ biên sau khi hiệu chỉnh là:  $GM^* \approx 10 \text{ dB}$

**Kết luận:** Khâu hiệu chỉnh vừa thiết kế đạt yêu cầu về độ dự trữ biên.

**Nhận xét**

Qua hai ví dụ thiết kế khâu hiệu chỉnh sớm pha và trễ pha dùng phương pháp biểu đồ Bode ta có nhận xét sau:

- Nếu  $G(s)$  là **hệ bậc hai** thì bài thiết kế khâu hiệu chỉnh sớm pha và trễ pha hoàn toàn có thể giải được bằng các công thức giải tích, bước vẽ biểu đồ Bode không thật sự cần thiết.

- Nếu  $G(s)$  là **hệ bậc ba trở lên** thì các công thức giải tích để tìm tần số cắt biên, tần số cắt pha, độ dự trữ biên, độ dự trữ pha... trở nên phức tạp, trong trường hợp này nên vẽ biểu đồ Bode và xác định các thông số dựa vào biểu đồ Bode vừa vẽ.

Biểu đồ Bode biên độ được vẽ bằng các đường tiệm cận, biểu đồ Bode về pha được vẽ bằng cách phân tích định tính và thay một số giá trị tần số  $\omega$  biểu thức  $\varphi(\omega)$  để có giá trị định lượng.

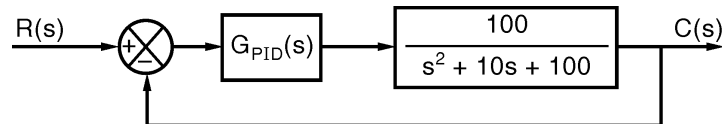
- Để ý bằng thông của hệ sau khi hiệu chỉnh sớm pha và trễ pha. Sau khi hiệu chỉnh sớm pha bằng thông của hệ thống được mở rộng, đáp ứng của hệ đối với tín hiệu tần số cao tốt hơn, đáp ứng quá độ được cải thiện; trong khi đó sau khi hiệu chỉnh trễ pha bằng thông của hệ thống bị thu hẹp, đáp ứng của hệ đối với tín hiệu tần số cao kém đi, đáp ứng quá độ của hệ thống bị chậm lại. Vì vậy cần nhấn mạnh rằng hai khâu hiệu chỉnh sớm pha và trễ pha có đặc điểm hoàn toàn khác nhau, không thể sử dụng lẫn lộn được.

## 6.5 THIẾT KẾ BỘ ĐIỀU KHIỂN PID

Bộ điều khiển PID là trường hợp đặc biệt của hiệu chỉnh sớm trễ pha nên về nguyên tắc có thể thiết kế bộ điều khiển PID bằng phương pháp dùng QĐNS hoặc dùng biểu đồ Bode.

Một phương pháp khác cũng thường dùng để thiết kế bộ điều khiển PID là phương pháp giải tích. Sau đây là một ví dụ:

**Ví dụ 6.10.** Cho hệ thống điều khiển như hình vẽ:



Hãy xác định thông số của bộ điều khiển PID sao cho hệ thống thỏa mãn yêu cầu:

- Hệ có cặp nghiệm phức với  $\xi = 0,5$ ,  $\omega_n = 8$
- Hệ số vận tốc  $K_V = 100$ .

**Giải:** □ Hàm truyền bộ điều khiển PID cần thiết kế:

$$G_C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

□ Hệ số vận tốc của hệ sau khi hiệu chỉnh:

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} s G_C(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \right) \left( \frac{100}{s^2 + 10s + 100} \right)$$

$$\Rightarrow K_V = K_I$$

Theo yêu cầu đề bài  $K_V = 100$  nên suy ra:

$$\boxed{K_I = 100}$$

□ Phương trình đặc tính của hệ sau khi hiệu chỉnh là:

$$1 + G_C(s) G(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \left( K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \right) \left( \frac{100}{s^2 + 10s + 100} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow s(s^2 + 10s + 100) + 100(K_D s^2 + K_P s + K_I) = 0$$

$$\Leftrightarrow s^3 + (10 + 100K_D)s^2 + (100 + 100K_P)s + 100K_I = 0 \quad (1)$$

Để hệ thống có cặp cực phức với  $\xi = 0,5$ ,  $\omega_n = 8$  thì phương trình đặc tính (1) phải có dạng:

$$(s + a)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (s + a)(s^2 + 8s + 64) = 0$$

$$\Leftrightarrow s^3 + (a + 8)s^2 + (8a + 64)s + 64a = 0 \quad (2)$$

Cân bằng các hệ số hai phương trình (1) và (2), suy ra:

$$\begin{cases} 10 + 100K_D = a + 8 \\ 100 + 100K_P = 8a + 64 \\ 100K_I = 64a \end{cases}$$

Với  $K_I = 100$ , giải hệ phương trình trên ta được:

$$\begin{cases} a = 156,25 \\ K_P = 12,14 \\ K_D = 1,54 \end{cases}$$

Vậy hàm truyền của khâu hiệu chỉnh PID cần thiết kế là:

$$G_C(s) = 12,64 + \frac{100}{s} + 1,54s \quad \blacksquare$$

Bộ điều khiển PID được sử dụng rất rộng rãi trong thực tế để điều khiển nhiều loại đối tượng khác nhau như nhiệt độ lò nhiệt, tốc độ động cơ, mực chất lỏng trong bồn chứa... do nó có khả

năng làm triệt tiêu sai số xác lập, tăng tốc độ đáp ứng quá độ, giảm độ vọt lố nếu các thông số của bộ điều khiển được chọn lựa thích hợp. Do tính thông dụng của nó nên nhiều hãng sản xuất thiết bị điều khiển đã cho ra đời các bộ điều khiển PID thương mại rất tiện dụng. Trong thực tế các phương pháp thiết kế bộ điều khiển PID dùng QĐNS, biểu đồ Bode hay phương pháp giải tích rất ít được sử dụng do sự khó khăn trong việc xây dựng hàm truyền của đối tượng. Phương pháp phổ biến nhất để chọn thông số cho các bộ điều khiển PID thương mại hiện nay là phương pháp Zeigler-Nichols.

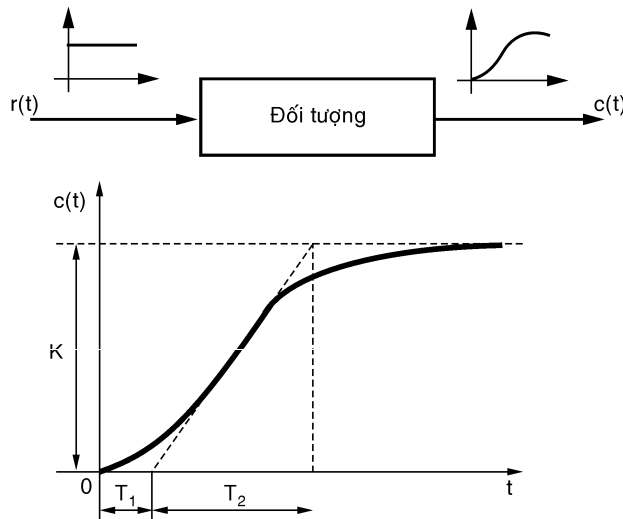
### **Phương pháp Zeigler-Nichols**

Phương pháp Zeigler-Nichols là phương pháp thực nghiệm để thiết kế bộ điều khiển P, PI, hoặc PID bằng cách dựa vào đáp ứng quá độ của đối tượng điều khiển. Bộ điều khiển PID cần thiết kế có hàm truyền là:

$$G_C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (6.30)$$

Zeigler và Nichols đưa ra hai cách chọn thông số bộ điều khiển PID tùy theo đặc điểm của đối tượng.

**Cách 1:** Dựa vào đáp ứng quá độ của hệ hở, áp dụng cho các đối tượng có đáp ứng đối với tín hiệu vào là hàm nấc có dạng chữ S như hình 6.24, ví dụ như nhiệt độ lò nhiệt, tốc độ động cơ, ...

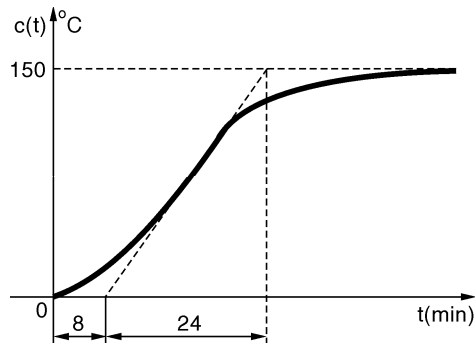


**Hình 6.24** Đáp ứng nấc của hệ hở có dạng S

Thông số bộ điều khiển P, PI, PID được chọn như sau:

Bộ ĐK \ Thông số	$K_P$	$T_I$	$T_D$
P	$T_2 / (T_1 K)$	$\infty$	0
PI	$0,9 T_2 / (T_1 K)$	$T_1 / 0,3$	0
PID	$1,2 T_2 / (T_1 K)$	$2 T_1$	$0,5 T_1$

**Ví dụ 6.11.** Hãy thiết kế bộ điều khiển PID điều khiển nhiệt độ của lò sấy, biết đặc tính quá độ của lò sấy thu được từ thực nghiệm có dạng như sau:



**Giải.** Dựa vào đáp ứng quá độ thực nghiệm ta có:

$$T_1 = 8 \text{ min} = 480 \text{ sec}$$

$$T_2 = 24 \text{ min} = 1440 \text{ sec}$$

Chọn thông số bộ điều khiển PID theo phương pháp Zeigler-Nichols:

$$K_P = 1,2 \frac{T_2}{T_1} = \frac{1440}{480} = 1,2 \times 3 = 3,6$$

$$T_I = 2T_1 = 2 \times 480 = 960 \text{ sec}$$

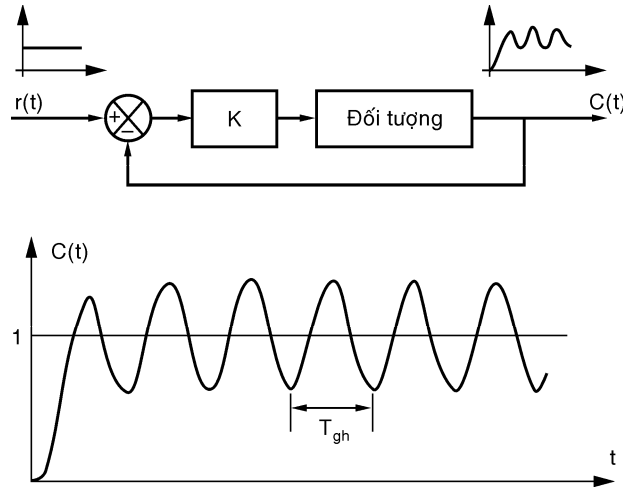
$$T_D = 0,5T_1 = 0,5 \times 480 = 240 \text{ sec}$$

$$\text{Do đó: } G_{PID}(s) = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) = 3,6 \left( 1 + \frac{1}{960s} + 240s \right) \quad \blacksquare$$

**Cách 2:** Dựa vào đáp ứng quá độ của hệ kín, áp dụng cho các đối tượng có khâu tích phân lý tưởng, ví dụ như mực chất lỏng trong bồn chứa, vị trí hệ truyền động dùng động cơ,... Đáp ứng quá độ (hệ hở) của các đối tượng có khâu tích phân lý tưởng



không có dạng như hình 6.24 mà tăng đến vô cùng. Đối với các đối tượng thuộc loại này ta chọn thông số bộ điều khiển PID dựa vào đáp ứng quá độ của hệ kín như hình 6.25. Tăng dần hệ số khuếch đại  $K$  của hệ kín ở hình 6.25 đến giá trị giới hạn  $K_{gh}$ , khi đó đáp ứng ra của hệ kín ở trạng thái xác lập là dao động ổn định với chu kỳ  $T_{gh}$ .



**Hình 6.25** Đáp ứng nấc của hệ kín khi  $K = K_{gh}$

Thông số bộ điều khiển P, PI, PID được chọn như sau:

Thông số Bộ ĐK	$K_P$	$T_I$	$T_D$
P	$0,5K_{gh}$	$\infty$	0
PI	$0,45K_{gh}$	$0,83T_{gh}$	0
PID	$0,6K_{gh}$	$0,5T_{gh}$	$0,125T_{gh}$

**Ví dụ 6.12.** Hãy thiết kế bộ điều khiển PID điều khiển vị trí góc quay của động cơ DC, biết rằng nếu sử dụng bộ điều khiển tỉ lệ thì bằng thực nghiệm ta xác định được khi  $K = 20$  vị trí góc quay động cơ ở trạng thái xác lập là dao động với chu kỳ  $T = 1$  sec.

**Giải.** Theo dữ kiện của bài toán, ta có:  $K_{gh} = 20$ ;  $T_{gh} = 1$  sec

Chọn thông số bộ điều khiển PID theo phương pháp Zeigler-Nichols:

$$K_P = 0,6K_{gh} = 0,6 \times 20 = 12$$

$$T_I = 0,5T_{gh} = 0,5 \times 1 = 0,5 \text{ sec}$$

$$T_D = 0,125T_{gh} = 0,125 \times 1 = 0,125 \text{ sec}$$

$$\text{Do đó: } G_{PID}(s) = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) = 12 \left( 1 + \frac{1}{0,5s} + 0,125s \right) \quad \blacksquare$$

## 6.6 THIẾT KẾ HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN HỒI TIẾP TRẠNG THÁI

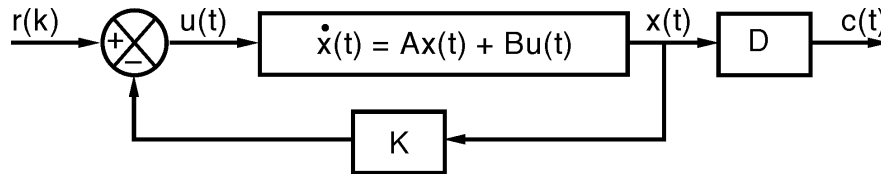
### 6.6.1 Điều khiển hồi tiếp trạng thái

Cho đối tượng điều khiển mô tả bởi phương trình trạng thái:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ c(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (6.31)$$

Hệ thống điều khiển hồi tiếp trạng thái (H.6.26) là hệ thống trong đó tín hiệu điều khiển xác định bởi:

$$u(t) = r(t) - Kx(t) \quad (6.32)$$



**Hình 6.26** Hệ thống điều khiển hồi tiếp trạng thái

Thay (6.32) vào (6.31) ta được:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B[r(t) - Kx(t)] \\ c(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (6.33)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = [A - BK]x(t) + Br(t) \\ c(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Thiết kế hệ thống hồi tiếp trạng thái là chọn vectơ hồi tiếp trạng thái  $K$  sao cho hệ thống kín mô tả bởi biểu thức (6.33) thỏa mãn yêu cầu chất lượng mong muốn.

### 6.6.2 Tính điều khiển được và quan sát được

Để có thể thiết kế được hệ thống hồi tiếp trạng thái (6.33) điều kiện cần là tất cả các trạng thái của hệ thống phải đo lường

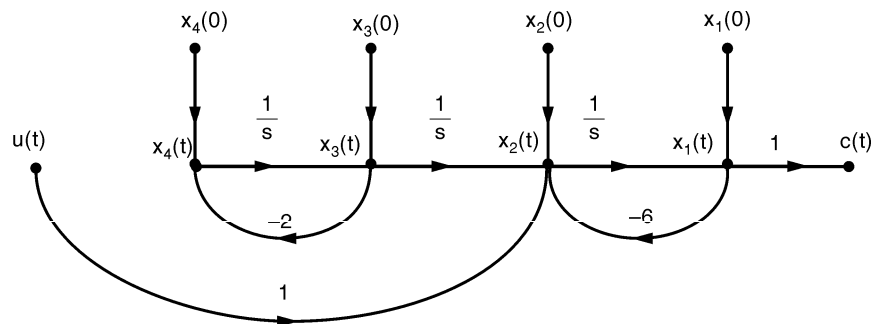
được (quan sát được) và hệ sẵn sàng nhận tín hiệu điều khiển (điều khiển được). Mục này sẽ trình bày cụ thể về khái niệm điều khiển được và quan sát được cũng như các kiểm tra toán học để đánh giá hệ có thể điều khiển được và quan sát được hay không.

### 1- Tính điều khiển được

Hệ thống (6.31) được gọi là điều khiển được hoàn toàn nếu tồn tại luật điều khiển  $u(t)$  có khả năng chuyển hệ từ trạng thái đầu tại  $x(t_0)$  đến trạng thái cuối  $x(t_f)$  bất kỳ trong khoảng thời gian hữu hạn  $t_0 \leq t \leq t_f$ .

Một cách định tính, điều này có nghĩa là hệ thống có thể điều khiển được nếu mỗi biến trạng thái của hệ đều có thể bị ảnh hưởng bởi tín hiệu điều khiển  $u(t)$ . Tuy nhiên, nếu một hoặc vài biến trạng thái không bị ảnh hưởng bởi  $u(t)$  thì các biến trạng thái này không thể bị điều khiển bởi  $u(t)$  trong khoảng thời gian hữu hạn và trong trường hợp này hệ thống không điều khiển được hoàn toàn.

Để ví dụ về hệ thống không điều khiển được hoàn toàn, chúng ta xét hệ thống mô tả bởi sơ đồ dòng tín hiệu ở hình 6.27. Hệ này gồm 4 trạng thái, chỉ có hai trạng thái  $x_1(t)$  và  $x_2(t)$  bị ảnh hưởng bởi  $u(t)$ , còn hai trạng thái  $x_3(t)$  và  $x_4(t)$  không bị ảnh hưởng bởi  $u(t)$ . Do đó  $x_3(t)$  và  $x_4(t)$  không thể điều khiển được, điều này có nghĩa là  $u(t)$  không thể làm thay đổi  $x_3(t)$  và  $x_4(t)$  từ trạng thái đầu  $x_3(0)$  và  $x_4(0)$  đến trạng thái cuối  $x_3(t_f)$  và  $x_4(t_f)$  trong khoảng thời gian hữu hạn. Vì vậy hệ không điều khiển được hoàn toàn.



**Hình 6.27** Sơ đồ dòng tín hiệu của một hệ thống

*không điều khiển được hoàn toàn*

Để kiểm tra tính điều khiển được của hệ thống (6.31) chúng ta thành lập ma trận  $\mathcal{C}$ , gọi là ma trận điều khiển được:

$$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (6.34)$$

Điều kiện cần và đủ để hệ thống điều khiển được là:

$$\text{rank}(\mathcal{C}) = n \quad (6.35)$$

Đối với hệ thống một đầu vào một đầu ra (SISO) thì ma trận  $\mathcal{C}$  là ma trận vuông cấp  $n$ . Do đó điều kiện (6.35) trở thành:

$$\det(\mathcal{C}) \neq 0 \quad (6.36)$$

**Ví dụ 6.13.** Cho hệ thống mô tả bởi phương trình trạng thái:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ c(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

trong đó:  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 3]$

Hãy đánh giá tính điều khiển được của hệ thống trên.

**Giải.** Đối với hệ bậc hai, ma trận điều khiển được là:

$$\mathcal{C} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}]$$

$$\Rightarrow \mathcal{C} = \left[ \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -16 \end{bmatrix}$$

$$\text{Vì: } \det(\mathcal{C}) = -84 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \text{rank}(\mathcal{C}) = 2$$

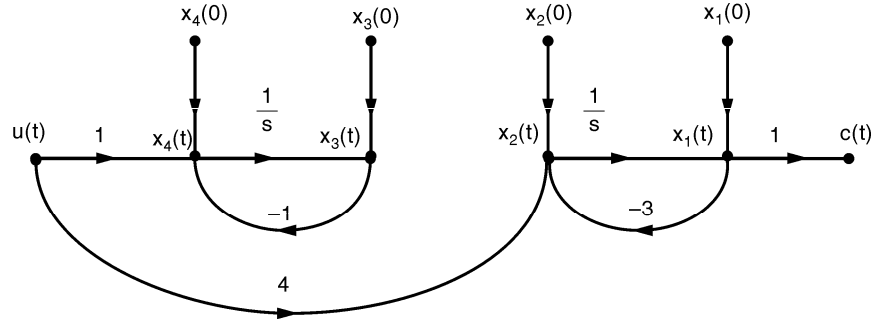
Do đó hệ thống trên điều khiển được hoàn toàn.

## 2- Tính quan sát được

Hệ thống (6.31) được gọi là quan sát được hoàn toàn nếu cho tín hiệu điều khiển  $u(t)$  và đầu ra  $c(t)$  trong khoảng  $t_0 \leq t \leq t_f$  ta có thể xác định được trạng thái đầu  $\mathbf{x}(t_0)$ .

Một cách định tính, hệ thống là quan sát được nếu mỗi biến trạng thái của hệ đều ảnh hưởng đến đầu ra  $c(t)$ . Thường, chúng ta muốn xác định thông tin về trạng thái của hệ thống dựa vào việc đo  $c(t)$ . Tuy nhiên nếu chúng ta không quan sát được một hay nhiều trạng thái từ việc đo  $c(t)$  thì hệ không quan sát được hoàn toàn.

Để ví dụ về hệ không quan sát được hoàn toàn, chúng ta xét hệ thống có sơ đồ dòng tín hiệu ở hình 6.28. Hệ này gồm bốn trạng thái, trong đó chỉ có hai trạng thái  $x_1(t)$  và  $x_2(t)$  là ảnh hưởng đến  $c(t)$  nên có thể quan sát được. Hai trạng thái còn lại  $x_3(t)$  và  $x_4(t)$  không ảnh hưởng đến  $c(t)$  nên không thể quan sát được. Do đó hệ thống ở hình 6.28 không quan sát được hoàn toàn.



**Hình 6.28** Sơ đồ dòng tín hiệu của một hệ thống không quan sát được hoàn toàn

Để ý rằng mặc dù hệ thống ở hình 6.28 không quan sát được hoàn toàn nhưng lại điều khiển được hoàn toàn vì tín hiệu điều khiển  $u(t)$  ảnh hưởng đến tất cả các trạng thái của hệ thống. Ngược lại, hệ thống ở hình 6.27 mặc dù không điều khiển được hoàn toàn nhưng lại quan sát được hoàn toàn do tất cả các trạng thái của hệ thống đều ảnh hưởng đến tín hiệu ra  $c(t)$ .

Để kiểm tra tính quan sát được của hệ thống (6.31) chúng ta thành lập ma trận  $\mathcal{O}$ , gọi là ma trận quan sát được:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

Điều kiện cần và đủ để hệ thống quan sát được là:

$$\text{rank}(\mathcal{O}) = n \quad (6.38)$$

Đối với hệ thống một đầu vào một đầu ra (SISO) thì ma trận  $\mathcal{O}$  là ma trận vuông cấp  $n$ . Do đó điều kiện (6.38) trở thành:

$$\det(\mathcal{O}) \neq 0 \quad (6.39)$$

**Ví dụ 6.14.** Hãy đánh giá tính quan sát được của hệ thống ở ví dụ 6.9.

**Giải.** Ma trận quan sát được của hệ thống ở ví dụ 6.9 là:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{O} = \begin{bmatrix} & [1 & 3] \\ [1 & 3] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$$

Vì:  $\det(\mathcal{O}) = 10 \neq 0$

$\Leftrightarrow \text{rank}(\mathcal{O}) = 2$

Do đó hệ thống quan sát được hoàn toàn.

Tính điều khiển được và quan sát được có ý nghĩa rất quan trọng trong lý thuyết điều khiển hiện đại, các tính chất này quyết định sự tồn tại của lời giải cho bài toán điều khiển tối ưu. Độc giả có thể tham khảo thêm các tài liệu về lý thuyết điều khiển hiện đại để nắm được phần chứng minh điều kiện cần và đủ để hệ thống điều khiển được và quan sát được, đồng thời có được hiểu biết đầy đủ hơn về hai khái niệm quan trọng này.

### 6.6.3 Phương pháp phân bố cực

Nếu hệ thống (6.31) điều khiển được và quan sát được thì có thể xác định được luật điều khiển  $u(t) = r(t) - Kx(t)$  để phương trình đặc tính của hệ hồi tiếp trạng thái (6.33) có nghiệm bất kỳ.

Phương trình đặc tính của hệ hồi tiếp trạng thái (6.33) là:

$$\det[sI - A + BK] = 0 \quad (6.40)$$

Phương pháp chọn vectơ hồi tiếp trạng thái  $K$  để phương trình đặc tính (6.40) có nghiệm tại vị trí mong muốn gọi là phương pháp phân bố cực.

Có nhiều cách thiết kế bộ điều khiển phân bố cực, trong quyển sách này chúng tôi giới thiệu hai cách thường sử dụng nhất.

**Cách 1:** Tính  $K$  bằng cách cân bằng các hệ số của phương trình đặc trưng. Cách này trực quan, dễ hiểu hơn các phương pháp khác và cũng rất dễ áp dụng trong trường hợp hệ bậc thấp (bậc ba trở xuống).

#### ***Trình tự thiết kế***

**Bộ điều khiển: Hồi tiếp trạng thái**

**Phương pháp thiết kế: Phân bố cực bằng cách cân bằng các hệ số của phương trình đặc trưng**

**Bước 1:** Kiểm tra tính điều khiển được (và quan sát được).

- Nếu hệ không điều khiển được thì kết thúc vì bài toán phân bố cực không có lời giải.

- Nếu hệ điều khiển được thì tiếp tục bước 2.

**Bước 2:** Viết phương trình đặc trưng của hệ thống hồi tiếp trạng thái:

$$\det[sI - A + BK] = 0$$

**Bước 3:** Viết phương trình đặc trưng mong muốn:

$$\prod_{i=1}^n (s - p_i) = 0 \quad (6.41)$$

trong đó  $p_i$  ( $i = \overline{1..n}$ ) là các cực mong muốn

**Bước 4:** Cân bằng các hệ số của hai phương trình đặc trưng (6.41) và (6.42) sẽ tìm được vectơ hồi tiếp trạng thái  $K$ .

**Ví dụ 6.15.** Cho đối tượng điều khiển mô tả bởi hệ phương trình trạng thái:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ c(t) = Cx(t) \end{cases}$$

$$\text{với: } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -7 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 0 \quad 1]$$

Hãy xác định luật điều khiển  $u(t) = r(t) - Kx(t)$  sao cho hệ thống kín có cặp cực phức với  $\xi = 0,6$ ;  $\omega_n = 10$  và cực thứ ba là cực thực tại  $-20$ .

**Giải.** Phương trình đặc tính của hệ hồi tiếp trạng thái là:

$$\det[sI - A + BK] = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \left( s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -7 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \right) = 0$$



$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \det \left( \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 4 & 7 & s+3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3k_1 & 3k_2 & 3k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \det \left( \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 3k_1 & s+3k_2 & -1+3k_3 \\ 4+k_1 & 7+k_2 & s+3+k_3 \end{bmatrix} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow s(s+3k_2)(s+3+k_3) - s(7+k_2)(-1+3k_3) + \\
&\quad + 3k_1(s+3+k_3) - (4+k_1)(-1+3k_3) = 0 \\
&\Leftrightarrow s^3 + (3+3k_2+k_3)s^2 + (7+3k_1+10k_2-21k_3)s + \\
&\quad + (4+10k_1-12k_3) = 0 \tag{1}
\end{aligned}$$

Phương trình đặc trưng mong muốn là:

$$\begin{aligned}
&(s+20)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow (s+20)(s^2 + 2 \times 0,6 \times 10s + 10^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow s^3 + 32s^2 + 340s + 2000 = 0 \tag{2}
\end{aligned}$$

Cân bằng các hệ số của hai phương trình đặc trưng (1) và (2), suy ra:

$$\begin{cases} 3+3k_2+k_3=32 \\ 7+3k_1+10k_2-21k_3=340 \\ 4+10k_1-12k_2=2000 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được:

$$\begin{cases} k_1 = 220,578 \\ k_2 = 3,839 \\ k_3 = 17,482 \end{cases}$$

Vậy:  $K = [220,578 \quad 3,839 \quad 17,482]$  ■

**Cách 2:** Tính  $K$  bằng cách áp dụng công thức Ackermann. Trong phạm vi quyển sách này chúng ta chỉ áp dụng công thức mà không chứng minh. Độc giả có thể tham khảo phần chứng minh công thức Ackermann trong các tài liệu về lý thuyết điều khiển hiện đại.

### **Trình tự thiết kế**

**Bộ điều khiển: Hồi tiếp trạng thái**

**Phương pháp thiết kế: Phân bố cực dùng công thức Ackermann**

**Bước 1:** Thành lập ma trận điều khiển được:

$$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

- Nếu hệ không điều khiển được thì kết thúc vì bài toán phân bố cực không có lời giải.

- Nếu hệ điều khiển được thì tiếp tục bước 2.

**Bước 2:** Viết đa thức đặc trưng mong muốn:

$$\Phi(s) = \prod_{i=1}^n (s - p_i) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

trong đó  $p_i$  ( $i = \overline{1..n}$ ) là các cực mong muốn

**Bước 3:** Tính  $K$  bằng công thức Ackermann:

$$K = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] \mathcal{C}^{-1} \Phi(A)$$

**Ví dụ 6.16.** Thiết kế bộ điều khiển hồi tiếp trạng thái phân bố cực ở ví dụ 6.15 dùng công thức Ackermann.

**Giải.** *Bước 1:* Ma trận điều khiển được:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= [B \quad AB \quad A^2B] \\ &= \left[ \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -7 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -7 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -7 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -24 \\ 1 & -24 & 53 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

*Bước 2:* Đa thức đặc trưng mong muốn:

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= (s + 20)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2) \\ &= (s + 20)(s^2 + 2 \times 0,6 \times 10s + 10^2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Phi(s) = s^3 + 32s^2 + 340s + 2000$$

Do đó:  $\Phi(A) = A^3 + 32A^2 + 340A + 2000I$

$$\begin{aligned} \Phi(A) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -7 & -3 \end{bmatrix}^3 + 32 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -7 & -3 \end{bmatrix}^2 + \\ &\quad + 340 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -7 & -3 \end{bmatrix} + 2000 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \Phi(A) &= \begin{bmatrix} 1996 & 333 & 29 \\ -116 & 1793 & 246 \\ -984 & -1838 & -1055 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Bước 3: Tính  $K$  dùng công thức Ackermann:

$$\begin{aligned} K &= [0 \ 0 \ 1] \mathcal{C}^{-1} \Phi(A) \\ &= [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -24 \\ 1 & -24 & 53 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1996 & 333 & 29 \\ -116 & 1793 & 246 \\ -984 & -1838 & -1055 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow K &= [220,578 \ 3,839 \ 17,482] \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ta thấy vectơ  $K$  tính được theo cả hai cách đều cho kết quả như nhau. Tuy nhiên phương pháp tính theo công thức Ackermann phải thực hiện nhiều phép tính ma trận nên thích hợp để giải bài toán trên máy tính hơn là giải bằng tay. Công thức Ackermann được Matlab sử dụng để giải bài toán phân bố cực.

## Phụ lục: THIẾT KẾ HỆ THỐNG DÙNG MATLAB

Phụ lục này giới thiệu công cụ **Sisotool** hỗ trợ thiết kế hệ thống điều khiển tự động của Control Toolbox 5.0 chạy trên nền MATLAB 6.0. Độc giả cần nắm vững lý thuyết điều khiển tự động và tham khảo thêm các tài liệu hướng dẫn sử dụng của MATLAB mới có thể khai thác hiệu quả công cụ này.

**Sisotool** là công cụ giúp thiết kế hệ thống điều khiển tuyến tính hồi tiếp một đầu vào, một đầu ra. Tất cả các khâu hiệu chỉnh trình bày trong quyển sách này như sớm pha, trễ pha, sớm trễ pha, P, PI, PD, PID đều có thể thiết kế được với sự trợ giúp của công cụ này. Cần nhấn mạnh rằng **sisotool** không phải là bộ công cụ thiết kế tự động mà chỉ là bộ công cụ trợ giúp thiết kế, người thiết kế phải hiểu rõ lý thuyết điều khiển tự động, nắm được bản chất của từng khâu hiệu chỉnh thì mới sử dụng bộ công cụ này được. Do phụ lục này chỉ mang tính giới thiệu nên chúng tôi chỉ trình bày một ví dụ thiết kế khâu hiệu chỉnh sớm pha dùng QĐNS, các khâu hiệu chỉnh khác có thể thực hiện tương tự.

*Ví dụ:* Thiết kế hệ thống điều khiển ở ví dụ 6.4 dùng **sisotool**.

Trình tự thiết kế như sau.

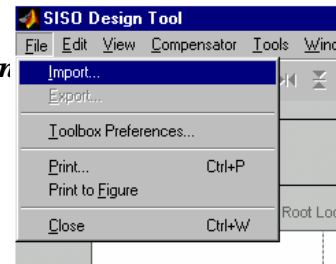
### **Bước 1: Khai báo đối tượng điều khiển**

```
>> G=tf(50,[1 5 0]); H=tf(1,1);
```

### **Bước 2: Kích hoạt sisotool**

```
>> sisotool;
```

Cửa sổ **SISO Design Tool** xuất hiện.



### **Bước 3: Nhập đối tượng điều khiển vào sisotool**

Trong cửa sổ **SISO Design Tool** chọn [File]→ [Import ...] (xem hình bên). Cửa sổ **Import System Data** xuất hiện. Thực hiện các bước sau:

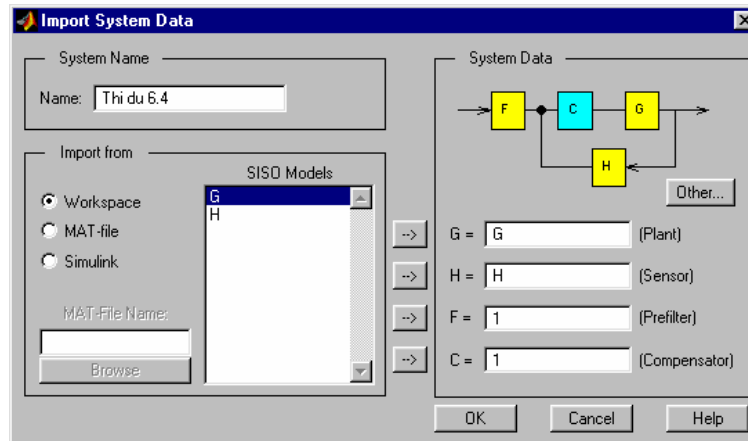
3.1. Đặt tên hệ thống tùy ý (ở đây tên hệ thống được đặt là ví dụ 6.4).

3.2. Cấu hình hệ thống điều khiển hiển thị ở góc trên, bên phải. Có thể thay đổi cấu hình điều khiển bằng cách nhấp chuột

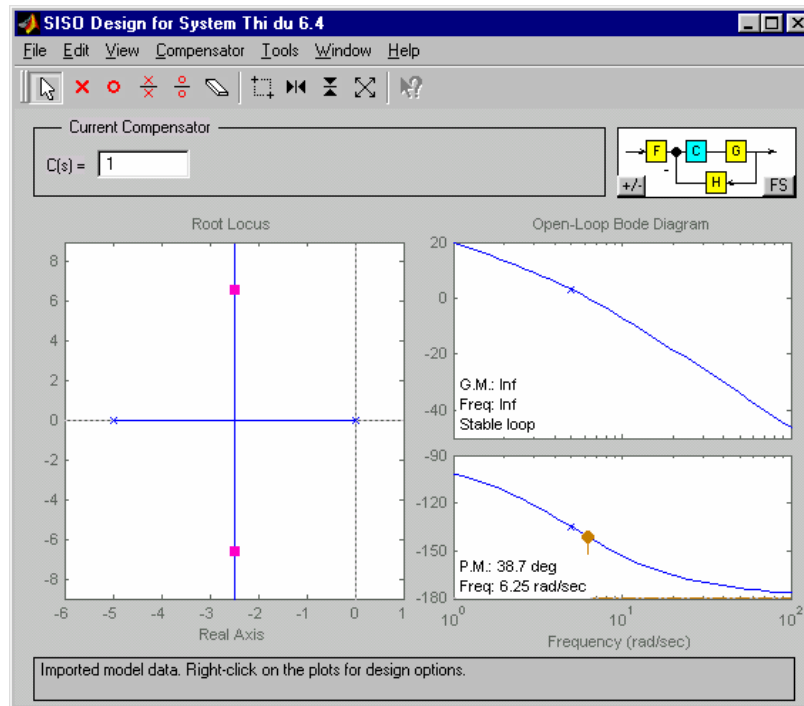
vào nút nhấn [Other ...].

Ban đầu tất cả các khối trong hệ thống điều khiển đều có hàm truyền bằng 1, ta thay đổi đối tượng điều khiển (plant) là  $G$ , cảm biến (sensor) là  $H$ , bộ lọc  $F$  (prefilter) bằng 1, khâu hiệu chỉnh (compensator)  $C$  chưa thiết kế nên cũng bằng 1.

3.3. Sau khi thực hiện xong bước 3.2 của sổ **Import System Data** như hình trên. Nhấp chuột vào nút [OK].

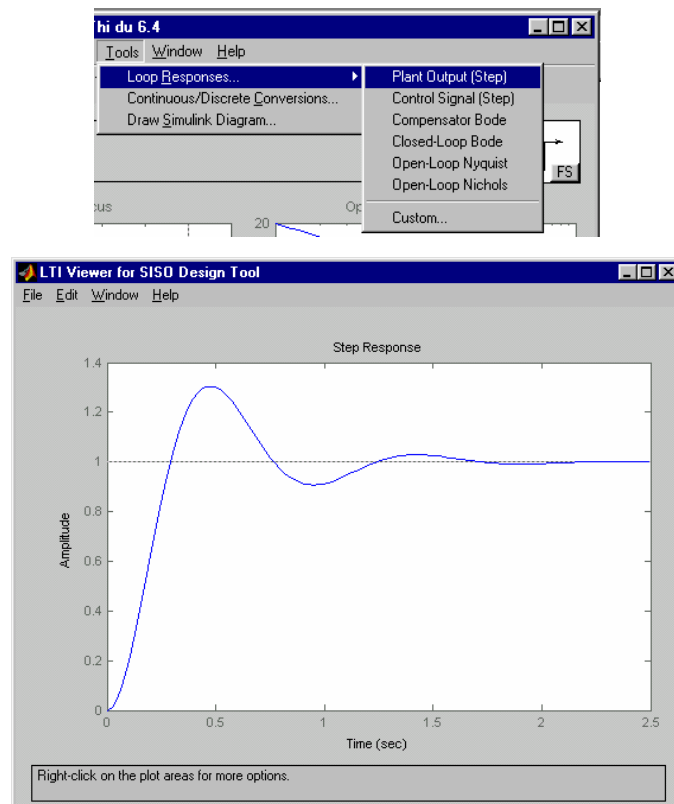


**Bước 4: Khảo sát hệ thống trước khi hiệu chỉnh**

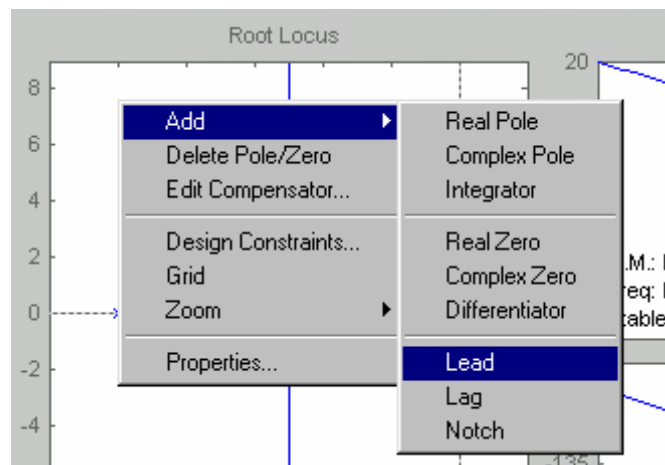


Sau khi nhấp chuột vào nút [OK] ở bước 3.3, cửa sổ **SISO Design Tool** xuất hiện trở lại, trong cửa sổ này có các thông tin sau:

- Hàm truyền khâu hiệu chỉnh hiện tại bằng 1.
- Cấu hình hệ thống điều khiển hiện tại là hiệu chỉnh nối tiếp, hồi tiếp âm. Có thể thay đổi cấu hình hệ thống điều khiển bằng cách nhấp chuột vào nút [+/-] và [FS].
- QĐNS của hệ thống chưa hiệu chỉnh được hiển thị ở đồ thị bên trái. Các chấm vuông đỏ đánh dấu vị trí các cực hiện tại của hệ thống.
- Biểu đồ Bode của hệ thống chưa hiệu chỉnh được hiển thị ở đồ thị bên phải, trên biểu đồ Bode có ghi chú tần số cắt biên, tần số cắt pha, độ dự trữ biên, độ dự trữ pha.
- Có thể xem đáp ứng của hệ thống trước khi hiệu chỉnh bằng cách chọn [Tool]→[Loop Responses ...]→[Plant Output (Step)]. Quan sát đáp ứng của hệ thống ở hình dưới đây ta thấy độ vọt lố khoảng 30%, thời gian quá độ khoảng 1.5 giây.



**Bước 5: Thiết kế khâu hiệu chỉnh sớm pha dùng QDNS**



Di chuyển chuột vào đồ thị QDNS và nhấp nút chuột phải,

một menu xuất hiện. Để ý các tùy chọn trên menu ở hình bên ta thấy **SISO Design Tool** hỗ trợ thiết kế tất cả các khâu hiệu chỉnh thông dụng trong lý thuyết điều khiển kinh điển như hiệu chỉnh sớm pha (Lead), trễ pha. (Lag), sớm trễ pha (Notch), PD (Real Zero), PI (Integrator + Real Zero), PID. (Integrator + Real Zero + Real Zero). Ngoài ra, ta còn có thể thiết kế các khâu hiệu chỉnh khác tùy theo sự kết hợp của các cực thực (Real Pole), cực phức (Complex Pole), tích phân lý tưởng (Integrator), zero thực (Real Zero), zero phức (Complex Zero), vi phân lý tưởng (Differentiator).

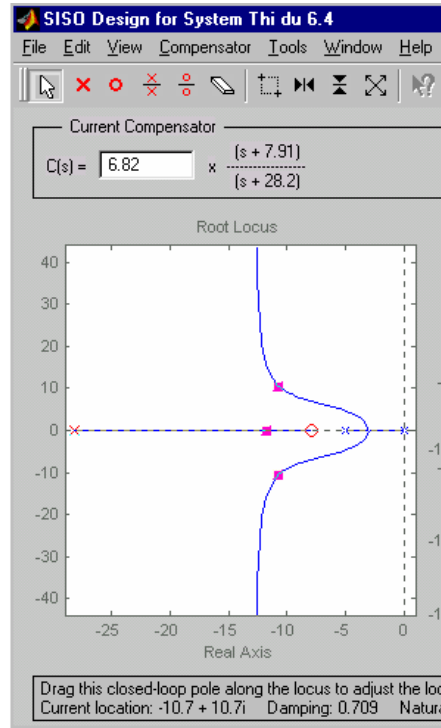
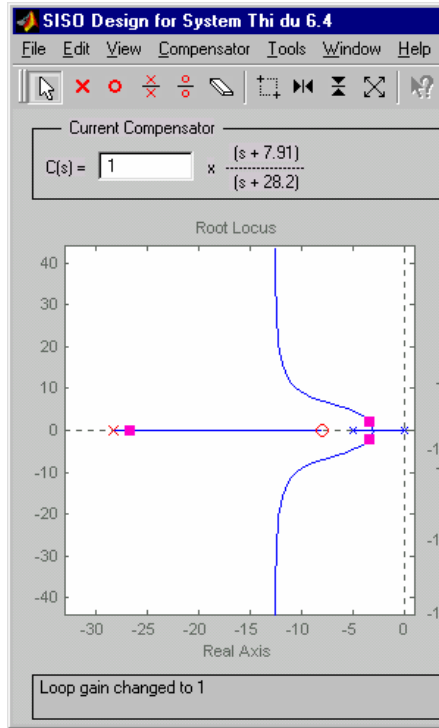
Trong ví dụ này ta chọn **[Add]→[Lead]** để thêm khâu hiệu chỉnh sớm pha vào hệ thống. Nhấp chuột vào một vị trí tùy chọn trên trục thực của QĐNS để xác định vị trí của cực, vị trí zero **SISO Design Tool** sẽ gán tự động nằm gần góc tọa độ hơn cực.

Ta thấy sau khi thêm vào khâu sớm pha QĐNS của hệ thống bị sửa dạng. Bây giờ ta dùng chuột di chuyển vị trí cực và zero sao cho QĐNS đi qua cực mong muốn  $s_{1,2}^* = -10,5 \pm j10,5$  (xem lại ví dụ 6.4 để biết cách tính cực mong muốn này). Chú ý là khi di chuyển vị trí cực và zero ta phải luôn đảm bảo zero gần góc tọa độ hơn cực thì khâu hiệu chỉnh thiết kế mới là khâu hiệu chỉnh sớm pha.



Sau khi di chuyển cực đến vị trí  $-28.2$  và zero đến vị trí  $-7.91$  ta thấy QĐNS đi qua cực mong muốn (hoặc chính xác hơn là gần qua cực mong muốn, xem hình bên trái). Để ý hệ số khuếch đại của khâu hiệu chỉnh bây giờ vẫn là 1 (hàm truyền của khâu hiệu chỉnh nằm trong khung [Current Compensator]).

Di chuyển chuột đến vị trí cực hiện tại của hệ thống (chấm vuông đỏ) và dời vị trí cực này đến gần cực mong muốn  $s_{1,2}^* = -10,5 \pm j10,5$ . Khi di chuyển vị trí cực thì hệ số khuếch đại của khâu hiệu chỉnh thay đổi. Khi vị trí cực đến  $s_{1,2}^* = -10,7 \pm j10,7$  thì hệ số khuếch đại của khâu hiệu chỉnh là 6.82 (vị trí cực hiển thị trong khung trạng thái phía dưới đồ thị QĐNS, xem hình bên phải ).

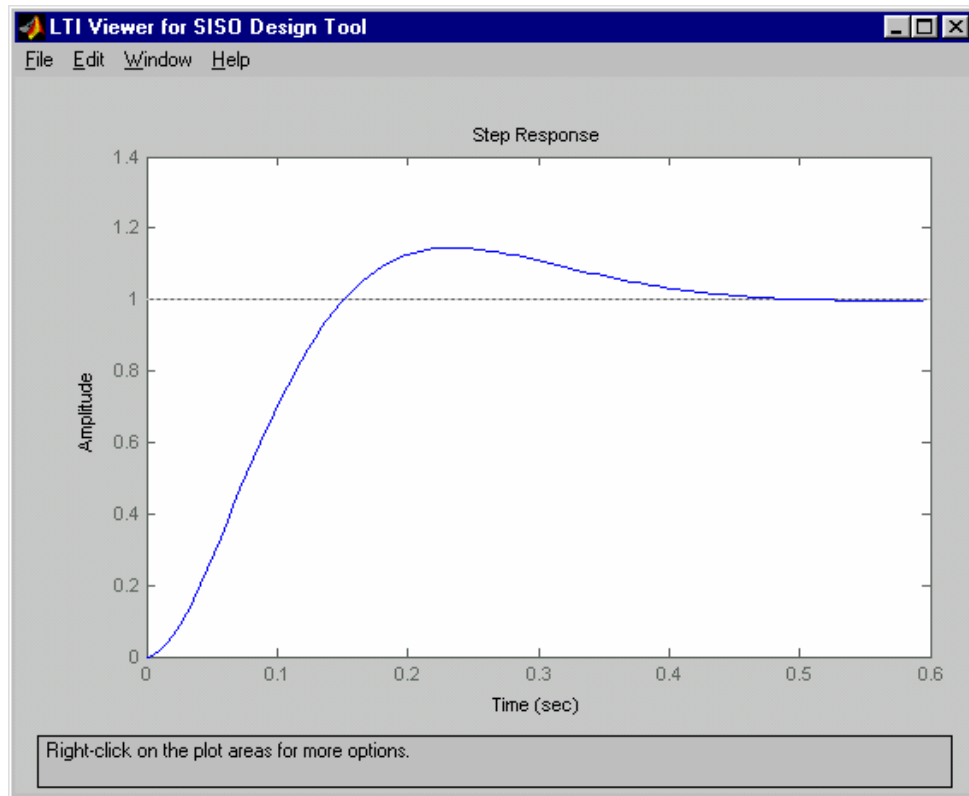


**Bước 6: Kiểm tra lại đáp ứng của hệ thống**

Chọn [Tools]→[Loop Responses]→[Plant Output (Step)], đáp ứng của hệ thống sau khi hiệu chỉnh hiển thị trên cửa sổ LTI Viewer. Quan sát đáp ứng ta thấy hệ thống sau khi hiệu chỉnh có độ vọt lố nhỏ hơn 20%, thời gian quá độ khoảng 0.5 giây, thỏa mãn yêu cầu thiết kế.

Vậy hàm truyền của khâu hiệu chỉnh sớm pha là:

$$G_C(s) = 6,82 \frac{(s + 7,91)}{(s + 28,1)}$$



## Chương 7

# MÔ TẢ TOÁN HỌC HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN RỜI RẠC

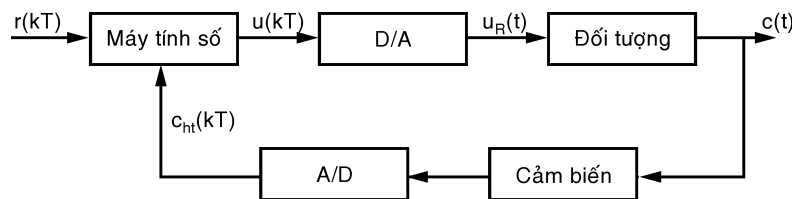
## 7.1 HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN RỜI RẠC

### 7.1.1 Khái niệm

Chương này đề cập đến một loại hệ thống điều khiển có hồi tiếp, trong đó tín hiệu tại một hay nhiều điểm là một chuỗi xung, không phải là hàm liên tục theo thời gian. Tùy thuộc vào phương pháp lượng tử hóa tín hiệu mà ta có các loại hệ thống xử lý tín hiệu khác nhau. Phương pháp lượng tử hóa theo thời gian cho tín hiệu có biên độ liên tục, thời gian rời rạc. Hệ thống xử lý loại tín hiệu này được gọi là hệ thống rời rạc. Nếu phép lượng tử hóa được tiến hành theo thời gian và cả theo biên độ thì kết quả nhận được là tín hiệu số. Hệ thống xử lý tín hiệu số gọi là hệ thống số. Trong hệ thống rời rạc và hệ thống số, thông số điều khiển - biên độ của tín hiệu chỉ xuất hiện tại các thời điểm rời rạc cách đều nhau đúng bằng một chu kỳ lấy mẫu tín hiệu. Vì có thời gian trễ tất yếu do lấy mẫu, việc ổn định hệ thống trở nên phức tạp hơn so với hệ liên tục, do đó đòi hỏi những kỹ thuật phân tích và thiết kế đặc biệt.

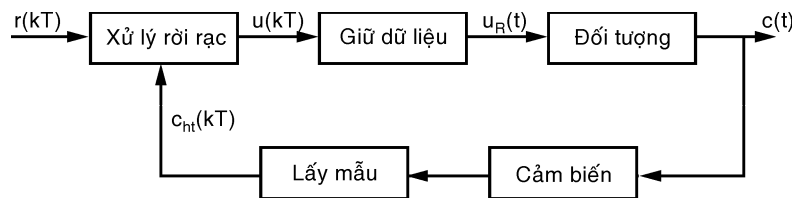
Sự phát triển mạnh mẽ của kỹ thuật số, kỹ thuật vi xử lý và kỹ thuật máy tính làm cho ngày càng có nhiều hệ thống điều khiển số được sử dụng để điều khiển các đối tượng. Hệ thống điều khiển số có nhiều ưu điểm so với hệ thống điều khiển liên tục như uyển chuyển, linh hoạt, dễ dàng đổi thuật toán điều khiển, dễ dàng áp dụng các thuật toán điều khiển phức tạp bằng

cách lập trình. Máy tính số còn có thể điều khiển nhiều đối tượng cùng một lúc. Ngoài ra, giá máy tính ngày càng hạ trong khi đó tốc độ xử lý, độ tin cậy ngày càng tăng lên cũng góp phần làm cho việc sử dụng các hệ thống điều khiển số trở nên phổ biến. Hiện nay các hệ thống điều khiển số được sử dụng rất rộng rãi, từ các bộ điều khiển đơn giản như điều khiển nhiệt độ, điều khiển động cơ DC, AC,... đến các hệ thống điều khiển phức tạp như điều khiển robot, máy bay, tàu vũ trụ, các hệ thống điều khiển quá trình công nghệ hóa học và các hệ thống tự động cho những ứng dụng khác nhau.



**Hình 7.1** Sơ đồ khối hệ thống điều khiển số

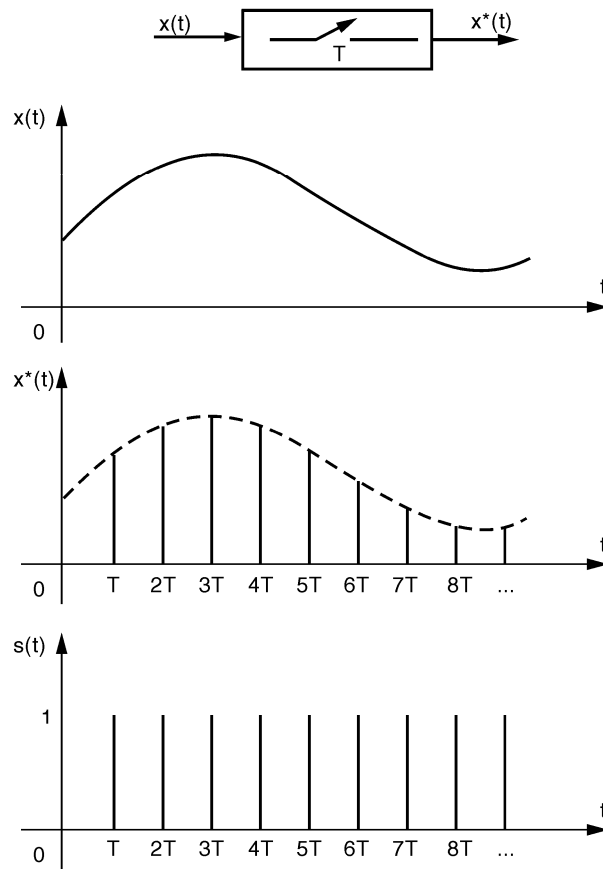
Hình 7.1 trình bày sơ đồ khối của hệ thống điều khiển số thường gặp, trong hệ thống có hai loại tín hiệu: tín hiệu liên tục  $c(t)$ ,  $u_R(t)$  và tín hiệu số  $r(kT)$ ,  $c_{ht}(kT)$ ,  $u(kT)$ . Trung tâm của hệ thống là máy tính số, máy tính có chức năng xử lý thông tin phản hồi từ cảm biến và xuất ra tín hiệu điều khiển đối tượng. Vì cảm biến và đối tượng là hệ thống liên tục nên cần sử dụng bộ chuyển đổi A/D và D/A để giao tiếp với máy tính. Do đó để phân tích và thiết kế hệ thống điều khiển số trước tiên ta phải mô tả toán học được quá trình chuyển đổi A/D và D/A. Tuy nhiên, hiện nay không có phương pháp nào cho phép mô tả chính xác quá trình chuyển đổi A/D và D/A do sai số lượng tử hóa biên độ, vì vậy thay vì khảo sát hệ thống số ở hình 7.1 ta khảo sát hệ rời rạc ở hình 7.2.



**Hình 7.2** Sơ đồ khối hệ thống điều khiển rời rạc

Trong quyển sách này, chúng ta phát triển các phương pháp phân tích và thiết kế hệ thống điều khiển liên tục cho hệ thống điều khiển rời rạc. Nếu độ phân giải của phép lượng tử hóa biên độ đủ nhỏ để có thể bỏ qua sai số thì ta có thể xem tín hiệu số là tín hiệu rời rạc, điều đó có nghĩa là lý thuyết điều khiển rời rạc trình bày trong quyển này hoàn toàn có thể áp dụng để phân tích và thiết kế các hệ thống điều khiển số.

### 7.1.2 Đặc điểm lấy mẫu



**Hình 7.3** Quá trình lấy mẫu dữ liệu

Lấy mẫu là biến đổi tín hiệu liên tục theo thời gian thành tín hiệu rời rạc theo thời gian. Xét bộ lấy mẫu có đầu vào là tín

hiệu liên tục  $x(t)$  và đầu ra là tín hiệu rời rạc  $x^*(t)$  (H.7.3). Quá trình lấy mẫu có thể mô tả bởi biểu thức toán học sau:

$$x^*(t) = x(t) \cdot s(t) \quad (7.1)$$

trong đó  $s(t)$  là chuỗi xung dirac:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \quad (7.2)$$

Thay (7.2) vào (7.1), đồng thời giả sử rằng  $x(t) = 0$  khi  $t < 0$ , ta được:

$$\begin{aligned} x^*(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} x(t) \delta(t - kT) \\ \Rightarrow x^*(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT) \delta(t - kT) \end{aligned} \quad (7.3)$$

Biến đổi Laplace hai vế phương trình (7.3) ta được:

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT) e^{-kTs} \quad (7.4)$$

Biểu thức (7.4) chính là biểu thức toán học mô tả quá trình lấy mẫu.

*Định lý Shannon:* Để có thể phục hồi dữ liệu sau khi lấy mẫu mà không bị méo dạng thì tần số lấy mẫu phải thỏa mãn điều kiện:

$$f = \frac{1}{T} \geq 2f_c \quad (7.5)$$

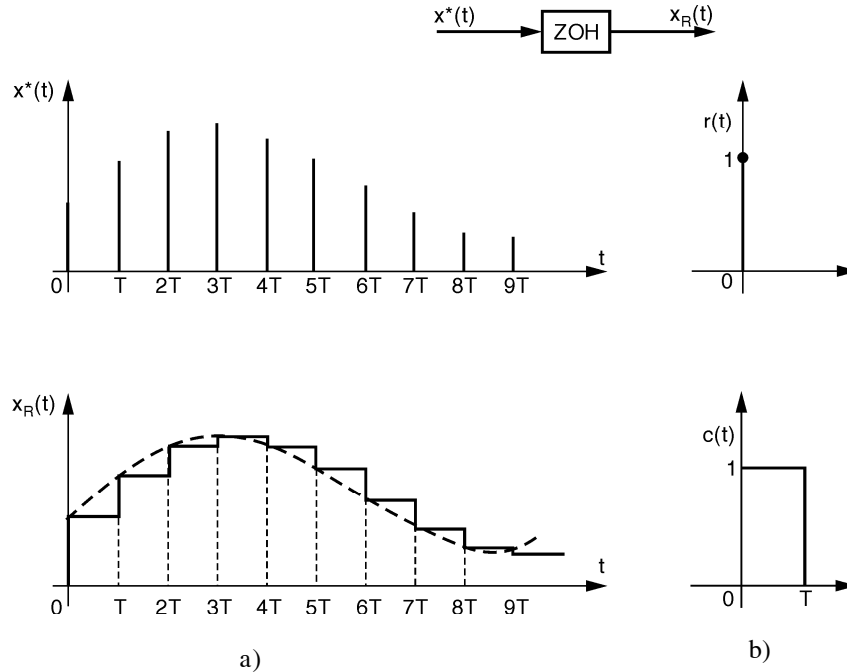
trong đó  $f_c$  là tần số cắt của tín hiệu cần lấy mẫu.

Trong các hệ thống điều khiển thực tế, nếu có thể bỏ qua được sai số lượng tử hóa thì các khâu chuyển đổi A/D chính là các khâu lấy mẫu.

### 7.1.3 Khâu giữ dữ liệu

Khâu giữ dữ liệu là khâu chuyển tín hiệu rời rạc theo thời gian thành tín hiệu liên tục theo thời gian.

Khâu giữ dữ liệu có nhiều dạng khác nhau, đơn giản nhất và được sử dụng nhiều nhất trong các hệ thống điều khiển rời rạc là khâu giữ bậc 0 (Zero-Order Hold - ZOH) (H.7.4).

**Hình 7.4** Khâu giữ bậc 0 (ZOH)

Ta tìm hàm truyền của khâu ZOH. Để ý rằng nếu tín hiệu vào của khâu ZOH là xung dirac thì tín hiệu ra là xung vuông có độ rộng bằng  $T$  (H.7.4b). Ta có:

$R(s) = 1$  (vì  $r(t)$  là hàm dirac)

$$C(s) = \mathcal{L}\{c(t)\} = \mathcal{L}\{u(t) - u(t-T)\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-Ts} = \frac{1-e^{-Ts}}{s}$$

Theo định nghĩa:  $G_{ZOH}(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$

$$\text{Do đó: } G_{ZOH}(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} = \frac{1-z^{-1}}{s} \quad (7.6)$$

Biểu thức (7.6) chính là hàm truyền của khâu giữ bậc 0. Trong các hệ thống điều khiển thực tế, nếu có thể bỏ qua được sai số lượng tử hóa thì các khâu chuyển đổi D/A chính là các khâu giữ bậc 0 (ZOH).

### Nhận xét

Bằng cách sử dụng phép biến đổi Laplace ta có thể mô tả quá trình lấy mẫu và giữ dữ liệu bằng các biểu thức toán học (7.4) và



(7.6). Tuy nhiên các biểu thức toán học này lại chứa hàm  $e^x$  nên nếu ta sử dụng để mô tả hệ rời rạc thì khi phân tích, thiết kế hệ thống sẽ gặp nhiều khó khăn. Ta cần mô tả toán học khác giúp khảo sát hệ thống rời rạc dễ dàng hơn, nhờ phép biến đổi Z trình bày dưới đây chúng ta sẽ thực hiện được điều này.

## 7.2 PHÉP BIẾN ĐỔI Z

### 7.2.1 Định nghĩa

Cho  $x(k)$  là chuỗi tín hiệu rời rạc. Biến đổi Z của  $x(k)$  là:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)z^{-k} \quad (7.7)$$

trong đó:  $z = e^{Ts}$  ( $s$  là biến Laplace)

Ký hiệu:  $x(k) \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)$

Nếu  $x(k) = 0, \forall k < 0$  thì biểu thức định nghĩa trở thành:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)z^{-k} \quad (7.8)$$

□ **Miền hội tụ** (*Region of Convergence - ROC*)

ROC là tập hợp tất cả các giá trị  $z$  sao cho  $X(z)$  hữu hạn.

□ **Ý nghĩa của phép biến đổi Z**

Giả sử  $x(t)$  là tín hiệu liên tục trong miền thời gian, lấy mẫu  $x(t)$  với chu kỳ lấy mẫu  $T$  ta được chuỗi rời rạc  $x(k) = x(kT)$ .

Biểu thức lấy mẫu  $x(t)$ :

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT)e^{-kTs} \quad (7.9)$$

Biểu thức biến đổi Z:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)z^{-k} \quad (7.10)$$

Vì  $z = e^{Ts}$  nên vế phải của hai biểu thức (7.9) và (7.10) là như nhau, do đó bản chất của việc biến đổi Z một tín hiệu chính là rời rạc hóa tín hiệu đó.

### □ Phép biến đổi Z ngược

Cho  $X(z)$  là hàm theo biến phức  $z$ . Biến đổi Z ngược của  $X(z)$  là:

$$x(k) = \frac{1}{2j\pi} \int_C X(z) z^{k-1} dz$$

với  $C$  là đường cong kín bất kỳ nằm trong miền hội tụ ROC của  $X(z)$  và bao gốc tọa độ.

## 7.2.2 Tính chất của phép biến đổi Z

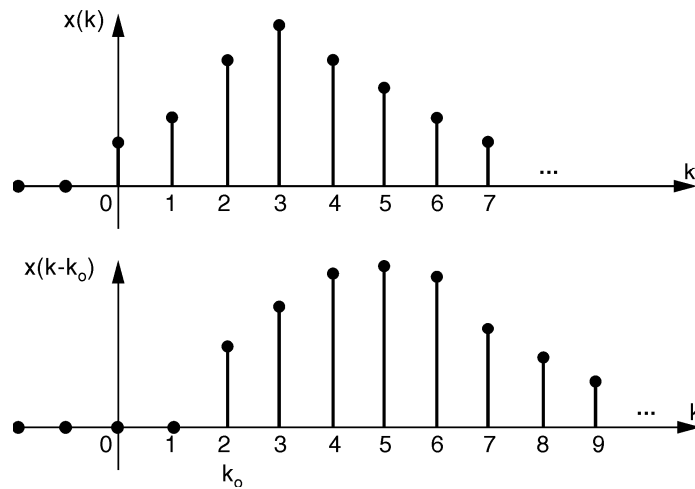
### 1- Tính tuyến tính

$$\text{Nếu: } x_1(k) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X_1(z)$$

$$x_2(k) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X_2(z)$$

$$\text{Thì: } a_1 x_1(k) + a_2 x_2(k) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z) \quad (7.11)$$

### 2- Dời trong miền thời gian



Hình 7.5 Làm trễ tín hiệu  $k_0$  mẫu

$$\text{Nếu: } x(k) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)$$

$$\text{thì: } x(k - k_0) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} z^{-k_0} X(z) \quad (7.12)$$

Nhận xét:

Nếu trong miền Z ta nhân  $X(z)$  với  $z^{-k_0}$  thì tương đương với trong miền thời gian là trễ tín hiệu  $x(k)$   $k_0$  chu kỳ lấy mẫu.

Vì  $x(k-1) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} z^{-1}X(z)$   
 nên  $z^{-1}$  được gọi là toán tử làm trễ một chu kỳ lấy mẫu.

### 3- Tỉ lệ trong miền Z

$$\begin{aligned} \text{Nếu: } & x(k) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) \\ \text{thì: } & a^k x(k) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(a^{-1}z) \end{aligned} \quad (7.13)$$

### 4- Đạo hàm trong miền Z

$$\begin{aligned} \text{Nếu: } & x(k) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) \\ \text{thì: } & kx(k) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} -z \frac{dX(z)}{dz} \end{aligned} \quad (7.14)$$

### 5- Định lý giá trị đầu

$$\begin{aligned} \text{Nếu: } & x(k) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) \\ \text{thì: } & x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \end{aligned} \quad (7.15)$$

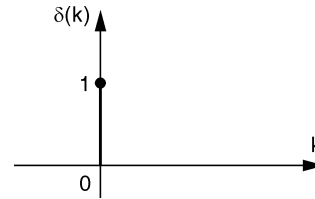
### 6- Định lý giá trị cuối:

$$\begin{aligned} \text{Nếu: } & x(k) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) \\ \text{thì: } & x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) X(z) \end{aligned} \quad (7.16)$$

## 7.2.3 Biến đổi Z của các hàm cơ bản

### 1- Hàm dirac

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } k = 0 \\ 0 & \text{nếu } k \neq 0 \end{cases}$$



Theo định nghĩa:

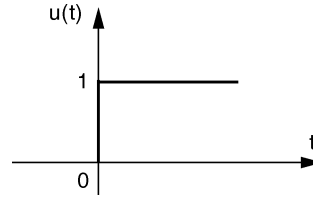
$$\mathcal{Z}\{\delta(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(k) z^{-k} = \delta(0) z^{-0} = 1$$

Vậy:  $\delta(k) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} 1$  (ROC: toàn bộ mặt phẳng Z)

**2- Hàm nấc đơn vị**

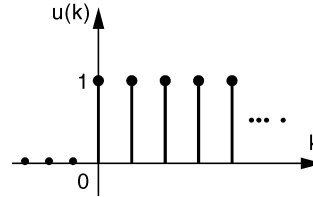
Hàm nấc đơn vị (liên tục trong miền thời gian):

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } t \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } t < 0 \end{cases}$$



Lấy mẫu  $u(t)$  với chu kỳ lấy mẫu là  $T$ , ta được:

$$u(k) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } k \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } k < 0 \end{cases}$$



Theo định nghĩa:

$$\mathcal{Z}\{u(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-\infty}$$

Nếu  $|z^{-1}| < 1$  thì biểu thức trên là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn. Áp dụng công thức tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn, ta dễ dàng suy ra:

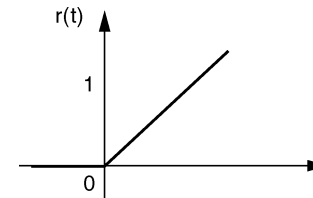
$$\mathcal{Z}\{u(k)\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

$$\text{Vậy: } u(k) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad (\text{ROC: } |z| > 1)$$

**3- Hàm dốc đơn vị**

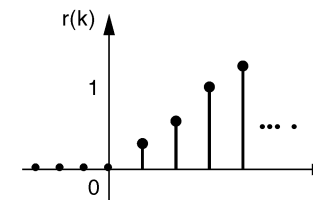
Hàm dốc đơn vị (liên tục trong miền thời gian):

$$r(t) = \begin{cases} t & \text{nếu } t \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } t < 0 \end{cases}$$



Lấy mẫu  $r(t)$  với chu kỳ lấy mẫu là  $T$ , ta được:

$$r(k) = \begin{cases} kT & \text{nếu } k \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } k < 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow r(k) = kTu(k)$$

Ta tìm biến đổi Z của  $r(k)$  bằng cách áp dụng tính chất tỉ lệ trong miền Z:

Ta có:

$$u(k) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$\Rightarrow ku(k) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} -z \frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{1-z^{-1}} \right\} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

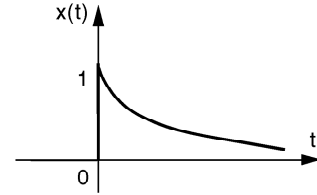
$$\Rightarrow kTu(k) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$\text{Vậy } r(k) = kTu(k) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{Tz}{(z-1)^2} \quad (\text{ROC: } |z| > 1)$$

#### 4- Hàm mũ

Hàm mũ liên tục trong miền thời gian:

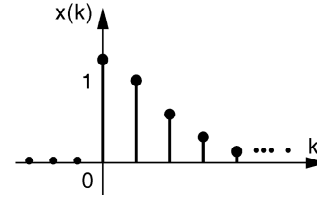
$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{nếu } t \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } t < 0 \end{cases}$$



Lấy mẫu  $r(t)$  với chu kỳ lấy mẫu là  $T$ , ta được:

$$x(k) = \begin{cases} e^{-kaT} & \text{nếu } k \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } k < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(k) = e^{-kaT} u(k)$$



Theo định nghĩa:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x(k)\} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) z^{-k} = 1 + e^{-aT} z^{-1} + \dots \\ &= 1 + (e^{aT} z)^{-1} + (e^{aT} z)^{-2} + \dots \end{aligned}$$

Nếu  $|(e^{aT} z)^{-1}| < 1$  thì biểu thức trên là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn. Áp dụng công thức tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn, ta suy ra:

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{1}{1 - (e^{aT} z)^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

$$\text{Vậy: } (e^{-kaT}) u(k) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 - (e^{aT} z)^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

$$(\text{ROC: } |e^{aT} z| > 1 \Leftrightarrow |z| > |e^{-aT}|)$$

Kết quả trên ta dễ dàng suy ra:

$$a^k u(k) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

#### 7.2.4 Các phương pháp tìm biến đổi Z ngược

Cho hàm  $X(z)$ , bài toán đặt ra là tìm  $x(k)$ . Theo công thức biến đổi Z ngược, ta có:

$$x(k) = \frac{1}{2j\pi} \int_C X(z) z^{k-1} dz$$

với  $C$  là đường cong kín bất kỳ nằm trong ROC của  $X(z)$  và bao gốc tọa độ.

Tìm  $x(k)$  bằng công thức trên rất phức tạp, thực tế ta thường áp dụng các cách sau:

**Cách 1: Phân tích  $X(z)$  thành tổng các hàm cơ bản, sau đó tra bảng biến đổi Z**

**Ví dụ 7.1.** Cho  $X(z) = \frac{z}{(z-2)(z-3)}$ . Tìm  $x(k)$ .

**Giải.** Phân tích  $X(z)$ , ta được:

$$X(z) = \frac{-z}{(z-2)} + \frac{z}{z-3}$$

Tra bảng biến đổi Z:

$$a^k u(k) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{z}{z-a}$$

Suy ra:  $x(k) = (-2^k + 3^k)u(k)$  ■

**Cách 2: Phân tích  $X(z)$  thành chuỗi lũy thừa**

Theo định nghĩa biến đổi  $z$ :

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) z^{-k} = x(0)z^0 + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \dots$$

Do đó nếu phân tích  $X(z)$  thành tổng của chuỗi lũy thừa ta sẽ được giá trị  $x(k)$  chính là hệ số của thành phần  $z^{-k}$ .

**Ví dụ 7.2.** Cho  $X(z) = \frac{z}{(z-2)(z-3)}$ . Tìm  $x(k)$ .

**Giải.** 
$$X(z) = \frac{z}{(z-2)(z-3)} = \frac{z}{z^2 - 5z + 6}$$

Chia đa thức, ta được:

$$X(z) = z^{-1} + 5z^{-2} + 19z^{-3} + 65z^{-4} + \dots$$

Suy ra:  $x(0) = 0; x(1) = 1; x(2) = 5; x(3) = 19; x(4) = 65, \dots$  ■

**Cách 3: Tính  $x(k)$  bằng công thức đệ qui**

**Ví dụ 7.3.** Cho  $X(z) = \frac{z}{(z-2)(z-3)}$ . Tìm  $x(k)$ .

**Giải.** Ta có: 
$$X(z) = \frac{z}{(z-2)(z-3)} = \frac{z}{z^2 - 5z + 6} = \frac{z^{-1}}{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}}$$

$$\Rightarrow (1 - 5z^{-1} + 6z^{-2})X(z) = z^{-1}$$

$$\Rightarrow X(z) - 5z^{-1}X(z) + 6z^{-2}X(z) = z^{-1}$$

Biến đổi Z ngược hai vế phương trình trên (để ý tính chất dời trong miền thời gian), ta được:

$$x(k) - 5x(k-1) + 6x(k-2) = \delta(k-1)$$

$$\Rightarrow x(k) = 5x(k-1) - 6x(k-2) + \delta(k-1)$$

Với điều kiện đầu:  $x(k-1) = 0; x(k-2) = 0$

Thay vào công thức trên ta tìm được:

$$x(0) = 0; x(1) = 1; x(2) = 5; x(3) = 19; x(4) = 65, \dots$$
 ■

**Cách 4: Áp dụng công thức thặng dư**

$$x(k) = \sum \text{Res} [z^{k-1}X(z)]_{\text{tại các cực của } z^{k-1}X(z)}$$

Nếu  $z_0$  là cực bậc một thì:

$$\text{Res} [z^{k-1}X(z)]_{z=z_0} = (z - z_0) z^{k-1}X(z) \Big|_{z=z_0}$$

Nếu  $z_0$  là cực bậc  $p$  thì:

$$\text{Res} [z^{k-1}X(z)]_{z=z_0} = \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} [(z - z_0)^p z^{k-1}X(z)]_{z=z_0}$$

**Ví dụ 7.4.** Cho  $X(z) = \frac{z}{(z-2)(z-3)}$ . Tìm  $x(k)$ .

**Giải.** Áp dụng công thức thặng dư, ta được:

$$x(k) = \operatorname{Res} \left[ z^{k-1} X(z) \right]_{z=2} + \operatorname{Res} \left[ z^{k-1} X(z) \right]_{z=3}$$

Mà:

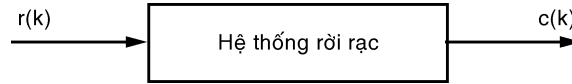
$$\begin{aligned} \square \operatorname{Res} \left[ z^{k-1} X(z) \right]_{z=2} &= (z-2) z^{k-1} X(z) \Big|_{z=2} \\ &= (z-2) z^{k-1} \frac{z}{(z-2)(z-3)} \Big|_{z=2} = \frac{z^k}{(z-3)} \Big|_{z=2} = -2^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \square \operatorname{Res} \left[ z^{k-1} X(z) \right]_{z=3} &= (z-3) z^{k-1} X(z) \Big|_{z=3} \\ &= (z-3) z^{k-1} \frac{z}{(z-2)(z-3)} \Big|_{z=3} = \frac{z^k}{(z-2)} \Big|_{z=3} = 3^k \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } x(k) = -2^k + 3^k \quad \blacksquare$$

## 7.3 MÔ TẢ HỆ THỐNG RỜI RẠC BẰNG HÀM TRUYỀN

### 7.3.1 Hàm truyền của hệ rời rạc



Quan hệ giữa tín hiệu vào và tín hiệu ra của hệ thống rời rạc được mô tả bằng phương trình sai phân:

$$\begin{aligned} a_0 c(k+n) + a_1 c(k+n-1) + \dots + a_{n-1} c(k+1) + a_n c(k) &= \\ = b_0 r(k+m) + b_1 r(k+m-1) + \dots + b_{m-1} r(k+1) + b_m r(k) \end{aligned} \quad (7.17)$$

trong đó  $n \geq m$ ,  $n$  gọi là bậc của hệ thống rời rạc

Biến đổi  $z$  hai vế phương trình (7.17) ta được:

$$\begin{aligned} a_0 z^n C(z) + a_1 z^{n-1} C(z) + \dots + a_{n-1} z C(z) + a_n C(z) &= \\ = b_0 z^m R(z) + b_1 z^{m-1} R(z) + \dots + b_{m-1} z R(z) + b_m R(z) \\ \Leftrightarrow [a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n] C(z) &= \\ = [b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m] R(z) \end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n}$$

$$\text{Đặt: } G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n} \quad (7.18)$$

$G(z)$  được gọi là hàm truyền của hệ thống rời rạc.

Hàm truyền (7.18) có thể biến đổi tương đương về dạng:

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{z^{-(n-m)} [b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{m-1} z^{-m+1} + b_m z^{-m}]}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n-1} z^{-n+1} + a_n z^{-n}} \quad (7.19)$$

Hai cách biểu diễn trên hoàn toàn tương đương nhau, trong thực tế hàm truyền dạng thứ hai được sử dụng nhiều hơn.

**Ví dụ 7.5.** Cho hệ thống rời rạc mô tả bởi phương trình sai phân:

$$c(k+3) + 2c(k+2) - 5c(k+1) + 3c(k) = 2r(k+2) + r(k)$$

Tìm hàm truyền của hệ thống.

**Giải.** Biến đổi Z hai vế phương trình sai phân mô tả hệ thống, ta được:  $z^3 C(z) + 2z^2 C(z) - 5z C(z) + 3C(z) = 2z^2 R(z) + R(z)$

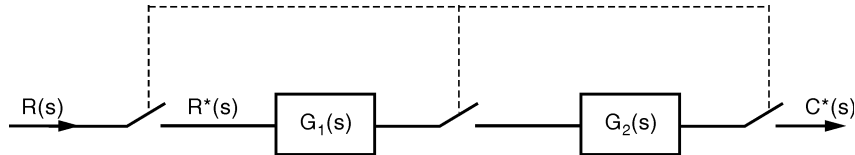
$$\Rightarrow G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{2z^2 + 1}{z^3 + 2z^2 - 5z + 3}$$

$$\Leftrightarrow G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{z^{-1}(2 + z^{-2})}{1 + 2z^{-1} - 5z^{-2} + 3z^{-3}}$$

### 7.3.2. Tính hàm truyền hệ rời rạc từ sơ đồ khối

Khi thêm vào hệ thống liên tục các khâu lấy mẫu, khâu giữ dữ liệu (và bộ điều khiển số) ta được hệ thống điều khiển rời rạc. Bài toán đặt ra là tìm hàm truyền hệ rời rạc theo biến  $z$  từ sơ đồ khối có các khâu lấy mẫu. Xét một số sơ đồ thường gặp sau đây:

#### 1- Hai khâu nối tiếp cách nhau bởi khâu lấy mẫu



**Hình 7.6** Hai khâu nối tiếp cách nhau bởi khâu lấy mẫu

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = G_1(z)G_2(z) \quad (7.20)$$

trong đó:  $G_1(z) = \mathcal{Z}\{G_1(s)\}$ ;  $G_2(z) = \mathcal{Z}\{G_2(s)\}$

**Ví dụ 7.6.** Cho  $G_1(s) = \frac{1}{s+a}$  và  $G_2(s) = \frac{1}{s+b}$ . Tìm hàm truyền tương đương của hai hệ thống có sơ đồ khối ở hình 7.6.

**Giải.** Tra bảng biến đổi Z, ta có:

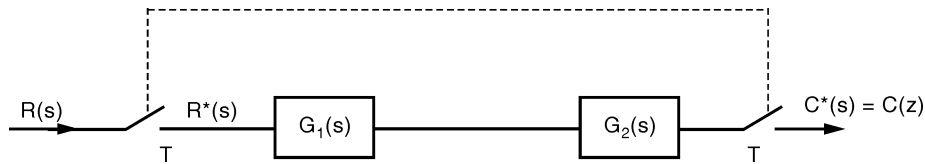
$$G_1(z) = \mathcal{Z}\{G_1(s)\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

$$G_2(z) = \mathcal{Z}\{G_2(s)\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s+b}\right\} = \frac{z}{z - e^{-bT}}$$

Do đó dễ dàng suy ra:

$$G_1(z)G_2(z) = \frac{z^2}{(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})} \quad \blacksquare$$

## 2- Hai khâu nối tiếp không cách nhau bởi khâu lấy mẫu



**Hình 7.7** Hai khâu nối tiếp không cách nhau bởi khâu lấy mẫu

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = G_1G_2(z) \quad (7.21)$$

trong đó:  $G_1G_2 = \mathcal{Z}\{G_1(s)G_2(s)\}$

Cần chú ý là:

$$G_1(z)G_2(z) = \mathcal{Z}\{G_1(s)\}\mathcal{Z}\{G_2(s)\} \neq \mathcal{Z}\{G_1(s)G_2(s)\} = G_1G_2(z)$$

Ví dụ 7.7 sẽ minh họa điều này.

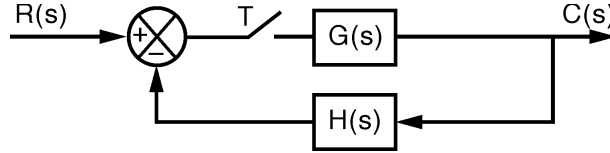
**Ví dụ 7.7.** Cho  $G_1(s) = \frac{1}{s+a}$  và  $G_2(s) = \frac{1}{s+b}$ . Tìm hàm truyền tương đương của hai hệ thống có sơ đồ khối ở hình 7.7.

**Giải.** Tra bảng biến đổi z, ta có:

$$\begin{aligned}
G_1 G_2(z) &= \mathcal{Z}\{G_1(s)G_1(s)\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{(s+a)(s+b)}\right\} \\
&= \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{(b-a)(s+a)} + \frac{1}{(a-b)(s+b)}\right\} \\
&= \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{(b-a)(s+a)}\right\} + \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{(a-b)(s+b)}\right\} \\
&= \frac{1}{(b-a)} \frac{z}{(z-e^{-aT})} + \frac{1}{(a-b)} \frac{z}{(z-e^{-bT})} \\
\Rightarrow G_1 G_2(z) &= \frac{z(e^{-bT} - e^{-aT})}{(b-a)(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}
\end{aligned}$$

Rõ ràng kết quả tính hàm truyền tương đương của hai hệ thống ở ví dụ 7.6 và 7.7 hoàn toàn khác nhau. ■

### 3- Hệ thống hồi tiếp có khâu lấy mẫu trong kênh sai số



**Hình 7.8** Hệ thống hồi tiếp có khâu lấy mẫu trong kênh sai số

$$G_k(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} \quad (7.22)$$

trong đó:  $G(z) = \mathcal{Z}\{G(s)\}$ ;  $GH(z) = \mathcal{Z}\{G(s).H(s)\}$

Trường hợp  $H(s) = 1$  (hệ thống hồi tiếp âm đơn vị) ta có:

$$G_k(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)} \quad (7.23)$$

**Ví dụ 7.8.** Cho  $G(s) = \frac{1}{s+a}$  và  $H(s) = \frac{1}{s+b}$ . Tìm hàm truyền tương đương của hai hệ thống có sơ đồ khối ở hình 7.7.

**Giải.** Thực hiện phép biến đổi Z tương tự như đã làm ở ví dụ 7.6 và 7.7, ta dễ dàng tính được:

$$G(z) = \mathcal{Z}\{G(s)\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = \frac{z}{z-e^{-aT}}$$

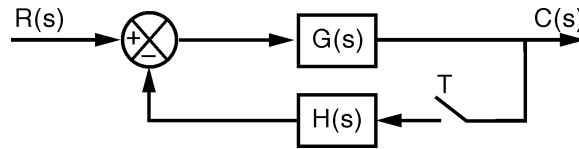
$$GH(z) = \mathcal{Z}\{G(s)H(s)\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s+a} \frac{1}{s+b}\right\} = \frac{z(e^{-bT} - e^{-aT})}{(b-a)(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})}$$

Thay vào công thức (7.22) ta được:

$$G_k(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} = \frac{\frac{z}{(z - e^{-aT})}}{1 + \frac{z(e^{-bT} - e^{-aT})}{(b-a)(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})}}$$

$$\Rightarrow G_k(z) = \frac{(b-a)(z - e^{-bT})z}{(b-a)(z - e^{-aT})(z - e^{-bT}) + z(e^{-bT} - e^{-aT})} \quad \blacksquare$$

#### 4- Hệ thống hồi tiếp có khâu lấy mẫu trong vòng hồi tiếp



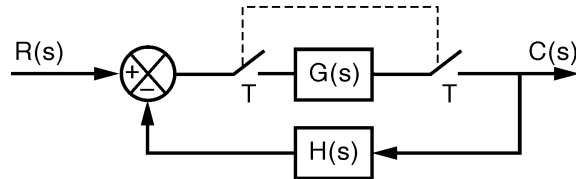
**Hình 7.9** Hệ thống hồi tiếp có khâu lấy mẫu trong vòng hồi tiếp

Trường hợp này không tìm được biểu thức hàm truyền, quan hệ giữa tín hiệu vào và tín hiệu ra như sau:

$$C(z) = \frac{RG(z)}{1 + GH(z)} \quad (7.24)$$

trong đó:  $RG(z) = \mathcal{Z}\{R(s)G(s)\}$ ;  $GH(z) = \mathcal{Z}\{G(s)H(s)\}$

#### 5- Hệ thống hồi tiếp có các khâu lấy mẫu đồng bộ trong nhánh thuận

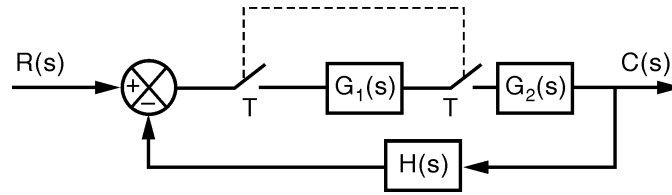


**Hình 7.10** Hệ thống hồi tiếp có các khâu lấy mẫu đồng bộ trong nhánh thuận

$$G_k(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)} \quad (7.25)$$

trong đó:  $G(z) = \mathcal{Z}\{G(s)\}$ ;  $H(z) = \mathcal{Z}\{H(s)\}$

**6- Hệ thống hồi tiếp có các khâu lấy mẫu đồng bộ và các khâu nối tiếp ở nhánh thuận**



**Hình 7.11** Hệ thống hồi tiếp có các khâu lấy mẫu đồng bộ và các khâu nối tiếp ở nhánh thuận

$$G_k(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_1(z)G_2(z)}{1 + G_1(z)G_2H(z)}$$

trong đó:  $G_1(z) = \mathcal{Z}\{G_1(s)\}$ ;  $G_2(z) = \mathcal{Z}\{G_2(s)\}$

$$G_2H(z) = \mathcal{Z}\{G_2(s)H(s)\}$$

**7- Sơ đồ dòng tín hiệu - Công thức Mason cho hệ rời rạc**

Có thể mở rộng khái niệm sơ đồ dòng tín hiệu đã trình bày trong chương 2 cho hệ liên tục để áp dụng vào hệ rời rạc với một vài thay đổi nhỏ. Để sử dụng công thức Mason cho hệ rời rạc cần để ý các nguyên tắc sau đây:

□ Nếu không có bộ lấy mẫu giữa đầu vào  $R(s)$  và khâu đầu tiên trong vòng thuận (ví dụ  $G(s)$ ) thì không thể tách biệt biến đổi  $Z$  của đầu vào và khâu đầu tiên và ta luôn có số hạng  $RG(z)$ . Do đó trong trường hợp này không thể tính được hàm truyền bằng tỉ lệ giữa biến đổi  $Z$  tín hiệu ra và tín hiệu vào của hệ thống.

□ Nếu một khâu trong vòng thuận hay trong vòng hồi tiếp phân biệt với đầu vào, đầu ra của hệ thống và với các khâu khác bởi các bộ lấy mẫu ở đầu vào và đầu ra của nó hoàn toàn độc lập về biến đổi  $Z$ .

□ Nếu một khâu trong vòng thuận hay vòng hồi tiếp không phân biệt với các khâu kế cận hay với đầu vào của hệ thống bởi bộ lấy mẫu thì phải thực hiện phép biến đổi  $Z$  của hàm truyền kết hợp của hai khâu hay giữa khâu đó với đầu vào.

Dùng lý thuyết Mason và ba nguyên tắc trên cho hệ rời rạc, độc giả có thể kiểm chứng được các công thức tính hàm truyền đã

dẫn ra trong mục 7.3.2 này.

## 7.4 MÔ TẢ HỆ THỐNG RỜI RẠC BẰNG PHƯƠNG TRÌNH TRẠNG THÁI

### 7.4.1 Thành lập phương trình trạng thái từ phương trình sai phân

#### 1- Vế phải của phương trình sai phân không chứa sai phân của tín hiệu vào

Xét hệ thống rời rạc có quan hệ giữa tín hiệu vào và tín hiệu ra mô tả bởi phương trình sai phân:

$$c(k+n) + a_1c(k+n-1) + \dots + a_{n-1}c(k+1) + a_nc(k) = b_or(k) \quad (7.26)$$

*Chú ý:* Ở phương trình trên hệ số  $a_o = 1$ . Nếu  $a_o \neq 1$  ta chia hai vế cho  $a_o$  để được phương trình sai phân có dạng (7.26).

Tương tự như đã làm đối với hệ liên tục, ta đặt các biến trạng thái để biến đổi tương đương phương trình sai phân bậc  $n$  ở trên thành hệ  $n$  phương trình sai phân bậc một.

Đặt các biến trạng thái như sau:

$$x_1(k) = c(k)$$

$$x_2(k) = x_1(k+1) \Rightarrow x_2(k) = c(k+1)$$

$$x_3(k) = x_2(k+1) \Rightarrow x_3(k) = c(k+2)$$

...

$$x_n(k) = x_{n-1}(k+1) \Rightarrow x_n(k) = c(k+n-1) \Rightarrow x_n(k+1) = c(k+n)$$

Thay vào phương trình (7.26) ta được:

$$x_n(k+1) + a_1x_n(k) + \dots + a_{n-1}x_2(k) + a_nx_1(k) = b_or(k)$$

$$\Rightarrow x_n(k+1) = -a_1x_n(k) - \dots - a_{n-1}x_2(k) - a_nx_1(k) + b_or(k)$$

Kết hợp phương trình trên với các biểu thức đặt biến trạng thái ta được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_3(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) = x_n(k) \\ x_n(k+1) = -a_1x_n(k) - \dots - a_{n-1}x_2(k) - a_nx_1(k) + b_or(k) \end{cases}$$

Viết lại dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} \mathbf{r}(k)$$

Đáp ứng của hệ thống:

$$c(k) = x_1(k) = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

Đặt:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_d = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]$$

Ta được hệ phương trình biến thái:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d r(k) \\ c(k) = \mathbf{C}_d \mathbf{x}(k) \end{cases} \quad \blacksquare$$

**Ví dụ 7.9.** Cho hệ thống điều khiển rời rạc mô tả bởi phương trình sai phân:  $2c(k+3) = c(k+2) + 5c(k+1) + 4c(k) = 3r(k)$

Hãy viết hệ phương trình biến trạng thái mô tả hệ thống.

**Giải.** Ta có:  $2c(k+3) = c(k+2) + 5c(k+1) + 4c(k) = 3r(k)$

$$\Leftrightarrow c(k+3) + 0,5c(k+2) + 2,5c(k+1) + 2c(k) = 1,5r(k)$$



Đặt biến trạng thái như sau:

$$x_1(k) = c(k)$$

$$x_2(k) = x_1(k+1)$$

$$x_3(k) = x_2(k+1)$$

Hệ phương trình biến trạng thái mô tả hệ thống đã cho là:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d r(k) \\ c(k) = \mathbf{C}_d \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

trong đó:  $\sqcup \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$

$$\sqcup \mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2,5 & -0,5 \end{bmatrix}$$

$$\sqcup \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,5 \end{bmatrix}$$

$$\sqcup \mathbf{C}_d = [1 \ 0 \ 0]$$

## 2- Vế phải của phương trình sai phân có chứa sai phân của tín hiệu vào

Xét hệ thống rời rạc có quan hệ giữa tín hiệu vào và tín hiệu ra mô tả bởi phương trình sai phân:

$$\begin{aligned} c(k+n) + a_1 c(k+n-1) + \dots + a_{n-1} c(k+1) + a_n c(k) = \\ = b_o r(k+n) + b_1 r(k+n-1) + \dots + b_{n-1} r(k+1) + b_n r(k) \end{aligned} \quad (7.27)$$

*Chú ý:* Ở phương trình trên hệ số  $a_o = 1$ . Nếu  $a_o \neq 1$  ta chia hai vế cho  $a_o$  để được phương trình sai phân có dạng (7.27)

Đặt các biến trạng thái như sau:

$$x_1(k) = c(k) - \beta_o r(k)$$

$$x_2(k) = x_1(k+1) - \beta_1 r(k)$$

$$x_3(k) = x_2(k+1) - \beta_2 r(k)$$

...

$$x_n(k) = x_{n-1}(k+1) - \beta_{n-1} r(k)$$

Từ cách đặt biến trạng thái trên ta rút ra phương trình sau:

$$\Rightarrow x_n(k+1) = -a_n x_1(k) - a_{n-1} x_2(k) - \dots - a_1 x_n(k) + \beta_n r(k)$$

trong đó:

$$\beta_0 = b_0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1 \beta_0$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0$$

$$\beta_3 = b_3 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_0$$

$$\beta_4 = b_4 - a_1 \beta_3 - a_2 \beta_2 - a_3 \beta_1 - a_4 \beta_0$$

...

$$\beta_n = b_n - a_1 \beta_{n-1} - a_2 \beta_{n-2} - a_3 \beta_{n-3} - a_4 \beta_{n-4} - \dots - a_{n-1} \beta_1 - a_n \beta_0$$

Do đó hệ phương trình biến trạng thái mô tả hệ thống có dạng:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d r(k) \\ c(k) = \mathbf{C}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_d r(k) \end{cases}$$

trong đó:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_d = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0] \quad \mathbf{D}_d = \beta_0.$$

**Ví dụ 7.10.** Cho hệ thống rời rạc mô tả bởi phương trình sai phân:

$$2c(k+3) + c(k+2) + 5c(k+1) + 4c(k) = r(k+2) + 3r(k)$$

Hãy viết hệ phương trình trạng thái mô tả hệ thống trên.

**Giải.** Ta có:

$$2c(k+3) + c(k+2) + 5c(k+1) + 4c(k) = r(k+2) + 3r(k)$$

$$\Leftrightarrow c(k+3) + 0,5c(k+2) + 2,5c(k+1) + 2c(k) = 0,5r(k+2) + 1,5r(k)$$

Đặt các biến trạng thái:

$$x_1(k) = c(k) - \beta_o r(k)$$

$$x_2(k) = x_1(k+1) - \beta_1 r(k)$$

$$x_3(k) = x_2(k+1) - \beta_2 r(k)$$

$$\Rightarrow x_3(k+1) = -a_3 x_1(k) - a_2 x_2(k) - a_1 x_3(k) + \beta_3 r(k)$$

trong đó:

$$\beta_o = b_o = 0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1 \beta_o = 0,5 \times 0 = 0,5$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_o = 0 - 0,5 \times 0,5 - 2,5 \times 0 = -0,25$$

$$\beta_3 = b_3 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_o = 1,5 = 0,5 \times (-0,25) - 2,5 \times 0,5 = 0,375$$

Hệ phương trình biến trạng thái có dạng:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d r(k) \\ c(k) = \mathbf{C}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_d r(k) \end{cases}$$

trong đó:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2,5 & -0,5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0,5 \\ -0,25 \\ 0,375 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_d = [1 \quad 0 \quad 0] \quad \mathbf{D}_d = 0 \quad \blacksquare$$

#### 7.4.2 Thành lập phương trình trạng thái từ hàm truyền hệ rời rạc

Cho hệ thống mô tả bởi hàm truyền:

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{b_o z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n} \quad (7.28)$$

*Chú ý:* Ở hàm truyền trên hệ số  $a_o = 1$ . Nếu  $a_o \neq 1$  ta chia tử số và mẫu số cho  $a_o$  để được hàm truyền có dạng (7.28).

*Cách 1:* Biến đổi tương đương hàm truyền về dạng phương trình sai phân:

$$\begin{aligned}
(7.28) &\Leftrightarrow (z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n) C(z) \\
&= (b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m) R(z) \\
&\Leftrightarrow c(k+n) + a_1 c(k+n-1) + \dots + a_{n-1} c(k+1) + a_n c(k) = \\
&= b_0 r(k+m) + b_1 r(k+m-1) + \dots + b_{m-1} r(k+1) + b_m r(k)
\end{aligned}$$

Áp dụng phương pháp đã trình bày ở mục 7.4.1.2 ta rút ra được hệ phương trình biến trạng thái.

**Ví dụ 7.11.** Hãy thành lập hệ phương trình trạng thái mô tả hệ thống có hàm truyền là:

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{z^2 + 3}{2z^3 + z^2 + 5z + 4}$$

**Giải.** *Cách 1:* Hàm truyền đã cho tương đương với:

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0,5z^2 + 1,5}{z^3 + 0,5z^2 + 2,5z + 2}$$

$$\Leftrightarrow (z^3 + 0,5z^2 + 2,5z + 2)C(z) = (0,5z^2 + 1,5)R(z)$$

$$\Leftrightarrow c(k+3) + 0,5c(k+2) + 2,5c(k+1) + 2c(k) = 0,5r(k+2) + 1,5r(k)$$

xem tiếp lời giải đã trình bày ở ví dụ 7.10.

$$\text{Cách 2: Do } G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n}$$

nên ta có thể đặt biến phụ  $E(z)$  sao cho:

$$C(z) = (b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m) E(z) \quad (7.29)$$

$$R(z) = (z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n) E(z) \quad (7.30)$$

$$(7.30) \Rightarrow e(k+n) + a_1 e(k+n-1) + \dots + a_{n-1} e(k+1) + a_n e(k) = r(k)$$

Áp dụng phương pháp đã trình bày ở mục 7.4.1.1, đặt các biến trạng thái:

$$x_1(k) = e(k)$$

$$x_2(k) = x_1(k+1) \Rightarrow x_2(k) = e(k+1)$$

$$x_3(k) = x_2(k+1) \Rightarrow x_3(k) = e(k+2)$$

...

$$x_n(k) = x_{n-1}(k+1) \Rightarrow x_n(k) = e(k+n-1) \Rightarrow x_n(k+1) = e(k+n)$$

Ta được phương trình:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k)$$

$$(7.29) \Rightarrow c(k) = b_o e(k+m) = b_1 e(k+m-1) + \dots + b_{m-1} e(k+1) + b_m e(k)$$

$$\Rightarrow c(k) = b_o x_{m+1}(k) + b_1 b_m(k) + \dots + b_{m-1} x_2(k) + b_m x_1(k)$$

$$\Rightarrow c(k) = \begin{bmatrix} b_m & b_{m-1} & \dots & b_1 & b_o & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

Tóm lại ta được hệ phương trình trạng thái:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d(k) \\ c(k) = \mathbf{C}_d \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

trong đó:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_d = c(k) = \begin{bmatrix} b_m & b_{m-1} & \dots & b_1 & b_o & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

■

**Ví dụ 7.12.** Cho hệ thống mô tả bởi hàm truyền:

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{z^2 + 3}{2z^3 + z^2 + 5z + 4}$$

Hãy thành lập hệ phương trình trạng thái.

**Giải.** Hàm truyền đã cho tương đương với:

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0,5z^2 + 1,5}{z^3 + 0,5z^2 + 2,5z + 2}$$

Đặt biến phụ  $E(z)$  sao cho:

$$\begin{cases} C(z) = (0,5z^2 + 1,5)E(z) \\ R(z) = (z^3 + 0,5z^2 + 2,5z + 2)E(z) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c(k) = 0,5c(k+2) + 1,5c(k) \\ r(k) = e(k+3) + 0,5e(k+2) + 2,5e(k+1) + 2e(k) \end{cases}$$

Đặt biến trạng thái:

$$\begin{aligned} x_1(k) &= e(k) \\ x_2(k) &= x_1(k+1) \\ x_3(k) &= x_2(k+1) \end{aligned}$$

Ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d r(k) \\ c(k) = \mathbf{D}_d \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

trong đó:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2,5 & -0,5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_d = [b_2 \quad b_1 \quad b_0] = [1,5 \quad 0 \quad 0,5] \quad \blacksquare$$

**Ví dụ 7.13.** Hãy thành lập hệ phương trình trạng thái mô tả hệ thống có hàm truyền là:

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{2z + 1}{z^4 + 2z^3 + z^2 + 5z + 3}$$

**Giải.** Đặt biến phụ  $E(z)$  sao cho:

$$\begin{cases} C(z) = (2z + 1)E(z) \\ R(z) = (z^4 + 2z^3 + z^2 + 5z + 3)E(z) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c(k) = 2e(k+1) + e(k) \\ r(k) = e(k+4) + 2e(k+3) + e(k+2) + 5e(k+1) + 3e(k) \end{cases}$$

Đặt biến trạng thái:

$$x_1(k) = e(k)$$

$$x_2(k) = x_1(k+1)$$

$$x_3(k) = x_2(k+1)$$

$$x_4(k) = x_3(k+1)$$

Ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d r(k) \\ c(k) = \mathbf{C}_d \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

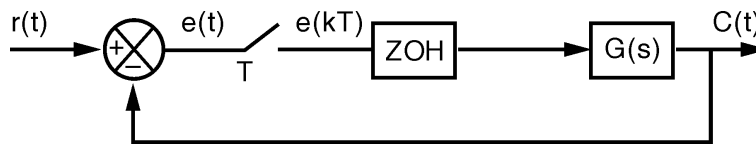
trong đó:

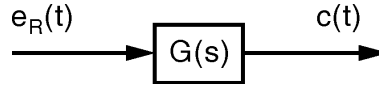
$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -5 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_d = [b_1 \quad b_0 \quad 0 \quad 0] = [1 \quad 2 \quad 0 \quad 0]$$

### 7.4.3 Thành lập phương trình trạng thái hệ rời rạc từ phương trình trạng thái hệ liên tục

Phương pháp này chỉ áp dụng được cho hệ thống có sơ đồ khối như sau:



**Trình tự thành lập phương trình trạng thái****Bước 1:** Thành lập hệ phương trình biến trạng thái liên tục:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}e_R(t) \\ c(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

**Bước 2:** Tính ma trận quá độ của hệ liên tục:

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)]$$

với:  $\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$

**Bước 3:** Rời rạc hóa phương trình biến trạng thái ở bước 1, ta được:

$$\begin{cases} \mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{A}_d\mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}_de_R(kT) \\ c(kT) = \mathbf{C}_d\mathbf{x}(kT) \end{cases}$$

trong đó: 
$$\begin{cases} \mathbf{A}_d = \Phi(T) \\ \mathbf{B}_d = \int_0^T \Phi(\tau) \mathbf{B} d\tau \\ \mathbf{C}_d = \mathbf{C} \end{cases}$$

**Bước 4:** Hệ phương trình biến trạng thái của hệ rời rạc cần tìm với tín hiệu vào  $r(kT)$  là:

$$\begin{cases} \mathbf{x}[(k+1)T] = [\mathbf{A}_d - \mathbf{B}_d\mathbf{C}_d]\mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}_dr(kT) \\ c(kT) = \mathbf{C}_d\mathbf{x}(kT) \end{cases}$$

Chứng minh: *Bước 1* và *bước 2* thành lập phương trình trạng thái và tính ma trận quá độ của hệ liên tục không có gì phải chứng minh. Ta chứng minh từ *bước 3*, ở bước này ta suy ra phương trình trạng thái của hệ rời rạc từ phương trình trạng thái của hệ liên tục.

*Bước 3:* Ở chương 2, ta đã biết nghiệm của phương trình trạng thái hệ liên tục cho bởi công thức:



$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(\tau) \mathbf{B} e_R(\tau) d\tau$$

$$\text{Tổng quát: } \mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_o) \mathbf{x}(t_o) + \int_{t_o}^t \Phi(\tau - t_o) \mathbf{B} e_R(\tau) d\tau$$

$$\text{Áp dụng công thức trên với: } \begin{cases} t_o = kT \\ t = (k+1)T \end{cases}$$

$$\text{Ta được: } \mathbf{x}[(k+1)T] = \Phi(T) \mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi(\tau - kT) \mathbf{B} e_R(\tau) d\tau$$

$$\text{Ta lại có: } e_R(\tau) = e(kT), \forall \tau: kT \leq \tau < (k+1)T$$

(do  $e_R(\tau)$  là tín hiệu ở ngõ ra của khâu giữ ZOH)

Thay vào công thức trên, ta được:

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \Phi(T) \mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi(\tau - kT) \mathbf{B} e(kT) d\tau$$

Do  $e(kT)$  không phụ thuộc vào biến lấy tích phân  $\tau$  nên:

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \Phi(T) \mathbf{x}(kT) + \left( \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi(\tau - kT) \mathbf{B} d\tau \right) e(kT)$$

Đổi biến phép tính lấy tích phân, ta được:

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \underbrace{\Phi(T)}_{\mathbf{A}_d} \mathbf{x}(kT) + \underbrace{\left( \int_0^T \Phi(\tau) \mathbf{B} d\tau \right)}_{\mathbf{B}_d} e_R(kT) \quad (7.31)$$

Rời rạc hóa phương trình ngõ ra của hệ liên tục, ta được:

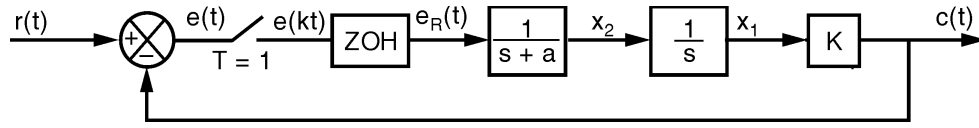
$$c(kT) = \mathbf{C}_d \mathbf{x}(kT)$$

*Bước 4:* Theo sơ đồ khối của hệ thống, ta thấy:

$$e(kT) = r(kT) - c(kT) = r(kT) - \mathbf{C}_d \mathbf{x}(kT)$$

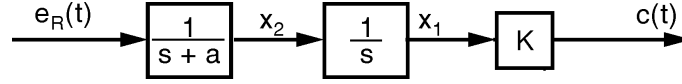
Thay vào (7.31) ta được kết quả cần chứng minh.

**Ví dụ 7.14.** Cho hệ thống rời rạc có sơ đồ như hình vẽ. Hãy thành lập hệ phương trình biến trạng thái mô tả hệ thống với các biến trạng thái được xác định trên hình vẽ.



**Giải**

*Bước 1:* Thành lập hệ phương trình biến trạng thái mô tả hệ liên tục:



Theo hình vẽ ta có:

$$\begin{aligned} \square X_1(s) &= \frac{X_2(s)}{s} \quad \Rightarrow \quad sX_1(s) = X_2(s) \\ &\Rightarrow \quad \dot{x}_1(t) = x_2(t) \end{aligned} \quad (7.32)$$

$$\begin{aligned} \square X_2(s) &= \frac{E_R(s)}{s+a} \quad \Rightarrow \quad (s+a)X_2(s) = E_R(s) \\ &\Rightarrow \quad \dot{x}_2(t) + ax_2(t) = e_R(t) \\ &\Rightarrow \quad \dot{x}_2(t) = -ax_2(t) + e_R(t) \end{aligned} \quad (7.33)$$

Kết hợp (7.32) và (7.33) ta được hệ phương trình:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -ax_2(t) + e_R(t) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e_R(t) \\ &\Leftrightarrow \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}e_R(t) \end{aligned} \quad (7.34)$$

Đáp ứng của hệ thống:

$$c(t) = Kx_1(t) = \begin{bmatrix} K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

$$\text{Do đó:} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} K & 0 \end{bmatrix}$$

*Bước 2:* Tính ma trận quá độ:

$$\square \Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \left( s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \right)^{-1} = \left( \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+a \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{s(s+a)} \begin{bmatrix} s+a & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+a)} \\ 0 & \frac{1}{s+a} \end{bmatrix} \\
\sqcup \Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)] &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+a)} \\ 0 & \frac{1}{s+a} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} & \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+a)}\right\} \\ 0 & \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} \end{bmatrix} \\
\Rightarrow \Phi(t) &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{a}(1-e^{-at}) \\ 0 & e^{-at} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

*Bước 3:* Rời rạc hóa các phương trình trạng thái của hệ liên tục, ta được:

$$\begin{cases} \mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{A}_d(kT) + \mathbf{B}_d e_R(kT) \\ c(kT) = \mathbf{C}_d \mathbf{x}(kT) \end{cases}$$

trong đó:

$$\begin{aligned}
\sqcup \mathbf{A}_d = \Phi(T) &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{a}(1-e^{-aT}) \\ 0 & e^{-aT} \end{bmatrix}_{t=T} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{a}(1-e^{-aT}) \\ 0 & e^{-aT} \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_d &= \int_0^T \Phi(\tau) \mathbf{B} d\tau = \int_0^T \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{a}(1-e^{-a\tau}) \\ 0 & e^{-a\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau \right\} = \int_0^T \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{a}(1-e^{-a\tau}) \\ e^{-a\tau} \end{bmatrix} d\tau \right\} \\
&= \begin{bmatrix} \left( \frac{\tau}{a} + \frac{e^{-a\tau}}{a^2} \right) \\ -\frac{e^{-a\tau}}{a} \end{bmatrix}_0^T = \begin{bmatrix} \left( \frac{T}{a} + \frac{e^{-aT}}{a^2} - \frac{1}{a^2} \right) \\ -\frac{e^{-aT}}{a} + \frac{1}{a} \end{bmatrix} \\
\sqcup \mathbf{C}_d = \mathbf{C} &= [K \quad 0]
\end{aligned}$$

*Bước 4:* Hệ phương trình biến trạng thái mô tả hệ thống rời rạc với tín hiệu vào  $r(kT)$  là:

$$\begin{cases} \mathbf{x}[(k+1)T] = [\mathbf{A}_d - \mathbf{B}_d \mathbf{C}_d] \mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}_d r(kT) \\ c(kT) = \mathbf{C}_d \mathbf{x}(kT) \end{cases}$$

trong đó:

$$\begin{aligned} \square [\mathbf{A}_d - \mathbf{B}_d \mathbf{C}_d] &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{a}(1 - e^{-aT}) \\ 0 & e^{-aT} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \left(\frac{T}{a} + \frac{e^{-aT}}{a^2} - \frac{1}{a^2}\right) \\ -\frac{e^{-aT}}{a} + \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{a}(1 - e^{-aT}) \\ 0 & e^{-aT} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K\left(\frac{T}{a} + \frac{e^{-aT}}{a^2} - \frac{1}{a^2}\right) & 0 \\ K\left(-\frac{e^{-aT}}{a} + \frac{1}{a}\right) & 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow [\mathbf{A}_d - \mathbf{B}_d \mathbf{C}_d] &= \begin{bmatrix} 1 - K\left(\frac{T}{a} + \frac{e^{-aT}}{a^2} - \frac{1}{a^2}\right) & \frac{1}{a}(1 - e^{-aT}) \\ K\left(\frac{e^{-aT}}{a} - \frac{1}{a}\right) & e^{-aT} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ví dụ bằng số cụ thể:  $a = 2$ ,  $T = 0,5\text{sec}$ ,  $K = 10$

$$\text{Bước 1: } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [10 \quad 0]$$

$$\text{Bước 2: } \Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{a}(1 - e^{-at}) \\ 0 & e^{-at} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\text{Bước 3: } \mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{a}(1 - e^{-aT}) \\ 0 & e^{-aT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2 \times 0,5}) \\ 0 & e^{-2 \times 0,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,316 \\ 0 & 0,368 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} \left(\frac{T}{a} + \frac{e^{-aT}}{a^2} - \frac{1}{a^2}\right) \\ -\frac{e^{-aT}}{a} + \frac{1}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{0,5}{2} + \frac{e^{-2 \times 0,5}}{2^2} - \frac{1}{2^2}\right) \\ -\frac{e^{-2 \times 0,5}}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,092 \\ 0,316 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_d = \mathbf{C} = [10 \quad 0]$$

$$\begin{aligned}
\text{Bước 4: } [\mathbf{A}_d - \mathbf{B}_d \mathbf{C}_d] &= \begin{bmatrix} 1 & 0,316 \\ 0 & 0,368 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,092 \\ 0,316 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0,316 \\ 0 & 0,368 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,920 & 0 \\ 3,160 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,080 & 0,316 \\ -3,160 & 0,368 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Kết luận: hệ phương trình biến trạng thái cần tìm là:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0,080 & 0,316 \\ -3,160 & 0,368 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,092 \\ 0,316 \end{bmatrix} r(k) \\
c(k) &= \begin{bmatrix} 10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

■

#### 7.4.4 Tính hàm truyền hệ rời rạc từ hệ phương trình trạng thái

Cho hệ thống rời rạc mô tả bởi hệ phương trình biến trạng thái:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d r(k) \\ c(k) = \mathbf{C}_d \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

Bài toán đặt ra là tìm hàm truyền:  $G(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$

Biến đổi Z hệ phương trình trạng thái, ta được:

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} z\mathbf{X}(z) = \mathbf{A}_d \mathbf{X}(z) + \mathbf{B}_d R(z) \\ C(z) = \mathbf{C}_d \mathbf{X}(z) \end{cases} \\
\Rightarrow &\begin{cases} (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d) \mathbf{X}(z) = \mathbf{B}_d R(z) \\ C(z) = \mathbf{C}_d \mathbf{X}(z) \end{cases} \\
\Rightarrow &\begin{cases} \mathbf{X}(z) = [z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d]^{-1} \mathbf{B}_d R(z) \\ C(z) = \mathbf{C}_d \mathbf{X}(z) \end{cases} \\
\Rightarrow &C(z) = \mathbf{C}_d [z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d]^{-1} \mathbf{B}_d R(z)
\end{aligned}$$

Lập tỉ số, ta được:

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \mathbf{C}_d [z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d]^{-1} \mathbf{B}_d \quad (7.35)$$

**Ví dụ 7.15.** Cho hệ thống mô tả bởi phương trình trạng thái:

$$\begin{cases} \mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}_d(kT) \\ c(kT) = \mathbf{C}_d \mathbf{x}(kT) \end{cases}$$

trong đó:  $\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,7 & -0,1 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \mathbf{C}_d = \mathbf{C} = [1 \ 0]$

Hãy viết hàm truyền của hệ thống trên.

**Giải.** Áp dụng công thức (7.35), hàm truyền của hệ thống là:

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \mathbf{C}_d [z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d]^{-1} \mathbf{B}_d$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \square [z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d]^{-1} &= \left( \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,7 & -0,1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 0,7 & z+0,1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{z(z+0,1)+0,7} \begin{bmatrix} z+0,1 & 1 \\ -0,7 & z \end{bmatrix} \\ \square [z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d]^{-1} \mathbf{B}_d &= \frac{1}{z(z+0,1)+0,7} \begin{bmatrix} z+0,1 & 1 \\ -0,7 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{z(z+0,1)+0,7} \begin{bmatrix} 2 \\ 2z \end{bmatrix} \\ \square \mathbf{C}_d [z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d]^{-1} \mathbf{B}_d &= \frac{1}{z(z+0,1)+0,7} [1 \ 0] \begin{bmatrix} 2 \\ 2z \end{bmatrix} = \frac{2}{z(z+0,1)+0,7} \end{aligned}$$

Vậy:  $G(z) = \frac{2}{z^2 + 0,1z + 0,7}$

## Phụ lục: MÔ TẢ HỆ RỜI RẠC DÙNG MATLAB

Các lệnh mô tả toán học hệ rời rạc tương tự như các lệnh mô tả toán học hệ liên tục, chỉ khác là khi tạo ra hệ thống ta không chỉ nhập vào thông số hệ thống (tử số, mẫu số hàm truyền hoặc các ma trận trạng thái) mà còn phải nhập vào chu kỳ lấy mẫu. Hãy so sánh với phụ lục ở chương 2.

- Tạo ra hệ thống mô tả bởi hàm truyền: *lệnh tf* (transfer function).

Cú pháp:  $G = \text{tf}(\text{TS}, \text{MS}, T)$  tạo ra hệ thống **rời rạc** mô tả bởi hàm truyền  $G$  có tử số là đa thức  $\text{TS}$ , mẫu số là đa thức  $\text{MS}$  và **chu kỳ lấy mẫu là  $T$** . Nếu không xác định  $T$  thì đặt  $T = -1$ .

*Ví dụ:*

```
>> TS=1; MS=[2 1]; G1=tf(TS, MS, 0.2) G1=1/(2z+1), T=0.2 sec
```

Transfer function:

1

----

2z + 1

Sampling time: 0.2

```
>> TS=1; MS=[2 1];
```

```
>> G1=tf(TS, MS, -1)%G1=1/(2z+1), T không xác định
```

Transfer function:

1

----

2z + 1

Sampling time: unspecified

```
>> G2=tf([4 1], conv([2 1], [3 1]), -1)%G2=(4z+1)/(2z+1)(3z+1)
```

Transfer function:

4 z + 1

-----

6 z^2 + 5 z + 1

Sampling time: unspecified

- Đơn giản hàm truyền: *lệnh minreal*.

Cú pháp:  $G = \text{minreal}(G)$  triệt tiêu các thành phần giống nhau ở tử số và mẫu số để được dạng hàm truyền tối giản.

*Ví dụ:*

```
>> TS=[2 1]; MS=conv([2 1],[3 1]);G=tf(TS,MS,-1)
```

Transfer function:

2 z + 1

-----

6 z^2 + 5 z + 1

Sampling time: unspecified

>> G=minreal (G)

Transfer function:

0.3333

-----  
z + 0.3333

Sampling time: unspecified

• Các lệnh ghép nối hệ rời rạc *hoàn toàn giống* như các lệnh ghép nối hệ liên tục, cụ thể:

- Tính hàm truyền của hệ thống nối tiếp: *lệnh series* hoặc toán tử “\*”

Cú pháp: **G=series(G1, G2)** tính hàm truyền  $G = G1 * G2$

- Tính hàm truyền của hệ thống song song: *lệnh parallel* hoặc toán tử “+”

Cú pháp: **G=parallel(G1,G2)** tính hàm truyền  $G = G1 + G2$

- Tính hàm truyền của hệ thống hồi tiếp: *lệnh feedback*

Cú pháp: **Gk=feedback(G1,G2,)** tính hàm truyền hệ hồi tiếp âm

$Gk = G1 / (1 + G1 * G2)$

**Gk=feedback(G1,G2,+1)** tính hàm truyền hệ hồi tiếp dương

$Gk = G1 / (1 - G1 * G2)$

Ví dụ:

>> G1=tf(1, [2 11,-1]); % G1=1/ (2z+1)

>> G2=tf([4 1],conv([1 01],[3 11]),-1); % G2=(4z+1)/z(3z+1)

Transfer function:

4 z + 1

-----  
6 z^3 + 5 z^2 + z

Sampling time: unspecified

>> G=G1+G2 % ghép song song

Transfer function:

11 z^2 + 7 z + 1

-----  
6 z^3 + 5 z^2 + z

Sampling time: unspecified

>> Gk=feedback(G2, G1) % he hoi tiep am Gk=G2/(1+G2\*G1)

Transfer function:

8 z^2 + 6 z + 1

-----  
6 z^3 + 5 z^2 + 5 z + 1



```

Sampling time: unspecified
>> Gk=minreal (Gk)      % đơn giản thừa số chung
Transfer function:
      1
-----
      2   z
Sampling time: unspecified

```

- Tạo ra hệ thống mô tả bởi phương trình trạng thái: *lệnh ss* (state space).

Cú pháp: **PTTT=ss(A,B,C,D,T)** tạo ra hệ thống **rời rạc** mô tả bởi phương trình trạng thái PTTT có các ma trận trạng thái là A, B, C, D và **chu kỳ lấy mẫu** là T. Nếu không xác định T thì đặt T=1.

*Ví dụ:*

```

>> A=[0 1; -0.7 -0.11; B=[0;2]; c=[1 0]; D=0;
>> PTTT=ss(A,B,C,D,-1)

```

```

a =
      x1      x2
      0      1
      -0.7   -0.1

b =
      u1
      0
      2

c =
      x1      x2
      1      0

d =
      u1
      0

```

```

Sampling time: unspecified
Discrete-time model.

```

- Các lệnh biến đổi giữa hàm truyền và phương trình trạng thái của hệ rời rạc hoàn toàn giống hệ liên tục.

- Biến đổi phương trình trạng thái về dạng hàm truyền: *lệnh tf*

Cú pháp: **G=tf(PTTT)**

- Biến đổi hàm truyền về dạng phương trình trạng thái: *lệnh ss*

Cú pháp: **PTTT=tf(G)**

Ví dụ: (xem thí dụ 7.15)

```
>> A=[0 1; -0.7 -0.1]; B=[0;2]; C=[1 0]; D=0;
```

```
>> PTTT=ss(A,B,C,D,-1);
```

```
>> G=tf(PTTT)
```

Transfer function:

$$\frac{2}{z^2 + 0.1z + 0.7}$$

Sampling time: unspecified

```
>> PTTT=ss(G)
```

a =

	x1	x2
x1	-0.1	-0.35
x2	2	0

b =

	u1
x1	1
x2	0

c =

	x1	x2
y1	0	1

d =

	u1
y1	0

Sampling time: unspecified

Discrete-time model.

Để ý rằng sau khi biến đổi ngược từ hàm truyền về dạng phương trình trạng thái ta được các ma trận trạng thái hoàn toàn khác với các ma trận trạng thái đã nhập vào ban đầu, điều này không có gì vô lý vì đối với một hệ thống tùy theo cách đặt biến trạng thái khác nhau ta sẽ có các phương trình trạng thái khác nhau.

# Chương 8

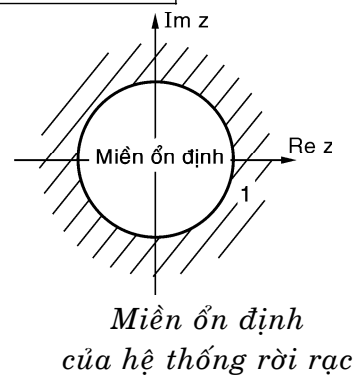
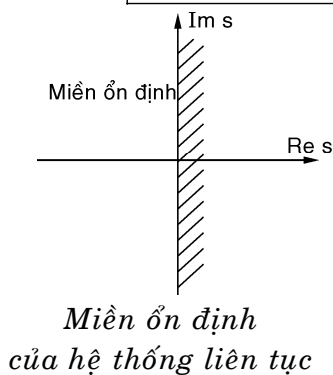
## PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN RỜI RẠC

### A. PHÂN TÍCH HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN RỜI RẠC

#### 8.1 ĐIỀU KIỆN ỔN ĐỊNH CỦA HỆ RỜI RẠC

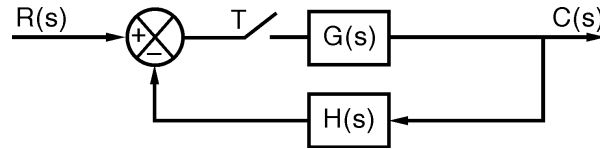
Hệ thống được gọi là ổn định nếu tín hiệu vào bị chặn thì tín hiệu ra bị chặn (ổn định BIBO – **B**ounded **I**nter **B**ounded **O**utput). Ta đã biết hệ thống điều khiển liên tục ổn định nếu tất cả các nghiệm của phương trình đặc tính đều nằm bên trái mặt phẳng phức. Do quan hệ giữa biến  $z$  và biến  $s$  là  $z = e^{Ts}$  nên  $s$  nằm bên trái mặt phẳng phức tương đương với  $z$  nằm bên trong vòng tròn đơn vị. Do đó hệ thống điều khiển rời rạc ổn định nếu tất cả các nghiệm của phương trình đặc trưng đều nằm bên trong vòng tròn đơn vị.

$$\boxed{\text{Hệ thống rời rạc ổn định} \Leftrightarrow |z| < 1} \quad (8.1)$$



**Cần nhớ**

- Hệ thống rời rạc cho bởi sơ đồ khối



Phương trình đặc tính là:

$$1 + GH(z) = 0 \quad (8.2)$$

- Hệ thống rời rạc cho hệ phương trình biến trạng thái

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d r(k) \\ c(k) = \mathbf{C}_d \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

Phương trình đặc tính là  $\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d) = 0$  (8.3)

## 8.2 TIÊU CHUẨN ROUTH - HURWITZ MỞ RỘNG

- Tiêu chuẩn Routh–Hurwitz cho phép đánh giá phương trình đại số  $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$  có nghiệm nằm bên phải mặt phẳng phức hay không.

- Ta đã sử dụng kết quả này để đánh giá nghiệm của phương trình đặc tính của hệ liên tục  $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$ .

Nếu phương trình trên có nghiệm nằm bên phải mặt phẳng phức thì hệ liên tục không ổn định.

- Không thể sử dụng trực tiếp tiêu chuẩn Routh–Hurwitz để đánh giá tính ổn định của hệ rời rạc vì miền ổn định của hệ rời rạc nằm bên trong đường tròn đơn vị.

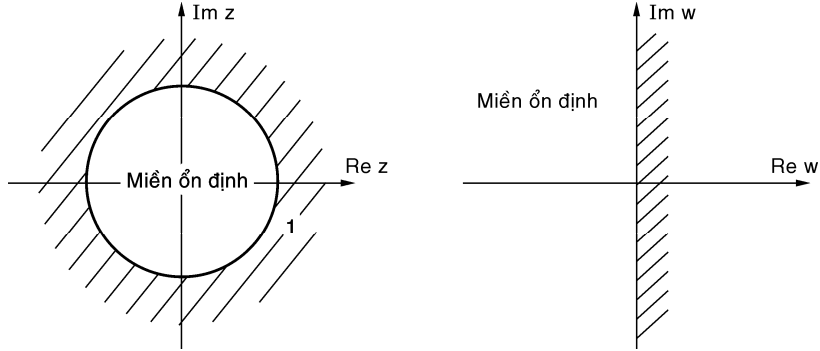
- Muốn dùng tiêu chuẩn Routh–Hurwitz để đánh giá tính ổn định của hệ rời rạc ta phải thực hiện phép đổi biến

$$z = \frac{w+1}{w-1} \quad \Leftrightarrow \quad w = \frac{z+1}{z-1}$$

Với cách đổi biến như trên, miền nằm trong vòng tròn đơn vị của mặt phẳng  $z$  tương ứng với nửa trái của mặt phẳng  $w$ .

Áp dụng tiêu chuẩn Routh–Hurwitz đối với phương trình đặc tính theo biến  $w$ : nếu không tồn tại nghiệm  $w$  nằm bên phải mặt

phẳng phức thì không tồn tại nghiệm  $z$  nằm ngoài vòng tròn đơn vị  $\Rightarrow$  hệ rời rạc ổn định.



*Miền ổn định của hệ thống rời rạc theo biến  $z$*       *Miền ổn định của hệ thống rời rạc theo biến  $w$*

**Ví dụ 8.1.** Cho hệ thống rời rạc có phương trình đặc tính

$$5z^3 + 2z^2 + 3z + 1 = 0$$

Xét tính ổn định của hệ thống trên.

**Giải.** Đổi biến  $z = \frac{1+w}{1-w}$ , phương trình đặc tính trở thành

$$5\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^3 + 2\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 + 3\left(\frac{w+1}{w-1}\right) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5(w+1)^3 + 2(w+1)^2(w-1) + 3(w+1)(w-1)^2 + (w-1)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5(w^3 + 3w^2 + 3w + 1) + 2(w^3 + w^2 - w - 1) +$$

$$3(w^3 - w^2 - w + 1) + (w^3 - 3w^2 + 3w - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 11w^3 + 11w^2 + 13w + 5 = 0$$

*Bảng Routh*

$w^3$	11	13
$w^2$	11	5
$w^1$	8	0
$w^0$	5	

Do tất các hệ số ở cột 1 bảng Routh đều dương nên hệ ổn định.

Hoặc

**Ma trận Hurwitz**

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 5 & 0 \\ 11 & 13 & 0 \\ 0 & 11 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\square \Delta_1 = 11 > 0$$

$$\square \Delta_2 = 11 \times 13 - 5 \times 11 > 0$$

$$\square \Delta_3 = 5\Delta_2 > 0$$

Do các định thức con đều dương nên hệ ổn định. ■

### 8.3 TIÊU CHUẨN JURY

Xét ổn định hệ rời rạc có phương trình đặc tính:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

*Bảng Jury*

1- Hàng 1 là các hệ số của phương trình đặc tính theo thứ tự chỉ số tăng dần.

2- Hàng chẵn (bất kỳ) gồm các hệ số của hàng lẻ trước đó viết theo thứ tự ngược lại.

3- Hàng lẻ thứ  $i = 2k+1$  ( $k \geq 1$ ) gồm có  $(n-k)$  phần tử, phần tử  $c_{ij}$  xác định bởi công thức

$$c_{ij} = \frac{1}{c_{i-2,1}} \begin{vmatrix} c_{i-2,1} & c_{i-2,n-j-k+3} \\ c_{i-1,1} & c_{i-1,n-j-k+3} \end{vmatrix} \quad (8.5)$$

**Phát biểu tiêu chuẩn Jury**

Điều kiện cần và đủ để hệ thống ổn định là tất cả các hệ số ở hàng lẻ, cột 1 của bảng Jury đều dương.

**Ví dụ 8.2.** Cho hệ thống rời rạc có phương trình đặc tính

$$5z^3 + 2z^2 + 3z + 1 = 0$$

Xét tính ổn định của hệ thống trên.

**Giải***Bảng Jury*

Hàng 1	5	2	3	1
Hàng 2	1	3	2	5
Hàng 3	$\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 4,8$	$\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1,4$	$\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 2,6$	
Hàng 4	2,6	1,4	4,8	
Hàng 5	$\frac{1}{4,8} \begin{vmatrix} 4,8 & 2,6 \\ 4,8 & 2,6 \end{vmatrix} = 3,39$	$\frac{1}{4,8} \begin{vmatrix} 4,8 & 1,4 \\ 4,8 & 2,6 \end{vmatrix} = 0,61$		
Hàng 6	0,61	3,39		
Hàng 7	$\frac{1}{3,39} \begin{vmatrix} 3,39 & 0,61 \\ 3,39 & 0,61 \end{vmatrix} = 3,28$			

Do các hệ số ở hàng lẻ cột 1 bảng Jury đều dương nên hệ thống ổn định. ■

**8.4 QUỸ ĐẠO NGHIỆM SỐ**

Quỹ đạo nghiệm số là tập hợp tất cả các nghiệm của phương trình đặc tính của hệ thống khi có một thông số nào đó trong hệ thay đổi từ  $0 \rightarrow \infty$ .

Xét hệ thống rời rạc có phương trình đặc tính là

$$1 + K \frac{N(z)}{D(z)} = 0 \quad (8.6)$$

Đặt  $G_o(z) = K \frac{N(z)}{D(z)}$

Gọi  $n$  là số cực của  $G_o(z)$ ,  $m$  là số zero của  $G_o(z)$

$$(8.6) \quad \Leftrightarrow \quad 1 + G_o(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} |G_o(z)| = 1 & \text{Điều kiện biên độ} \\ \angle G_o(z) = (2l+1)\pi & \text{Điều kiện pha} \end{cases} \quad (8.7)$$

**Chú ý:** Nếu phương trình đặc tính của hệ không có dạng (8.6) thì ta phải biến đổi tương đương về dạng (8.6) trước khi áp dụng các qui tắc vẽ QĐNS.

Vì *dạng* phương trình đặc tính của hệ liên tục đã học ở chương 4 và phương trình đặc tính (8.6) là *như nhau* (chỉ thay

biến  $s$  bằng biến  $z$ ) nên *qui tắc vẽ QĐNS là như nhau, chỉ khác ở qui tắc 8*, thay vì đối với hệ liên tục ta tìm giao điểm của QĐNS với trục ảo thì đối với hệ rời rạc ta tìm giao điểm của QĐNS với đường tròn đơn vị.

Sau đây là 11 qui tắc vẽ quỹ đạo nghiệm số của hệ thống rời rạc có phương trình đặc tính có dạng (8.6)

**Qui tắc 1:** Số nhánh của quỹ đạo nghiệm số = bậc của phương trình đặc tính = số cực của  $G_o(z) = n$ .

**Qui tắc 2:** Khi  $K = 0$ : Các nhánh của quỹ đạo nghiệm số xuất phát từ các cực của  $G_o(z)$ .

Khi  $K$  tiến đến  $+\infty$ :  $m$  nhánh của quỹ đạo nghiệm số tiến đến  $m$  zero của  $G_o(z)$ ,  $n-m$  nhánh còn lại tiến đến  $\infty$  theo các tiệm cận xác định bởi qui tắc 5 và 6.

**Qui tắc 3:** Quỹ đạo nghiệm số đối xứng qua trục thực.

**Qui tắc 4:** Một điểm trên trục thực thuộc về quỹ đạo nghiệm số nếu tổng số cực và zero của  $G_o(z)$  bên phải nó là một số lẻ.

**Qui tắc 5:** Góc tạo bởi các đường tiệm cận của quỹ đạo nghiệm số với trục thực xác định bởi

$$\alpha = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (8.8)$$

**Qui tắc 6:** Giao điểm giữa các tiệm cận với trục thực là điểm  $A$  có tọa độ xác định bởi

$$OA = \frac{\sum \text{cực} - \sum \text{zero}}{n-m} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} \quad (8.9)$$

( $p_i$  và  $z_i$  là các cực và các zero của  $G_o(z)$ ).

**Qui tắc 7:** Điểm tách nhập (nếu có) của quỹ đạo nghiệm số nằm trên trục thực và là nghiệm của phương trình:  $\frac{dK}{dz} = 0$  (8.10)

**Qui tắc 8:** Giao điểm của quỹ đạo nghiệm số với đường tròn đơn vị có thể xác định bằng một trong hai cách sau đây

- Áp dụng tiêu chuẩn Routh - Hurwitz mở rộng hoặc tiêu chuẩn Jury.



- Thay  $z = a + jb$  (điều kiện:  $a^2 + b^2 = 1$ ) vào phương trình đặc tính (8.6), cân bằng phần thực và phần ảo sẽ tìm được giao điểm với đường tròn đơn vị và giá trị  $K_{gh}$ .

**Qui tắc 9:** Góc xuất phát của quỹ đạo nghiệm số tại cực phức  $p_j$  được xác định bởi

$$\theta_j = 180^\circ + \sum_{i=1}^m \arg(p_j - z_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \arg(p_j - p_i) \quad (8.11)$$

Dạng hình học của công thức trên là

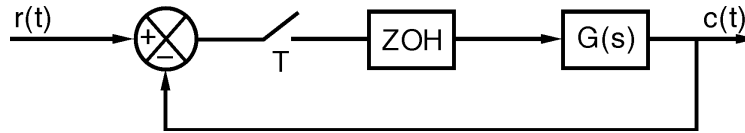
$$\theta_j = 180^\circ + (\sum \text{góc từ các zero đến cực } p_j) - (\sum \text{góc từ các cực còn lại đến cực } p_j) \quad (8.12)$$

**Qui tắc 10.** Tổng các nghiệm là hằng số khi  $K$  thay đổi từ  $0 \rightarrow +\infty$

**Qui tắc 11:** Hệ số khuếch đại dọc theo quỹ đạo nghiệm số có thể xác định từ điều kiện biên độ

$$\left| K \frac{N(z)}{D(z)} \right| = 1 \quad (8.13)$$

**Ví dụ 8.3.** Cho hệ thống điều khiển rời rạc có sơ đồ khối như hình vẽ, trong đó



- Hàm truyền khâu liên tục  $G(s) = \frac{5K}{s(s+5)}$

- Chu kỳ lấy mẫu  $T = 0,1 \text{sec}$

Hãy vẽ QĐNS của hệ thống trên khi  $K$  thay đổi từ  $0$  đến  $+\infty$ .  
Tính  $K_{gh}$ .

**Giải.** Phương trình đặc tính của hệ có sơ đồ khối như trên là

$$1 + G(z) = 0$$

trong đó

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \mathcal{Z}\{G_{ZOH}(s)G(s)\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{5K}{s(s+5)}\right\} \\
 &= K(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{5}{s^2(s+5)}\right\} \\
 &= K\left(\frac{z-1}{z}\right)\left(\frac{z[(0,5-1+e^{-0,5})z+(1-e^{-0,5}-0,5e^{-0,5})]}{5(z-1)^2(z-e^{-0,5})}\right) \\
 \Rightarrow G(z) &= K \frac{0,021z+0,018}{(z-1)(z-0,607)}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Phương trình đặc tính là

$$1 + K \frac{0,021z+0,018}{(z-1)(z-0,607)} = 0 \quad (8.14)$$

- Các cực:  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 0,607$  ( $n = 2$ )

- Các zero:  $z_1 = -0,857$  ( $m = 1$ )

- Góc tạo bởi tiệm cận và trục thực

$$\alpha = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} = \frac{(2l+1)\pi}{2-1} = \pi \quad (l = 0)$$

- Giao điểm giữa tiệm cận với trục thực

$$OA = \frac{\sum \text{cực} - \sum \text{zero}}{n-m} = \frac{(1+0,607) - (-0,857)}{2-1} = 2,464$$

- Điểm tách nhập là nghiệm của phương trình  $\frac{dK}{dz} = 0$ .

Ta có

$$\begin{aligned}
 (8.14) \Rightarrow K &= -\frac{(z-1)(z-0,607)}{0,021z+0,018} = -\frac{z^2-1,607z+0,607}{0,021z+0,018} \\
 \Rightarrow \frac{dK}{dz} &= -\frac{z^2-1,607z+0,607}{0,021z+0,018} \\
 &= -\frac{(2z-1,607)(0,021z+0,018)-(z^2-1,607z+0,607)(0,021)}{(0,021z+0,018)^2} \\
 &= -\frac{0,021z^2+0,036z-0,042}{(0,021z+0,018)^2}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{dz} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -2,506 \\ z_2 = 0,792 \end{cases}$$

Cả hai nghiệm trên đều thuộc QĐNS  $\Rightarrow$  có hai điểm tách nhập.

- Giao điểm của QĐNS với đường tròn đơn vị

$$(8.14) \Leftrightarrow (z-1)(z-0,607) + K(0,021z+0,018) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 + (0,021K-1,607)z + (0,018K+0,607) = 0$$

Cách 1: Dùng tiêu chuẩn Routh-Hurwitz mở rộng

Đổi biến  $z = \frac{w+1}{w-1}$ , ta được

$$\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 + (0,021K-1,607)\left(\frac{w+1}{w-1}\right) + (0,018K+0,607) = 0$$

$$\Leftrightarrow 0,039Kw^2 + (0,786-0,036K)w + (3,214-0,003K) = 0$$

Điều kiện để hệ thống ổn định là

$$\begin{cases} K > 0 \\ 0,786-0,036K > 0 \\ 3,214-0,003K > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K > 0 \\ K < 21,83 \\ K < 1071 \end{cases} \Rightarrow K_{gh} = 21,83$$

Thay  $K_{gh} = 21,83$  vào phương trình đặc tính, ta được

$$z^2 - 1,1485z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = 0,5742 \pm j0,8187$$

Vậy giao điểm của QĐNS với vòng tròn đơn vị là

$$z = 0,5742 \pm j0,8187$$

Cách 2: Thay  $z = a + jb$  vào phương trình trên, ta được

$$(a + jb)^2 + (0,021K-1,607)(a + jb) + (0,018K+0,607) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + j2ab - b^2 + (0,021K-1,607)a + j(0,021K-1,607)b + (0,018K+0,607) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + (0,021K-1,607)a + (0,018K+0,607) = 0 \\ j2ab + j(0,021K-1,607)b = 0 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện  $a^2 + b^2 = 1$  ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + (0,021K-1,607)a + (0,018K+0,607) = 0 \\ j2ab + j(0,021K-1,607)b = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

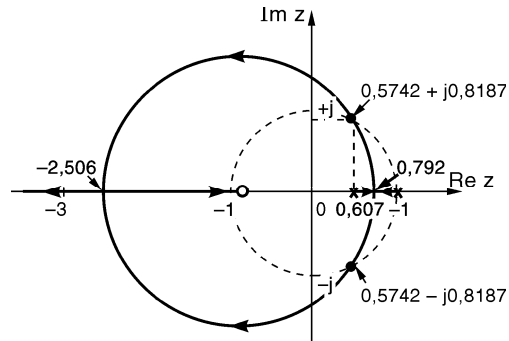
Giải hệ phương trình trên, ta được bốn giao điểm là

$$z = 1, \quad \text{tương ứng với } K = 0$$

$$z = -1, \quad \text{tương ứng với } K = 1071$$

$$z = 0,5742 \pm j0,8187, \quad \text{tương ứng với } K = 21,8381$$

$$\text{Vậy } K_{gh} = 21,83$$



## 8.5 CHẤT LƯỢNG HỆ THỐNG RỜI RẠC

**1- Đáp ứng quá độ:** có thể xác định được đáp ứng của hệ thống rời rạc bằng một trong hai cách sau đây:

- *Cách 1:* tính  $C(z)$ , sau đó dùng phép biến đổi  $Z$  ngược để tìm  $c(k)$ .

- *Cách 2:* tính nghiệm  $x(k)$  của phương trình trạng thái của hệ rời rạc, từ đó suy ra  $c(k)$ .

Cặp cực quyết định: hệ bậc cao có thể xấp xỉ gần đúng về hệ bậc hai với hai cực là cặp cực quyết định.

Đối với hệ liên tục, cặp cực quyết định là cặp cực nằm gần trục ảo nhất. Do  $z = e^{Ts}$ , nên đối với hệ rời rạc, cặp cực quyết định là cặp cực nằm gần vòng tròn đơn vị nhất.

**2- Độ vọt lố:** đối với hệ rời rạc, cách thường sử dụng để tính độ vọt lố là dùng biểu thức định nghĩa:

$$POT = \frac{c_{\max} - c_{xl}}{c_{xl}} 100\% \quad (8.15)$$

trong đó:  $c_{\max}$  là giá trị cực đại của  $c(k)$ ;  $c_{xl}$  là giá trị cực đại của

$c(k)$ .

Cách thứ hai cũng được sử dụng khi biết cặp cực quyết định  $z^* = re^{\pm j\varphi}$  của hệ rời rạc là dựa vào quan hệ  $z = e^{Ts}$  để suy ra nghiệm  $s^*$ , từ đó tính được  $\xi$  và  $\omega_n$ .

$$\xi = \frac{-\ln r}{\sqrt{(\ln r)^2 + \varphi^2}} \quad (8.16)$$

$$\omega_n = \frac{1}{T} \sqrt{(\ln r)^2 + \varphi^2} \quad (8.17)$$

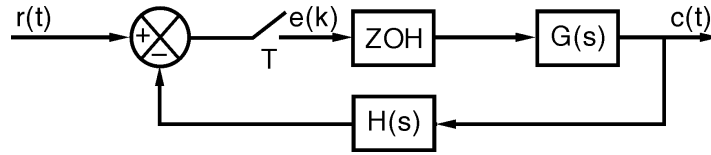
Sau đó áp dụng các công thức đã trình bày trong chương 4 để tính  $POT$ ,  $t_{xl}$ ...

### 3- Sai số xác lập

Theo định lý giá trị cuối:

$$e_{xl} = \lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z) \quad (8.18)$$

#### Các công thức tính sai số xác lập



Sai số xác lập của hệ thống điều khiển rời rạc có sơ đồ như trên là:

$$e_{xl} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{R(z)}{1 + GH(z)} \quad (8.19)$$

□ Nếu tín hiệu vào là hàm nấc đơn vị  $R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$

$$\Rightarrow e_{xl} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + GH(z)} = \frac{1}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} GH(z)} \quad (8.20)$$

Đặt  $K_P = \lim_{z \rightarrow 1} GH(z)$ : **Hệ số vị trí**

$$\Rightarrow e_{xl} = \frac{1}{1 + K_P} \quad (8.21)$$

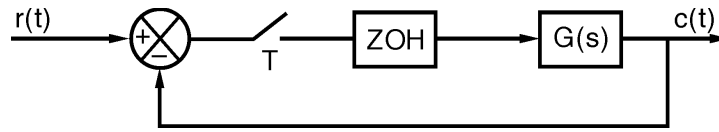
□ Nếu tín hiệu vào là hàm dốc đơn vị:  $R(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$

$$\Rightarrow e_{xl} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}} \frac{1}{1+GH(z)} = \frac{T}{\lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})GH(z)} \quad (8.22)$$

Đặt  $K_V = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})GH(z)$ : **Hệ số vận tốc**

$$\Rightarrow e_{xl} = \frac{1}{K_V} \quad (8.23)$$

**Ví dụ 8.4.** Cho hệ thống điều khiển rời rạc có sơ đồ khối như hình vẽ, trong đó



- Hàm truyền khâu liên tục  $G(s) = \frac{K}{(s+a)(s+b)}$

( $K=10$ ,  $a=2$ ,  $b=3$ )

- Chu kỳ lấy mẫu:  $T=0,1\text{sec}$

1- Tìm hàm truyền kín  $G_k(z)$

2- Tính đáp ứng của hệ đối với tín hiệu vào là hàm nấc đơn vị, độ vọt lố, sai số xác lập.

**Giải.** 1- Hàm truyền của hệ rời rạc:

$$G_k(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)}$$

trong đó:  $G(z) = \mathcal{Z}\{G_{ZOH}(s)G(s)\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{K}{(s+a)(s+b)}\right\}$

$$= K(1-z^{-1}) \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s(s+a)(s+b)}\right\}$$

$$= K\left(\frac{z-1}{z}\right) \left(\frac{z(Az+B)}{(z-1)(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}\right)$$

với 
$$A = \frac{b(1-e^{-aT}) - a(1-e^{-bT})}{ab(b-a)}$$

$$B = \frac{ae^{-aT}(1 - e^{-bT}) - be^{-bT}(1 - e^{-aT})}{ab(b - a)}$$

Thay  $K = 10$ ,  $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $T = 0,1$  ta được

$$\Rightarrow G(z) = \frac{0,042z + 0,036}{(z - 0,819)(z - 0,741)}$$

$$\text{Do đó } G_k(z) = \frac{0,042z + 0,036}{1 + \frac{(z - 0,819)(z - 0,741)}{0,042z + 0,036}}$$

$$G_k(z) = \frac{0,042z + 0,036}{z^2 - 1,518z + 0,643}$$

2- Đáp ứng của hệ

$$C(z) = G_k(z)R(z) = \frac{0,042z + 0,036}{z^2 - 1,518z + 0,643} R(z) = \frac{0,042z^{-1} + 0,036z^{-2}}{1 - 1,518z^{-1} + 0,643z^{-2}} R(z)$$

$$\Rightarrow (1 - 1,518z^{-1} + 0,643z^{-2})C(z) = (0,042z^{-1} + 0,036z^{-2})R(z)$$

$$\Rightarrow c(k) - 1,518c(k-1) + 0,643c(k-2) = 0,042r(k-1) + 0,036r(k-2)$$

$$\Rightarrow c(k) = 1,518c(k-1) - 0,643c(k-2) + 0,042r(k-1) + 0,036r(k-2)$$

$$\text{Với điều kiện đầu } c(-1) = c(-2) = 0$$

$$r(-1) = r(-2) = 0$$

Thay vào công thức đệ qui trên, ta tính được

$$c(k) = \{0; 0,042; 0,106; 0,212; 0,332; 0,446; 0,542; 0,614; \dots \\ 0,662; 0,706; 0,743; 0,772; 0,94; 0,809; 0,819; 0,825; \dots \\ 0,828; 0,828; 0,827; 0,825; \dots\}$$

Giá trị xác lập của đáp ứng quá độ là

$$c_{xl} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{0,042z + 0,036}{z^2 - 1,518z + 0,643} R(z) \\ = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \left( \frac{0,042z + 0,036}{z^2 - 1,518z + 0,643} \right) \left( \frac{1}{1 - z^{-1}} \right) \\ = \lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{0,042z + 0,036}{z^2 - 1,518z + 0,643} \right)$$

$$\Rightarrow c_{xl} = 0,624$$



- Độ vọt lố

$$POT = \frac{c_{\max} - c_{xl}}{c_{xl}} 100\% = \frac{0,828 - 0,624}{0,624} 100\%$$

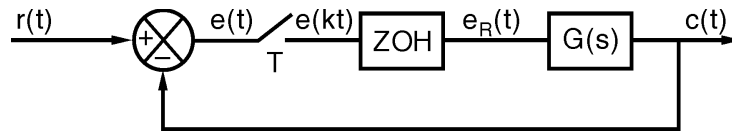
$$\Rightarrow POT = 32,69\%$$

- Sai số xác lập  $e_{xl} = r_{xl} - c_{xl} = 1 - 0,624$

$$\Rightarrow e_{xl} = 0,376$$

■

**Ví dụ 8.5.** Cho hệ thống điều khiển rời rạc có sơ đồ khối như hình vẽ, trong đó



- Hàm truyền khâu liên tục  $G(s) = \frac{K}{(s+a)(s+b)}$

$$(K = 10, a = 2, b = 3)$$

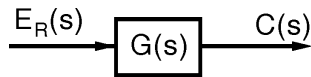
- Chu kỳ lấy mẫu  $T = 0,1 \text{ sec}$

1- Thành lập hệ phương trình trạng thái mô tả hệ thống trên.

2- Tính đáp ứng của hệ đối với tín hiệu vào là hàm nấc đơn vị (điều kiện đầu bằng 0).

**Giải.** 1- Thành lập hệ phương trình trạng thái mô tả hệ thống

*Bước 1:* Hệ phương trình trạng thái của khâu liên tục



$$\text{Ta có } C(s) = G(s)E_R(s) = \frac{10}{(s+2)(s+3)} E_R(s)$$

$$\Rightarrow (s+2)(s+3)C(s) = 10E_R(s)$$

$$\Rightarrow (s^2 + 5s + 6)C(s) = 10E_R(s)$$

$$\Rightarrow \ddot{c}(t) + 5\dot{c}(t) + 6c(t) = 10e_R(t)$$

$$\text{Đặt } x_1(t) = c(t); \quad x_2(t) = \dot{x}_1(t)$$

Hệ phương trình trạng thái mô tả khâu liên tục là

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}e_R(t) \\ c(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

trong đó  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$   $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$   $\mathbf{C} = [1 \ 0]$

*Bước 2:* Tính ma trận quá độ

$$\begin{aligned} \square \Phi(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \left( s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \left( \begin{bmatrix} s & -1 \\ 6 & s+5 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{s(s+5)-6} \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -6 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+5}{(s+2)(s+3)} & \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ \frac{-6}{(s+2)(s+3)} & \frac{s}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix} \\ \square \Phi(t) &= \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{s+5}{(s+2)(s+3)} & \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ \frac{6}{(s+2)(s+3)} & \frac{s}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+3} \right\} & \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \right\} \\ \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{6}{s+2} + \frac{6}{s+3} \right\} & \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{2}{s+2} + \frac{3}{s+3} \right\} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \Phi(t) &= \begin{bmatrix} (3e^{-2t} - 2e^{-3t}) & (e^{-2t} - e^{-3t}) \\ (-6e^{-2t} + 6e^{-3t}) & (-2e^{-2t} + 3e^{-3t}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

*Bước 3:* Rời rạc hóa các phương trình trạng thái của hệ liên tục, ta được

$$\begin{cases} \mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}_d e_R(kT) \\ c(kT) = \mathbf{C}_d \mathbf{x}(kT) \end{cases}$$

trong đó

$$\begin{aligned} \square \mathbf{A}_d &= \Phi(T) = \begin{bmatrix} (3e^{-2T} - 2e^{-3T}) & (e^{-2T} - e^{-3T}) \\ (-6e^{-2T} + 6e^{-3T}) & (-2e^{-2T} + 3e^{-3T}) \end{bmatrix}_{t=T=0,1} \\ \Rightarrow \mathbf{A}_d &= \begin{bmatrix} 0,975 & 0,078 \\ -0,468 & 0,585 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqcup \mathbf{B}_d &= \int_0^T \Phi(\tau) \mathbf{B} d\tau = \int_0^T \left\{ \begin{bmatrix} (3e^{-2\tau} - 2e^{-3\tau}) & (e^{-2\tau} - e^{-3\tau}) \\ (-6e^{-2\tau} + 6e^{-3\tau}) & (-2e^{-2\tau} + 3e^{-3\tau}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} d\tau \right\} \\
&= \int_0^T \left\{ \begin{bmatrix} 10(e^{-2\tau} - e^{-3\tau}) \\ 10(-2e^{-2\tau} + 3e^{-3\tau}) \end{bmatrix} d\tau \right\} = \begin{bmatrix} 10(-\frac{e^{-2\tau}}{2} + \frac{e^{-3\tau}}{3}) \\ 10(e^{-2\tau} - e^{-3\tau}) \end{bmatrix}_0^{0,1} \\
\Rightarrow \mathbf{B}_d &= \begin{bmatrix} 0,042 \\ 0,779 \end{bmatrix} \\
\sqcup \mathbf{C}_d &= \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

**Bước 4:** Hệ phương trình biến trạng thái mô tả hệ thống rời rạc với tín hiệu vào  $r(kT)$  là

$$\begin{cases} \mathbf{x}[(k+1)T] = [\mathbf{A}_d - \mathbf{B}_d \mathbf{C}_d] \mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}_d r(kT) \\ c(kT) = \mathbf{C}_d \mathbf{x}(kT) \end{cases}$$

trong đó  $[\mathbf{A}_d - \mathbf{B}_d \mathbf{C}_d] = \begin{bmatrix} 0,975 & 0,078 \\ -0,468 & 0,585 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,042 \\ 0,779 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow [\mathbf{A}_d - \mathbf{B}_d \mathbf{C}_d] = \begin{bmatrix} 0,933 & 0,078 \\ -1,247 & 0,585 \end{bmatrix}$$

Vậy phương trình trạng thái cần tìm là

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0,933 & 0,078 \\ -1,247 & 0,585 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,042 \\ 0,779 \end{bmatrix} r(kT) \\
c(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

## 2- Đáp ứng của hệ thống

Với điều kiện đầu  $x_1(-1) = x_2(-1) = 0$ , thay vào phương trình trạng thái ta tính được

$$x_1(k) = \{0; 0,042; 0,142; 0,268; 0,392; 0,502; 0,587; 0,648; 0,682; 0,699...\}$$

$$x_2(k) = \{0; 0,779; 1,182; 1,293; 1,203; 0,994; 0,735; 0,476; 0,294; 0,072...\}$$

Đáp ứng của hệ thống:

$$c(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = x_1(k)$$

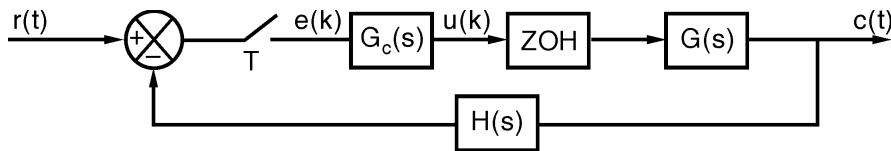
$$\Rightarrow c(k) = \{0; 0,042; 0,142; 0,268; 0,392; 0,502; 0,587; 0,648; 0,682; 0,699...\}$$

■

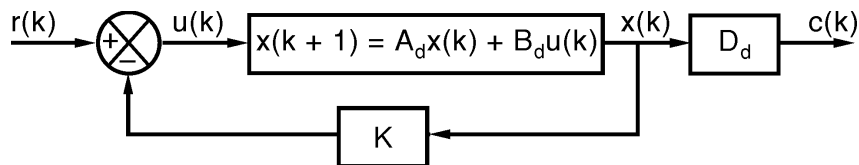
## B. THIẾT KẾ HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN RỜI RẠC

### 8.6 KHÁI NIỆM

Có nhiều sơ đồ điều khiển khác nhau có thể áp dụng cho hệ rời rạc, trong đó sơ đồ điều khiển thông dụng nhất là hiệu chỉnh nối tiếp với bộ điều khiển  $G_C(z)$  là bộ điều khiển sớm trễ pha số, PID số,...



Một sơ đồ điều khiển khác cũng được sử dụng rất phổ biến là điều khiển hồi tiếp trạng thái



- Thiết kế bộ điều khiển số là xác định hàm truyền  $G_C(z)$  hoặc độ lợi hồi tiếp trạng thái  $K$  để hệ thống thỏa mãn yêu cầu về độ ổn định, chất lượng quá độ, sai số xác lập.

- Thực tế trong đa số trường hợp bộ điều khiển số là các thuật toán phần mềm chạy trên máy tính PC hoặc vi xử lý. Từ hàm truyền  $G_C(z)$  hoặc giá trị độ lợi  $K$  ta suy ra được phương trình sai phân mô tả quan hệ giữa ngõ vào và ngõ ra của bộ điều khiển. Quan hệ này được sử dụng để lập trình phần mềm điều khiển chạy trên máy tính hoặc vi xử lý.

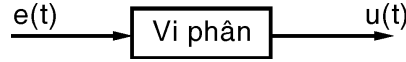
- Có nhiều phương pháp được sử dụng để thiết kế bộ điều khiển số, trong nội dung quyển sách này chỉ đề cập phương pháp thiết kế dùng quỹ đạo nghiệm số, phương pháp thiết kế bộ điều khiển PID, phương pháp thiết kế bộ điều khiển hồi tiếp trạng thái (phương pháp phân bố cực) và phương pháp giải tích.

## 8.7 HÀM TRUYỀN CỦA CÁC KHÂU HIỆU CHỈNH RỜI RẠC

### 1- Khâu tỉ lệ

$$G_P(z) = K_P$$

### 2- Khâu vi phân



□ Khâu vi phân liên tục  $u(t) = K_D \frac{de(t)}{dt}$

□ Khâu vi phân rời rạc: được tính bằng các công thức sai phân, có ba cách tính

- Sai phân tới

$$u(k) = K_D \frac{e(k+1) - e(k)}{T}$$

$$\Rightarrow U(z) = K_D \frac{zE(z) - E(z)}{T} \Rightarrow G_D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K_D}{T} (z - 1)$$

- Sai phân lùi

$$u(k) = K_D \frac{e(k) - e(k-1)}{T}$$

$$\Rightarrow U(z) = K_D \frac{E(z) - z^{-1}E(z)}{T} \Rightarrow G_D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K_D}{T} (1 - z^{-1}) = \frac{K_D}{T} \frac{z-1}{z}$$

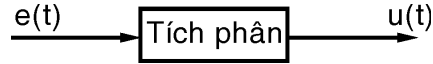
- Sai phân giữa

$$u(k) = K_D \frac{e(k+1) - e(k-1)}{2T} \Rightarrow U(z) = K_D \frac{zE(z) - z^{-1}E(z)}{2T}$$

$$\Rightarrow G_D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K_D}{2T} (z - z^{-1}) = \frac{K_D}{2T} \frac{z^2 - 1}{z}$$

Công thức sai phân tới và sai phân giữa cần tín hiệu  $e(k+1)$  là tín hiệu sai số trong tương lai, mà trong các bài toán điều khiển thời gian thực ta không thể có được tín hiệu trong tương lai (trừ khi sử dụng bộ dự báo) nên thực tế chỉ có công thức sai phân lùi được sử dụng phổ biến nhất, do đó

$$G_D(z) = \frac{K_D}{T} \frac{z-1}{z} \quad (8.25)$$

**3- Khâu tích phân**

□ Khâu tích phân liên tục  $u(t) = K_I \int_0^t e(t) dt$

□ Khâu tích phân rời rạc

$$u(kT) = K_I \int_0^{kT} e(t) dt = K_I \int_0^{(k-1)T} e(t) dt + K_I \int_{(k-1)T}^{kT} e(t) dt$$

$$\Rightarrow u(kT) = u[(k-1)T] + K_I \int_{(k-1)T}^{kT} e(t) dt$$

Xét tích phân  $\int_{(k-1)T}^{kT} e(t) dt$ : có ba cách tính

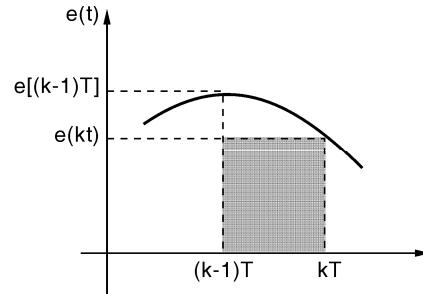
- Tích phân hình chữ nhật tới

$$\int_{(k-1)T}^{kT} e(t) dt \approx Te(kT)$$

$$\Rightarrow u(kT) = u[(k-1)T] + K_I Te(kT)$$

$$\Rightarrow U(z) = z^{-1}U(z) + K_I TE(z)$$

$$\Rightarrow G_I(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_I T \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

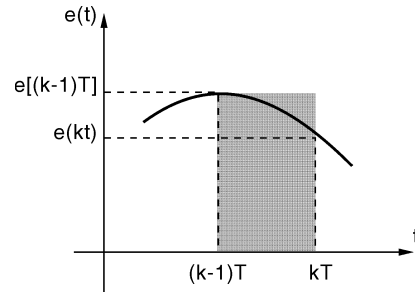


- Tích phân hình chữ nhật lùi

$$\int_{(k-1)T}^{kT} e(t) dt \approx Te[(k-1)T]$$

$$\Rightarrow u(kT) = u[(k-1)T] + K_I Te[(k-1)T]$$

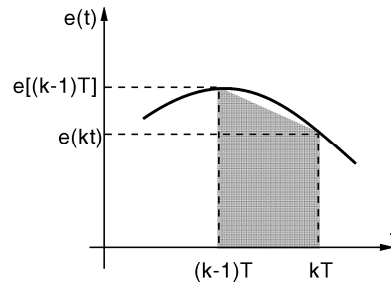
$$\Rightarrow U(z) = z^{-1}U(z) + K_I Tz^{-1}E(z)$$



$$\Rightarrow G_I(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_I T \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

- Tích phân hình thang

$$\int_{(k-1)T}^{kT} e(t) dt \approx \frac{T(e[(k-1)T] + e(kT))}{2}$$



$$\Rightarrow u(kT) = u[(k-1)T] + \frac{K_I T}{2} (e[(k-1)T] + e(kT))$$

$$\Rightarrow U(z) = z^{-1}U(z) + \frac{K_I T}{2} (z^{-1}E(z) + E(z))$$

$$\Rightarrow G_I(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K_I T}{2} \frac{z^{-1} + 1}{1 - z^{-1}} = \frac{K_I T}{2} \frac{z + 1}{z - 1}$$

Trong ba cách tính tích phân trình bày ở trên, tích phân hình thang cho kết quả chính xác nhất, do đó thực tế người ta thường sử dụng công thức

$$G_I(z) = \frac{K_I T}{2} \frac{z + 1}{z - 1} \quad (8.26)$$

#### 4- Bộ điều khiển PI, PD, PID rời rạc

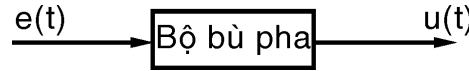
Từ các hàm truyền rời rạc cơ bản vừa phân tích ở trên, ta rút ra được hàm truyền của bộ điều khiển PI, PD, PID số như sau

$$G_{PI}(z) = K_P + \frac{K_I T}{2} \frac{z + 1}{z - 1} \quad (8.27)$$

$$G_{PD}(z) = K_P + \frac{K_D}{T} \frac{z - 1}{z} \quad (8.28)$$

$$G_{PID}(z) = K_P + \frac{K_I T}{2} \frac{z + 1}{z - 1} + \frac{K_D}{T} \frac{z - 1}{z} \quad (8.29)$$

#### 5- Bộ điều khiển bù pha (sớm pha, trễ pha)



Hàm truyền của bộ điều khiển bù pha liên tục có dạng

$$G_C(s) = K \frac{s + a}{s + b} \quad (a > b: \text{trễ pha}; a < b: \text{sớm pha})$$

Rời rạc hóa quan hệ giữa ngõ vào và ngõ ra của bộ bù pha liên tục, sử dụng công thức tích phân hình thang, ta suy ra được hàm truyền của bộ bù pha rời rạc có dạng

$$G_C(z) = K \frac{(aT + 2)z + (aT - 2)}{(bT + 2)z + (bT - 2)}$$

Hàm truyền trên có thể viết lại dưới dạng

$$G_C(z) = K_C \frac{z + z_C}{z + p_C} \quad (8.30)$$

trong đó  $z_C$  là zero và  $p_C$  là cực của khâu hiệu chỉnh.

$$z_C = \frac{(aT - 2)}{(aT + 2)} \Rightarrow aT = \frac{2(1 + z_C)}{(1 - z_C)}$$

$$p_C = \frac{(bT - 2)}{(bT + 2)} \Rightarrow bT = \frac{2(1 + p_C)}{(1 - p_C)}$$

Do  $aT$ ,  $bT$  dương nên cực và zero của khâu hiệu chỉnh phải thỏa mãn điều kiện

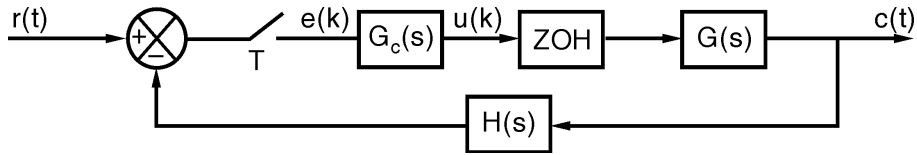
$$\begin{cases} |z_C| < 1 \\ |p_C| < 1 \end{cases}$$

Các quan hệ ở trên ta cũng dễ dàng suy ra

- Khâu sớm pha  $z_C < p_C$
- Khâu trễ pha  $z_C > p_C$

## 8.8 THIẾT KẾ HỆ RỜI RẠC DÙNG PHƯƠNG PHÁP QĐNS

### 8.8.1 Thiết kế bộ điều khiển sớm pha



Phương trình đặc tính của hệ thống trước khi hiệu chỉnh là

$$1 + GH(z) = 0$$

Phương trình đặc tính của hệ thống sau khi hiệu chỉnh là

$$1 + G_C(z)GH(z) = 0$$

Khâu hiệu chỉnh sớm pha có dạng

$$G_C(z) = K_C \frac{z + z_C}{z + p_C} \quad (8.31)$$



Bài toán đặt ra là chọn giá trị  $K_C$ ,  $z_C$  và  $p_C$  để đáp ứng của hệ thống thỏa mãn yêu cầu về chất lượng quá độ (chất lượng quá độ thể hiện qua vị trí của cặp cực quyết định).

### Trình tự thiết kế

**Bước 1: Xác định cặp cực quyết định** từ yêu cầu thiết kế về chất lượng của hệ thống trong quá trình quá độ

$$\begin{cases} \text{Độ vọt lố } POT \\ \text{Thời gian quá độ, ...} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi \\ \omega_n \end{cases} \Rightarrow s_{1,2}^* = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow z_{1,2}^* = e^{Ts^*}$$

$$r = |z^*| = e^{-T\xi\omega_n} \quad \varphi = \angle z^* = T\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad (8.32)$$

**Bước 2: Xác định góc pha cần bù** để cặp cực quyết định  $z_{1,2}^*$  nằm trên QĐNS của hệ thống sau khi hiệu chỉnh bằng công thức

$$\Phi^* = -180^\circ + \sum_{i=1}^n \arg(z^* - p_i) - \sum_{i=1}^m \arg(z^* - z_i) \quad (8.33)$$

Dạng hình học của công thức trên là

$$\begin{aligned} \Phi^* = -180^\circ + \sum \text{góc từ các cực của } GH(z) \text{ đến cực } z^* \\ - \sum \text{góc từ các zero của } GH(z) \text{ đến cực } z^* \end{aligned} \quad (8.34)$$

### Bước 3: Xác định vị trí cực và zero của khâu hiệu chỉnh

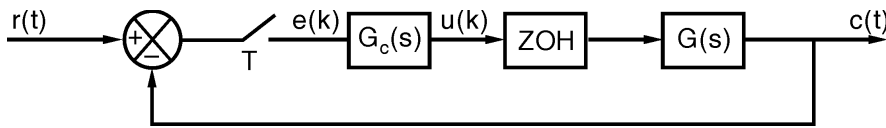
Vẽ hai nửa đường thẳng bất kỳ xuất phát từ cực quyết định  $z^*$  sao cho hai nửa đường thẳng này tạo với nhau một góc bằng  $\Phi^*$ . Giao điểm của hai nửa đường thẳng này với trục thực là vị trí cực và zero của khâu hiệu chỉnh.

Đối với hệ rời rạc, người ta thường áp dụng phương pháp triệt tiêu nghiệm cực của hệ thống để chọn cực và zero của khâu hiệu chỉnh.

### Bước 4: Tính $K_C$ bằng cách áp dụng công thức

$$|G_C(z)GH(z)|_{z=z^*} = 1 \quad (8.35)$$

**Ví dụ 8.6.** Cho hệ thống điều khiển rời rạc có sơ đồ khối như hình vẽ, trong đó



- Hàm truyền khâu liên tục  $G(s) = \frac{10}{s(s+5)}$

- Chu kỳ lấy mẫu  $T = 0,1 \text{ sec}$

Hãy thiết kế khâu hiệu chỉnh sớm pha sao cho hệ thống sau khi hiệu chỉnh có cặp cực quyết định với  $\xi = 0,707$ ,  $\omega_n = 10$  (rad/sec).

**Giải.** Phương trình đặc tính của hệ trước khi hiệu chỉnh

$$1 + G(z) = 0$$

trong đó

$$\begin{aligned} \sqcup G(z) &= \mathcal{Z} \left\{ G_{ZOH}(s)G(s) \right\} = \mathcal{Z} \left\{ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{K}{s(s+5)} \right\} \\ &= K(1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s^2(s+5)} \right\} \\ &= K \left( \frac{z-1}{z} \right) \left( \frac{z[(0,5 - 1 + e^{-0,5})z + (1 - e^{-0,5} - 0,5e^{-0,5})]}{5(z-1)^2(z - e^{-0,5})} \right) \\ \Rightarrow G(z) &= \frac{0,21z + 0,18}{(z-1)(z - 0,607)} \end{aligned}$$

$\sqcup$  Cặp cực quyết định mong muốn

$$z_{1,2}^* = re^{\pm j\phi}$$

trong đó  $r = e^{-T\xi\omega_n} = e^{-0,1 \times 0,707 \times 10} = 0,493$

$$\phi = T\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = 0,1 \times 10 \sqrt{1 - 0,707^2} = 0,707$$

$$\Rightarrow z_{1,2}^* = 0,493e^{\pm j0,707} = 0,493[\cos(0,707) \pm j \sin(0,707)]$$

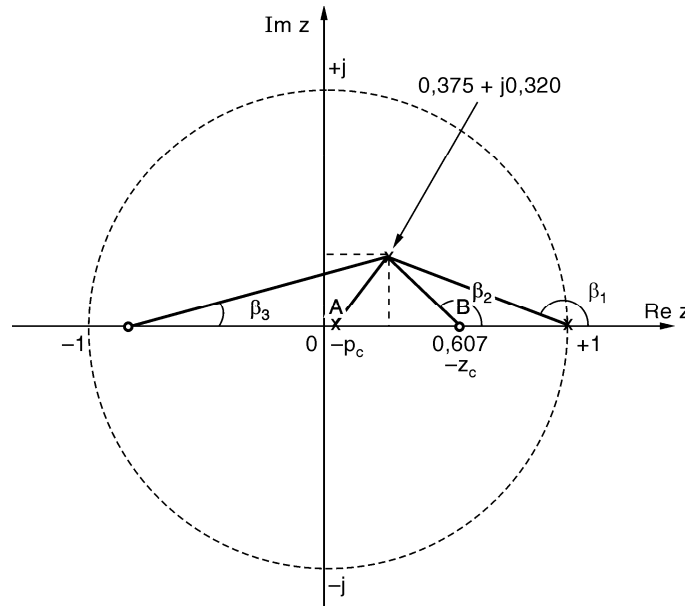
$$\Rightarrow z_{1,2}^* = 0,493e^{\pm j0,707} = 0,375 \pm j0,320$$

$\sqcup$  Góc pha cần bù

$$\Phi^* = -180 + (\beta_1 + \beta_2) - \beta_3$$

Dễ dàng tính được  $\beta_1 = 152,9^\circ$ ;  $\beta_2 = 125,9^\circ$ ;  $\beta_3 = 14,6^\circ$

$$\Rightarrow \Phi^* = -180 + (152,9 + 125,9) - 14,6 = 84^\circ$$



Chọn cực và zero của khâu hiệu chỉnh bằng phương pháp triệt tiêu nghiệm.

$$\Rightarrow -z_C = 0,607 \quad \Rightarrow \quad z_C = -0,607$$

Tính cực của khâu hiệu chỉnh

Ta có  $AB = PB \frac{\sin \Phi^*}{\sin \angle PAB}$

Mà  $PB = \sqrt{(0,607 - 0,375)^2 + 0,320^2} = 0,388$

$$\angle PAB = \beta_2 - \Phi^* = 125,9^\circ - 84^\circ = 41,9^\circ$$

$$\Rightarrow AB = 0,388 \frac{\sin 84^\circ}{\sin 41,9^\circ} = 0,578$$

$$\Rightarrow -p_C = OA = OB - AB = 0,607 - 0,578 = 0,029$$

$$\Rightarrow p_C = -0,029$$

$$\Rightarrow G_C(z) = K_C \frac{z - 0,607}{z - 0,029}$$

- Tính  $K_C$  từ điều kiện

$$|G_C(z)G(z)|_{z=z^*} = 1$$

$$\Rightarrow \left| K_C \frac{(z - 0,607)}{(z - 0,029)} \frac{(0,21z + 0,18)}{(z - 1)(z - 0,607)} \right|_{z=0,375+j0,320} = 1$$

$$\Rightarrow \left| K_C \frac{[0,21(0,375 + j0,320) + 0,18]}{(0,375 + j0,320 - 0,029)(0,375 + j0,320 - 1)} \right| = 1$$

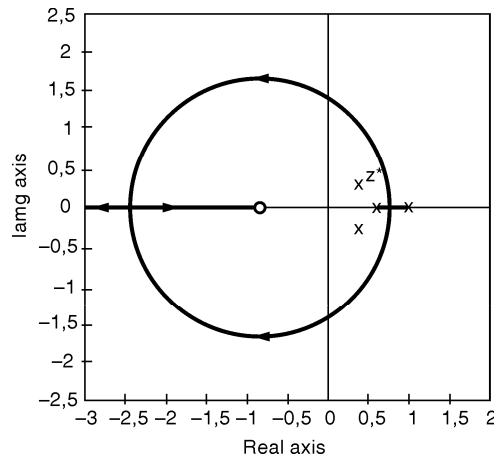
$$\Rightarrow K_C \frac{0,267}{0,471 \times 0,702} = 1$$

$$\Rightarrow K_C \frac{0,267}{0,471 \times 0,702} = \frac{0,471 \times 0,702}{0,267} = 1,24$$

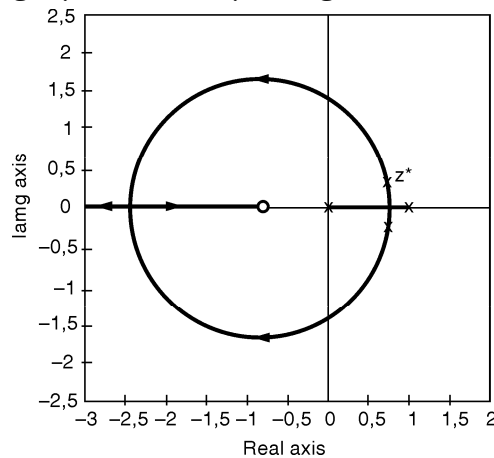
$$\text{Vậy } G_C(z) = 1,24 \frac{z - 0,607}{z - 0,029}$$

### Nhận xét

Quỹ đạo nghiệm số của hệ thống trước khi hiệu chỉnh không qua điểm  $z^*$ , do đó hệ thống sẽ không bao giờ đạt được chất lượng đáp ứng quá độ như yêu cầu dù có thay đổi hệ số khuếch đại của hệ thống.



Quỹ đạo nghiệm số của hệ thống trước khi hiệu chỉnh



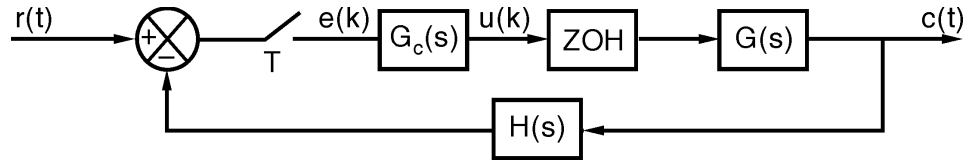
Quỹ đạo nghiệm số của hệ thống sau khi hiệu chỉnh

Bằng cách sử dụng khâu hiệu chỉnh sớm pha, quỹ đạo nghiệm số của hệ thống bị sửa dạng và qua điểm  $z^*$ , do đó bằng cách chọn hệ số khuếch đại thích hợp (bước 4) hệ thống sẽ có cặp cực quyết định như mong muốn  $\Rightarrow$  đáp ứng quá độ đạt yêu cầu thiết kế.

### 8.8.2 Thiết kế bộ điều khiển trễ pha

Ta sử dụng khâu hiệu chỉnh trễ pha khi muốn làm giảm sai số xác lập của hệ thống.

Xét hệ thống điều khiển có sơ đồ như hình vẽ



Khâu hiệu chỉnh  $G_C(z)$  là khâu trễ pha

$$G_C(z) = K_C \frac{z + z_C}{z + p_C} \quad (z_C > p_C) \quad (8.36)$$

Bài toán đặt ra là chọn giá trị  $K_C$ ,  $z_C$  và  $p_C$  để làm giảm sai số xác lập của hệ thống mà không ảnh hưởng đáng kể đến chất lượng đáp ứng quá độ.

$$\text{Đặt} \quad \beta = \frac{1 + p_C}{1 + z_C} \quad (8.37)$$

#### Trình tự thiết kế

**Bước 1: Xác định  $\beta$**  từ yêu cầu về sai số xác lập.

□ Nếu yêu cầu về sai số xác lập cho dưới dạng hệ số vị trí  $K_P^*$  thì

$$\beta = \frac{K_P}{K_P^*} \quad (8.38)$$

trong đó:  $K_P$  - hệ số vị trí của hệ trước khi hiệu chỉnh

$K_P^*$  - hệ số vị trí mong muốn.

□ Nếu yêu cầu về sai số xác lập cho dưới dạng hệ số vận tốc  $K_V^*$  thì:

$$\beta = \frac{K_V}{K_V^*} \quad (8.39)$$

trong đó:  $K_V$  - hệ số vận tốc của hệ trước khi hiệu chỉnh

$K_V^*$  - hệ số vận tốc mong muốn.

**Bước 2: Chọn zero** của khâu hiệu chỉnh rất gần điểm  $+1$  để không làm ảnh hưởng đáng kể đến dạng QĐNS, suy ra

$$-z_C \approx 1 \Rightarrow z_C \approx -1 \quad (\text{Chú ý điều kiện: } |z_C| < 1) \quad (8.40)$$

**Bước 3: Tính cực** của khâu hiệu chỉnh:

$$p_C = -1 + \beta(1 + z_C) \quad (8.41)$$

**Bước 4: Tính  $K_C$**  bằng cách áp dụng công thức

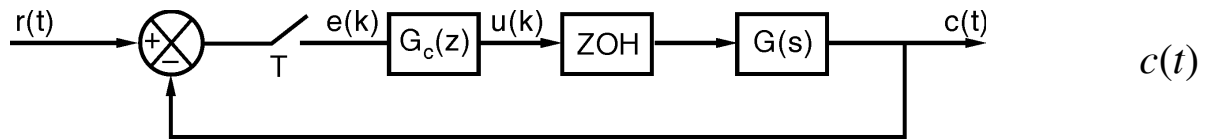
$$|G_C(z)GH(z)|_{z=z^*} = 1 \quad (8.42)$$

trong đó  $z_{1,2}^*$  là cặp cực quyết định của hệ thống sau khi hiệu chỉnh. Do yêu cầu thiết kế không làm ảnh hưởng đáng kể đến đáp ứng quá độ nên có thể tính gần đúng

$$z_{1,2}^* \approx z_{1,2}$$

với  $z_{1,2}$  là cặp cực quyết định của hệ thống trước khi hiệu chỉnh.

**Ví dụ 8.7.** Cho hệ thống điều khiển rời rạc có sơ đồ khối như hình vẽ, trong đó



Hàm truyền khâu liên tục  $G(s) = \frac{50}{s(s+5)}$ , chu kỳ lấy mẫu

$$T = 0,1 \text{ sec}$$

Hãy thiết kế khâu hiệu chỉnh trễ pha sao cho hệ thống sau khi hiệu chỉnh có hệ số vận tốc là  $K_V^* = 100$ .

**Giải.** Phương trình đặc tính của hệ trước khi hiệu chỉnh

$$1 + G(z) = 0$$

trong đó

$$\begin{aligned}
 \square \quad G(z) &= \mathcal{Z}\{G_{ZOH}(s)G(s)\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{50}{s(s+5)}\right\} \\
 &= 10(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^2(s+5)}\right\} \\
 &= 10\left(\frac{z-1}{z}\right)\left(\frac{z[(0,5-1+e^{-0,5})z+(1-e^{-0,5}-0,5e^{-0,5})]}{5(z-1)^2(z-e^{-0,5})}\right) \\
 \Rightarrow G(z) &= \frac{0,21z+0,18}{(z-1)(z-0,607)}
 \end{aligned}$$

Cặp cực quyết định của hệ thống trước khi hiệu chỉnh là nghiệm của phương trình

$$1 + \frac{0,21z+0,18}{(z-1)(z-0,607)} = 0 \Leftrightarrow z_{1,2} = 0,699 \pm j0,547$$

Hệ số vận tốc của hệ thống trước khi hiệu chỉnh là

$$\begin{aligned}
 K_V &= \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})GH(z) \\
 \Rightarrow K_V &= \frac{1}{0,1} \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{0,21z+0,18}{(z-1)(z-0,607)} \Rightarrow K_V = 9,9
 \end{aligned}$$

$$\text{Do đó} \quad \beta = \frac{K_V}{K_V^*} = \frac{9,9}{100} = 0,099$$

Chọn zero của khâu hiệu chỉnh rất gần điểm +1

$$-z_C = 0,99 \Rightarrow z_C \approx -0,99$$

Suy ra cực của khâu hiệu chỉnh

$$\begin{aligned}
 p_C &= -1 + (1+z_C) = -1 + 0,099(1-0,99) \\
 \Rightarrow p_C &= -0,999 \Rightarrow G_C(z) = K_C \frac{z-0,99}{z-0,999}
 \end{aligned}$$

Tính  $K_C$  từ điều kiện

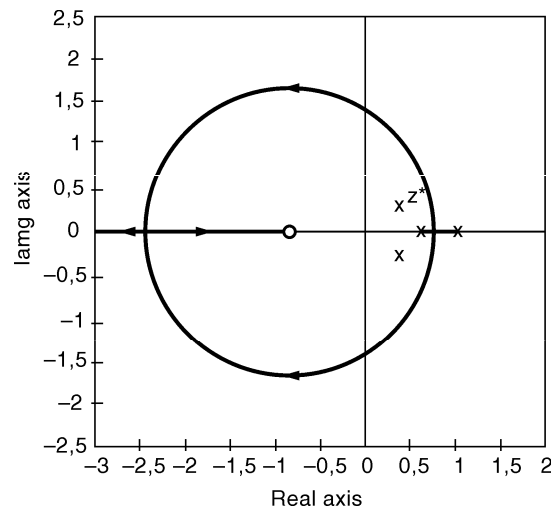
$$\begin{aligned}
 &\left| K_C \frac{(z-0,99)}{(z-0,999)} \frac{(0,21z+0,18)}{(z-1)(z-0,607)} \right|_{z=0,699+j0,547} = 1 \\
 \Rightarrow &\left| K_C \frac{(0,699+j0,547-0,99)}{(0,699+j0,547-0,999)} \right| = 1
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow K_C = \frac{0,6239}{0,6196} = 1,007 \approx 1$$

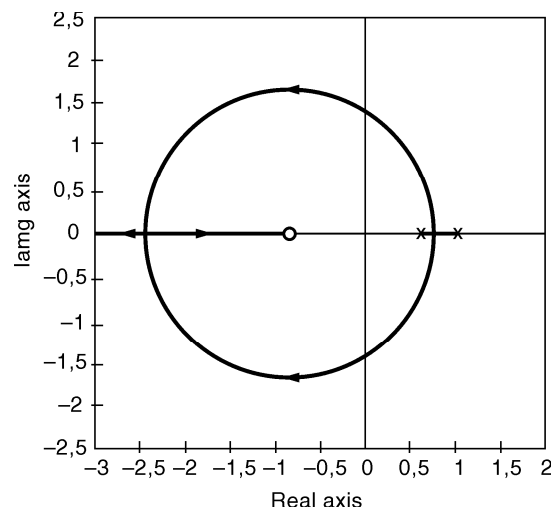
$$\text{Vậy } G_C(z) = \frac{z - 0,99}{z - 0,999}$$

### Nhận xét

QĐNS của hệ thống trước và sau khi hiệu chỉnh gần giống nhau.



Quỹ đạo nghiệm số của hệ thống trước khi hiệu chỉnh



Quỹ đạo nghiệm số của hệ thống sau khi hiệu chỉnh



### 3- Thiết kế bộ điều khiển sớm trễ pha

Hàm truyền khâu hiệu chỉnh sớm trễ pha cần thiết kế có dạng

$$G_C(z) = G_{C1}(z)G_{C2}(z)$$

trong đó:  $G_{C1}(z)$  là khâu hiệu chỉnh sớm pha

$G_{C2}(z)$  là khâu hiệu chỉnh trễ pha.

Bài toán đặt ra thiết kế  $G_C(z)$  để cải thiện đáp ứng quá độ và sai số xác lập của hệ thống.

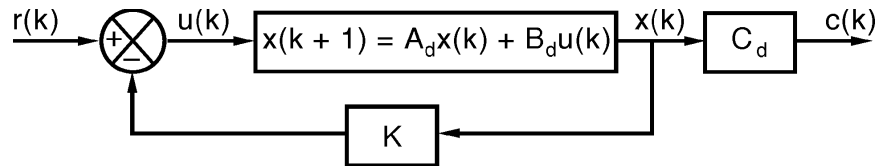
#### Trình tự thiết kế

**Bước 1:** Thiết kế khâu sớm pha  $G_{C1}(z)$  để thỏa mãn yêu cầu về đáp ứng quá độ (xem phương pháp thiết kế khâu hiệu chỉnh sớm pha ở mục 8.8.1).

**Bước 2:** Đặt  $G_1(z) = G_{C1}(z) \cdot G(z)$ .

Thiết kế khâu hiệu chỉnh trễ pha  $G_{C2}(z)$  mắc nối tiếp vào  $G_1(z)$  để thỏa mãn yêu cầu về sai số xác lập mà không thay đổi đáng kể đáp ứng quá độ của hệ thống sau khi đã hiệu chỉnh sớm pha (xem phương pháp thiết kế khâu hiệu chỉnh trễ pha ở mục 8.8.2).

## 8.9 THIẾT KẾ DÙNG BỘ ĐIỀU KHIỂN HỒI TIẾP TRẠNG THÁI



Cho đối tượng điều khiển được mô tả bởi HPT biến trạng thái

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d u(k) \\ c(k) = \mathbf{C}_d \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

Tín hiệu điều khiển trong hệ hồi tiếp trạng thái là

$$u(k) = r(k) - \mathbf{K} \mathbf{x}(k)$$

Hệ phương trình biến trạng thái mô tả hệ hồi tiếp trạng thái

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d [r(k) - \mathbf{K} \mathbf{x}(k)] \\ c(k) = \mathbf{C}_d \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = [\mathbf{A}_d - \mathbf{B}_d \mathbf{K}] \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d r(k) \\ c(k) = \mathbf{C}_d \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

Phương trình đặc tính của hệ hồi tiếp trạng thái

$$\det[z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d \mathbf{K}] = 0 \quad (8.43)$$

Lý thuyết điều khiển chứng minh được rằng: Nếu  $\text{rank}(P) = n$ , với  $n$  là bậc của hệ thống và  $P = [\mathbf{B}_d \quad \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d \quad \mathbf{A}_d^2 \mathbf{B}_d \quad \dots \quad \mathbf{A}_d^{n-1} \mathbf{B}_d]$  thì HT trên điều khiển được, khi đó có thể tìm được vectơ  $\mathbf{K}$  để phương trình đặc tính (8.43) có nghiệm bất kỳ.

### Trình tự thiết kế

**Bước 1:** Viết phương trình đặc tính của hệ thống sau khi hiệu chỉnh

$$\det[z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d \mathbf{K}] = 0 \quad (8.44)$$

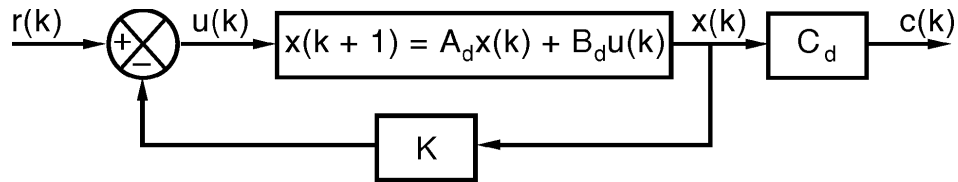
**Bước 2:** Viết phương trình đặc tính mong muốn

$$\prod_{i=1}^n (z - p_i) = 0 \quad (8.45)$$

trong đó  $p_i$  ( $i = \overline{1..n}$ ) là các cực mong muốn

**Bước 3:** Cân bằng các hệ số của hai phương trình đặc tính (8.44) và (8.45) tìm được vectơ độ lợi hồi tiếp  $\mathbf{K}$ .

**Ví dụ 8.8.** Cho hệ thống rời rạc như hình vẽ



Hệ phương trình biến trạng thái mô tả đối tượng là

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d u(k) \\ c(k) = \mathbf{C}_d \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

trong đó  $A_d = \begin{bmatrix} 1 & 0,316 \\ 0 & 0,368 \end{bmatrix}$   $B_d = \begin{bmatrix} 0,092 \\ 0,316 \end{bmatrix}$   $C_d = [10 \ 0]$

Hãy tính vectơ độ lợi hồi tiếp trạng thái sao cho hệ kín có cặp cực phức với  $\xi = 0,707$  và  $\omega_n = 10 \text{ rad/sec}$ .

**Giải.** Phương trình đặc tính của hệ thống kín là

$$\det[zI - A_d + B_d K] = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \left( z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0,316 \\ 0 & 0,368 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,092 \\ 0,316 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \left( \begin{bmatrix} z-1+0,092k_1 & -0,316+0,092k_2 \\ 0,316k_1 & z-0,368+0,316k_2 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z-1+0,092k_1)(z-0,368+0,316k_2) - 0,316k_1(-0,316+0,092k_2) = 0$$

$$z^2 + (0,092k_1 + 0,316k_2 - 1,368)z + (0,066k_1 - 0,316k_2 + 0,368) = 0 \quad (1)$$

Cặp cực quyết định mong muốn

$$z_{1,2}^* = re^{\pm j\varphi}$$

trong đó  $r = e^{-T\xi\omega_n} = e^{-0,1 \times 0,707 \times 10} = 0,493$

$$\varphi = T\omega_n \sqrt{1-\xi^2} = 0,1 \times 10 \sqrt{1-0,707^2} = 0,707$$

$$\Rightarrow z_{1,2}^* = 0,493e^{\pm j0,707} = 0,493[\cos(0,707) \pm j\sin(0,707)]$$

$$\Rightarrow z_{1,2}^* = 0,493e^{\pm j0,707} = 0,375 \pm j0,320$$

Phương trình đặc tính mong muốn

$$(z - 0,375 - j0,320)(z - 0,375 + j0,320) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 0,75z + 0,243 = 0 \quad (2)$$

Cân bằng các hệ số ở hai phương trình (1) và (2), ta được

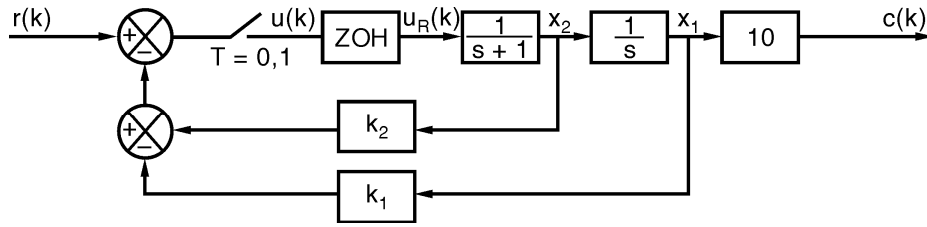
$$\begin{cases} (0,092k_1 + 0,316k_2 - 1,368) = -0,75 \\ (0,066k_1 - 0,316k_2 + 0,368) = 0,243 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được

$$\begin{cases} k_1 = 3,12 \\ k_2 = 1,047 \end{cases}$$

Vậy  $K = [3,12 \ 1,047]$  ■

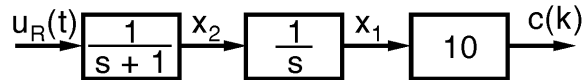
**Ví dụ 8.9.** Cho hệ thống điều khiển rời rạc có sơ đồ như hình vẽ.



Hãy xác định vectơ hồi tiếp trạng thái  $K = [k_1 \ k_2]$  sao cho hệ thống có cặp nghiệm phức với  $\xi = 0,5$  và  $\omega_n = 8 \text{ (rad/sec)}$ .

**Giải**

- Hệ phương trình trạng thái mô tả khâu liên tục



Theo hình vẽ ta có

$$\square \quad X_1(s) = \frac{X_2(s)}{s} \Rightarrow sX_1(s) = X_2(s) \Rightarrow \dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (1)$$

$$\square \quad X_2(s) = \frac{U_R(s)}{s+1} \Rightarrow (s+1)X_2(s) = U_R(s)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_2(t) + x_2(t) = u_R(t)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u_R(t) \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2) ta được hệ phương trình

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_R(t)$$

Đáp ứng của hệ thống

$$c(t) = 10x_1(t) = \begin{bmatrix} 10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = Cx(t)$$

$$\text{Do đó} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 10 & 0 \end{bmatrix}$$

- Ma trận quá độ

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \left( s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \left( \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{s(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \\
\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)] &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} & \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s+1)} \right\} \\ 0 & \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} \end{bmatrix} \\
\Rightarrow \Phi(t) &= \begin{bmatrix} 1 & (1-e^{-t}) \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

- Rời rạc hóa các phương trình trạng thái của hệ liên tục, ta được

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d u(k) \\ c(k) = \mathbf{C}_d \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
\sqcup \mathbf{A}_d = \Phi(T) &= \begin{bmatrix} 1 & (1-e^{-0,1}) \\ 0 & e^{-0,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,095 \\ 0 & 0,905 \end{bmatrix} \\
\sqcup \mathbf{B}_d = \int_0^T \Phi(\tau) \mathbf{B} d\tau &= \int_0^{0,1} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & (1-e^{-\tau}) \\ 0 & e^{-\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau \right\} = \int_0^{0,1} \left\{ \begin{bmatrix} (1-e^{-\tau}) \\ e^{-\tau} \end{bmatrix} d\tau \right\} \\
&= \begin{bmatrix} (\tau + e^{-\tau}) \\ -e^{-\tau} \end{bmatrix}_0^{0,1} = \begin{bmatrix} (0,1 + e^{-0,1} - 1) \\ -e^{-0,1} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,005 \\ 0,095 \end{bmatrix} \\
\sqcup \mathbf{C}_d = \mathbf{C} &= [10 \quad 0]
\end{aligned}$$

- Phương trình đặc tính của hệ thống kín

$$\det[z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d \mathbf{K}] = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \left( z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0,095 \\ 0 & 0,905 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,005 \\ 0,095 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \left( \begin{bmatrix} z-1+0,005k_1 & -0,095+0,005k_2 \\ 0,095k_1 & z-0,905+0,095k_2 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z-1+0,005k_1)(z-0,905+0,095k_2) - 0,905k_1(-0,095+0,005k_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 + (0,005k_1 + 0,095k_2 - 1,905)z + (0,0045k_1 - 0,095k_2 + 0,905) = 0 \quad (1)$$

Cặp cực quyết định mong muốn:  $z_{1,2}^* = re^{\pm j\varphi}$

trong đó  $r = e^{-T\xi\omega_n} = e^{-0,1 \times 0,5 \times 8} = 0,67$

$$\varphi = T\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = 0,1 \times 8 \sqrt{1 - 0,5^2} = 0,693$$

$$\Rightarrow z_{1,2}^* = 0,67e^{\pm j0,693} = 0,67[\cos(0,693) \pm j \sin(0,693)]$$

$$\Rightarrow z_{1,2}^* = 0,516 \pm j0,428$$

Phương trình đặc tính mong muốn

$$(z - 0,516 - j0,428)(z - 0,516 + j0,428) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 1,03z + 0,448 = 0 \quad (2)$$

Cân bằng các hệ số ở hai phương trình (1) và (2), ta được

$$\begin{cases} (0,005k_1 + 0,095k_2 - 1,905) = -1,03 \\ (0,0045k_1 - 0,095k_2 + 0,905) = 0,448 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được

$$\begin{cases} k_1 = 44,0 \\ k_2 = 6,895 \end{cases}$$

Vậy  $K = [4,805 \quad 8,958]$  ■

## 8.10 THIẾT KẾ BỘ ĐIỀU KHIỂN PID

### 8.10.1 Phương pháp Zeigler-Nichols

Hàm truyền bộ điều khiển PID

$$G_{PID}(z) = K_P + \frac{K_I T}{2} \frac{z+1}{z-1} + \frac{K_D}{T} \frac{z-1}{z}$$

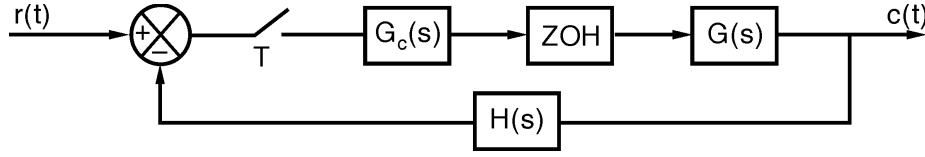
Các hệ số  $K_P$ ,  $K_I$ ,  $K_D$  có thể chọn bằng phương pháp thực nghiệm Zeigler-Nichols như đã trình bày ở chương 6.

### 8.10.2 Phương pháp giải tích

Từ yêu cầu thiết kế về đáp ứng quá độ (vị trí nghiệm của phương trình đặc tính) và sai số xác lập, có thể tính toán giải

tích để chọn thông số bộ điều khiển PID số. Sau đây là một ví dụ.

**Ví dụ 8.10.** Cho hệ thống điều khiển có sơ đồ như hình vẽ.



$$G(s) = \frac{10}{10s + 1}; \quad H(s) = 0,05; \quad T = 2 \text{ sec}$$

Thiết kế khâu hiệu chỉnh  $G_C(z)$  để hệ thống có cặp cực phức với  $\xi = 0,707$ ,  $\omega_n = 2 \text{ rad/sec}$  và sai số xác lập đối với tín hiệu vào là hàm nấc đơn vị bằng 0.

**Giải.** Do yêu cầu sai số xác lập đối với tín hiệu vào là hàm nấc bằng 0 nên ta sử dụng khâu hiệu chỉnh  $G_C(z)$  là khâu PI.

$$G_C(z) = K_P + \frac{K_I T}{2} \frac{z + 1}{z - 1}$$

Phương trình đặc tính của hệ thống sau khi hiệu chỉnh là

$$1 + G_C(z)GH(z) = 0$$

$$\text{trong đó: } GH(z) = \mathcal{Z} \left\{ G_{ZOH}(s)G(s)H(s) \right\} = \mathcal{Z} \left\{ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{10 \times 0,05}{(10s + 1)} \right\}$$

$$= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{0,05}{s(s + 0,1)} \right\} = (1 - z^{-1}) \frac{0,05z(1 - e^{-0,2})}{0,1(z - 1)(z - e^{-0,2})}$$

$$\Rightarrow GH(z) = \frac{0,091}{(z - 0,819)}$$

Do đó phương trình đặc tính của hệ thống là

$$1 + \left( K_P + \frac{K_I T}{2} \frac{z + 1}{z - 1} \right) \left( \frac{0,091}{z - 0,819} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \left( K_P + \frac{K_I T}{2} \frac{z + 1}{z - 1} \right) \left( \frac{0,091}{z - 0,819} \right) = 0$$

Thay  $T = 2$ , ta suy ra

$$z^2 + (0,091K_P + 0,091K_I - 1,819)z + (-0,091K_P + 0,091K_I + 0,819) = 0 \quad (1)$$

Cặp cực quyết định mong muốn là

$$z_{1,2}^* = re^{\pm j\varphi}$$

với  $r = e^{-T\xi\omega_n} = e^{-2 \times 0,707 \times 2} = 0,059$

$$\varphi = T\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = 2 \times 2 \times \sqrt{1 - 0,707^2} = 2,828$$

$$\Rightarrow z_{1,2}^* = 0,059e^{\pm j2,828} = 0,059[\cos(2,828) \pm j \sin(2,828)]$$

$$\Rightarrow z_{1,2}^* = -0,056 \pm j0,018$$

Phương trình đặc tính mong muốn là

$$(z + 0,056 + j0,018)(z + 0,056 - j0,018) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 + 0,112z + 0,0035 = 0 \quad (2)$$

So sánh (1) và (2), suy ra

$$\begin{cases} 0,091K_P + 0,091K_I - 1,819 = 0,112 \\ -0,091K_P + 0,091K_I + 0,819 = 0,0035 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được:  $\begin{cases} K_P = 15,09 \\ K_I = 6,13 \end{cases}$

Vậy  $G_C(z) = 15,09 + 6,13 \frac{z+1}{z-1}$  ■



# HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG PHI TUYẾN

## 9.1 KHÁI NIỆM

Các phương pháp phân tích và thiết kế hệ điều khiển hồi tiếp trình bày ở các chương trước chỉ áp dụng được cho hệ tuyến tính bất biến theo thời gian, đó là các hệ được biểu diễn bằng phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng. Trong thực tế các hệ tuyến tính chỉ tuyến tính trên một tầm nào đó. Ở vài mức độ tất cả các hệ vật lý đều phi tuyến. Vì vậy, vấn đề quan trọng là mỗi hệ có một phương pháp riêng để phân tích với mức độ phi tuyến khác nhau.

Bất cứ nỗ lực nào nhằm hạn chế nghiêm ngặt sự suy xét ở hệ tuyến tính chỉ có thể dẫn đến làm phức tạp nghiêm trọng trong thiết kế hệ thống. Để làm việc tuyến tính trên một tầm biến đổi rộng về biên độ tín hiệu và tần số, đòi hỏi các phần tử có chất lượng cực kỳ cao. Một hệ như thế không thực tế trên quan điểm giá cả, kích thước và khối lượng. Hơn nữa, có thể nhận ra sự thu hẹp tuyến tính hạn chế nghiêm trọng các đặc tính của hệ.

Thực tế hoạt động tuyến tính yêu cầu chỉ cho sai lệch nhỏ quanh điểm làm việc tĩnh. Trạng thái bão hòa của các dụng cụ khuếch đại có sai lệch lớn so với điểm làm việc tĩnh, sự hiện diện phi tuyến dưới hình thức các vùng chết (*dead zone*) cho sai lệch nhỏ quanh điểm làm việc tĩnh có thể chấp nhận được. Trong cả hai trường hợp, người ta cố giới hạn các ảnh hưởng phi tuyến đến mức có thể chấp nhận được, bởi vì thực tế không thể loại trừ hoàn toàn vấn đề này.

Trên thực tế các phi tuyến có thể được đưa vào trong hệ một cách chủ ý để bù lại ảnh hưởng của các phi tuyến không mong muốn khác hoặc là để đạt được chất lượng tốt hơn so với việc hiệu chỉnh chỉ bằng các phần tử tuyến tính. Ví dụ đơn giản về phi tuyến có chủ định là việc sử dụng đệm phi tuyến để tối ưu hóa đáp ứng là một hàm của sai số.

Mục đích của chương này là nghiên cứu các đặc điểm của phi tuyến và kể đến, trình bày vài phương pháp để phân tích và thiết kế các điều khiển phi tuyến.

Chúng ta cần nhận thấy rằng các phương pháp phân tích phi tuyến không tiến bộ nhanh như kỹ thuật phân tích hệ tuyến tính. Nói một cách so sánh, ở thời điểm hiện tại các phương pháp phân tích hệ phi tuyến vẫn còn trong giai đoạn phát triển. Tuy nhiên, các phương pháp khác nhau trong chương này có thể cho phép phân tích và tổng hợp hệ điều khiển phi tuyến một cách định lượng.

### 9.1.1 Tính chất và đặc điểm riêng của phi tuyến

Một vài tính chất vốn có của hệ tuyến tính, làm đơn giản rất nhiều lời giải cho loại hệ thống này, không có hiệu lực đối với hệ phi tuyến.

Tính chất xếp chồng (*superposition*) là tính chất cơ bản và là cơ sở xác định một hệ tuyến tính. Nguyên lý xếp chồng phát biểu rằng nếu  $c_1(t)$  là đáp ứng của hệ đối với  $r_1(t)$  và  $c_2(t)$  là đáp ứng của hệ đối với  $r_2(t)$ , khi đó đáp ứng của hệ đối với  $a_1r_1(t) + a_2r_2(t)$  là  $a_1c_1(t) + a_2c_2(t)$ . Nguyên lý xếp chồng không áp dụng cho hệ phi tuyến, vì vậy, vài thủ tục (*procedure*) toán học dùng trong thiết kế hệ tuyến tính không dùng được cho hệ phi tuyến.

Sự ổn định của hệ tuyến tính đã trình bày (ở chương 4) chỉ phụ thuộc vào các thông số của hệ. Thế nhưng, sự ổn định của hệ phi tuyến lại phụ thuộc vào điều kiện và bản chất của tín hiệu vào như các thông số của hệ. Người ta không thể hy vọng một hệ phi tuyến cho một đáp ứng ổn định với lại tín hiệu này lại có đáp ứng ổn định với loại tín hiệu khác. Các hệ phi tuyến ổn định đối với tín hiệu rất nhỏ hay rất lớn, nhưng không thể cả hai.

Đáp ứng đầu ra của một hệ tuyến tính, được kích thích bởi tín hiệu sin, có cùng tần số như đầu vào mặc dù biên độ và pha của nó có thể khác. Trong khi đó tín hiệu ra của hệ phi tuyến thường bao gồm các thành phần tần số cơ bản, họa tần và có thể không chứa tần số đầu vào.

Đối với hệ tuyến tính hoán chuyển hai phần tử trong một tầng không ảnh hưởng đến hoạt động. Điều này không đúng nếu một phần tử là phi tuyến.

Câu hỏi về sự ổn định là xác định rõ ràng đối với hệ tuyến tính hệ số hằng: một hệ hoặc là không ổn định hoặc ổn định. Một hệ tuyến tính không ổn định có tín hiệu ra tăng dần không giới hạn hoặc theo hàm mũ hoặc ở chế độ dao động với đường bao của dao động tăng theo hàm mũ.

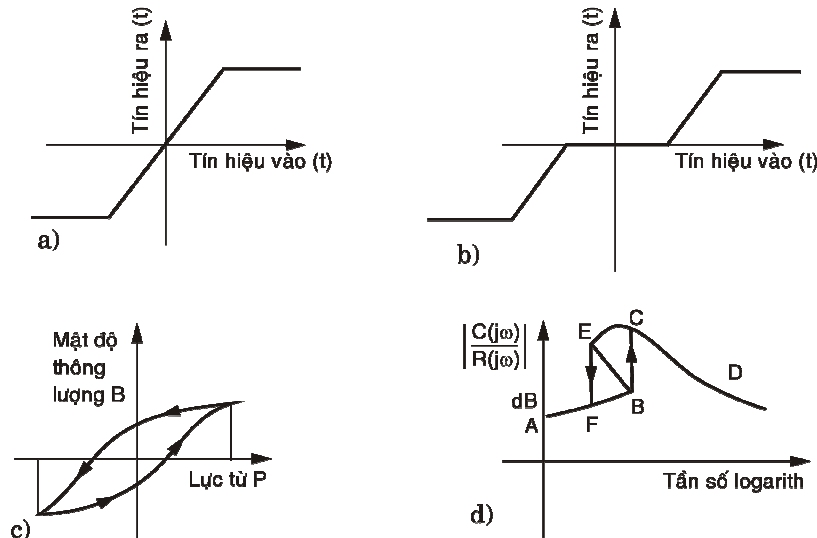
Các đặc điểm riêng của hệ phi tuyến:

Mục này mô tả chi tiết vài đặc điểm cá biệt của hệ phi tuyến. Chúng ta sẽ bàn một cách chi tiết: chu trình giới hạn, tự kích cứng và mềm, nhảy cộng hưởng và tạo hài phụ.

**Các chu trình giới hạn** là các dao động với biên độ và chu kỳ cố định xảy ra trong hệ phi tuyến. Tùy theo dao động phân kỳ hay hội tụ do các điều kiện đặt ra, chu trình giới hạn có thể ổn định hoặc không ổn định. Có khả năng các hệ ổn định có điều kiện gồm cả một chu trình giới hạn ổn định và một chu trình giới hạn không ổn định. Sự xuất hiện các chu trình giới hạn trong hệ phi tuyến dẫn đến phải xác định sự ổn định trong số các thành phần biên độ chấp nhận được bởi vì một dao động phi tuyến rất nhỏ có thể gây ra nguy hại cho sự hoạt động của hệ thống

**Dao động tự kích** xuất hiện trong hệ thống ổn định với sự hiện diện của các tín hiệu rất nhỏ gọi là dao động tự kích mềm. Dao động tự kích xuất hiện trong hệ không ổn định với sự xuất hiện các tín hiệu rất lớn là tự kích cứng. Vì các dao động mềm và cứng có thể xảy ra nên các kỹ sư điều khiển phải xác định cho hệ khi thiết kế. Một hệ điều khiển hồi tiếp bao gồm các phần tử có đặc tính bão hòa minh họa ở hình 9.1a, có thể tượng trưng cho tự kích mềm. Một hệ điều khiển hồi tiếp chứa một phần tử có đặc tính vùng chết như minh họa ở hình 9.1b, có thể tượng trưng cho tự kích cứng.

**Từ trễ** là một hiện tượng phi tuyến thường liên quan đến đặc tính đường cong từ tính hoặc khe hở của bộ bánh răng. Một đường cong từ tính thông dụng mà đường đi của nó phụ thuộc lực từ  $H$  đang tăng hay giảm được trình bày ở hình 9.1c.



**Hình 9.1:** a) Đặc tính bão hòa; b) Đặc tính vùng chết; c) Vòng từ trễ  
d) Đáp ứng vòng kín của một hệ thống với nhảy cộng hưởng

**Nhảy cộng hưởng** là một dạng khác của từ trễ. Bản thân nó biểu diễn đáp ứng tần số vòng kín được minh họa ở hình 9.1d. Khi tăng tần số  $\omega$  và biên độ ngõ vào  $R$  được giữ cố định đáp ứng sẽ đi theo đường cong AFB. Tại điểm B, một thay đổi nhỏ về tần số dẫn đến việc nhảy gián đoạn đến điểm C. Sau đó đáp ứng theo đường cong đến điểm D khi gia tăng tần số. Từ điểm D tần số được giảm xuống đáp ứng theo đường cong đến các điểm C và E. Tại điểm E, một thay đổi nhỏ ở tần số dẫn đến việc nhảy gián đoạn đến điểm F. Đáp ứng theo đường cong đến điểm A khi giảm thêm tần số. Quan sát từ sự mô tả này, đáp ứng thật sự không bao giờ đi theo đoạn BE. Phần này của đường cong tiêu biểu cho trạng thái cân bằng không ổn định. Để hiện tượng cộng hưởng xảy ra phải là hệ bậc hai hoặc cao hơn.

**Phát sinh hài phụ** đề cập đến các hệ phi tuyến mà tín hiệu ra của nó chứa các hài phụ của tần số kích thích dạng sin của tín hiệu vào. Việc chuyển hoạt động ở hài phụ thường xảy ra hoàn toàn ngẫu nhiên.

### 9.1.2 Các phương pháp khảo sát hệ phi tuyến

Tất cả các kỹ thuật dùng để phân tích hệ phi tuyến đều phụ thuộc vào tính nghiêm ngặt của hệ phi tuyến và bậc của hệ ở trạng thái suy xét. Trong chương này, chúng ta sẽ xét các kỹ thuật có hiệu quả và thông dụng, minh họa các ứng dụng thực tế của chúng. Chương này sẽ dẫn ra các kết luận và các hướng dẫn chọn phương pháp thích hợp cho việc phân tích và thiết kế các bài toán cụ thể đối với hệ phi tuyến.

Việc phân tích các hệ phi tuyến gắn với sự tồn tại và ảnh hưởng của chu trình giới hạn, tự kích mềm và cứng, từ trễ, nhảy cộng hưởng và tạo hài phụ. Hơn nữa, phải xác định đáp ứng đối với các hàm đầu vào đặc trưng. Khó khăn chính cho việc phân tích hệ phi tuyến là không có kỹ thuật riêng nào áp dụng tổng quát cho tất cả các bài toán.

Hệ thống gần phi tuyến, sai biệt so với phi tuyến không quá lớn, cho phép sử dụng phương pháp xấp xỉ tuyến tính. Hàm mô tả gần đúng có thể áp dụng cho các hệ phi tuyến bậc bất kỳ nào và thường dùng để phát hiện dao động trong hệ. Cách giải quyết sẽ đơn giản hơn nhiều nếu giả định ngõ vào đối với hệ phi tuyến là sin và chỉ chứa thành phần tần số có ý nghĩa ở đầu ra là thành phần có cùng tần số với ngõ vào.

Các hệ phi tuyến thường được xấp xỉ bằng vài vùng tuyến tính. Phương pháp tuyến tính từng đoạn cho phép phân đoạn tuyến tính hóa bất cứ phi tuyến nào đối với hệ bậc bất kỳ. Phương pháp mặt phẳng pha là một kỹ thuật đặc lực để phân tích đáp ứng của một hệ phi tuyến bậc hai. Các phương pháp ổn định của Lyapunov là các kỹ thuật mạnh mẽ để xác định sự ổn định ở trạng thái xác lập của hệ phi tuyến dựa trên tổng quát hóa các khái niệm năng lượng. Phương pháp Popov rất hữu hiệu cho việc xác định sự ổn định hệ phi tuyến bất biến theo thời gian. Tiêu chuẩn đường tròn tổng quát hóa có thể áp dụng cho hệ phi tuyến biến thiên theo thời gian mà phần tuyến tính không nhất thiết phải ổn định ở vòng hở.

Hệ bậc rất cao có vài phi tuyến ít khi xử lý bằng các khái niệm phân tích chung. Vấn đề này yêu cầu dùng các phương pháp số sử dụng máy tính để giải quyết. Tuy nhiên, lời giải chỉ có giá

trị đối với bài toán cụ thể được đề cập. Khó có thể mở rộng kết quả và có được cách giải chung để dùng cho các bài toán khác.

Phương pháp mô phỏng thường dùng để kiểm tra lần cuối sự ổn định của hệ điều khiển phi tuyến. Phương pháp này sẽ giúp khắc phục nhiều yếu tố như: không dễ ý chính xác tính hiệu lực của giả thiết do các khó khăn trong quá trình phân tích vì hệ phức tạp.

## 9.2 PHƯƠNG PHÁP MẶT PHẪNG PHA

Mặt phẳng pha và tính chất của nó

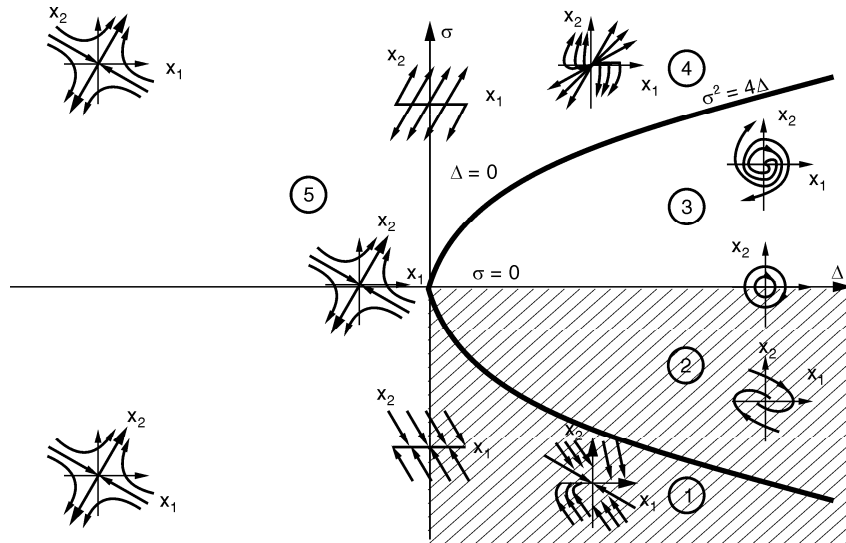
Xét hệ phi tuyến bậc hai ( $n = 2$ ) được mô tả ở dạng hai phương trình vi phân bậc nhất với các biến trạng thái  $x_1, x_2$ :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2)\end{aligned}\quad (9.1)$$

Hoặc được mô tả dưới dạng một phương trình

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} \quad (9.2)$$

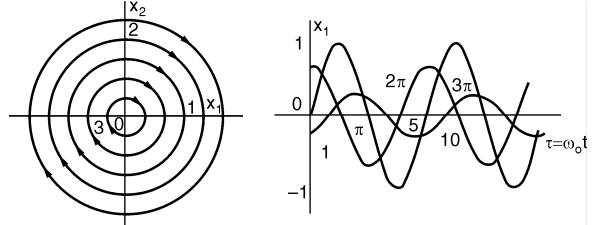
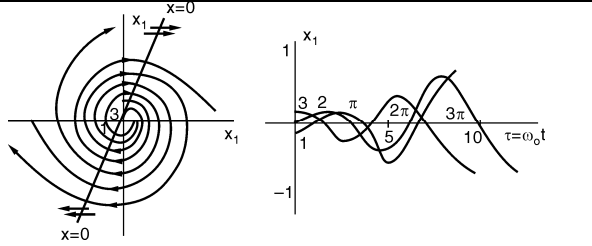
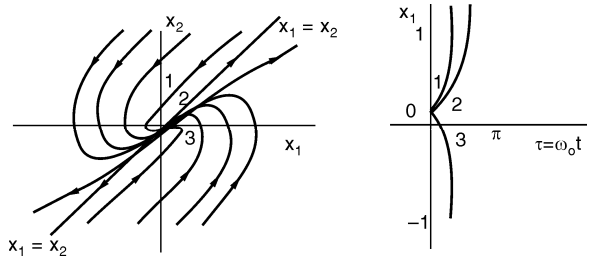
Với các điều kiện ban đầu  $x_1(0)$  &  $x_2(0)$ .



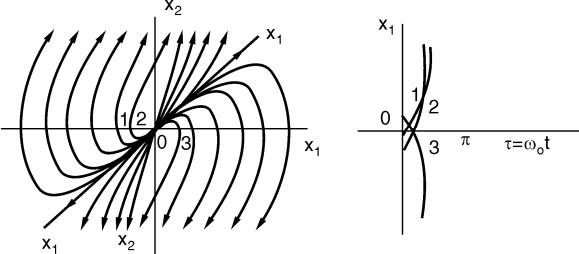
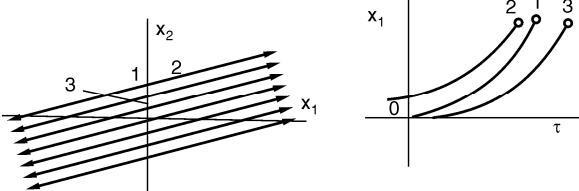
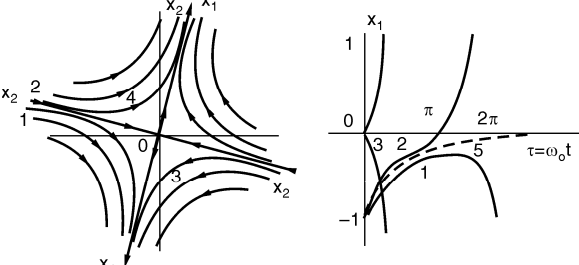
Hình 9.2

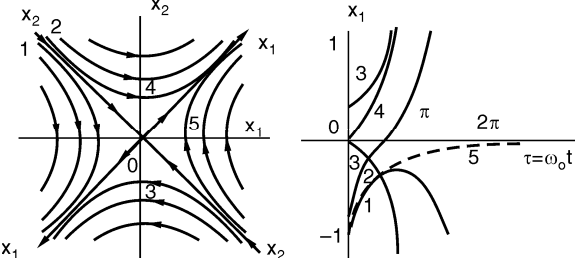
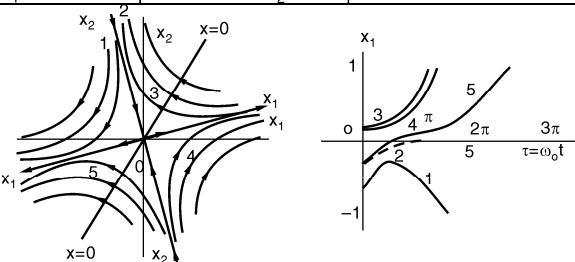
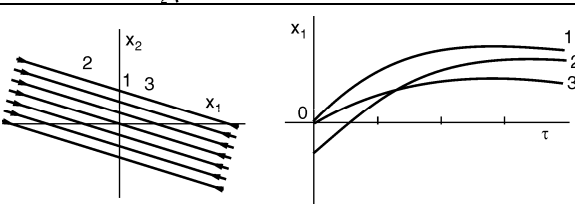
Bảng 9.1

Vùng ở hình 9.2	Phương trình	Quỹ đạo pha và đáp ứng pha	Ký hiệu
Vùng ① $\Delta < \frac{\sigma^2}{4}$ $\sigma < -2\sqrt{\Delta}$ $\xi > 1$	$x_1 = \frac{x_{20} - q_2 x_{10}}{q_1 - q_2} e^{q_1 \tau} - \frac{x_{20} - q_2 x_{10}}{q_1 - q_2} e^{q_2 \tau}$ $x_2 = \frac{q_1 (x_{20} - q_2 x_{10})}{q_1 - q_2} e^{q_1 \tau} - \frac{q_2 (x_{20} - q_2 x_{10})}{q_1 - q_2} e^{q_2 \tau}$		$\xi = -\frac{\sigma}{2\sqrt{\Delta}}$ $q_{1,2} = -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}$
Ranh giới giữa 2 vùng ① và ② $\xi = 1$	$x_1 = [x_{10}(1 - q\tau) + x_{20}]e^{q\tau}$ $x_2 = [x_{20}(1 + \tau) - x_{10}q\tau]e^{q\tau}$ $q = q_1 = q_2 = -1$		$q = -\xi = \frac{\sigma}{2\sqrt{\Delta}}$
Vùng ② $0 < \xi < 1$	$x_1 = [x_{10} \cos \Omega t + \frac{x_{20} + \xi x_{10}}{\Omega} \sin \Omega t]e^{-\xi t}$ $x_2 = [x_{20} \cos \Omega t - \frac{\xi x_{20} + x_{10}}{\Omega} \sin \Omega t]e^{-\xi t}$		$q_{1,2} = -\xi \pm j\Omega$ $\Omega = \sqrt{1 - \xi^2}$

<div>Ranh giới giữa 2 vùng ② và ③ <math>\sigma = 0</math> <math>\xi = 0</math></div>	<div><math>x_1 = x_{10} \cos \tau + x_{20} \sin \tau</math> <math>x_1 = x_{20} \cos \tau - x_{10} \sin \tau</math> <math>x_1^2 + x_2^2 = x_{10}^2 + x_{20}^2</math></div>	<div></div>	<div><math>\Omega = 1</math></div>
<div>Vùng ③ <math>-1 &lt; \xi &lt; 0</math></div>		<div></div>	
<div>Ranh giới giữa 2 vùng ③ và ④ <math>\xi = 1</math></div>		<div></div>	



<p>Vùng ④ <math>\xi &lt; -1</math></p>			
<p>Ranh giới giữa 2 vùng ④ và ⑤</p>	$x_1 = x_{10} - \frac{1}{\sigma} x_{20} [1 - e^{\tau}]$ $x_2 = x_{20} e^{\tau}$ $x_2 - x_{20} = \sigma (x_1 - x_{10})$		$\tau = \sigma(t - t_0)$
<p>Vùng ⑤ <math>\Delta &lt; 0</math> <math>\sigma &gt; 0</math></p>	$q_{12} = -\xi \pm \sqrt{\xi^2 + 1}$		$\xi = -\frac{\sigma}{2\sqrt{-\Delta}}$

<p>Vùng ⑤  <math>\Delta &lt; 0</math>  <math>\sigma = 0</math></p>	$x_1 = x_{10} \operatorname{ch} \tau + x_{20} \operatorname{sh} \tau$ $x_2 = x_{20} \operatorname{ch} \tau + x_{10} \operatorname{sh} \tau$ $x_2^2 - x_1^2 = x_{20}^2 - x_{10}^2$		$\xi = 0$ $\tau = (t - t_0) * \sqrt{-\Delta}$
<p>Vùng ⑤  <math>\Delta &lt; 0</math>  <math>\sigma &lt; 0</math></p>			$\xi = -\frac{\sigma}{2\sqrt{-\Delta}}$
<p>Ranh giới giữa          2 vùng ① và ⑤</p>	$x_1 = x_{10} - \frac{1}{\sigma} x_{20} * [1 - e^{-\tau}]$ $x_2 = x_{20} e^{-\tau}$ $x_2 - x_{20} = \sigma(x_1 - x_{10})$		$\tau = -\sigma(t - t_0)$

## 9.3 PHƯƠNG PHÁP TUYẾN TÍNH HÓA GẦN ĐÚNG

### 9.3.1 Nội dung phương pháp

Trong các hệ gần tuyến tính, sai lệch so với tuyến tính không quá lớn, phương pháp xấp xỉ tuyến tính cho phép mở rộng các khái niệm tuyến tính thông thường. Sự xấp xỉ này thường nhận rằng các đặc điểm của hệ thay đổi từ điểm làm việc này sang điểm làm việc khác, nhưng giả định sự tuyến tính trong lân cận của điểm làm việc riêng. Kỹ thuật xấp xỉ tuyến tính thường được kỹ sư sử dụng phổ biến và có thể quen thuộc hơn đối với độc giả so với các tên lý thuyết tín hiệu nhỏ hay lý thuyết về dao động nhỏ.

Phương pháp xấp xỉ tuyến tính được dùng khi kết quả một lượng nhỏ phi tuyến có thể nghiên cứu bằng cách phân tích cho rằng các biến dao động hay thay đổi quanh giá trị trung bình của biến. Điều này được trình bày như sau:

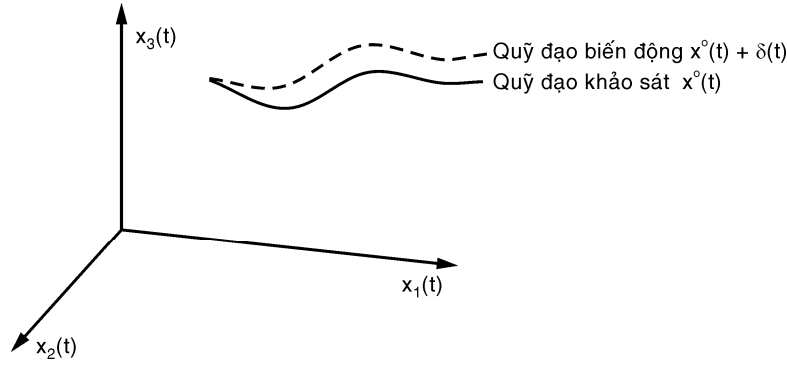
$$\begin{aligned} A_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + A_1 \frac{dy(t)}{dt} + A_0 y(t) + \\ + \varepsilon f\left(y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}\right) = x(t) \end{aligned} \quad (9.3)$$

trong đó:  $\mathbf{x}(t)$  là đầu vào của hệ;  $t$  là thời gian và là biến độc lập;  $\mathbf{y}(t)$  là biến phụ thuộc và là đầu ra của hệ;  $A_n, A_{n-1}, A_{n-2}, \dots, A_0$  là các hệ số;  $\varepsilon$  là hằng số chỉ độ phi tuyến hiện thời và  $f\left(y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}\right)$  là một hàm phi tuyến.

Mở rộng lời giải đối với phương trình vi phân này cho các phi tuyến nhỏ, được viết dưới dạng chuỗi lũy thừa của  $\varepsilon$ :

$$y(t) = y_{(0)}(t) + \varepsilon y_{(1)}(t) + \varepsilon^2 y_{(2)}(t) + \varepsilon^3 y_{(3)}(t) + \dots \quad (9.4)$$

Từ phương trình (9.4),  $\mathbf{y}(t)$  có thể suy luận như là kết hợp các thành phần tuyến tính  $y_{(0)}(t)$  và các yếu tố sai lệch  $\varepsilon y_{(1)}(t) + \varepsilon^2 y_{(2)}(t) + \varepsilon^3 y_{(3)}(t) + \dots$ . Giả sử  $\varepsilon$  là nhỏ, các thành phần phi tuyến không ảnh hưởng nghiêm trọng đến hoạt động của hệ thống.



**Hình 9.3** Các quỹ đạo khảo sát và quỹ đạo biến động của phi thuyền

Giả sử phương trình của hệ thống được cho bởi:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (9.5)$$

trong đó hàm  $f$  là phi tuyến.

Hình 9.3 minh họa quỹ đạo khảo sát của phi thuyền không gian (nét liền) thỏa mãn phương trình:

$$\ddot{x}(t) = f(\dot{x}(t), \dot{u}(t)) \quad (9.6)$$

Chỉ số 0 được viết ở phía trên để cập thông số xuất hiện dọc theo quỹ đạo tham chiếu. Những thông số khảo sát này quan hệ với các thông số của quỹ đạo thực (nét đứt) như sau:

$$x(t) = x^o(t) + \delta x(t) \quad (9.7)$$

$$u(t) = u^o(t) + \delta u(t) \quad (9.8)$$

Hình 9.3 minh họa các quỹ đạo chuẩn và quỹ đạo thực, trạng thái thực  $x(t)$  bị lệch khỏi trạng thái  $x^o(t)$  một đoạn  $\delta(t)$ . Một cách trực giác, điều này có nghĩa là quỹ đạo thực của phi thuyền không gian bị lệch hay sai lệch nhỏ so với quỹ đạo tham chiếu mong muốn. Vectơ  $\delta u(t)$  biểu thị cho sai lệch của đầu vào điều khiển so với đầu vào  $u^o(t)$  tham chiếu theo yêu cầu hệ thống có đáp ứng mong muốn  $x^o(t)$ .

Mối quan hệ nào mà chúng ta có thể rút ra từ  $x^o(t), \delta x(t), u^o(t), \delta u(t)$ . Phương trình phi tuyến cơ bản của hệ:  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$  có thể biểu diễn như sau:

$$\frac{d}{dt}(x^o(t) + \delta x(t)) = \dot{x}^o(t) + \delta \dot{x}(t) = f(x^o(t) + \delta x(t), u^o(t) + \delta u(t)) \quad (9.9)$$

Bởi vì ta giả thiết dao động thật sự của hệ là nhỏ, ta có thể khai triển thành phần thứ  $j$  của phương trình thành chuỗi Taylor quanh quỹ đạo khảo sát:

$$\begin{aligned} \dot{x}_j^o(t) + \delta \dot{x}_j(t) &= f_j(x^o(t), u^o(t)) + \frac{\partial f_j}{\partial x_1} \delta x_1(t) + \dots + \frac{\partial f_j}{\partial x_m} \delta x_m(t) \\ &\quad + \frac{\partial f_j}{\partial u_1} \delta u_1(t) + \dots + \frac{\partial f_j}{\partial u_m} \delta u_m(t) \end{aligned} \quad (9.10)$$

Dùng phương trình (9.9) ta có thể viết lại (9.10)

$$\delta x_j(t) \approx \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1}\right)^o \delta x_1(t) + \dots + \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_m}\right)^o \delta x_m(t) + \left(\frac{\partial f_j}{\partial u_1}\right)^o \delta u_1(t) + \dots + \left(\frac{\partial f_j}{\partial u_m}\right)^o \delta u_m(t) \quad (9.11)$$

ở đây  $j = 1, 2, 3, \dots, n$

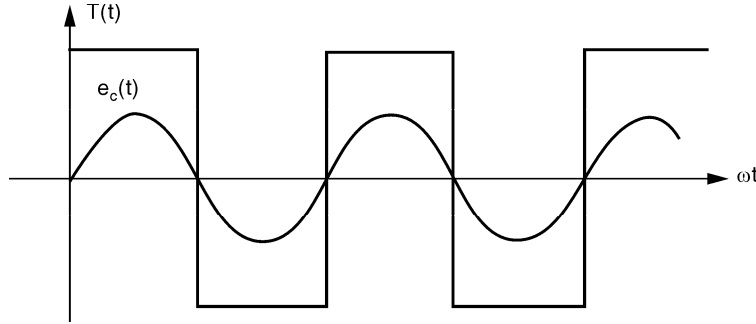
Phương trình (9.11) có thể đơn giản bằng ma trận Jacobian được định nghĩa như sau:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix} \bigg|_{\substack{x=x^o \\ u=u^o}} \quad (9.12)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix} \bigg|_{\substack{x=x^o \\ u=u^o}} \quad (9.13)$$

Cần lưu ý là tất cả các đạo hàm trong ma trận Jacobian đều được đánh giá dọc theo quỹ đạo khảo sát thực của phi thuyền không gian. Dựa trên ma trận Jacobian phương trình (9.11) có thể viết lại dưới dạng đơn giản hơn:

$$\delta \dot{x}(t) = A \delta x(t) + A \delta u(t) \quad (9.14)$$



**Hình 9.4** Đặc tính động cơ được điều khiển bằng role, trường hợp 1

Phương trình hệ quả này rất quan trọng. Nó cho thấy phương trình vi phân mô tả sai lệch quanh quỹ đạo khảo sát là xấp xỉ tuyến tính, mặc dù hệ phương trình vi phân cơ sở mô tả quỹ đạo bay khảo sát là phi tuyến.

Ta có thể tuyến tính hóa một hệ nếu có thể tương thích hoạt động của nó như một hệ tuyến tính. Để chứng minh điều này, chúng ta hãy xét role hai vị trí điều khiển vòng quay của động cơ theo mỗi chiều. Giả sử điện áp điều khiển cung cấp bởi role đến động cơ,  $e_c(t)$  được cho bởi:  $e_c(t) = E \sin \omega t$  (9.15)

và mômen động cơ,  $T(t)$  dạng sóng vuông do hoạt động đóng ngắt. Cả  $e_c(t)$  và  $T(t)$  đều được minh họa trên hình 9.4. Quan sát trên hình vẽ giá trị trung bình của cả hai hàm là 0.

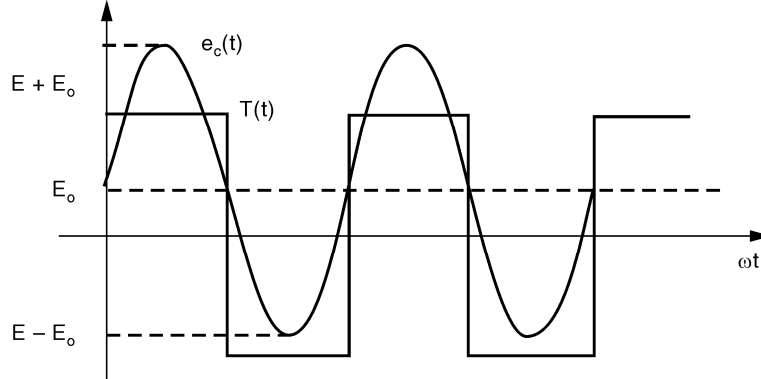
Sau đó ta giả sử rằng điện áp điều khiển có giá trị trung bình  $E_o$ , ở đây:  $e_c(t) = E_o + E \sin \omega t$  (9.16)

Đối với trường hợp này, mômen là hàm tuần hoàn có giá trị trung bình  $T_o$  khác không, bởi vì đoạn  $e_c(t)$  là dương hoặc âm không cân bằng, hình 9.5. Chú ý rằng  $E_o$  cũng là một hàm của thời gian, giả thiết nó thay đổi rất chậm so với  $\omega$ . Hơn nữa giả sử  $E_o < E$  có thể dễ dàng chỉ ra giá trị trung bình  $T_o$  cho bởi đẳng

thức

$$T_o = \frac{2T}{\pi E} E_o \quad (9.17)$$

Vì vậy, giá trị trung bình của mômen  $T_o$  tỉ lệ với giá trị trung bình của điện áp điều khiển.



**Hình 9.5** Đặc tính động cơ được điều khiển bằng role, trường hợp 2

Đây là kết quả rất quan trọng. Nó chỉ ra rằng bằng một phần tử phi tuyến như role, một mối quan hệ tuyến tính có thể đạt được giữa giá trị trung bình của điện áp điều khiển và giá trị trung bình của mômen động cơ gia tăng. Kỹ thuật tuyến tính hóa cơ bản được dùng để lấy giá trị trung bình của áp điều khiển cho role như một đầu vào và chồng lên nó một hàm thời gian hình sin có biên độ và tần số liên quan với đầu vào.

Trong mục sau, chúng ta sẽ mở rộng các khái niệm tuyến tính hóa và cố gắng áp dụng chúng vào các hệ phi tuyến. Mặc dù khái niệm hàm truyền không thể áp dụng cho hệ phi tuyến, nhưng một đặc tính truyền đạt xấp xỉ tương đương được rút ra cho một dụng cụ phi tuyến có thể tính toán như là hàm truyền đạt trong các hoàn cảnh cụ thể. Ta định nghĩa các đặc tính truyền đạt gần đúng này là hàm mô tả. Đây là khái niệm hữu ích và thường được sử dụng trong thực tế.

## 9.4 PHƯƠNG PHÁP TUYẾN TÍNH HÓA ĐIỀU HÒA

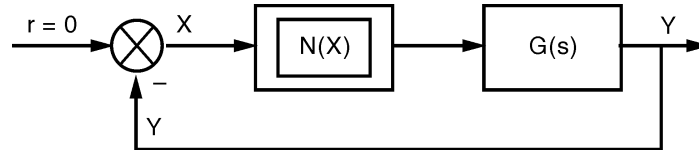
### 9.4.1 Khái niệm

Phương pháp tuyến tính hóa điều hòa hay còn được gọi là

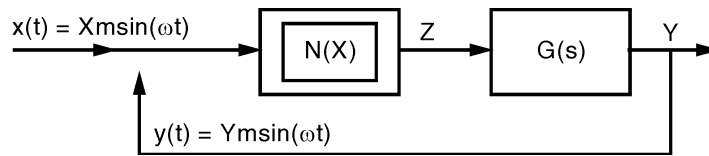
phương pháp hàm mô tả đã xuất hiện đồng thời trong vòng một tháng của năm 1948 ở nhiều nước Nga, Mỹ, Anh...

Việc dùng hàm mô tả là một cố gắng để mở rộng gần đúng hàm truyền đạt rất đặc lực của hệ tuyến tính sang hệ phi tuyến. Phương pháp tuyến tính hóa điều hòa là phương pháp khảo sát trong miền tần số đã được ứng dụng cho các hệ phi tuyến bậc cao ( $n > 2$ ) do dễ thực hiện và tương đối giống tiêu chuẩn Nyquist.

Ý tưởng cơ bản của phương pháp như sau: xét một hệ phi tuyến (không có tác động kích thích bên ngoài) gồm hai phần tử phi tuyến và tuyến tính.



Hình 9.6



Hình 9.7

Để khảo sát khả năng tồn tại dao động tuần hoàn không tắt trong hệ, ở đầu vào khâu phi tuyến ta cho tác động sóng điều hòa biên độ  $X_m$ , tần số góc  $\omega$ :  $x(t) = X_m \sin(\omega t)$ . Tín hiệu ra khâu phi tuyến sẽ chứa tần số cơ bản  $\omega$  và các họa tần  $2\omega, 3\omega, \dots$

Giả thiết rằng khâu tuyến tính là bộ lọc tần số cao, các họa tần bậc cao so với tần số cơ bản là không đáng kể thỏa mãn điều kiện biên độ sóng hài cơ bản là trội hơn hẳn

$$\frac{Z_{mk}}{Z_{m1}} \left| \frac{G(jk\omega)}{G(j\omega)} \right| \ll 1 \quad (9.18)$$

trong đó:  $K$  là số các họa tần;  $Z$  là tín hiệu ra

$Z_m$  là biên độ đỉnh sóng tuần hoàn.

Tín hiệu ở ngõ ra khâu tuyến tính thỏa điều kiện bộ lọc (9.18) bỏ qua các sóng hài bậc cao  $Y_{m1}, Y_{m2}, \dots$  và chỉ tính sóng họa tần cơ bản bậc một ta có biểu thức gần đúng



$$y(t) = Y_{m1} \sin(\omega t + \varphi)$$

$\varphi$  là góc lệch pha của tín hiệu ra so với tín hiệu vào.

Ta có phương trình giữa hai tín hiệu vào ra như sau

$$x(t) + y(t) = 0$$

Điều kiện cân bằng khi thỏa điều kiện lọc:

$$y(t) = Y_{m1} \sin(\omega t + \varphi) \quad (9.19)$$

$$\begin{cases} X_m = Y_{m1} \\ \varphi = \pi \end{cases} \quad (9.20)$$

Phương trình (9.19) và (9.20) được gọi là phương trình cân bằng điều hòa, phương trình đầu cân bằng biên độ, còn phương trình thứ hai cân bằng pha của dao động tuần hoàn.

Phương pháp tuyến tính hóa điều hòa là một phương pháp gần đúng có thể giải quyết được hai nhóm bài toán cơ bản sau:

- 1- Khảo sát chế độ tự dao động của hệ phi tuyến
- 2- Khảo sát điều kiện tồn tại chế độ tự dao động trong hệ phi tuyến.

Trong trường hợp điều kiện lọc (9.18) không thỏa mãn tín hiệu ra không thể tính gần đúng chỉ chứa tần số cơ bản được, tùy từng trường hợp cụ thể phải kiểm nghiệm lại kết quả bằng thực nghiệm hoặc khẳng định trên mô hình toán hoặc vật lý của hệ thống. Trong một số trường hợp phương pháp tuyến tính hóa gần đúng có thể cho kết quả sai về câu hỏi có hay không dao động tuần hoàn trong hệ phi tuyến. Đối với trường hợp này có thể dùng phương pháp tuyến tính điều hòa có tính đến các họa tần bậc cao để chứng minh kết quả nhận được từ thực nghiệm.

#### 9.4.2 Hàm mô tả hay hệ số khuếch đại phức của khâu phi tuyến

##### *Định nghĩa*

Hàm mô tả hay hệ số khuếch đại phức của khâu phi tuyến là tỉ số của thành phần sóng hài cơ bản của tín hiệu ra khâu phi tuyến trên biên độ tín hiệu sin của tín hiệu vào  $x(t) = M \sin \omega t$

$$N(X_m) = \frac{Z_1}{X_m} = \frac{A_1 + jB_1}{M} \quad (9.21)$$

$Z_1$  - thành phần cơ bản  $\omega$  (bậc một) của tín hiệu ra khâu phi tuyến

$X_m$  - biên độ tín hiệu sin của tín hiệu vào khâu phi tuyến.

Phân tích dạng sóng ngõ ra bằng chuỗi Fourier cho bởi biểu thức

$$n(\omega t) = \frac{A_o}{2} + \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k \sin(k\omega t) \quad (9.22)$$

trong đó:  $A_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} n(\omega t) \sin(k\omega t) d(\omega t), \quad k = 0, 1, 2, \dots$  (9.23)

$$B_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} n(\omega t) \cos(k\omega t) d(\omega t), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Do chỉ sử dụng họa tần cơ bản nên ta có

$$A_1 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} n(\omega t) \sin(\omega t) d(\omega t) \quad (9.24)$$

$$B_1 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} n(\omega t) \cos(\omega t) d(\omega t)$$

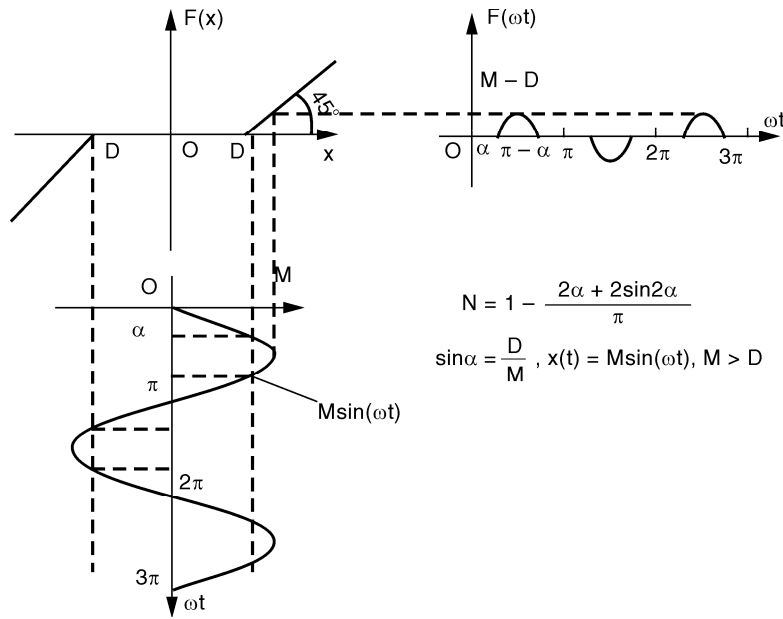
*Chú ý:* Nếu hàm lẻ không có trệ  $B_1=0$

Nếu hàm lẻ có trệ  $B_1 \neq 0$

$D$  là vùng chết;  $H$  là vùng trệ

### **Hàm mô tả của các khâu phi tuyến điển hình**

#### **1- Hàm có vùng chết**

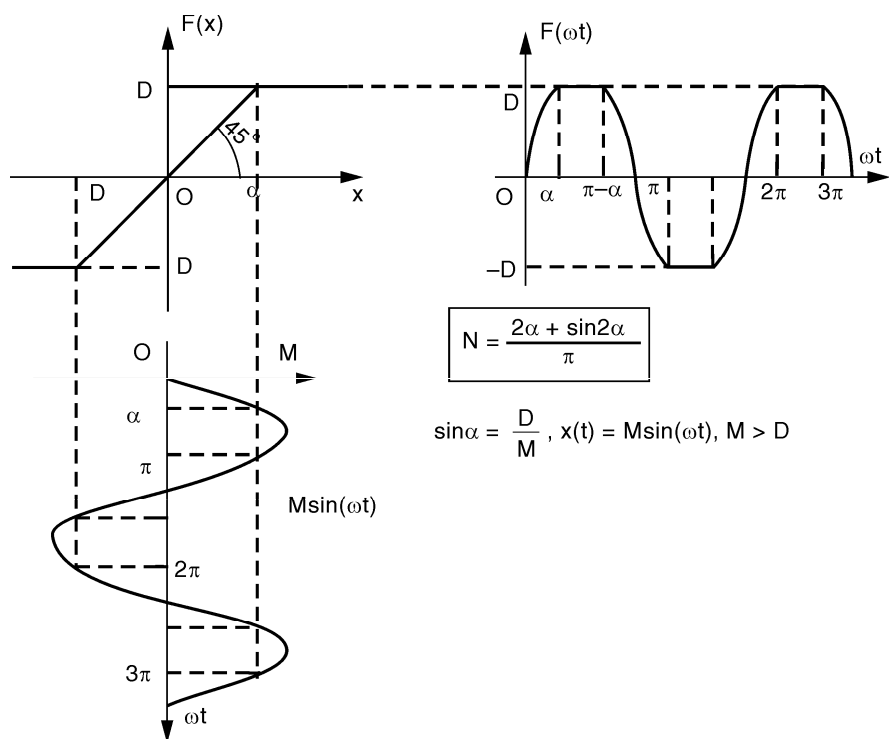


Vì hàm trên là hàm lẻ, nên ta có  $B_1=0$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{4}{\pi} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (M \sin(\omega t) - D) \sin(\omega t) d\omega t \\
 &= \frac{4M}{\pi} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \right) - \frac{D}{M} \sin(\omega t) d\omega t \\
 &= \frac{M}{\pi} \left( 2\omega t - \frac{\sin(2\omega t)}{2} \right) + 4 \frac{D}{M} \cos(\omega t) \Big|_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{M}{\pi} (\pi - 2\alpha + \sin(2\alpha) - 4 \cos \alpha \sin \alpha) = M \left( 1 - \frac{2\alpha + \sin(2\alpha)}{\pi} \right)
 \end{aligned}$$

Do đó:  $N = 1 - \frac{2\alpha + \sin(2\alpha)}{\pi}$

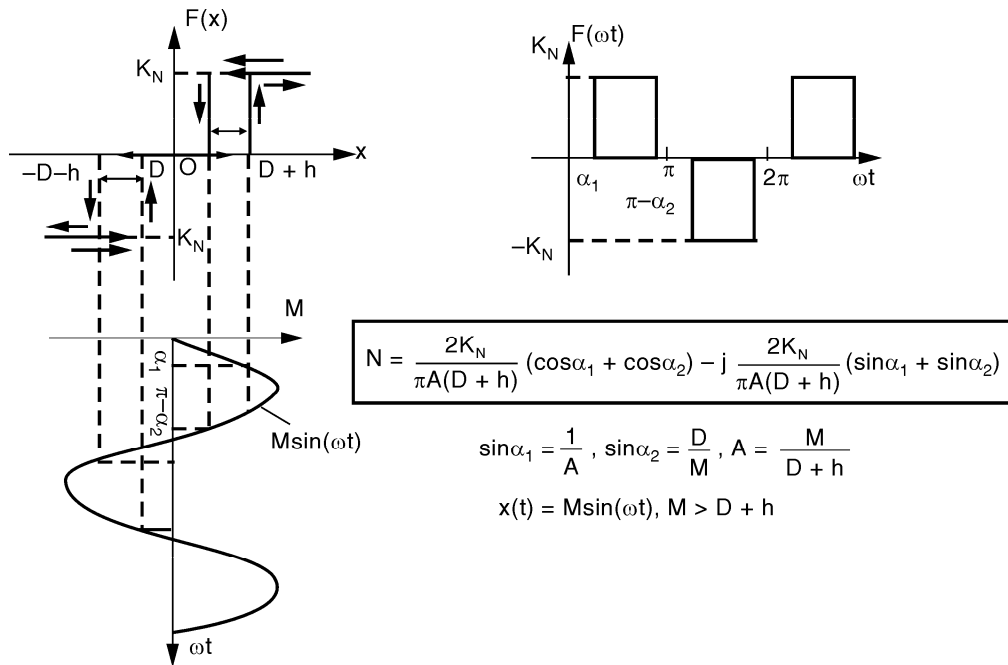
2- Khâu bão hòa



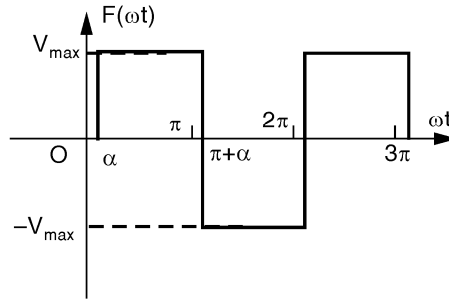
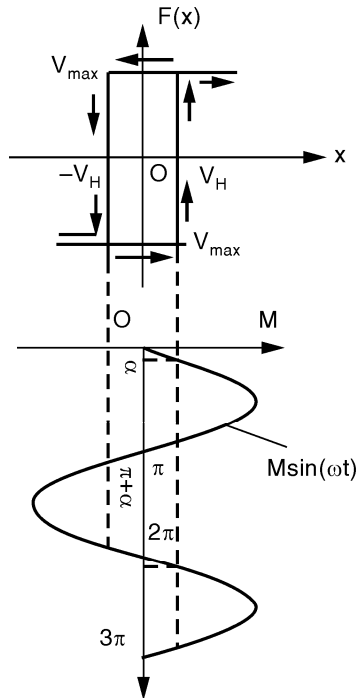
Do hàm lẻ, nên ta có  $B_1=0$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\omega t) \sin(\omega t) d\omega t = \frac{4}{\pi} \left[ \int_0^{\alpha} M \sin^2(\omega t) d\omega t + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} D \sin(\omega t) d\omega t \right] \\
 &= \frac{4}{\pi} \left[ \int_0^{\alpha} M \left( \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \right) d\omega t + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} D \sin(\omega t) d\omega t \right] \\
 &= \frac{4}{\pi} \left[ \frac{M}{2} \left( \omega t - \frac{\sin(2\omega t)}{2} \right) \Big|_0^{\alpha} - D \cos(\omega t) \Big|_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \right] \\
 &= \frac{M}{\pi} [2\alpha - 2\sin(2\alpha) + 4\sin \alpha \cos \alpha] = \frac{M}{\pi} [2\alpha + \sin(2\alpha)] \\
 \text{Vậy: } N &= \frac{1}{\pi} [2\alpha + \sin(2\alpha)]
 \end{aligned}$$

3- Role ba vị trí có thể



4- Khâu so sánh có trễ (Trigger Schmitt không đảo)



$$N = \frac{4V_{0\max}}{\pi A V_H} (\cos \alpha - j \sin \alpha)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{A}, A = \frac{M}{D} = \frac{M}{V_H},$$

$$x(t) = M \sin(\omega t), M > V_H$$

$$A_1 = \frac{4}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} V_{0\max} \sin(\omega t) d\omega t$$

$$B_1 = \frac{4}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} V_{0\max} \cos(\omega t) d\omega t$$

$$A_1 = \frac{-2}{\pi} (V_{0\max} \cos(\omega t)) \Big|_{\alpha}^{\pi+\alpha}$$

$$B_1 = \frac{2}{\pi} (V_{0\max} \sin(\omega t)) \Big|_{\alpha}^{\pi+\alpha}$$

$$A_1 = \frac{4V_{0\max}}{\pi} \cos \alpha$$

$$B_1 = \frac{-4V_{0\max}}{\pi} \sin \alpha$$

$$N = \frac{4 V_{0\max}}{\pi A V_H} (\cos \alpha - j \sin \alpha)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{A}, A = \frac{M}{D} = \frac{M}{V_H}$$

5- Hàm bậc hai đối xứng

$$F(x) = \begin{cases} x^2 (x > 0) \\ -x^2 (x < 0) \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} M^2 \sin^2(\omega t) & (\sin(\omega t) > 0) \\ -M^2 \sin^2(\omega t) & (\sin(\omega t) < 0) \end{cases}$$

Y là hàm lẻ, nên  $B_1=0$

$$A_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M^2 \sin^2(\omega t) \sin(\omega t) d\omega t$$

$$A_1 = \frac{-4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M^2 (1 - \cos^2(\omega t)) d(\cos(\omega t))$$

$$A_1 = \frac{4M^2}{\pi} \left( \cos(\omega t) - \frac{\cos^3(\omega t)}{3} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A_1 = \frac{4M^2}{\pi} \left[ 1 - \frac{1}{3} \right] = \frac{8M^2}{3\pi}$$

Vậy: 
$$\boxed{N = \frac{8M}{3\pi}}$$

6- Hàm bậc ba

Tương tự hàm bậc hai trên

Hàm bậc ba cũng là hàm lẻ nên  $B_1=0$

$$F(x) = x^3$$

$$Y = M^3 \sin^3(\omega t)$$

Ta có: 
$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} M^3 \sin^3(\omega t) \sin(\omega t) d(\omega t)$$

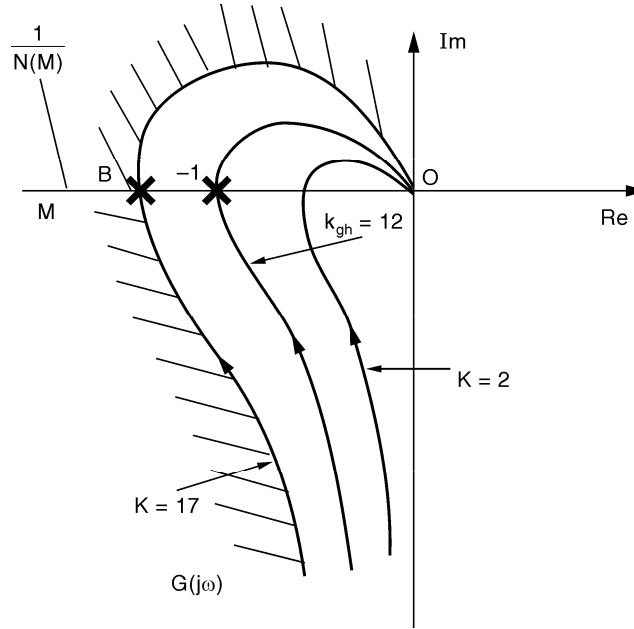
$$A_1 = \frac{M^3}{4\pi} \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos(2\omega t) + \frac{1 + \cos(4\omega t)}{2}) d(\omega t)$$

$$A_1 = \frac{M^3}{4\pi} \left( \frac{3\cos(\omega t)}{2} - \sin(\omega t) + \frac{\sin(\omega t)}{8} \right) \Bigg|_0^{2\pi}$$

$$A_1 = \frac{M^3}{4\pi} (3\pi) = \frac{3M^3}{4}$$

Vậy: 
$$N = \frac{3M^2}{4}$$

Ví dụ: Hàm truyền hở của phần tuyến tính một hệ phi tuyến



Hình 9.8

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + 0,5j\omega)(1 + 0,1j\omega)}$$

Phương trình đặc tính của phần tuyến tính liên tục có hệ số Khuếch đại bằng K

$$A(s) = s(1 + 0,5s)(1 + 0,1s) + K$$

$$A(s) = 0,05s^3 + 0,6s^2 + s + K$$

Hệ số khuếch đại giới hạn được xác định theo tiêu chuẩn Hurwitz cho hệ bậc ba là:

$$\Delta_2 = 0,6 - 0,05K_{gh} = 0 \Rightarrow K_{gh} = 12$$

Đường cong Nyquist cho ba trường hợp K khác nhau được vẽ ở hình 9.7. Giao điểm của đồ thị  $-1/N(M)$  với đường cong Nyquist của phần tuyến tính  $G(j\omega)$  có  $K = 17$  ký hiệu là điểm B. Tại điểm B tồn tại dao động không ổn định vì đi theo chiều tăng của



biên độ theo đặc tính  $-1/N(M)$  của khâu phi tuyến, chuyển động từ vùng ổn định (gạch sọc bên trái  $G(j\omega)$ ) sang vùng không ổn định của phần tuyến tính  $G(j\omega)$ . Ngược lại, chế độ dao động là ổn định, nếu đi theo chiều tăng của biên độ theo đặc tính  $-1/N(M)$  của khâu phi tuyến, chuyển từ vùng không ổn định sang ổn định của phần tuyến tính  $G(j\omega)$ .

Trong trường hợp  $K = 2$ , đặc tính  $-1/N$  của khâu phi tuyến nằm hoàn toàn ở vùng ổn định của  $G(j\omega)$ ,  $0 \leq \omega < +\infty$ , kết luận hệ phi tuyến là ổn định ở trạng thái cân bằng:  $R(t) = 0$ .

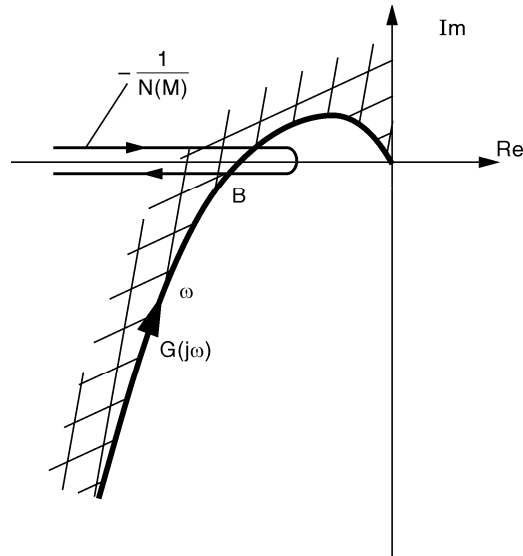
*Ví dụ:* Hệ phi tuyến đặc tính rơle 3 vị trí không trễ với phần tuyến tính:

$$G(s) = \frac{K}{s(1 + 0.2s)(1 + 2s)}$$

Phi tuyến tính hình 9.17 có  $D = 0,1$ ;  $h = 0$ ;  $K_1 = 6$

Phương trình cân bằng điều hòa gần đúng:

$$1 + G(j\omega)N(M) = 0 \quad (9.25)$$



**Hình 9.9**

Giải bằng phương pháp đồ thị. Trước tiên tìm  $\omega_{-\pi}$  - là tần số dao động tại B.

$$\frac{\pi}{2} + \arctg 0,2\omega_{-\pi} + \arctg 2\omega_{-\pi} = \pi$$

suy ra  $\omega_{-\pi} = 1,58 \text{ sec}^{-1}$

\* Đặt  $\frac{D}{M} = A$ ; Tính A từ (9.25) ta có:

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = 1,1 \\ A_2 = 2,59 \end{array} \right\} \Rightarrow M_1 = 0,11; M_2 = 0,259$$

□ Phương trình (9.25) viết cho ví dụ cụ thể khi

$D = 0$  (role 2 vị trí)

$$\frac{4K_1}{\pi M} \cdot G(j\omega) + 1 = 0$$

Tại điểm B ta có:  $\frac{4K_1}{\pi M} \cdot G(j\omega_{-\pi}) + 1 = 0$

hay 
$$\frac{4,6}{\pi M}(-0,0364) + 1 = 0$$

suy ra  $M = 0,278$

*Kết luận:* trong trường hợp role 3 ở vị trí không trễ, dao động ổn định tại điểm B có biên độ  $A_2 = 2,59$ ; tần số  $\omega_{-\pi} = 1,58 \text{ sec}^{-1}$ . Nếu giữ nguyên phần tuyến tính, thay khâu phi tuyến là role 2, vị trí  $D = 0$  ta có chế độ dao động tại B là:

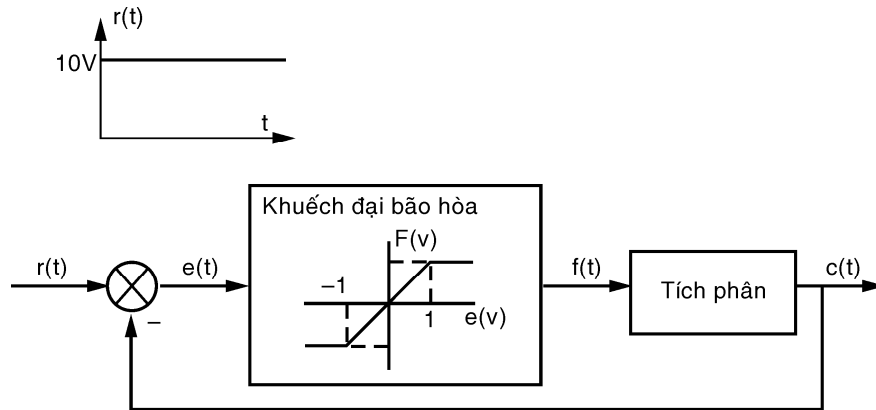
$$m(t) = 0,278 \sin 1,58t \text{ chế độ tự dao động.}$$

## 9.5 PHƯƠNG PHÁP TUYẾN TÍNH HÓA TỪNG ĐOẠN

### 9.5.1 Đặt vấn đề

Xấp xỉ bất cứ phi tuyến nào đồng nghĩa với việc phân đoạn tuyến tính từng khúc là công cụ có hiệu quả cho việc phân tích. Mỗi đoạn dẫn đến phương trình vi phân tuyến tính tương ứng đơn giản hơn. Phương pháp này, không hạn chế cho hệ gần tuyến tính, có ích lợi là tạo ra lời giải chính xác cho bất cứ bậc phi tuyến nào nếu bản thân phi tuyến có thể tuyến tính hóa từng đoạn hay có thể xấp xỉ bằng các đoạn tuyến tính. Ta sẽ chứng minh ứng dụng của nó qua ví dụ sau:

### 9.5.2 Ví dụ ứng dụng



**Hình 9.10** Hệ điều khiển hồi tiếp chứa bão hòa

Hình 9.10 minh họa một hệ điều khiển hồi tiếp đơn giản chứa bộ tích phân và bộ khuếch đại bão hòa. Độ lợi bộ khuếch đại là 5 trong một tầm điện áp vào  $\pm 1V$ . Đối với các điện áp vào lớn hơn, bộ khuếch đại bão hòa. Hoàn toàn rõ ràng có hai vùng hoạt động tuyến tính phân biệt của bộ khuếch đại. Mỗi vùng hoạt động tuyến tính này có thể xem xét một cách độc lập bằng phương pháp tuyến tính hóa từng đoạn để có được đáp ứng tổng hợp của hệ thống.

Đối với vùng không bão hòa, dạng thức hoạt động hệ thống là

$$e(t) = r(t) - c(t) \quad (9.26)$$

$$f(t) = 5e(t) \quad (9.27)$$

$$c(t) = \int f(t) dt \quad (9.28)$$

Suốt quá trình bão hòa, phương trình (9.26) và (9.28) vẫn có giá trị. Tuy nhiên (9.27) thay đổi thành

$$f(t) = 5 \text{ khi } e(t) > 1 \quad (9.29)$$

$$f(t) = -5 \text{ khi } e(t) < -1 \quad (9.30)$$

Giả sử điều kiện đầu là không và đầu vào hàm nấc 10V, biểu thức đầu ra trong vùng hoạt động bão hòa  $c_{sat}(t)$  được cho bởi

$$c_{sat}(t) = \int_0^t 5dt = 5t \quad (9.31)$$

Biểu thức đầu ra trong suốt khu vực không bão hòa được cho bởi

$$c_{us}(t) = 5 \int_0^t (10 - c)dt \quad \text{hoặc} \quad \frac{dc_{us}(t)}{dt} + 5c = 50 \quad (9.32)$$

Thời gian  $t_1$  là thời gian mà ở đó bộ khuếch đại làm việc tuyến tính chưa bão hòa. Khi  $c = 9$ ,  $e = 1$ ,  $t_1$  là 1,8 sec. Dùng các kỹ thuật thông thường tính đáp số cho phương trình (9.32):

$$c_{us}(t) = 10 - e^{-5(t-1.8)} \quad (9.33)$$

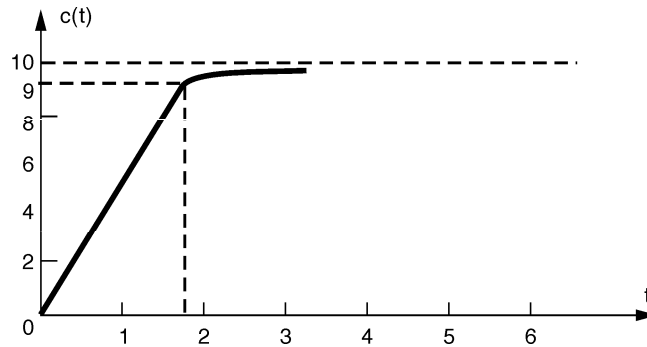
Giá trị ban đầu đối với vùng này,  $c_{us}(0)$ , giống giá trị cuối cùng của vùng bão hòa  $c_{sat}(1,8) = 9$ . Sự liên tục ở ngõ ra là do tác động của bộ tích phân. Vì vậy, đáp số tổng hợp đối với bài toán này, có được bằng phân tích tuyến tính từng khúc là

$$c_{sat}(t) = 5t \quad \text{khi} \quad 0 \leq t < 1,8 \quad (9.34)$$

$$c_{us}(t) = 10 - e^{-5(t-1.8)} \quad (9.35)$$

Đáp ứng của hệ đối với đầu vào hàm nấc 10V được vẽ trên hình 9.11

Phương pháp tuyến tính từng đoạn trong bài trên có thể mở rộng sang các phi tuyến phức tạp khác. Cần lưu ý là các điều kiện biên giữa các vùng tuyến tính là liên tục tại bất cứ thời điểm nào, hàm truyền đạt theo sau phi tuyến là một hàm hữu tỉ riêng. Phương trình vi phân dẫn ra trên mỗi vùng phân đoạn là tuyến tính và có thể giải được dễ dàng bằng các kỹ thuật tuyến tính thông dụng.



*Hình 9.11 Đáp ứng bậc thang của hệ bão hòa được tính bằng phân tích tuyến tính từng đoạn*

## 9.6 TIÊU CHUẨN LYAPUNOV

### 8.6.1 Khái niệm về ổn định

Đối với hệ tuyến tính bất kỳ một quá trình quá độ nào cũng có thể xem xét ở dạng tổng của thành phần quá độ hay còn gọi là tự do và thành phần cưỡng bức. Hệ tuyến tính được gọi là ổn định nếu thành phần quá độ tiến tới không khi thời gian tiến tới vô cùng.

Vấn đề xét ổn định hệ phi tuyến phức tạp hơn rất nhiều vì không áp dụng được nguyên lý xếp chồng và trong hệ thống có khả năng xuất hiện tự dao động. Tính chất của hệ phi tuyến là có nhiều trạng thái cân bằng, song hệ tuyến tính chỉ có một trạng thái cân bằng. Tính ổn định của hệ phi tuyến phụ thuộc vào biên độ của tín hiệu tác động vào hệ.

Phụ thuộc vào sự có mặt của tín hiệu tác động vào hệ mà tất cả các hệ thống được chia thành hai loại thuần nhất và không thuần nhất. Trong hệ thuần nhất không có tín hiệu tác động vào hệ. Đặc tính cơ bản đặc thù cho hệ phi tuyến thuần nhất là hai quá trình cân bằng và tự dao động. Đối với hệ phi tuyến không thuần nhất tồn tại khái niệm ổn định của quá trình sinh ra do tác động bên ngoài.

Hệ phi tuyến ở trạng thái cân bằng có thể ổn định trong phạm vi hẹp, phạm vi rộng và toàn cục phụ thuộc vào vùng sai lệch cho phép khỏi trạng thái cân bằng. Ngoài ra đối với hệ phi tuyến vấn đề ổn định còn bao gồm ổn định của chuyển động và ổn định của quỹ đạo.

Trong thực tế không tránh khỏi tác động của các nhiễu, nên bài toán ổn định chuyển động có ý nghĩa rất quan trọng về mặt lý thuyết cũng như về mặt thực tiễn. Chính vì lẽ đó mà nhiều nhà cơ học và toán học lỗi lạc đã tập trung nghiên cứu vấn đề này. Vào năm 1892 trong luận văn tiến sĩ khoa học “Bài toán tổng quát về ổn định chuyển động” A. M. Lyapunov đã đặt bài toán ổn định chuyển động dưới dạng tổng quát nhất và đưa ra

những phương pháp chặt chẽ, độc đáo, rất có hiệu lực để giải quyết bài toán. Công trình nổi tiếng này là điểm xuất phát của nhiều công trình nghiên cứu về lý thuyết ổn định cho đến ngày nay.

Để xác định một cách ổn định việc sử dụng phương trình biến trạng thái dạng thường

$$\dot{x} = Ax + Bu \text{ cho hệ tuyến tính} \quad (9.36)$$

và  $\dot{x} = f(x, t, u) \text{ cho hệ phi tuyến} \quad (9.37)$

Ký hiệu chuyển động không bị nhiễu là  $x^*[t, u(t), x_0]$

Chuyển động bị kích thích có dạng  $x[t, u(t)], x_0 + \Delta x_0]$

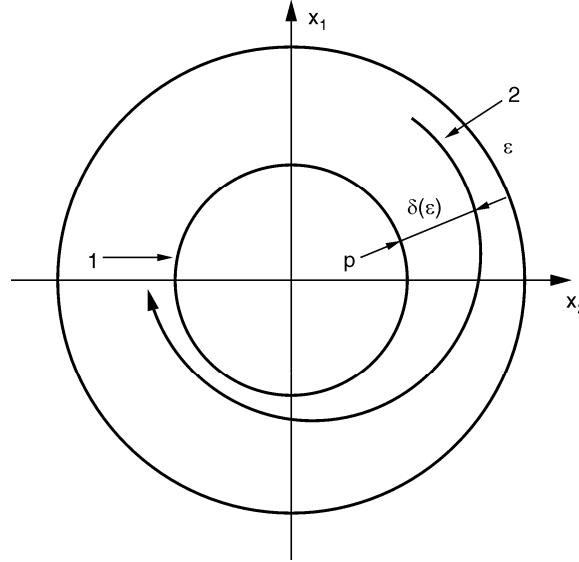
Đặc trưng cho độ lệch của chuyển động bị nhiễu so với chuyển động không bị nhiễu là  $\Delta x = x - x^*$

Xác định trị tuyệt đối của hiệu hai vectơ tương ứng với chuyển động bị nhiễu và không bị nhiễu

$$|x - x^*| = \sqrt{(x - x^*)^2 + (x - x^*)^2 + \dots + (x - x^*)^2} \quad (9.38)$$

Phương trình viết cho độ lệch

$$|\Delta x| = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 + \dots + \Delta x_n^2} \quad (9.38)$$



**Hình 9.12** Biểu diễn hình học định nghĩa ổn định chuyển động

**Định nghĩa:** Chuyển động không bị nhiễu được gọi là ổn định nếu với mọi số dương  $\varepsilon$  nhỏ tùy ý cho trước, có thể tìm được một số dương  $\delta(\varepsilon)$  sao cho với mọi độ lệch của chuyển động bị nhiễu so với chuyển động không bị nhiễu tại thời điểm đầu thỏa mãn điều kiện

$$|x - x^*| \leq \delta \quad (9.39)$$

cũng sẽ thỏa mãn tại mọi thời điểm sau  $t > t_0$

$$|x - x^*| \leq \varepsilon \quad (9.40)$$

Trên hình 9.12 biểu diễn về mặt hình học định nghĩa ổn định chuyển động. Ký hiệu  $\rho$  là khoảng cách giữa hai quỹ đạo không bị nhiễu (1) và quỹ đạo bị nhiễu (2).

Quỹ đạo khép kín (1) là ổn định nếu với mọi số dương  $\varepsilon$  nhỏ tùy ý, có thể tìm được một số dương  $\delta < \varepsilon$  sao cho  $\rho$  không vượt ra khỏi giới hạn  $\varepsilon$ .

Nếu chuyển động không bị nhiễu ổn định và nếu thỏa mãn điều kiện:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x - x^*| = 0 \quad (9.41)$$

thì chuyển động không bị nhiễu được gọi là ổn định tiệm cận.

Bài toán ổn định chuyển động theo nghiên cứu của Lyapunov có một số đặc điểm sau:

- 1- Ổn định được xét đối với các nhiễu đặt lên điều kiện ban đầu.
- 2- Sự ổn định được xét trong khoảng thời gian hữu hạn, nhưng lớn tùy ý.
- 3- Các nhiễu được giả thiết là bé.

### 9.6.2 Phương pháp thứ nhất của Lyapunov

Để giải quyết bài toán ổn định chuyển động, Lyapunov đã xây dựng những phương pháp riêng, độc đáo, chúng có thể phân thành hai loại chủ yếu. Loại thứ nhất bao gồm những phương pháp khảo sát trực tiếp chuyển động bị nhiễu dựa trên việc xác định các nghiệm tổng quát hoặc nghiệm riêng của phương trình

vi phân của chuyển động bị nhiễu. Hệ thống ổn định hay không ổn định được xác định từ lời giải này. Sử dụng phương pháp tuyến tính hóa viết phương trình vi phân phi tuyến của chuyển động bị nhiễu bằng một hệ phương trình tuyến tính gần đúng đã bỏ qua các số hạng bậc cao, về thực chất là thay thế một bài toán này bằng một bài toán khác mà chúng có thể không có tính chất nào chung với nhau. Tuy nhiên cũng có trường hợp trong đó từ sự ổn định hoặc không ổn định của nghiệm phương trình gần đúng thứ nhất có thể biết được sự ổn định hay không ổn định của phương trình vi phân phi tuyến. Hay nói cách khác, đáp số gần đúng trong phương pháp thứ nhất của Lyapunov thường cung cấp thông tin hữu ích về tính ổn định của chuyển động bị nhiễu.

Giả thiết phi tuyến là đơn trị và tồn tại đạo hàm ở mỗi cấp trong lân cận điểm cân bằng (). Hàm phi tuyến:

$$\dot{x}_i = f_i(x); \quad i = \overline{1, n} \quad (9.42)$$

có thể khai triển thành chuỗi Taylor như sau

$$\Delta_i = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \right|_{x=x_c} \Delta x_1 + \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \right|_{x=x_c} \Delta x_2 + \dots + \quad (9.43)$$

$$\text{hay} \quad \Delta x_i = A \Delta x \quad (9.44)$$

$$\text{với} \quad A = \left. \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \right|_{x=x_c} \quad (9.45)$$

Thành lập phương trình đặc trưng tương ứng với phương trình xấp xỉ tuyến tính

$$\det(SI - A) = 0 \quad (9.46)$$

Với I là ma trận đơn vị có rank là n (bậc của phương trình).

Lyapunov chứng minh rằng nếu nghiệm của phương trình đặc trưng (9.46) có phần thực khác không thì các phương trình xấp xỉ tuyến tính luôn cho đáp số đúng đối với câu hỏi ổn định của hệ phi tuyến.

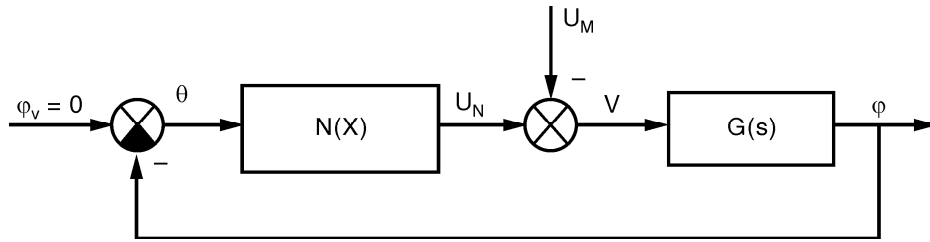


□ Nếu tất cả các nghiệm của phương trình đặc trưng có phần thực âm thì hệ phi tuyến sẽ ổn định trong phạm vi hẹp.

$$\operatorname{Re} S_i < 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (9.47)$$

□ Nếu chỉ có một trong số các nghiệm của phương trình đặc trưng có phần thực dương thì hệ phi tuyến không ổn định.

□ Nếu có dù chỉ là một nghiệm của phương trình đặc trưng có phần thực bằng không và tất cả nghiệm còn lại đều có phần thực âm thì không thể kết luận về tính ổn định của hệ phi tuyến theo đánh giá nghiệm của phương trình tuyến tính gần đúng được.



**Hình 9.13** Sơ đồ tùy động đơn giản

Ví dụ: Xét một hệ tùy động đơn giản có sơ đồ như hình 9.13.

$$U_N = \sin \theta \text{ (đặc tính phi tuyến)}$$

$$\text{Hàm truyền của động cơ: } G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)} \quad (9.48)$$

$U_M$  - điện áp tương ứng với momen tải đặt vào động cơ.

Xét ổn định của hệ ở trạng thái cân bằng theo phương pháp thứ nhất của Lyapunov

Thành lập hệ phương trình biến trạng thái cho hệ

Đặt  $x_1 = \theta$  ta có:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{K}{T} \sin x_1 - \frac{1}{T} x_2 + \frac{K}{T} U_M \end{aligned} \quad (9.49)$$

$$\text{hay } \frac{dx_1}{dt} = f(x); x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; f(x) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (9.50)$$

Phương trình chứa thành phần  $\sin x$ , do đó là phương trình phi tuyến. Trạng thái cân bằng được định nghĩa

$$\frac{dx}{dt} = 0; \text{ do vậy } \begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \end{cases} \quad (9.51)$$

Phương trình trạng thái cân bằng:

$$x_2 = 0 \quad (9.52)$$

$$\sin x_1 = U_M \Rightarrow |U_M| \leq 1 \quad (9.53)$$

Sử dụng phương pháp thứ nhất để khảo sát đối với phi tuyến nhỏ

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{T} \cos x_1 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix} \quad (9.54)$$

$$\det(sI - A) = s(s + \frac{1}{T}) + \frac{K}{T} \cos x_1 = 0 \quad (9.55)$$

Xét các trường hợp cụ thể:

1-  $U_M = 0$  ( ) không có tác động nhiễu

Từ phương trình của trạng thái cân bằng ta có

$$\sin x_1 = U_M = 0 \quad (9.56)$$

$$* \Rightarrow x_1 = 2m\pi (0, \pm 2\pi, \pm 4\pi \dots)$$

$$\cos x_1 = 1$$

Phương trình đặc trưng có dạng:

$$s(s + \frac{1}{T}) + \frac{K}{T} = 0 \quad (9.57)$$

với  $K > 0$ ,  $\text{Re}S_{1,2} < 0$  theo tiêu chuẩn Huwitz

Áp dụng được phương pháp thứ nhất Lyapunov, hệ ổn định trong phạm vi hẹp.

$$* \Rightarrow x_1 = (2m + 1)\pi; m - \text{là số nguyên bất kì}$$

$$\cos x_1 = -1$$

Phương trình đặc trưng có dạng

$$s(s + \frac{1}{T}) - \frac{K}{T} = 0 \quad (9.58)$$

Một nghiệm có phần thực dương và một nghiệm có phần thực âm, áp dụng phương pháp thứ nhất kết luận hệ không ổn định trong phạm vi hẹp và điểm cân bằng không ổn định trong phạm vi hẹp.

$$2- \quad U_M = 1 \quad (9.59)$$

$$\sin x_1 = U_M = 1$$

$$\cos x_1 = 0$$

Phương trình đặc trưng có dạng

$$s(s + \frac{1}{T}) = 0 \quad (9.60)$$

Một nghiệm  $s_1 = 0$  và một nghiệm  $s = -1/T < 0$ , không áp dụng được phương pháp thứ nhất của Lyapunov.

Nhấn mạnh quan trọng là phương pháp thứ nhất của Lyapunov xác định sự ổn định trong lân cận tức thời của điểm cân bằng.

### 9.6.3 Phương pháp thứ hai của Lyapunov

Một trong những phương pháp có hiệu lực nhất để khảo sát bài toán ổn định chuyển động là phương pháp thứ hai hay còn gọi là phương pháp trực tiếp của Lyapunov. Theo phương pháp này tiêu chuẩn ổn định chuyển động có thể áp dụng trực tiếp vào hệ phương trình vi phân của chuyển động bị nhiễu mà không thông qua việc tích phân hệ phương trình.

Giá trị của phương pháp thứ hai không chỉ ở việc xác lập những tiêu chuẩn ổn định của chuyển động mà còn ở chỗ nó cho phép xác định miền biến thiên của các thông số, xác định thời gian chuyển tiếp và đánh giá chất lượng điều chỉnh trong các hệ thống tự động.

Phương pháp này dựa trên hàm  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$  có tính chất đặc biệt, nó có thể so sánh với tổng động năng và thế năng và khảo sát đạo hàm toàn phần theo thời gian  $dV/dt$ , trong đó các biến  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là biến trạng thái của phương trình vi phân mô tả chuyển động bị nhiễu.

#### ***Định lý Lyapunov về ổn định tiệm cận***

*Nếu tìm được một hàm  $V(x)$  với mọi biến trạng thái  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là một hàm xác định dấu dương, sao cho đạo hàm của nó  $\frac{dV(x)}{dt}$  dựa theo phương trình vi phân của chuyển động bị*

nhiều:

$$\dot{x} = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (9.61)$$

cũng là hàm xác định dấu, song trái dấu với hàm  $V(x)$  thì chuyển động không bị nhiễu sẽ ổn định tiệm cận

Ta giới thiệu phương pháp thứ hai của Lyapunov qua ví dụ minh họa một hệ cơ học khối lượng (M)-lò xo (K)-bộ giảm chấn (B) đơn giản có thể biểu diễn bằng phương trình bậc hai:

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + B \frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = f(t) \quad (9.62)$$

Giả sử  $M = B = K = 1$  và  $f(t) = 0$ ; ta có

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = 0 \quad (9.63)$$

Đặt  $x_1(t) = x(t); x_2(t) = \dot{x}(t)$ ; ta có

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (9.64)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_2(t) \quad (9.65)$$

Hệ tuyến tính đơn giản này có thể giải dễ dàng. Giả sử các điều kiện đầu là  $x_1(0) = 1$  (9.66)

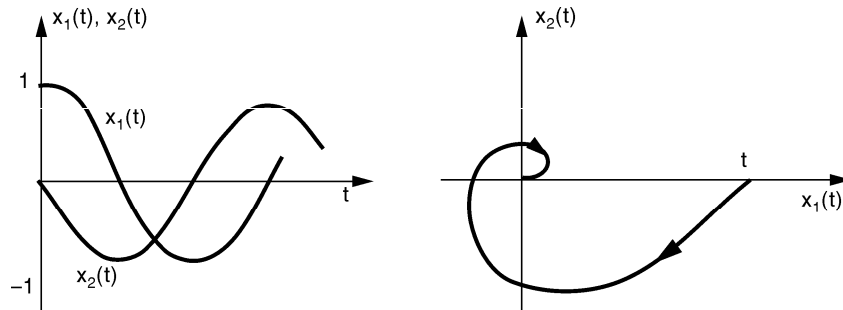
$$x_2(0) = 0 \quad (9.67)$$

Khi đó các đáp số có dạng sau:

$$x_1(t) = 1,15e^{-t/2} \sin(0,866t + \pi/3) \quad (9.68)$$

$$x_2(t) = -1,15e^{-t/2} \sin(0,866t) \quad (9.69)$$

Các phương trình (9.67) và (9.68) được vẽ trong miền thời gian ở hình 9.14 và ở mặt phẳng pha ở hình 9.15. Hai hình này hoàn toàn xác định sự ổn định của hệ thống cơ học đơn giản này. Hệ thống là ổn định và trạng thái  $x_1(t), x_2(t)$  hoạt động như đã chỉ ra.



**Hình 9.14** Đáp ứng miền thời gian của một hệ cơ học đơn giản

**Hình 9.15** Mặt phẳng pha của một hệ cơ học đơn giản

Bây giờ, ta hãy xét hệ thống đơn giản này trên quan điểm năng lượng. Tổng năng lượng lưu trữ được cho bởi

$$V(t) = \frac{1}{2} Kx_1^2(t) + \frac{1}{2} Mx_2^2(t) \quad (9.70)$$

Do  $K = M = 1$  trong ví dụ đơn giản

$$V(t) = \frac{1}{2} x_1^2(t) + \frac{1}{2} x_2^2(t) \quad (9.71)$$

Tổng năng lượng này bị tiêu tán dưới dạng nhiệt ở bộ giảm chấn tại vận tốc

$$\dot{V}(t) = -B\dot{x}_1(t)x_2(t) = -Bx_2^2(t) \quad (9.72)$$

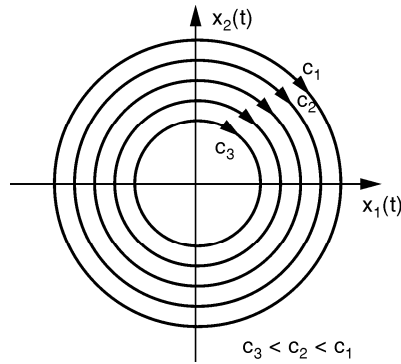
$$\text{Do } B = 1 \text{ ta được } \dot{V}(t) = -x_2^2(t) \quad (9.73)$$

Phương trình (9.71) xác định quỹ tích của năng lượng tích trữ hằng số ở mặt phẳng  $x_1(t)$  và  $x_2(t)$ . Với ví dụ đơn giản này, chúng chuyển động vòng tròn. Nhận xét từ phương trình (9.73) là vận tốc năng lượng luôn luôn âm và do đó các đường tròn này phải ngày càng nhỏ dần theo thời gian. Hình 9.16 minh họa đặc điểm này trên mặt phẳng pha đối với ví dụ đơn giản đã cho, ta có thể xác định thời gian thay đổi của  $V(t)$  và  $\dot{V}(t)$  một cách tường minh bằng cách thay thế phương trình (9.68) và (9.69) vào phương trình (9.72) và (9.73). Kết quả như sau:

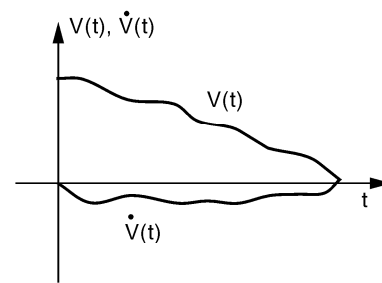
$$V(t) = 0,667e^{-t}[\sin^2(0,866t) + \sin^2(0,866t + \pi/3)] \quad (9.72)$$

$$\dot{V}(t) = -1,333e^{-t} \sin^2(0,866t) \quad (9.73)$$

Hình 9.17 minh họa thời gian thay đổi của  $V(t)$  và  $\dot{V}(t)$ . So sánh hình 9.16 và 8.17, ta kết luận năng lượng tích trữ tổng cộng tiến đến không khi thời gian tiến ra vô cùng. Điều này ngụ ý rằng hệ thống là tiệm cận ổn định, nghĩa là trạng thái sẽ trở về gốc từ bất cứ điểm  $x(t)$  nào trong vùng  $R$  xung quanh gốc. Ổn định tiệm cận là một dạng ổn định được chú ý của các kỹ sư điều khiển bởi vì nó loại trừ dao động giới hạn ổn định.



**Hình 9.16** Quỹ tích hằng số năng lượng trên mặt phẳng pha minh họa sự gia tăng năng lượng theo thời gian



**Hình 9.17** Sự thay đổi năng lượng và tốc độ năng lượng theo thời gian

Sự ổn định của các hệ phi tuyến phụ thuộc vào trạng thái không gian riêng trong đó vectơ trạng thái được thêm vào đối với dạng và độ lớn của đầu vào. Vì vậy, sự ổn định của các hệ phi tuyến cũng có thể phân loại trên cơ sở vùng như sau:

- a) Ổn định cục bộ hay ổn định trong phạm vi nhỏ
- b) Ổn định hữu hạn
- c) Ổn định toàn bộ

Một hệ phi tuyến được biểu thị là ổn định cục bộ nếu nó giữ nguyên tình trạng trong một vùng rất nhỏ quanh một điểm bất thường khi đưa vào một dao động nhỏ.

Ổn định hữu hạn đề cập đến một hệ thống trở lại điểm bất thường từ bất cứ điểm  $x(t)$  nào trong khu vực  $R$  kích thước hữu hạn bao quanh nó.

Hệ thống được gọi là ổn định toàn bộ nếu khu vực  $R$  bao gồm toàn bộ không gian trạng thái hữu hạn. Sự ổn định của mỗi loại khác nhau cục bộ, hữu hạn hoặc toàn bộ không loại trừ các dao động giới hạn, nhưng chỉ loại trừ tình huống có thể tồn tại điểm trạng thái có xu hướng di chuyển đến vô cùng. Nếu điểm trạng thái đến gần điểm bất thường khi thời gian tiến ra vô cùng, đối với bất cứ điều kiện ban đầu nào trong vùng đang được xem xét, lúc đó hệ thống được mô tả như là ổn định tiệm cận. Ổn định tiệm cận loại trừ dao động giới hạn ổn định là một điều kiện cân

bằng động học có thể xảy ra. Điều kiện mạnh nhất có thể được đặt lên một hệ điều khiển phi tuyến với các thông số bất biến theo thời gian là ổn định tiệm cận toàn bộ.

Yếu tố chính trong phép phân tích này là việc chọn hàm năng lượng  $V(t)$

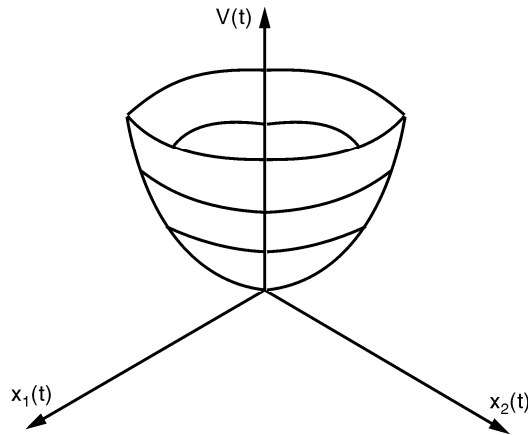
$$V(t) = \frac{1}{2}x_1^2(t) + \frac{1}{2}x_2^2(t) \quad (9.74)$$

Hàm này có hai tính chất rất thú vị. Thứ nhất, nó luôn dương đối với các giá trị khác không của  $x_1(t)$  và  $x_2(t)$ .

Thứ hai, nó bằng không khi  $x_1(t) = x_2(t) = 0$ . Một hàm vô hướng có các tính chất này gọi là hàm xác định dương. Bằng cách thêm  $V(t)$  như một chiều thứ ba đối với mặt phẳng  $x_1(t)$  và  $x_2(t)$ ,

hàm xác định dương  $V(x_1, x_2)$  xuất hiện là mặt ba

chiều làm thành dạng hình chén như minh họa trên hình 9.18.



**Hình 9.18** Hàm xác định dương

**Định lý ổn định Lyapunov:** Bây giờ có thể được tóm tắt cho không gian trạng thái  $n$  chiều: Một hệ động lực bậc  $n$  là ổn định tiệm cận nếu hàm xác định dương  $V(t)$  được tìm thấy có đạo hàm theo thời gian là âm dọc theo quỹ đạo của hệ thống. Trong thực tế dễ tìm một hàm là xác định dương, nhưng thêm vào đó hàm  $V$  có đạo hàm  $dV/dt < 0$  dọc theo các quỹ đạo lại rất khó tìm.

□ Dạng toàn phương của hàm  $V(x)$

$$V(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i x_j; \quad (q_{ij} = q_{ji}) \quad (9.75)$$

**Định lý Sylvester:** Điều kiện cần và đủ để dạng toàn phương  $V(x)$  là hàm xác định dương là tất cả các định thức đường chéo chính của ma trận đối xứng  $Q$  phải dương:



$$Q = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{32} & q_{33} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}; \quad q_{ij} = q_{ji}$$

nghĩa là:  $\Delta_1 = q_{11} > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix}$  (9.76)

$$\Delta_n > 0$$

Nếu hàm  $V(x)$  là hàm xác định âm thì điều kiện (9.76) được thay thế bằng điều kiện

$$\Delta_1; \Delta_2; \dots; \Delta_n < 0 \quad (9.77)$$

□ Dạng bình phương của hàm  $V(x)$

$$V(x) = x^T Q x \quad (9.78)$$

$Q$  là ma trận đối xứng  $q_{ij} = q_{ji}$

Với  $n = 2$

$$Q = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} \quad \text{vì } q_{12} = q_{21}$$

Điều kiện để hàm  $V(x)$  xác định dương theo định lý Sylvester là:

$$Q = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} \quad \text{vì } \begin{aligned} \Delta_1 &= q_{11} > 0 \\ \Delta_2 &= q_{11}q_{22} - q_{12}^2 > 0 \end{aligned}$$

Hàm  $V(x)$  là hàm xác định dương.

Ví dụ:  $V(x) = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$

$$Q = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{aligned} \Delta_1 &= 1 \\ \Delta_2 &= 0 \end{aligned}$$

Không thỏa mãn định lý Sylvester  $\Delta_2 = 0$  hàm  $V(x)$  là hàm có dấu không đổi:  $V(x) = 0$  tại  $x_1 = x_2 = 0$  và  $x_1 = -x_2$

Phương pháp thứ hai của Lyapunov là điều kiện đủ, nếu điều kiện thỏa mãn thì hệ ổn định. Nếu như điều kiện không thỏa mãn thì không thể kết luận hệ thống ổn định hay không. Trong trường hợp này vấn đề ổn định chưa có lời giải. Một hàm Lyapunov  $V(x)$  đối với bất kỳ hệ thống cụ thể nào không phải là

duy nhất. Do đó, nếu một hàm riêng  $V$  không thành công trong việc chứng minh một hệ cụ thể ổn định hay không, không có nghĩa là không thể tìm ra một hàm  $V$  khác để xác định được tính ổn định của hệ.

Chọn hàm  $V(x)$  là hàm xác định dương sao cho:

$$* \frac{dV}{dt} \leq 0 : \text{hệ ổn định}$$

$$* \frac{dV}{dt} : \text{là hàm xác định âm}$$

Hệ ổn định tiệm cận

\*  $\frac{dV}{dt}$  không âm, không dương. Vấn đề về ổn định của hệ còn để ngỏ.

**Ghi chú:** Phương pháp trực tiếp của Lyapunov phụ thuộc vào

- Cách chọn biến trạng thái
- Cách chọn hàm Lyapunov

□ *Định lý về không ổn định*

Cho hệ thống bậc hai được mô tả bởi hệ phương trình biến trạng thái

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}\tag{9.79}$$

Cho hàm  $V(x)$  để xét tính ổn định của hệ.

**Định lý:** Nếu tìm được một hàm  $V(x)$  sao cho đạo hàm  $dV/dt$  ( $\dot{V}$ ) dựa vào phương trình vi phân của chuyển động bị nhiều là hàm xác định dấu, còn trong lân cận tùy ý bé của gốc tọa độ có những điểm tại đó hàm  $\dot{V}$  lấy giá trị cùng dấu với  $V$  thì chuyển động không bị nhiễu không ổn định.

Áp dụng cho ví dụ minh họa, chọn hàm  $V$

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{V} &= x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2\end{aligned}\tag{9.80}$$

Thế phương trình (9.79) vào (9.80) ta được

$$\begin{aligned}\dot{V} &= x_1x_2 + x_1^2(x_1^2 + x_2^2) + x_2^2(x_1^2 + x_2^2) - x_1x_2 \\ \dot{V} &= (x_1^2 + x_2^2)^2\end{aligned}\quad (9.81)$$

$\dot{V}$  là hàm xác định dương, cũng như hàm  $V$ , điều kiện không ổn định thỏa mãn cho ví dụ được nêu.

Nếu hệ được mô tả bằng phương trình biến trạng thái ở dạng chính tắc

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1 \\ \dot{y}_2 &= \lambda_2 y_2\end{aligned}\quad (9.82)$$

Chọn hàm  $V = y_1^2 + y_2^2$  là hàm xác định dương.

$$\dot{V} = 2(y_1^2\lambda_1 + y_2^2\lambda_2) \quad (9.83)$$

Nếu chọn hàm  $V$  có dạng

$$\dot{V} = 2(y_1^2\lambda_1 + y_2^2\lambda_2)$$

$$\text{thì} \quad \dot{V} = 4(y_1y_1^2\lambda_1 + y_2y_2^2\lambda_2) \quad (9.84)$$

$$\dot{V} = 4(y_1^2\lambda_1^2 + y_2^2\lambda_2^2) \quad (9.85)$$

Hàm  $\dot{V}$  (9.85) là hàm xác định dương, điều kiện để hàm  $\dot{V}$  (9.84) cũng là hàm xác định dương là

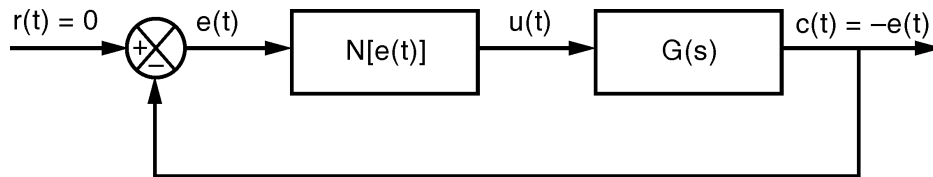
$$\lambda_1 > 0 \text{ và } \lambda_2 > 0$$

Điều kiện không ổn định của chuyển động cũng chỉ là điều kiện đủ. Câu trả lời về tính ổn định hoàn toàn phụ thuộc vào cách chọn biến trạng thái và cách chọn hàm  $V$ .

Trước năm 1940 phương pháp thứ hai của Lyapunov hầu như chưa được áp dụng. Sau năm 1940 phương pháp này bắt đầu được sử dụng để phân tích các hệ điều khiển phi tuyến. Ngày nay kết quả của nó và của nhiều công trình khoa học nghiên cứu về lý thuyết ổn định được phát triển sau này, đã được đưa vào áp dụng ngày càng rộng rãi trong nhiều ngành như vật lý, thiên văn, hóa học và cả sinh vật và đặc biệt trong các ngành kỹ thuật hiện đại như kỹ thuật điện tử, điều khiển tự động...

## 9.7 TIÊU CHUẨN ỔN ĐỊNH TUYỆT ĐỐI V. M. POPOV

Một tiêu chuẩn ổn định lý thú và rất mạnh đối với các hệ phi tuyến bất biến theo thời gian được giới thiệu vào năm 1959 do nhà toán học người Rumani V. M. Popov. Ổn định tuyệt đối được gọi là ổn định tiệm cận của trạng thái cân bằng trong toàn bộ đối với những phi tuyến thuộc một thể loại xác định. Tiêu chuẩn tần số của Popov là điều kiện đủ để xét ổn định tiệm cận các hệ hồi tiếp vòng đơn (H.9.19).



Hình 9.19 Hệ điều khiển hồi tiếp phi tuyến được đề cập bởi Popov

Phương pháp này được Popov phát triển từ đầu, có thể áp dụng cho các hệ hồi tiếp vòng đơn chứa phần tử tuyến tính và phi tuyến bất biến theo thời gian. Điểm nổi bật quan trọng của phương pháp Popov là nó có thể áp dụng được cho các hệ thống bậc cao.

Ngay khi đã biết được đáp ứng tần số của phần tử tuyến tính có thể xác định sự ổn định của hệ thống điều khiển phi tuyến. Đó chính là sự mở rộng biểu đồ Nyquist sang hệ phi tuyến.

Mục này trình bày tiêu chuẩn ổn định Popov với khái niệm về sự ràng buộc dưới dạng bất đẳng thức cho phần phi tuyến, phần gắn với đồ thị tần số biến dạng của phần tử tuyến tính. Đặc điểm nổi bật quan trọng nhất và hấp dẫn nhất của tiêu chuẩn Popov là nó chia sẻ tất cả các đặc tính tần số mong muốn của phương pháp Nyquist.

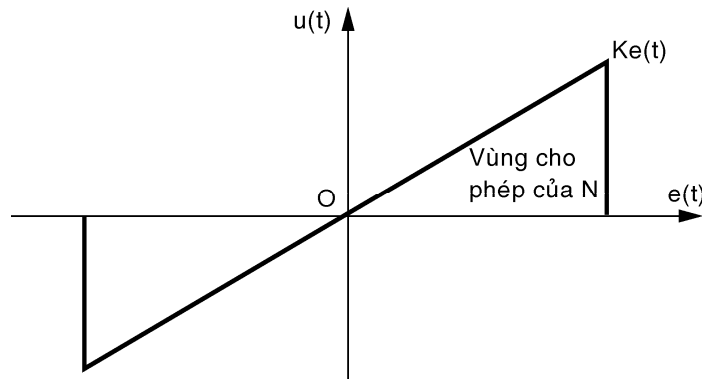
Để giới thiệu phương pháp Popov, ta xét hệ phi tuyến được minh họa ở hình 9.19. Đầu vào khảo sát  $r(t)$  được giả thiết là bằng không. Do đó đáp ứng của hệ thống này có thể biểu diễn như sau:

$$e(t) = e_o(t) - \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad (9.86a)$$

trong đó:  $g(t) = L^{-1}[G(s)]$  - đáp ứng kích thích đơn vị

$e_o(t)$  - đáp ứng điều kiện ban đầu

Trong phép phân tích này phần tử phi tuyến  $N[e(t)]$  thỏa mãn điều kiện giới hạn riêng. Ta giả sử mối liên hệ vào ra của phần tử phi tuyến được giới hạn nằm trong vùng minh họa trên hình 9.20.



**Hình 9.20** Vùng giới hạn của phi tuyến

Điều kiện giới hạn cho phần tử phi tuyến:

$$0 \leq N[e(t)] \leq K \quad (9.86b)$$

và  $u(t) = N[e(t)]e(t)$

Tại mọi thời điểm  $t$  tồn tại giá trị giới hạn

$$|u(t)| \leq u_m < \infty \quad \text{nếu } |e(t)| \leq e_m \quad (9.87)$$

Giả thiết duy nhất liên quan đến phần tử tuyến tính  $G(s)$  là đáp ứng đầu ra ổn định bậc  $n$ .

Trường hợp phần tử tuyến tính không ổn định, phải dùng phương pháp hiệu chỉnh để đưa về ổn định, sau đó mới xét theo tiêu chuẩn Popov.

Phương pháp Popov liên quan đến hoạt động tiệm cận của tín hiệu điều khiển  $u(t)$  và ngõ ra  $-e(t)$  của phần tử tuyến tính. Do đó thêm vào các định nghĩa ổn định tiệm cận, ổn định cục bộ, ổn định hữu hạn, ổn định toàn bộ đã giới thiệu ở mục 9.6 kết hợp tiêu chuẩn ổn định Lyapunov, ở đây ta quan tâm đến điều khiển

tiệm cận và đầu ra tiệm cận. Điều khiển tiệm cận bậc  $n$  tồn tại nếu một giá trị thực  $n$  có thể được tìm thấy cho mỗi tập các điều kiện ban đầu như sau:

$$\int_0^{\infty} \left[ e^{-nt} u(t) \right]^2 dt < \infty \quad (9.88)$$

Đầu ra tiệm cận bậc  $n$  tồn tại nếu một giá trị thực  $n$  được tìm thấy cho bởi tập các điều kiện ban đầu như

$$\int_0^{\infty} \left[ e^{-nt} e(t) \right]^2 dt < \infty \quad (9.89)$$

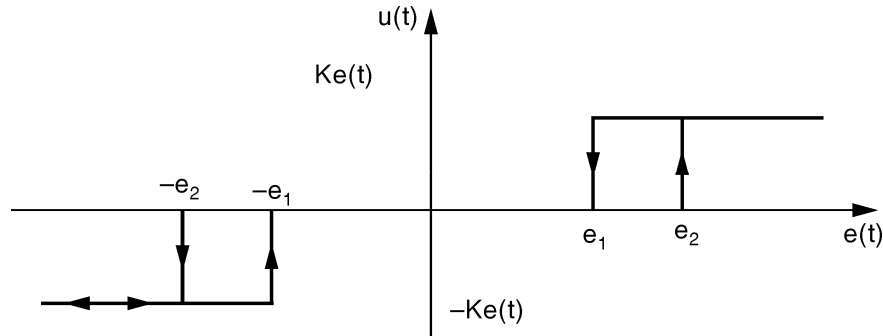
Các định nghĩa ổn định này có thể làm rõ bằng các bổ đề sau:

Nếu phần tử tuyến tính  $G(s)$  của hình 9.20 là ổn định đầu ra bậc  $n$ , đầu vào và đầu ra của phần tử phi tuyến được giới hạn, thỏa phương trình (9.87) và hệ thống hồi tiếp là điều khiển tiệm cận bậc  $n$ , khi đó

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-nt} e(t) = 0 \quad (9.90)$$

Vì vậy nếu bổ đề này là thỏa,  $e(t)$  hội tụ về zero nhanh hơn  $e^{-nt}$  đối với  $n > 0$ .

*Định lý cơ bản* của Popov được dựa trên hệ thống điều khiển hồi tiếp minh họa ở hình 9.19.



**Hình 9.21** Đặc tính phi tuyến có từ trễ thụ động

Giả sử hệ thống tuyến tính là ổn định.

*Định lý phát biểu rằng* đối với hệ thống hồi tiếp là ổn định tuyệt đối, khi

$$0 \leq N[e(t)] \leq K \quad (9.91)$$

đủ để một số thực  $q$  tồn tại sao cho đối với tất cả  $\omega$  thực  $\geq 0$  và một số nhỏ tùy ý  $\delta > 0$  điều kiện sau được thỏa:

$$\operatorname{Re}[(1 + j\omega q)G(j\omega)] + 1/K \geq \delta > 0 \quad (9.92)$$

Hệ thức (9.92) là tiêu chuẩn Popov.

Tùy theo dạng phi tuyến hiện diện, các giới hạn về  $q$  và  $K$  là bắt buộc:

a) Đối với phi tuyến đơn trị bất biến theo thời gian

$$-\infty < q < \infty \text{ nếu } 0 < K < \infty$$

$$0 \leq q < \infty \text{ nếu } K = \infty$$

b) Đối với phi tuyến có từ trễ thụ động (H.9.22)

$$-\infty < q \leq 0 \text{ và } 0 < K < \infty$$

c) Đối với phi tuyến có từ trễ tích cực ( xem hình 9.23)

$$0 \leq q < \infty \text{ và } 0 < K \leq \infty$$

d) Đối với phi tuyến biến thiên theo thời gian:  $q = 0$  (H.9.24)

Kiểm tra bốn dạng phi tuyến có thể có này nói lên rằng định lý cho phép một sự trao đổi giữa các yêu cầu đối với các phần tử phi tuyến và tuyến tính.

Ta hãy viết lại (9.92) như sau

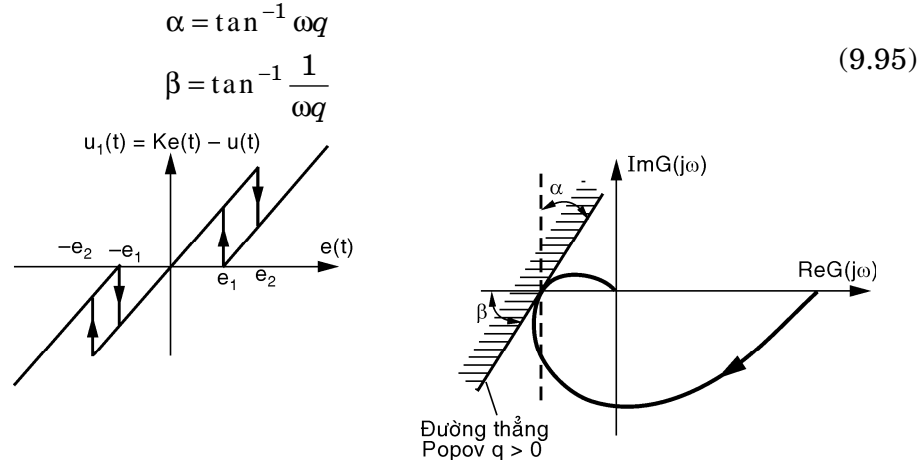
$$\operatorname{Re} G(j\omega) > -\frac{1}{K} + \omega q \operatorname{Im} G(j\omega) \quad (9.93)$$

Hệ thức (9.93) phát biểu rằng với mỗi  $\omega$  đồ thị Nyquist của  $G(j\omega)$  phải nằm bên phải của đường thẳng

$$\operatorname{Re} G(j\omega) = -\frac{1}{K} + \omega q \operatorname{Im} G(j\omega) \quad (9.94)$$

Đường thẳng này gọi là đường Popov được minh họa ở hình 9.23.

Góc  $\alpha$  và  $\beta$  là



**Hình 9.22** Đặc tính phi tuyến có từ trễ tích cực      **Hình 9.23** Phương pháp Popov khi  $q$  là xác định

Rõ ràng độ dốc của đường thẳng này phụ thuộc vào  $\omega$ .

Sự ổn định phụ thuộc vào việc chọn giá trị  $q$  sao cho đối với mỗi tần số  $\omega$ ,  $G(j\omega)$  nằm bên phải của đường Popov có độ dốc phụ thuộc vào tần số (9.95).

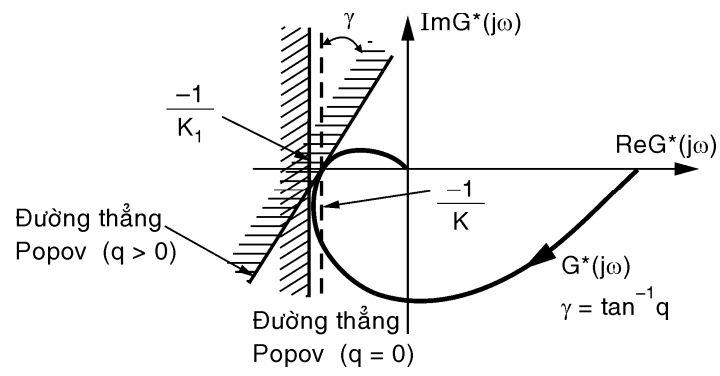
Để tìm đường Popov không nhạy cảm theo tần số, sử dụng phép biến đổi:

$$G^*(j\omega) = \operatorname{Re} G(j\omega) + j\omega \operatorname{Im} G(j\omega) \quad (9.96)$$

trong đó  $G^*(j\omega)$  là đặc tính tần số đã được sửa đổi (phần ảo của  $G(j\omega)$  được nhân thêm  $\omega$  của phần tuyến tính nguyên thủy ban đầu  $G(j\omega)$ ). Do đó phương trình (9.92) có thể viết lại

$$\operatorname{Re} G^*(j\omega) > -\frac{1}{K} + q \operatorname{Im} G^*(j\omega) \quad (9.97)$$





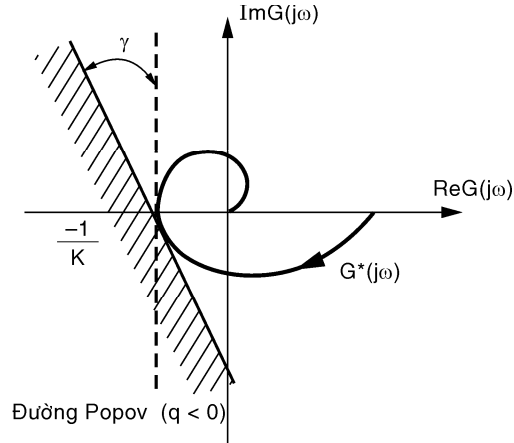
**Hình 9.24** Đường Popov trong mặt phẳng  $G^*(j\omega)$  đối với trường hợp  $q \geq 0$

Trong mặt phẳng  $G^*(j\omega)$  đường Popov được xác định

$$\operatorname{Re} G^*(j\omega) = -\frac{1}{K} + q \operatorname{Im} G^*(j\omega) \quad (9.98)$$

và không nhạy cảm theo tần số. Đường Popov trong mặt phẳng  $G^*(j\omega)$  được minh họa ở hình 9.24 và 9.25. Góc  $\gamma$  được định nghĩa như sau:  $\gamma = \tan^{-1} q$  (9.99)

Chú ý từ các hình 9.24 và 9.25 quỹ tích  $G^*(j\omega)$  đi qua bên phải của tiếp tuyến đến quỹ tích ở điểm mà  $G^*(j\omega)$  giao với trục thực âm. Điểm này có giá trị  $-1/K$ . Do đó  $K$  biểu thị độ lợi cho phép cực đại đối với hệ thống. Đối với



**Hình 9.25** Đường Popov trong mặt phẳng  $G^*(j\omega)$  đối với trường hợp  $q \geq 0$

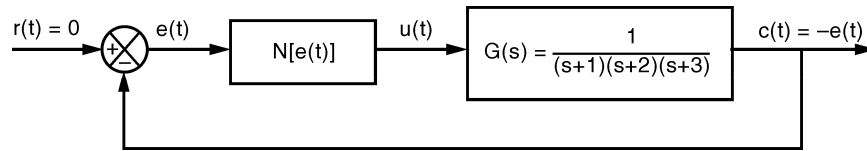
trường hợp mà  $q = 0$ , biểu thức đường Popov rút gọn và hệ thống là ổn định nếu nó nằm bên phải của đường thẳng đứng đi qua điểm  $-1/K$  như hình 9.25.

\* Chú ý trường hợp  $q = 0$ , đường thẳng Popov vuông góc với trục hoành tại điểm  $-1/K$  (H.9.25).

Ví dụ: Xét hệ minh họa ở hình 9.26. Đối với phần tử tuyến tính, đáp ứng điều kiện đầu  $e_o(t)$  được cho bởi:

$$e_o(t) = e_{10}e^{-t} + e_{20}e^{-2t} + e_{30}e^{-3t} \quad (9.99)$$

trong đó  $e_{10}, e_{20}$  phụ thuộc vào điều kiện đầu.



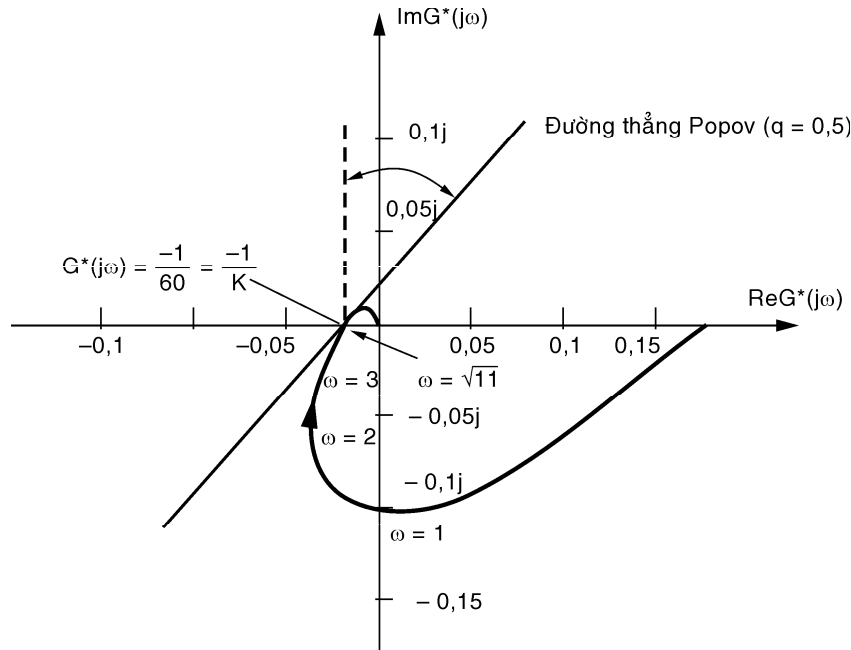
**Hình 9.26** Ví dụ về hệ thống điều khiển phi tuyến

Đáp ứng xung đơn vị  $g(t)$  được cho bởi

$$g(t) = [0,5e^{-t} - e^{-2t} + 0,5e^{-3t}]u(t) \quad (9.100)$$

Với  $u(t)$  là hàm nấc đơn vị  $1(t)$ . Phương trình (9.100) chỉ ra rằng phần tử tuyến tính cho kết quả ổn định và thỏa một trong những điều kiện cần thiết để sử dụng phương pháp Popov. Đặc tính tần số đã sửa đổi  $G^*(j\omega)$  của phần tuyến tính được vẽ ở hình 9.27. Từ biểu đồ này kết luận rằng nếu phần tử phi tuyến đơn trị và nếu  $q = 0,5$  thì điều kiện Popov thỏa mãn khi  $0 < K \leq 60$

**Kết luận:** Phương pháp Popov đưa ra điều kiện chính xác và đủ để xác định điều kiện ổn định tuyệt đối của hệ thống hồi tiếp có cấu hình minh họa ở hình 9.19, với các giới hạn bắt buộc cho một lớp phi tuyến nào đó và phần tuyến tính là ổn định. Bất đẳng thức (9.92) đối với thành phần  $G(j\omega)$  và một hằng số thực  $q$  là yếu tố then chốt của kỹ thuật này. Phương pháp Popov chia sẻ tất cả đặc tính tần số của phương pháp Nyquist và dễ dàng áp dụng vào các hệ thống bậc cao.



Hình 9.27 Đặc tính tần số  $G^*(j\omega)$  cho ví dụ hình 9.26

Tiêu chuẩn đường tròn tổng quát hóa - phương pháp Popov mở rộng sang các dạng hệ thống khác, mà không nhất thiết bị giới hạn ở các hệ có phần tuyến tính ổn định và phi tuyến bất biến theo thời gian.

## 9.8 TỔNG KẾT

Sau khi đã nghiên cứu các phương pháp khác nhau dùng để phân tích các hệ phi tuyến, cần xác định một cách hợp lý phương pháp nào nên dùng cho một hệ thống điều khiển cụ thể. Lưu đồ lôgic chọn lựa phương pháp phân tích hệ thống điều khiển phi tuyến được trình bày ở hình 9.28.

Trong các hệ gần tuyến tính, phương pháp xấp xỉ tuyến tính hóa cho phép sử dụng kỹ thuật tuyến tính quy ước của phép phân tích như biểu đồ Nyquist, giản đồ Bode hay phương pháp Quỹ đạo nghiệm số ...

Đối với loại hệ thống điều khiển này, có thể dùng lý thuyết điều khiển tự động tuyến tính để phân tích và thiết kế. Đó cũng là lý do tại sao hệ thống ĐKTD tuyến tính được phân tích kỹ và sâu trong phần đầu của quyển sách này.

Nếu một hệ thống không thể xấp xỉ tuyến tính được, khi đó phải dùng một hay nhiều các phương pháp khảo sát hệ phi tuyến đã trình bày trong chương này.

Nếu hệ thống phi tuyến là bất biến theo thời gian và có phần tuyến tính là ổn định hoặc ở biên giới ổn định (không có nghiệm nằm bên phải mặt phẳng S), khi đó nên vận dụng phương pháp hàm mô tả. Đây là một phương pháp gần đúng, xấp xỉ hàm truyền đạt phức số của khâu phi tuyến bằng cách chỉ xét các thành phần cơ bản đầu ra. Trong thực tế phương pháp hàm mô tả hay còn gọi là phương pháp cân bằng điều hòa là một phương pháp rất đặc lực để khảo sát các hệ bậc cao và tìm điều kiện tồn tại chế độ tự dao động trong hệ. Tuy nhiên trong một số trường hợp đặc biệt phương pháp này không cho câu trả lời đúng, chính xác về chế độ tự dao động. Cách khắc phục là cần phải xét ảnh

hưởng của các họa tần bậc cao lên hàm mô tả của phần tử phi tuyến và kết quả là hàm mô tả sẽ là một họ đường cong phụ thuộc vào biên độ và tần số tín hiệu vào. Phương trình cân bằng điều hòa sẽ có dạng:

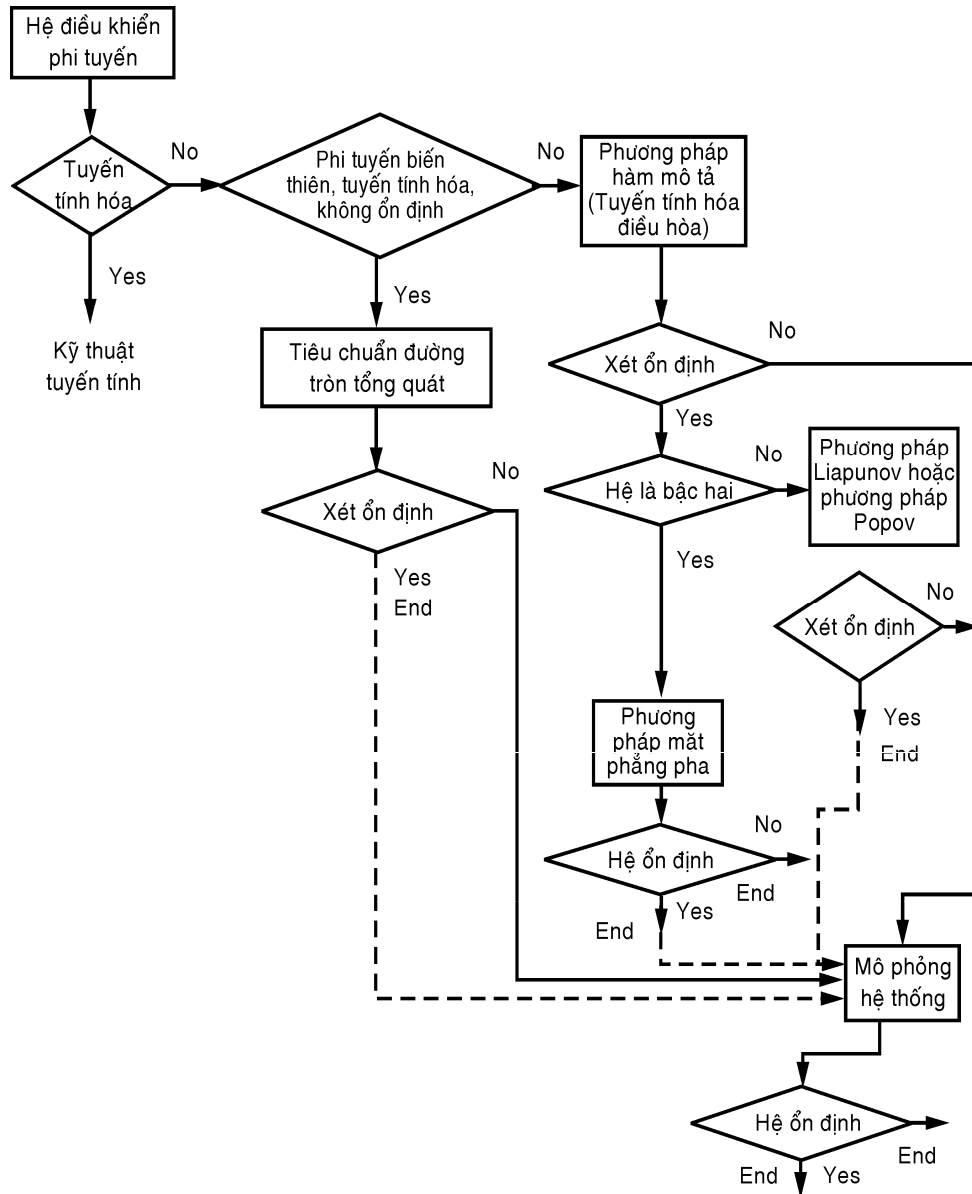
$$1 + N(M, \omega)G(j\omega) = 0$$

Kết quả nhận được cần phải kiểm tra lại bằng cách mô phỏng hệ thống hay dùng phương pháp khác.

Nếu hệ điều khiển phi tuyến là bậc hai, khi đó phương pháp mặt phẳng pha và Lyapunov là các phương pháp thích hợp nhất được sử dụng.

Phương pháp Lyapunov cũng có thể dùng kiểm tra nếu hệ bậc ba. Nếu hệ là bậc ba hay cao hơn, lúc đó phương pháp Popov được sử dụng để xét ổn định tuyệt đối cho hệ. Nếu phần tử phi tuyến là hàm biến thiên theo thời gian và phần tử tuyến tính là không ổn định, khi đó dùng tiêu chuẩn đường tròn tổng quát xác định vùng giá trị các độ lợi để hệ thống ổn định.

Phương pháp mô phỏng hệ thống được dùng để kiểm tra lần cuối sự ổn định của hệ thống. Nó sẽ trợ giúp trong việc kiểm tra các yếu tố biến thiên từ sự bất định có liên quan tới tính hiệu lực của giả thiết và đối với các khó khăn thuộc về phân tích do hệ phức tạp gây ra. Mô phỏng hệ thống cũng cần thiết bởi vì kỹ thuật điều khiển tự động (ĐKTD) hiện nay vẫn còn bất lực trong việc chứng minh sự ổn định của hệ phi tuyến một cách thuyết phục. Một ví dụ về điều này là phương pháp thứ hai của Lyapunov là điều kiện đủ, nhưng không phải là điều kiện cần cho sự ổn định. Do đó, nếu không tìm ra một hàm Lyapunov, không có nghĩa là hệ điều khiển phi tuyến là không ổn định. Như minh họa trên hình 9.28, phương pháp mô phỏng là không bắt buộc trong vài trường hợp và được ký hiệu bằng đường gạch đứt nét.



Hình 9.28

**Phụ lục****A. BẢNG BIẾN ĐỔI LAPLACE VÀ Z**

No	Hàm Laplace F(s)	Hàm thời gian f(t)	Hàm z F(z)
1	$1/s$	$u(t)$	$z/(z-1)$
2	$1/s^2$	$t$	$Tz/(z-1)^2$
3	$1/s^3$	$t^2/2$	$T^2z(z+1)/2(z-1)^3$
4	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{3!}t^3$	$\frac{T^3z(z^2+4z+1)}{6(z-1)^4}$
5	$\frac{1}{(s+a)}$	$e^{-at}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$te^{-at}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
7	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2}t^2e^{-at}$	$\frac{T^2}{2}e^{-aT} \frac{z(z+e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^3}$
8	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
9	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$t - \frac{1 - e^{-at}}{a}$	$\frac{z[(aT-1+e^{-aT})z + (1-e^{-aT}-aTe^{-aT})]}{a(z-1)^2(z-e^{-aT})}$
10	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{(e^{-aT}-e^{-bT})z}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
11	$\frac{a}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$	$\frac{z[z-e^{-aT}(1+aT)]}{(z-e^{-aT})^2}$
12	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1 - (1+at)e^{-at}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT}} - \frac{aTe^{-aT}z}{(z-e^{-aT})^2}$
13	$\frac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$	$be^{-bt} - ae^{-at}$	$\frac{z[z(b-a) - (be^{-aT} - ae^{-bT})]}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
14	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin at$	$\frac{z \sin aT}{z^2 - (2 \cos aT)z + 1}$
15	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$	$\frac{z(z - \cos aT)}{z^2 - (2 \cos aT)z + 1}$
16	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\sin bt$	$\frac{ze^{-aT} \sin bT}{z^2 - 2e^{-aT}(\cos bT)z + e^{-2aT}}$
17	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\cos bt$	$\frac{z(z - e^{-aT} \cos bT)}{z^2 - 2e^{-aT}(\cos bT)z + e^{-2aT}}$
18	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{ab} + \frac{e^{-at}}{a(a-b)} + \frac{be^{-at}}{b(b-a)}$	$\frac{(Az+B)z}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})(z-1)}$ $A = \frac{b(1-e^{-aT})-a(1-e^{-bT})}{ab(b-a)}$ $B = \frac{ae^{-aT}(1-e^{-bT})-be^{-bT}(1-e^{-aT})}{ab(b-a)}$
19	1	$\delta(t)$	1
20	$\frac{1}{S}$	$u(t) = 1(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t-nT)$	$\frac{1}{1-e^{-TS}} = \frac{z}{z-1}$

## B. TÓM TẮT MỘT VÀI TÍNH CHẤT VÀ ĐỊNH LÝ CỦA PHÉP BIẾN ĐỔI Z

No	Dãy tín hiệu	Biến đổi Z	Miền hội tụ	Ghi chú
	$x(n)$ $y(n)$	$X(z)$ $Y(z)$	$R_{x-} <  z  < R_{x+}$ $R_{y-} <  z  < R_{y+}$	
1	$a.x(n) + b.y(n)$	$a.X(z) + b.Y(z)$	$\max[R_{x-}, R_{y-}] <  z  < \min[R_{x+}, R_{y+}]$	Tính tuyến tính
2	$x(n - n_0)$ $x(n + n_0)$	$n_0$ nguyên dương $z^{-n_0} \cdot X(z)$ $z^{n_0} \cdot X(z)$	$R_{x-} <  z  < R_{x+}$	Tính trễ (dịch chuyển theo thời gian)
3	$a^n \cdot x(n)$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$	$ a  \cdot R_{x-} <  z  <  a  R_{x+}$	Thay đổi thang tỉ lệ (Nhân dãy với hàm mũ $a^n$ )
4	$n \cdot x(n)$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$R_{x-} <  z  < R_{x+}$	Đạo hàm của biến đổi $z$
5	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	$R_{x-} <  z  < R_{x+}$	Dãy liên hợp phức
6	$x(-n)$	$X\left(\frac{1}{z}\right)$	$\frac{1}{R_{x-}} <  z  < \frac{1}{R_{x+}}$	Đảo trục thời gian
7	Nếu $x(n) = 0$ với $n < 0$	$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$		Định lý giá trị đầu
8	$x(n) * y(n)$	$X(z) \cdot Y(z)$	$\max[R_{x-}, R_{y-}] <  z  < \min[R_{x+}, R_{y+}]$	Tích chập của hai dãy
9	$x(n) \cdot y(n)$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(V) \cdot Y\left(\frac{z}{V}\right) \cdot V^{-1} dV$	$R_{x-} R_{y-} <  z  < R_{x+} R_{y-}$	Tích của hai dãy
10	$r_{xy}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(m-n)$	$R_{xy}(z) = X(z) \cdot Y\left(\frac{1}{z}\right)$	$R_{x-} <  z  < R_{x+}$ $\frac{1}{R_{y+}} <  z  < \frac{1}{R_{y-}}$	Tương quan của hai tín hiệu
11	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$	Tối thiểu là giao của $R_x$ và $ z  > 1$	
12	Tính giá trị xác lập	$X(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z)$		Định lý giá trị cuối



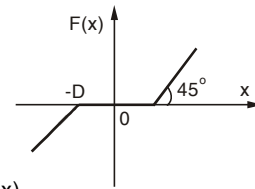
## C. HÀM MÔ TẢ CÁC KHÂU PHI TUYẾN ĐIỂN HÌNH

### 1. Khâu có vùng chết

$$N = 1 - \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{\pi}$$

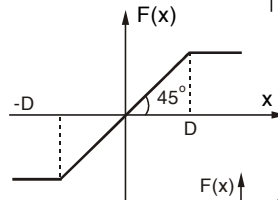
$$\sin \alpha = \frac{D}{M}, \quad x(t) = M \sin \omega t$$

$$M > D$$



### 2. Khâu bão hòa

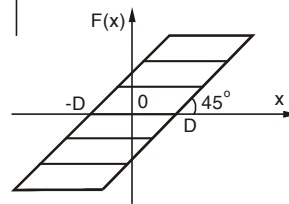
$$N = \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{\pi}$$



### 3. Khâu khe hở

$$N = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\sin 2\alpha}{2\pi} - j \frac{\cos^2 \alpha}{\pi}$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{A} - 1; \quad A = \frac{M}{D}$$

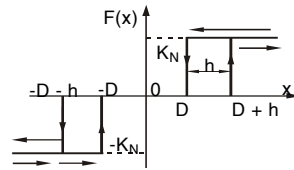


### 4. Rơle 3 vị trí có trễ

$$N = \frac{2K_N}{\pi A(D+h)} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2)$$

$$-j \frac{2K_N}{\pi A(D+h)} (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{1}{A}; \quad \sin \alpha_2 = \frac{D}{M}; \quad A = \frac{M}{D+h}$$

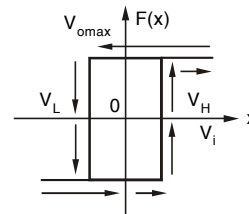


### 5. Khâu so sánh có trễ

Trigger Schmit không đảo

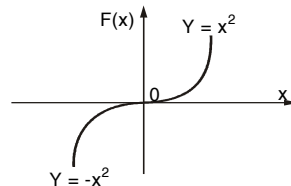
$$N = \frac{4V_0 \max}{\pi A V_H} (\cos \alpha + j \sin \alpha)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{A}, \quad A = \frac{M}{D} = \frac{M}{V_H}$$



### 6.

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 \\ y = -x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow N = \frac{8M}{3\pi}$$



### 7.

$$y = x^3; \quad N = \frac{3M^2}{4}$$

### **Tài liệu tham khảo**

1. Nguyễn Thị Phương Hà, *Điều khiển tự động*, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 1996.
2. Nguyễn Thị Phương Hà, *Bài tập Điều khiển tự động*, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 1996.
3. Benjamin C. Kuo, *Automatic Control Systems*, Prentice-Hall International Editions, Seventh Edition, 1995.
4. Stanley M. Shinnars, *Modern Control System Theory and Design*, New York, 1992.
5. John Van De Vegte, *Feedback Control Systems*, Prentice-Hall, 1991.
6. Katsuhiko Ogata, *Modern Control Engineering*, Prentice-Hall, 1990.
7. Charlex L. Phillips & H. Troy Nagle, *Digital Control System Analysis and Design*, Prentice-Hall, 1992.
8. Leigh J. R., *Applied Digital Control Theory, Design and Implementation*, London, 1984.
9. Karl J. Åström and Björn Wittemmark, *Computer Controlled Systems Theory and Design*, Prentice-Hall Information and System Sciences, Thomas Kailath, Editor, 1984.