Жорданова практика №3

Замена базиса вектора

1. Дан вектор $x = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$. Какие координаты будет иметь этот вектор в базисе $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix}\right\}$?

Стандартный базис

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

Формула для замены базиса вектора

$$\hat{x} = P^{-1} \cdot x$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 0\\3 & 0 & 4\end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}8 & 0 & -6\\0 & 1 & 0\\-2 & 0 & 2\end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 0 & -1\\0 & 0.5 & 0\\-3 & 0 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

Замена базиса вектора

2. Вектор $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ задан в стандартном базисе. В каком базисе этот вектор будет иметь вид в $\hat{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$?

Формула

$$x = P \cdot \hat{x}$$

Неизвестный базис

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \right\}$$

Стандартный базис

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = 5 \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 6 \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + 7 \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = 5 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 6 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 7 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Замена базиса матрицы

Формула перехода из старого базиса в новый

$$A = P\hat{A}P^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} - & - & - \\ - & A & - \\ - & - & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & P & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & \hat{A} & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & P & - \\ - & - & - \end{bmatrix}^{-1}$$

A — матрица в старом (стандартном) базисе

$\hat{A}$ — матрица в новом базисе

P — новый базис (матрица перехода)

Формула перехода из нового базиса в старый

$$\hat{A} = P^{-1}AP$$

$$\begin{bmatrix} - & - & - \\ - & \hat{A} & - \\ - & - & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & P & - \\ - & - & - \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & A & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & P & - \\ - & - & - \end{bmatrix}$$

Замена базиса матрицы (линейного отображения)

3. Матрица $K = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 6 \\ 9 & 6 & 9 \\ 6 & 9 & 6 \end{bmatrix}$ задана в стандартном базисе. Найти её в базисе $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

$$\widehat{K} = P^{-1}KP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 9 & 6 \\ 9 & 6 & 9 \\ 6 & 9 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 63 & 30 & 6 \\ 72 & 30 & 9 \\ 63 & 30 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 10 & 2 \\ 4.5 & 0 & 1.5 \\ -9 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Как проверить, что линейное отображение $\begin{bmatrix} 6 & 9 & 6 \\ 9 & 6 & 9 \\ 6 & 9 & 6 \end{bmatrix}$ в стандартном базисе ДЕЙСТВИТЕЛЬНО соответствует отображению $\begin{bmatrix} 21 & 10 & 2 \\ 4.5 & 0 & 1.5 \\ -9 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ в базисе $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$?

Замена базиса матрицы (линейного отображения)

3. Матрица $K = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 6 \\ 9 & 6 & 9 \\ 6 & 9 & 6 \end{bmatrix}$ задана в стандартном базисе. Найти её в базисе $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

$$\widehat{K} = P^{-1}KP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 9 & 6 \\ 9 & 6 & 9 \\ 6 & 9 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 63 & 30 & 6 \\ 72 & 30 & 9 \\ 63 & 30 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 10 & 2 \\ 4.5 & 0 & 1.5 \\ -9 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 6 \\ 9 & 6 & 9 \\ 6 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad y = Kx \quad} y = \begin{bmatrix} 42 \\ 48 \\ 42 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{x} = P^{-1} \cdot x$$

$$y = P \cdot \hat{y} \qquad P = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{K} = \begin{bmatrix} 21 & 10 & 2 \\ 4.5 & 0 & 1.5 \\ -9 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad \hat{y} = \widehat{K}\hat{x} \quad} \hat{y} = \begin{bmatrix} 14 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Как называются матрицы K и $\widehat{K}$?

Подобные матрицы

Подобные матрицы – матрицы, соответствующие одному и тому же линейному преобразованию, заданному в разных базисах.

$$K = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 6 \\ 9 & 6 & 9 \\ 6 & 9 & 6 \end{bmatrix} \qquad \widehat{K} = \begin{bmatrix} 21 & 10 & 2 \\ 4.5 & 0 & 1.5 \\ -9 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{gathered} det\ A = det\ B \\ trace\ A = trace\ B \end{gathered}} \qquad \boxed{\begin{gathered} rank\ A = rank\ B \\ nullity\ A = nullity\ B \end{gathered}}$$

4. Матрицы A и B подобны. Пусть $det(A \cdot B) = 10$. Вычислить $\dfrac{det\ \ A}{det(A \cdot B^{-1})}$

$$det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B) \qquad det(A) = det(B) = \sqrt{10}$$

$$\frac{det\ \ A}{det(A \cdot B^{-1})} = \frac{\det(A)}{\det(A) \cdot \det(B^{-1})} = \frac{1}{(det(B))^{-1}} = \det(B) = \sqrt{10}$$

5. Матрицы A и B подобны. Пусть $trace\ (A + B) = 10$. Вычислить $trace(A) - trace(A - B)$

$$trace\ (A + B) = trace(A) + trace(B) \quad \leftrightarrow \quad trace(A) + trace(B) = 5$$

$$trace(A) - trace(A - B) = trace(A) - trace(A) + trace(B) = 5$$

Собственные числа и вектора

6. Дана матрица $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. Вычислить ее собственные числа и собственные вектора.

$$det(A - \lambda I) = 0$$

Характеристическое уравнение

$$det\left(\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$det\begin{bmatrix} 5-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(5-\lambda)(6-\lambda)(4-\lambda) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = 6 \\ \lambda_3 = 4 \end{array}\right.$$

Собственные числа

Собственные числа и вектора

$$\begin{cases}\lambda_1 = 5\\ \lambda_2 = 6\\ \lambda_3 = 4\end{cases}$$

6. Дана матрица $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. Вычислить ее собственные числа и собственные вектора.

$$\boxed{Av = \lambda_1 v}$$

$\lambda_1 = 5$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 5x + 2y - z = 5x \\ 6y = 5y \\ 2y + 4z = 5z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\ -\text{любое} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 6$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 5x + 2y - z = 6x \\ 6y = 6y \\ 2y + 4z = 6z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ y - \text{любое} \\ z = y \end{cases}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_3 = 4$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 5x + 2y - z = 4x \\ 6y = 4y \\ 2y + 4z = 4z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = z \\ y = 0 \\ z - \text{любое} \end{cases}$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Какие по отношению друг к другу эти собственные векторы?

Спектральное разложение

Матрица

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Собственные значения

$$\left[\begin{matrix} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = 6 \\ \lambda_3 = 4 \end{matrix}\right.$$

Собственные вектора

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Формула

$$A = PDP^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Всегда ли мы добьемся успеха при получении спектрального разложения матрицы?

Пример

Для заданных матриц найти собственные числа и собственные вектора.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2,3} = 2$$

$$v = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2,3} = 2$$

$$v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ a - b \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2,3} = 2$$

$$v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Условие спектральной разложимости. Спектральное разложение существует только тогда, когда матрица имеет базис собственных векторов.

Алгебраическая и геометрическая кратность

Алгебраическая кратность собственного числа – кратность соответствующего корня характеристического уравнения. $\boldsymbol{Alg(\lambda)}$

Геометрическая кратность собственного числа – количество линейно независимых собственных векторов, соответствующих этому числу. $\boldsymbol{Geom(\lambda)}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2,3} = 2$$

$$v = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Alg(2) = 3}$$
$$\boldsymbol{Geom(2) = 1}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2,3} = 2$$

$$v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ a-b \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Alg(2) = 3}$$
$$\boldsymbol{Geom(2) = 2}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2,3} = 2$$

$$v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Alg(2) = 3}$$
$$\boldsymbol{Geom(2) = 3}$$

$$\boxed{1 \le Geom(\lambda) \le Alg(\lambda)}$$

Обобщенные (присоединенные) собственные вектора

Формула

$$\boxed{(A-\lambda I)^k\omega = 0}$$

$(A-\lambda I)^1 v = 0$ – собств. вектор

$(A-\lambda I)^2\omega_{11} = 0$

$(A-\lambda I)^3\omega_{12} = 0$

$(A-\lambda I)^4\omega_{13} = 0$

Жордановы цепочки

Если $(A-\lambda I)v_1 = 0$

$(A-\lambda I)\omega_1 = v_1$

$(A-\lambda I)\omega_2 = \omega_1$

$(A-\lambda I)\omega_3 = \omega_2$

то $(v_1, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – жорданова цепочка обобщенных векторов, связанная с собственным вектором v_1

$$v_1 - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3$$

Жорданова цепочка длиной 4

Жорданово разложение

Дана матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$. Найти ее Жорданово разложение.

$\lambda_{1,2,3} = -1$ $\quad v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad v_1 = \begin{bmatrix} -2a \\ a \\ a \end{bmatrix}$ $\quad \begin{matrix} Alg(-1) = 3 \\ Geom(-1) = 1 \end{matrix}$

Проверка: $(A - \lambda I)^1 v_1 = 0$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Жорданово разложение

Дана матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$. Найти ее Жорданово разложение. $\lambda_{1,2,3} = -1$ $\quad v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$(A - \lambda I)\,\omega_1 = v_1$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}^1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = -2z + 1 \\ y = z - 1 \end{cases} \qquad \omega_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Проверка:

$$(A - \lambda I)^2\,\omega_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$(A - \lambda I)\,\omega_2 = \omega_1$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}^1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 1 - 2y \\ z = y - 2 \end{cases} \qquad \omega_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Проверка:

$$(A - \lambda I)^2\,\omega_2 = v_1$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I)^3\,\omega_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Жорданово разложение

Дана матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$. Найти ее Жорданово разложение.

$\lambda_{1,2,3} = -1$ $\quad v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\omega_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \omega_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

Как будет выглядеть Жорданово разложение? $\boxed{A = PJP^{-1}}$

$$A = PJP^{-1} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & \omega_1 & \omega_2 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & J & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & \omega_1 & \omega_2 \\ | & | & | \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1}$$

Комплексное жорданово разложение

Дана матрица $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Найти ее жорданово разложение

Собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm i$

Собственные векторы $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \end{bmatrix}$

Формула разложения $A = PJP^{-1}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0i & 1+0i \\ 1+1i & 1-1i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1i & 0 \\ 0 & -1i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+0i & 1+0i \\ 1+1i & 1-1i \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Комплексное жорданово разложение

Дана матрица $A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 6 \\ -3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Найти ее жорданово разложение

Собственные значения $\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i, \lambda_3 = 5$

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Собственные векторы $v_1 = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Формула разложения $A = PJP^{-1}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 & 6 \\ -3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i & 1-i & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 & 6 \\ -3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1i & 1-1i & 1 \\ 1+0i & 1+0i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+1i & 1-1i & 1 \\ 1+0i & 1+0i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 & 6 \\ -3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Жордановы клетки. Вещественный случай

$$\lambda_{1,2} = 3$$
$$alg(3) = 2$$
$$geom(3) = 1$$
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

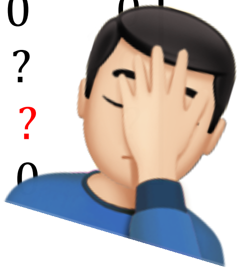
$$\lambda_{1,2} = 3$$
$$alg(3) = 2$$
$$geom(3) = 2$$
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2,3} = -1$$
$$alg(-1) = 3$$
$$geom(-1) = 2$$
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2,3} = -1$$
$$alg(-1) = 3$$
$$geom(-1) = 1$$
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2,3} = -2, \lambda_4 = 1, \lambda_{5,6} = 0$$
$$alg(-2) = 3, alg(1) = 1, alg(0) = 2$$
$$geom(-2) = 1, geom(1) = 1, geom(0) = 2$$
$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2,3,4} = 7, \lambda_{5,6} = 1$$
$$alg(7) = 4, alg(1) = 2$$
$$geom(7) = 5, geom(1) = 2$$
$$\begin{bmatrix} ? & ? & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ? & ? & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ? & ? & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ? & ? & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ? & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$



Жордановы клетки. Комплексный случай

$\lambda_{1,2} = -3 \pm 2i$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$\lambda_{1,2,3,4} = -1 \pm 5i$

$geom(-1+5i) =$
$= geom(-1-5i) = 1$

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_{1,2,3,4,5,6} = 2 \pm i, \lambda_{7,8,9,10} = \pm 2i$

$geom(2+i) = geom(2-i) = 2$

$geom(+2i) = geom(-2i) = 2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Жордановы клетки. Все и сразу

$$
\begin{bmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&4&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&4&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&5&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&5&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&5&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&6&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&7&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&9&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&9&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&9&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&9
\end{bmatrix}
$$

$\lambda_1 = 1, alg(1) = 1, geom(1) = 1$

$\lambda_2 = 2, alg(2) = 1, geom(1) = 1$

$\lambda_3 = 3, alg(3) = 1, geom(3) = 1$

$\lambda_{4,5} = 4, alg(4) = 2, geom(4) = 1$

$\lambda_{6,7,8} = 5, alg(5) = 3, geom(5) = 2$

$\lambda_9 = 6, alg(6) = 1, geom(6) = 1$

$\lambda_{10} = 7, alg(7) = 1, geom(7) = 1$

$\lambda_{11} = 8, alg(8) = 1, geom(8) = 1$

$\lambda_{12,13,14,15} = 9, alg(9) = 4, geom(9) = 3$

$$
\begin{bmatrix}
5&4&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-4&5&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&5&4&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-4&5&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&6&2&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-2&6&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&5&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&5&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&5&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&5&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{bmatrix}
$$

$\lambda_{1,2,3,4} = 5 \pm 4i, alg(5 \pm 4i) = 2, geom(5 \pm 4i) = 1$

$\lambda_5 = 1, alg(1) = 1, geom(1) = 1$

$\lambda_{6,7} = 6 \pm 2i, alg(6 \pm 2i) = 1, geom(6 \pm 2i) = 1$

$\lambda_{8,9,10,11} = 5, alg(5) = 4, geom(5) = 2$

$\lambda_{12,13,14,15} = 1, alg(1) = 4, geom(1) = 1$

Нильпотентная матрица

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = PJP^{-1} = P(D+N)P^{-1}$$

Матрица N как раз и является нильпотентной.

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Какие у неё собственные числа?

$$\lambda_{1,2,3} = 0$$

А собственные вектора?

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Av = \lambda v$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{->} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I)^1 \omega_1 = v_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{->} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I)^1 \omega_2 = \omega_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{->} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Вопрос с 1 практики

В каком случае ряд Тейлора от матрицы будет иметь конечное число ненулевых слагаемых?

$A = PJP^{-1}$

$A^2 = PJP^{-1}PJP^{-1} = PJ^2P^{-1}$

$J = D + N \quad J^2 = (D+N)^2 = D^2 + 2DN + N^2 \quad J^3 = (D+N)^3 = D^3 + 3D^2N + 3DN^2 + N^3$

$$e^A = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots = I + \frac{PJP^{-1}}{1!} + \frac{PJ^2P^{-1}}{2!} + \frac{PJ^3P^{-1}}{3!} + \cdots = I + \frac{P(D+N)P^{-1}}{1!} + \frac{P(D+N)^2P^{-1}}{2!} + \frac{P(D+N)^3P^{-1}}{3!} +$$

Чтобы ряд Тейлора имел конечное число ненулевых слагаемых, нам нужно, чтобы матрицы D^k и N^k были нулевыми.

D^k – тогда и только тогда, когда все её собственные числа равны 0

N^k – станет нулевой при $k = n$, где n –размерность матрицы N

Жорданово разложение

Для чего может использоваться Жорданово разложение?

1. Вычисление матричных степеней A^n

2. Вычисление матричных функций $y = f(A)$, в том числе матричной экспоненты e^A

3. Вычисление обратной матрицы A^{-1}

Вычисление матричных степеней

По какой формуле можем возвести матрицу в степень A^n, используя Жорданово разложение?

$$\boxed{A^n = PD^nP^{-1}}$$

*для спектрального случая

$$\begin{bmatrix} - & - & - \\ - & A & - \\ - & - & - \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & P & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & P & - \\ - & - & - \end{bmatrix}^{-1} = P \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{bmatrix} P^{-1}$$

1. Возвести матрицу $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ в третью степень.

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 5$

$$A^3 = PD^3P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^3 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 5^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 125 \end{bmatrix}$$

Вычисление матричных степеней

По какой формуле можем возвести матрицу в степень A^n, используя Жорданово разложение?

$$\boxed{A^n = PD^nP^{-1}}$$

*для спектрального случая

$$\begin{bmatrix} - & - & - \\ - & A & - \\ - & - & - \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & P & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & P & - \\ - & - & - \end{bmatrix}^{-1} = P \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{bmatrix} P^{-1}$$

2. Возвести матрицу $A = \begin{bmatrix} 15 & 1 \\ -1 & 17 \end{bmatrix}$ в квадрат и в куб. $A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 1 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$A^2 = PD^2P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 256 & 32 \\ 0 & 256 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 224 & 32 \\ -32 & 288 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = PD^3P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4096 & 768 \\ 0 & 4096 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3328 & 768 \\ -768 & 4864 \end{bmatrix}$$

Вычисление матричных степеней

По какой формуле можем возвести матрицу в степень A^n, используя Жорданово разложение?

$$\boxed{A^n = PD^nP^{-1}}$$

3. Возвести матрицу $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ в квадрат и в куб.

$$B = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = PD^2P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B^3 = PD^3P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -8 & 12 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ -12 & -8 \end{bmatrix}$$

Матричная экспонента своими руками!

По какой формуле можем вычислить матричную экспоненту e^A?

$$e^A = e^{PDP^{-1}} = Pe^DP^{-1}$$

Пример.

1. Найти матричную экспоненту e^A, если $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$e^A = e^{PDP^{-1}} = Pe^DP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^2 & 0 & e^4 - e^2 \\ e^2 - e^{-2} & e^{-2} & -e^2 + e^{-2} \\ 0 & 0 & e^4 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & e^{4t} - e^{2t} \\ e^{2t} - e^{-2t} & e^{-2t} & -e^{2t} + e^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{bmatrix}$$

Матричная экспонента своими руками!

По какой формуле можем вычислить матричную экспоненту e^{A}?

$$\boxed{e^{A} = e^{PDP^{-1}} = Pe^{D}P^{-1}}$$

Пример. $A = \begin{bmatrix} 15 & 1 \\ -1 & 17 \end{bmatrix}$ $\quad A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 16 & 1 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$e^{A} = e^{PDP^{-1}} = Pe^{D}P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{16} & e^{16} \\ 0 & e^{16} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & e^{16} \\ -e^{16} & 2e^{16} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{16t} & te^{16t} \\ 0 & e^{16t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{16t} & -te^{16t} + e^{16t} \\ -e^{16t} & -te^{16t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -te^{16t} + e^{16t} & te^{16t} \\ -te^{16t} & te^{16t} + e^{16t} \end{bmatrix}$$

$$s_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad e^{s_1 t} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$s_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad e^{s_2 t} = \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} & \frac{t^2}{2}e^{3t} \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

Матричная экспонента своими руками!

По какой формуле можем вычислить матричную экспоненту e^{A}?

$$\boxed{e^{A} = e^{PDP^{-1}} = Pe^{D}P^{-1}}$$

Пример. $A = \begin{bmatrix} 15 & 1 \\ -1 & 17 \end{bmatrix}$ $\quad A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 16 & 1 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$e^{A} = e^{PDP^{-1}} = Pe^{D}P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{16} & e^{16} \\ 0 & e^{16} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & e^{16} \\ -e^{16} & 2e^{16} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{16t} & te^{16t} \\ 0 & e^{16t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{16t} & -te^{16t} + e^{16t} \\ -e^{16t} & -te^{16t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -te^{16t} + e^{16t} & te^{16t} \\ -te^{16t} & te^{16t} + e^{16t} \end{bmatrix}$$

$$s_3 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} \qquad e^{s_3 t} = \begin{bmatrix} e^{5t}cos3t & e^{5t}sin3t & 0 & 0 \\ -e^{5t}sin3t & e^{5t}cos3t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{5t}cos3t & e^{5t}sin3t \\ 0 & 0 & -e^{5t}sin3t & e^{5t}cos3t \end{bmatrix}$$

$$s_4 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} \qquad e^{s_4 t} = \begin{bmatrix} e^{5t}cos3t & e^{5t}sin3t & te^{5t}cos3t & te^{5t}sin3t \\ -e^{5t}sin3t & e^{5t}cos3t & -te^{5t}sin3t & te^{5t}cos3t \\ 0 & 0 & e^{5t}cos3t & e^{5t}sin3t \\ 0 & 0 & -e^{5t}sin3t & e^{5t}cos3t \end{bmatrix}$$

Матричная экспонента своими руками!

По какой формуле можем вычислить матричную экспоненту e^{A}?

$$\boxed{e^{A} = e^{PDP^{-1}} = Pe^{D}P^{-1}}$$

1. Найти матричную экспоненту e^{A}, если $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{\lambda} & e^{\lambda} \\ 0 & e^{\lambda} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-2} & e^{-2} \\ 0 & e^{-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2} & 0 \\ -e^{-2} & e^{-2} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ -te^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Матричные функции

По какой формуле можем вычислить матричную функцию $f(A)$? $\boxed{f(A) = Pf(D)P^{-1}}$

$$f\left(\begin{bmatrix} - & - & - \\ - & A & - \\ - & - & - \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & P & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & f(\lambda_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & P & - \\ - & - & - \end{bmatrix}^{-1}$$

Примеры.

1. Вычислить tgC, если $C = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$. $\quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$

$$tgC = PtgDP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} tg(5) & 0 \\ 0 & tg(3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} tg(5) & 0 \\ tg(3) - tg(5) & tg(3) \end{bmatrix}$$

2. Вычислить $sinA$, если $A = \begin{bmatrix} 15 & 1 \\ -1 & 17 \end{bmatrix}$. $\quad A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 1 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$sinA = PsinDP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sin(16) & cos(16) \\ 0 & sin(16) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -cos(16) + sin(16) & \cos(16) \\ -cos(16) & \cos(16) + \sin(16) \end{bmatrix}$$

Ортогональные матрицы

Какие матрицы называются ортогональными? Матрица A ортогональна, если $A^{-1} = A^T$

Свойства:

1) $A^T A = AA^T = I$
2) столбцы и строки – вектора длины 1 и взаимно перпендикулярны
3) собственные числа комплексные или ± 1
4) собственные вектора взаимно перпендикулярны
5) $det = \pm 1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3-4i}{5} & 0 \\ 0 & \frac{3+4i}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Симметричные матрицы

Какие матрицы называются симметричными? Матрица A симметрична, если $A^T = A$

Свойства:

1) вещественные λ
2) вещественные и взаимно перпендикулярные собственные вектора
3) имеют спектральное разложение $A = PDP^T$

Докажем 3 свойство.

$$A = PDP^T = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}^T$$

Поделим все вектора на их длину : $\overline{v_i} = \frac{v_i}{|v_i|}$

$\begin{bmatrix} | & | & | \\ \overline{v_1} & \overline{v_2} & \overline{v_3} \\ | & | & | \end{bmatrix}$ – ортогональна, а значит $P^T = P^{-1}$ и $A = PDP^{-1} = PDP^T$

Симметричные матрицы

Найти Жорданово разложение матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

Собственные значения $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 10$

Собственные векторы $v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Формула разложения $A = PJP^{-1}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -0.5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & -0.5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Некоторые команды MatLab

```
A = [5 2-1;
     0 6  0;
     0 2  4]                   % задание матрицы A

det(A)                         % вычисляем определитель

inv(A)                         % вычисляем обратную матрицу

[V, D] = eigs(A)               % вычисляем собственные числа и собственные вектора

[V, J] = jordan(A)             % вычисляем Жорданово разложение

[Vnew,Dnew] = cdf2rdf(V,D)     % овеществляем Жорданово разложение

expm(A)                        % матричная экспонента e^A
```

Спасибо за работу!

Домашняя работа

1. Найдите спектральное разложение матрицы $A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
2. Найдите Жорданово разложение матрицы $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
3. Вычислите матричную экспоненту e^{Bt}, e^{Ct}, где B – матрица из предыдущего задания, а $C = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$
4. Придумайте матрицу, подобную $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, но не равную ей. Покажите, что матрицы действительно подобны.
5. Вычислите матричную функцию $sinD$, где $D = \begin{bmatrix} \pi - 1 & 1 \\ -1 & \pi + 1 \end{bmatrix}$
6. Найдите Жорданово разложение матрицы $\begin{bmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ 0 & n & n-1 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & n & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix}$