Министерство образования и науки Российской Федерации Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Факультет Системы управления и робототехники

Отчет по лабораторной работе №2 «2D-преобразования»

Преподаватель:

Перегудин А. А.,

Ассистент фак. СУиР

Выполнила:

студентка гр. R3235

Нгуен Кхань Нгок

Санкт-Петербург 2023

ТЕОРИЯ

I. *Преобразавания в двумерном пространстве*

Двумерное преобразование преобразует точку M на плоскости в точку с новыми координатами Q по определенному правилу. По сути, точечное преобразование — это карта T, определенная:

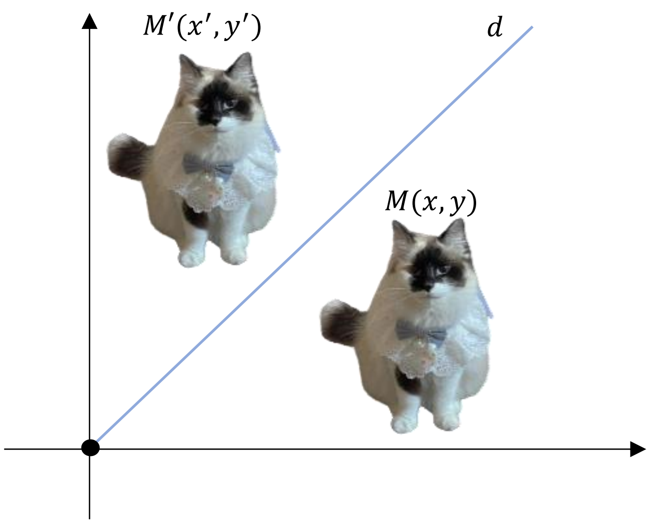
$$T: R^2 \to R^2$$
$$M(x, y) \to Q(x', y')$$

Другими словами, T является функцией двух переменных x и y.

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

1. Симметрия в двумерном пространстве

Рассмотрим случай симметрии посредством прямой d, проходящей через начало координат и образующей угол θ с Ox, как на графике. Обозначим преобразование как R_{ed}



Мы можем выполнить описанную выше симметрию, применив последовательные преобразования в следующем порядке:

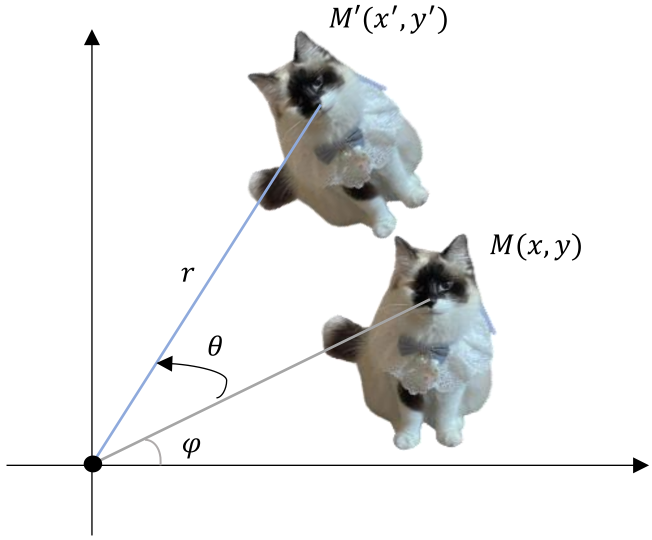
Шаг 1: Примените вращение R(-θ), чтобы привести линию d в положение оси ox.

Шаг 2: Примените симметрию S_{ox} через ось ox.

Шаг 3: Примените вращение R(θ), чтобы вернуть линию d в исходное положение.

$$M' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R_{ed}.M = R(\theta).S_{ox}.R(-\theta).M = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \cos 2\theta \\ sin2\theta & -\sin 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2. **Ротации (Поворот с углом θ) в двумерном пространстве**
Вращение меняет ориентацию объекта. Для вращения необходим центр вращения и угол вращения. Положительные углы поворота часто условно называют против часовой стрелки и наоборот.



У нас уравнения преобразования:

$$\begin{cases} x' = rcos(\varphi + \theta) \\ y' = rsin(\varphi + \theta) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x' = r \cos \varphi \cos \theta - r \sin \varphi \sin \theta \\ y' = r \sin \varphi \cos \theta + rcos\varphi \sin \theta \end{cases}$$

Из графика видно, что $\begin{cases} x = r\ cos\varphi \\ y = r\ sin\varphi \end{cases}$.

Подставив в два приведенных выше уравнения, получим:

$$\begin{cases} x' = x\ cos\theta - y\ sin\theta \\ y' = x\ sin\theta + y\ cos\theta \end{cases}$$

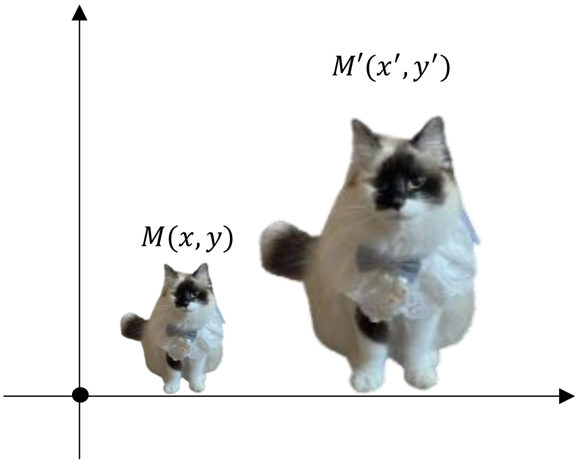
Поэтому ротации описывается уравнением:

$M' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R.M = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ при вращении против часовой стрелки

$M' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R.M = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ при вращении по часовой стрелки

3. Пропорциональность

Преобразование масштаба изменяет размер объекта. Чтобы сжать или расширить координаты точки M(x,y) вдоль горизонтальной и вертикальной осей, соответственно Sx и Sy (так называемые коэффициенты масштабирования), мы умножаем Sx и Sy, чтобы получить координаты M соответственно.



У нас уравнения преобразования: $\begin{cases} x' = s_x . x \\ y' = s_y . y \end{cases}$

где s_x, s_y — коэффициенты масштабирования по осям x и y

Уравнение пропорционального преобразования можно описать следующим образом:

$$M' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = S.M = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Когда $(s_x, s_y) \neq (1, 1)$ пропорциональное преобразование изменит форму объекта.

Особый случай: когда $s_x = 1$ и $s_y = -1$, масштабирование становится симметричным относительно оси Ox.

Аналогично, если $s_x = -1$ и $s_y = 1$, масштабирование становится симметричным относительно оси Oy.

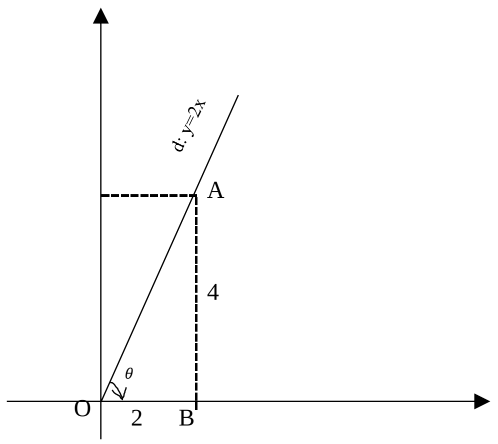
В этой лабораторной мы будем воспринимать любую матрицу 2×2 как линейное отображение, преобразующее точки плоскости по закону

$$\begin{bmatrix} x_{new} \\ y_{new} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{old} \\ y_{old} \end{bmatrix}$$

$$a = 2\,, b = -4, c = 3, d = 9$$

Задание 1. Придумайте матрицы 2 × 2, которые задают:

1. Отражение (симметрию) плоскости относительно прямой y = 2x.



$$cos\theta = \frac{OB}{OA} = \frac{2}{\sqrt{2^2+4^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \rightarrow cos\,2\theta = -\frac{3}{5}$$

$$sin\theta = \frac{AB}{OA} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \rightarrow sin2\theta = \frac{4}{5}$$

ШАГ 1. *Примените вращение R(-θ) линии d к положению оси ox.*

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & \sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{bmatrix}$$

ШАГ 2. *Примените симметрию Sox относительно оси Ox*

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\theta & \sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{bmatrix}$$

ШАГ 3. *Примените вращение R(θ), чтобы вернуть линию d в исходное положение.*

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -\sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\theta & \sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & \sin\theta \\ sin\theta & -cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\theta & \sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta cos\theta \\ 2sin\theta cos\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \text{Матрица отображения:} A = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

2. Отображение всей плоскости в прямую y = -4x.

$$\begin{cases} x' = s_x \cdot x \\ y' = s_y \cdot y \end{cases}$$

$$M' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ -4x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \text{ Матрица отображения } A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -16 \end{bmatrix}$$

3. Поворот плоскости на 10с градусов против часовой стрелки.

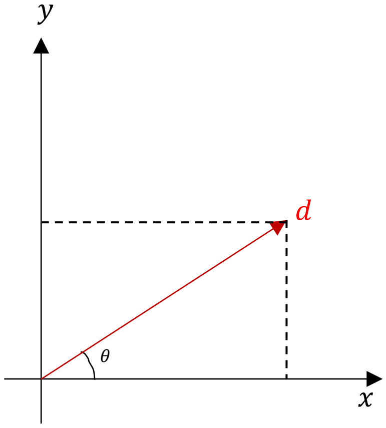
В двумерном пространстве мы рассматриваем вращение объекта вокруг центра вращения с углом поворота θ (θ>0, если направление вращения против часовой стрелки, и θ < 0, если направление вращения по часовой стрелке).

$$\theta = 10c = 10 * 3 = 30°$$

Поскольку вращение происходит против часовой стрелки, угол $\theta > 0$.

$$M' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R.M = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \text{ Матрица отображения } A = \begin{bmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$



4. Центральную симметрию плоскости относительно начала координат.

$$\rightarrow \text{ Матрица отображения } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

5. Отображение, которое можно описать так: сначала отражение относительно прямой y = 2x, потом поворот на 90 градусов по часовой стрелке

- Из 1 — го пункта у нас матрица отображения A $= \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$
- Отображение поворот на 90˚ по часовой стрелк → $\theta = -90°$

$$\rightarrow \text{ Матрица отображения B} = \begin{bmatrix} cos(90^\circ) & sin(90^\circ) \\ -sin(90^\circ) & cos(90^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Матрица отображения включает в себя два вышеупомянутых отображения

$$\rightarrow \text{ Матрица отображения: } M = B.A == \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

6.

7. Отображение, которое переводит прямую y = 0 в y = 2x и прямую x = 0 в y = -4x.

- $\mathbf{y = 0 \to y = 2x}$

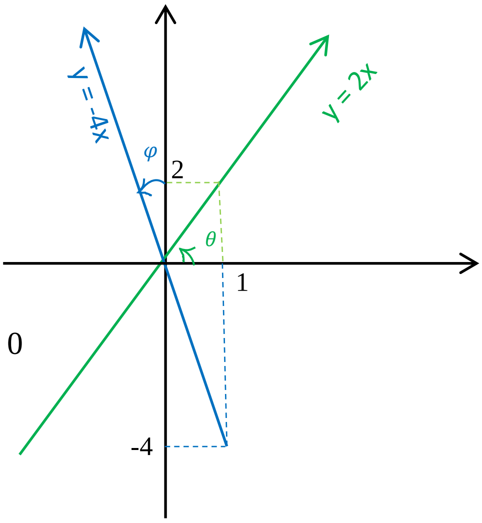
  $\to cos\,\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

  $\to sin\,\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

- $\mathbf{x = 0 \to y = -4x}$

  $\to \cos\varphi = -\dfrac{4}{\sqrt{17}}$

  $\to \sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$



- $\mathbf{y = 0 \to y = 2x}$

Поскольку вращение происходит против часовой стрелки, угол $\theta > 0$

$$M' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\ \theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\to \text{Матрица отображении } M_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

- $\boldsymbol{y = 0 \to y = -4x}$

Поскольку вращение происходит против часовой стрелки, угол $\theta > 0$

$$M_2 = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{4}{\sqrt{17}} & -\dfrac{1}{\sqrt{17}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{17}} & -\dfrac{4}{\sqrt{17}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

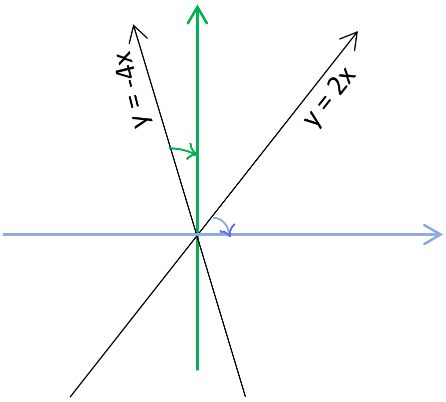
$$\to \text{Матрица отображении } M_2 = \begin{bmatrix} -\dfrac{4}{\sqrt{17}} & -\dfrac{1}{\sqrt{17}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{17}} & -\dfrac{4}{\sqrt{17}} \end{bmatrix}$$

$$\to MO\ \text{A} = M_2 M_1 = \begin{bmatrix} -\dfrac{4}{\sqrt{17}} & -\dfrac{1}{\sqrt{17}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{17}} & -\dfrac{4}{\sqrt{17}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-9\sqrt{85}}{85} & \dfrac{2\sqrt{85}}{85} \\ \dfrac{-2\sqrt{85}}{85} & \dfrac{-9\sqrt{85}}{85} \end{bmatrix}$$

8. Отображение, которое переводит прямую y = 2x в y = 0 и прямую y = -4x в x = 0.

- $\boldsymbol{y = 2x \to y = 0}$

Поскольку вращение происходит по часовой стрелки, угол $\theta < 0$



$$M' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$\to$ Матрица отображении $M_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

- $\boldsymbol{y = -4x \to x = 0}$

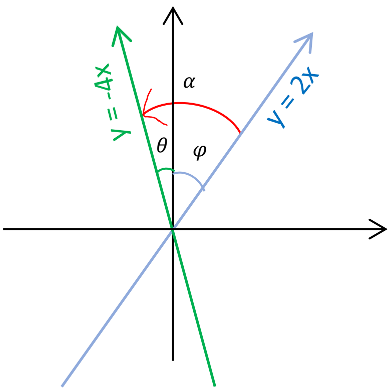
Поскольку вращение происходит по часовой стрелки, угол θ <0

$$M' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{\sqrt{17}} & \frac{1}{\sqrt{17}} \\ -\frac{1}{\sqrt{17}} & -\frac{4}{\sqrt{17}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$\to$ Матрица отображении $M_2 = \begin{bmatrix} -\frac{4}{\sqrt{17}} & \frac{1}{\sqrt{17}} \\ -\frac{1}{\sqrt{17}} & -\frac{4}{\sqrt{17}} \end{bmatrix}$

$$\to \text{MO A} = M_2 M_1 = \begin{bmatrix} -\frac{4}{\sqrt{17}} & \frac{1}{\sqrt{17}} \\ -\frac{1}{\sqrt{17}} & -\frac{4}{\sqrt{17}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-7\sqrt{85}}{85} & \frac{6\sqrt{85}}{85} \\ \frac{-6\sqrt{85}}{85} & \frac{-7\sqrt{85}}{85} \end{bmatrix}$$

9. Отображение, которое меняет местами прямые y = 2x и y = -4x.



- **y = -4x**

$\to \cos\theta = \frac{4}{\sqrt{17}} \to \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

- $\boldsymbol{y = 2x}$

$\to \cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}} \to \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\to \cos(\varphi + \theta) = \cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta = \frac{8}{\sqrt{85}} - \frac{1}{\sqrt{85}} = \frac{7}{\sqrt{85}}$$

$$\to \sin(\varphi + \theta) = \sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta = \frac{4}{\sqrt{85}} + \frac{2}{\sqrt{85}} = \frac{6}{\sqrt{85}}$$

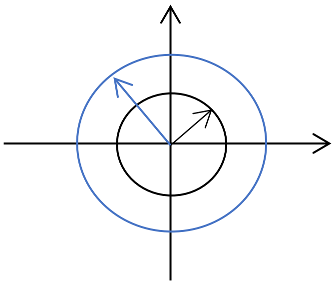
$\to$ Матрица отображения A $= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{\sqrt{85}} & -\frac{6}{\sqrt{85}} \\ \frac{6}{\sqrt{85}} & \frac{7}{\sqrt{85}} \end{bmatrix}$

10. Отображение, которое переводит круг единичной площади с центром в начале координат в круг площади 3.

- Круг единичной: $r = 1$
- Круг площади 9: $R = 3$

  $\rightarrow R = r\sqrt{3}$

$\rightarrow$ Матрица отображения: $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

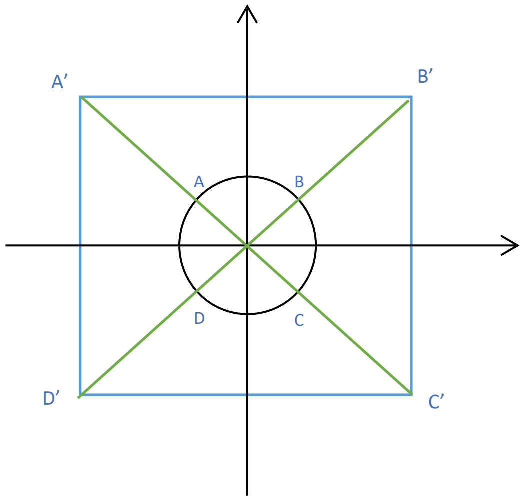


11. Отображение, которое переводит круг единичной площади с центром в начале координат в некруг площади 9.

- Круг единичной: $r = 1$
- Квадрать площади 9, a = 3

- Выбираем 4 точки показаны на рисунке

Круг	Квадрат	прпорция
$A(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})$	$A'\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$	$OA' = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot OA$
$B(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})$	$B'\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$	$OB' = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot OB$
$C(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, -\frac{1}{\sqrt{2\pi}})$	$C'\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$	$OC' = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot OC$
$D(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, -\frac{1}{\sqrt{2\pi}})$	$D'(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$	$OD' = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot OD$



Отсюда → принемаем отображение пропорции

$\begin{cases} x' = s_x . x \\ y' = s_y . y \end{cases}$

у нас $s_x = s_y = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$\rightarrow$ Матрица отображении $A = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{bmatrix}$

12. Отображение, у которого собственные вектора перпендикулярны, и ни один из них не лежит на прямой y = 0 или y = x.

Матрица отображения: $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$\rightarrow$ Собственные вектора матрицы A: $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

13. Отображение, у которого нет двух неколлинеарных собственных векторов.

Матрица отображения: $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\rightarrow$ Собственные вектора матрицы A: $\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

14. Отображение, у которого нет ни одного вещественного собственного вектора (но при этом само отображение задаётся вещественной матрицей).

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \det(A - \lambda E) = 0$$

$$\leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 - \lambda & x_2 \\ x_3 & x_4 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow \lambda^2 - (x_1 + x_4)\lambda - (x_2x_3 - x_1x_4) = \lambda^2 - x_1\lambda + x_4\lambda - x_2x_3 + x_1x_4 = 0$$

- Чтобы матрица не имела вещественных собственных векторов, тогда уравнение имело комплексуне корни

$$\rightarrow \Delta < 0$$

$$\leftrightarrow (x_1 + x_4)^2 - 4(x_1x_4 - x_2x_3)$$

$$\leftrightarrow x_1^2 + 2x_1x_4 + x_4^2 - 4x_1x_4 + 4x_2x_3 < 0$$

$$\leftrightarrow (x_1 - x_4)^2 + 4x_2x_3 < 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = -3 \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{Матрица отображения } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

15. Отображение, для которого любой ненулевой вектор является собственным.

$$\rightarrow \text{Матрица отображения } A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

16. Пару отображений, последовательное применение которых даёт различные результаты в зависимости от порядка: $AB \neq BA$

- <u>Первое отображение</u>: Отображение (симетрию) плоскости относительно прямой $\boldsymbol{y = 2x}$

$$\rightarrow \text{Матрица отображения } A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

- <u>Второе отображение</u>: Отображение вращения с углом θ против часовой стрелки

$\rightarrow cos\theta = \frac{3}{5}, sin\theta = \frac{4}{5}$

$$\rightarrow \text{Матрица отображения B} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Проверка:

$$\text{AB} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{25} & \frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & -\frac{7}{25} \end{bmatrix}$$

$$\text{BA} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \textbf{AB} \neq \textbf{BA}$$

$$\rightarrow \text{Матрица пары отображений } M = \text{BA} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

17. Пару отображений, последовательное применение которых даёт одинаковый результат независимо от порядка: AB = BA. Постарайтесь, чтобы матрицы A и B были максимально непохожими друг на друга.

- Первое отображение: Отображение поворот на 90° по часовой стрелк

$$\rightarrow \text{ Матрица отображения A} = \begin{bmatrix} cos(-90^{\circ}) & -sin(-90^{\circ}) \\ sin(-90^{\circ}) & cos(-90^{\circ}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Второе отображение: Отображение (симетрию) плоскости относительно прямой $\boldsymbol{y = 2x}$

$$\rightarrow \text{ Матрица отображения } B = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Проверка:

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \mathbf{AB = BA}$$

$$\rightarrow \text{ Матрица пары отображений } M = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Задание 2. Проанализируйте.

1. Найдите образ и ядро придуманных вами отображений из пунктов 1, 2, 13, 14.

- Пункт 1

$$\text{Матрица отображения: } A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \text{ Образ A: } \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} \right\}$$

$$\rightarrow \text{ Ядро A: } \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

- Пункт 2

$$\text{Матрица отображения } A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \text{ Образ A: } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\rightarrow \text{ Ядро A: } \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

- Пукнт 13

Матрица отображения $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

→ Образ A: $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right\}$

→ Ядро A: $\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

- Пукнт 14

Матрица отображения $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

→ Образ A: $\left\{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}$

→ Ядро A: $\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

2. Найдите собственные числа и собственные вектора придуманных вами отображений из пунктов 1, 2, 3, 4, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

- Пукнт 1

Матрица отображения: $A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

→ собственные числа: $\left[\begin{matrix} \lambda_1 = & 1 \\ \lambda_2 = & -1 \end{matrix}\right.$

→ собственные вектора: $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ \overline{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

- Пукнт 2

Матрица отображения $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -16 \end{bmatrix}$

→ собственные числа: $\left[\begin{matrix} \lambda_1 = & 0 \\ \lambda_2 = & -15 \end{matrix}\right.$

→ собственные вектора: $\left\{\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \overline{4} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

- Пукнт 3

Матрица отображения: $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

→ собственные числа: $\left[\begin{matrix} \lambda_1 = \dfrac{\sqrt{3} - i}{2} \\ \lambda_2 = \dfrac{\sqrt{3} + i}{2} \end{matrix}\right.$

→ собственные вектора: $\left\{\begin{bmatrix}-i\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}\right\}$

- Пукнт 4

Матрица отображения: $A = \begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$

→ собственные числа: $\lambda_{1,2} = -1$

→ собственные вектора: $\left\{\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}\right\}$

- Пукнт 8

Матрица отображения A $= \begin{bmatrix}\frac{7}{\sqrt{85}} & -\frac{6}{\sqrt{85}}\\ \frac{6}{\sqrt{85}} & \frac{7}{\sqrt{85}}\end{bmatrix}$

→ собственные числа: $\left[\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{(7-6i)\sqrt{85}}{85}\\ \lambda_2 &= \frac{(7+6i)\sqrt{85}}{85}\end{aligned}\right.$

→ собственные вектора: $\left\{\begin{bmatrix}-i\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}\right\}$

- Пукнт 11

Матрица отображения: $A = \begin{bmatrix}4 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}$

→ собственные числа: $\left[\begin{aligned}\lambda_1 &= 2\\ \lambda_2 &= 5\end{aligned}\right.$

→ собственные вектора: $\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right\}$

- Пукнт 12

Матрица отображения: $A = \begin{bmatrix}-1 & 2\\1 & 0\end{bmatrix}$

→ собственные числа: $\left[\begin{aligned}\lambda_1 &= -2\\ \lambda_2 &= 1\end{aligned}\right.$

→ собственные вектора: $\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$

- Пукнт 13

Матрица отображения $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & -3\end{bmatrix}$

→ собственные числа: $\left[\begin{aligned}\lambda_1 &= -\sqrt{6}-1\\ \lambda_2 &= \sqrt{6}-1\end{aligned}\right.$

→ собственные вектора: $\left\{\begin{bmatrix}\frac{-\sqrt{6}+2}{2}\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{6}+2}{2}\\1\end{bmatrix}\right\}$

- Пукнт 14

Матрица отображения $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$\rightarrow$ собственные числа: $\lambda_{1,2} = 4$

$\rightarrow$ собственные вектора: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

- Пукнт 15

Матрица пары отображений $M = \begin{bmatrix} \frac{7}{25} & \frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & -\frac{7}{25} \end{bmatrix}$

$\rightarrow$ собственные числа: $\begin{bmatrix} \lambda_1 = & 1 \\ \lambda_2 = & -1 \end{bmatrix}$

$\rightarrow$ собственные вектора: $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

- Пукнт 16

Матрица пары отображений $M = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$

$\rightarrow$ собственные числа: $\begin{bmatrix} \lambda_1 = & 1 \\ \lambda_2 = & -1 \end{bmatrix}$

$\rightarrow$ собственные вектора: $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

3. Найдите определитель матриц из пунктов 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10.

- Пукнт 1

Матрица отображения: $A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix} = -1$

- Пукнт 2

Матрица отображения $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -16 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -16 \end{vmatrix} = 0$

- Пукнт 3

Матрица отображения: $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = 1$

- Пукнт 4

Матрица отображения: $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$

- Пукнт 5

Матрица отображения: $M = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \rightarrow \det(M) = \begin{vmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{4}{5} \end{vmatrix} = -1$

- Пукнт 9

Матрица отображения: $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 3$

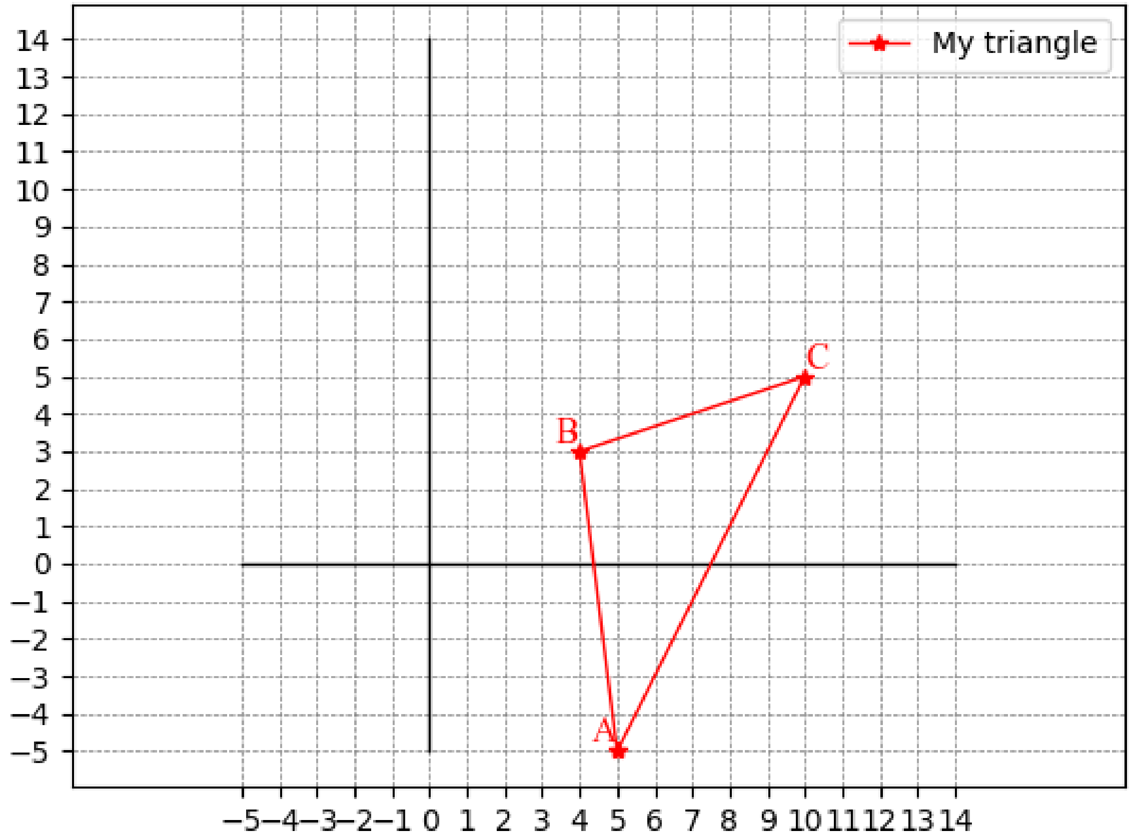
- Пукнт 10

Матрица отображения: $A = \begin{bmatrix} 3\sqrt{\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} 3\sqrt{\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{vmatrix} = \frac{9\pi}{2}$

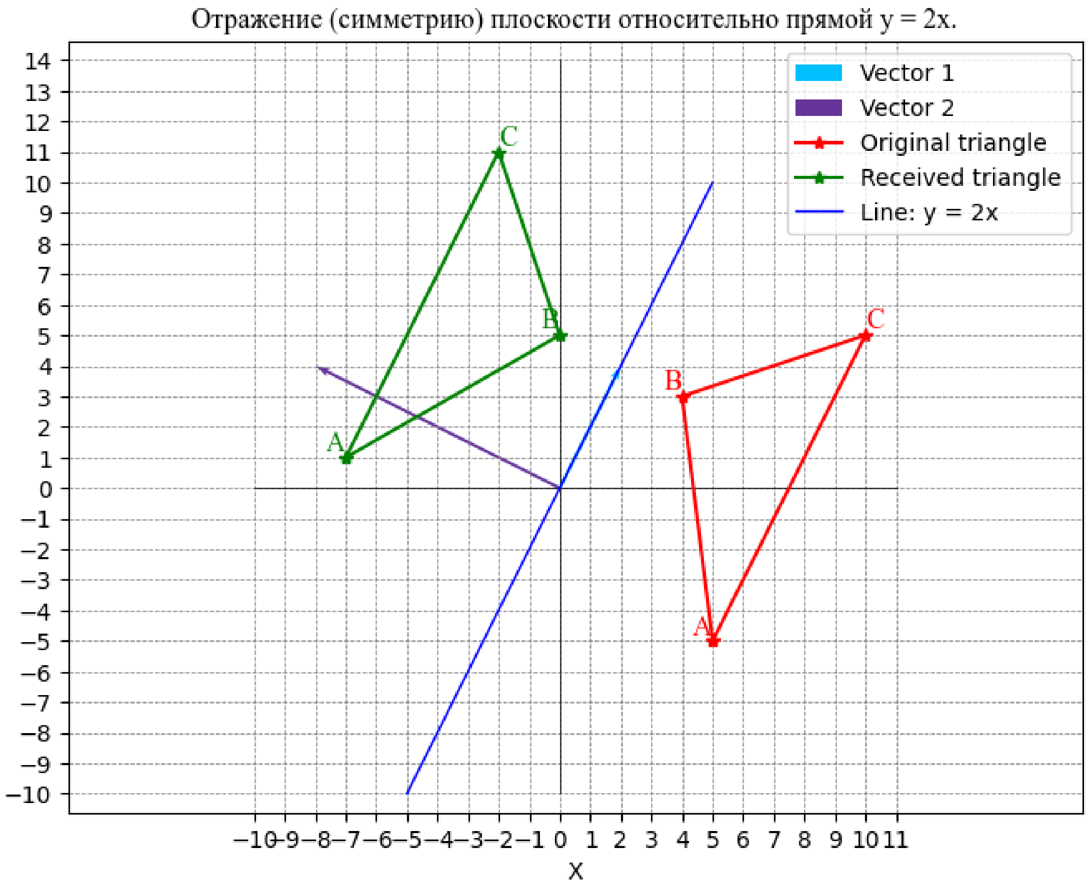
4. В каких пунктах матрица обязательно получается симметричной?

В пунктах 1, 4, 9, 10, 16 матрица обязательно получается симметричной

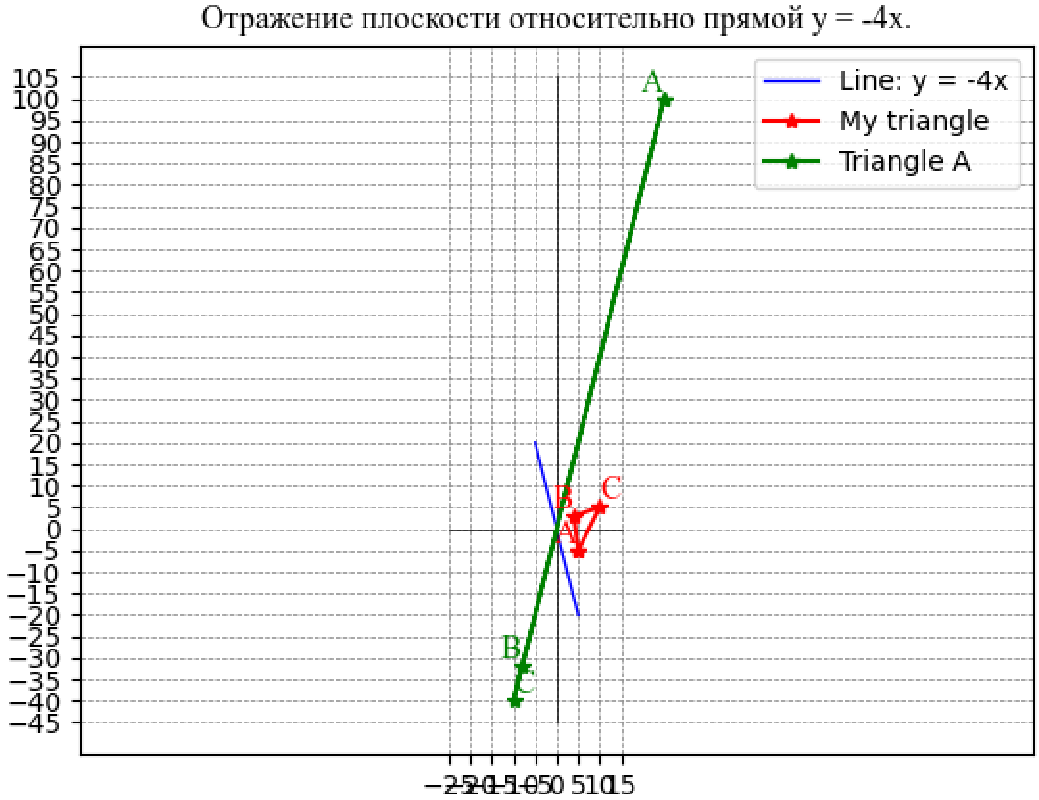
Задание 3. Визуализируйте.



Моя фигура

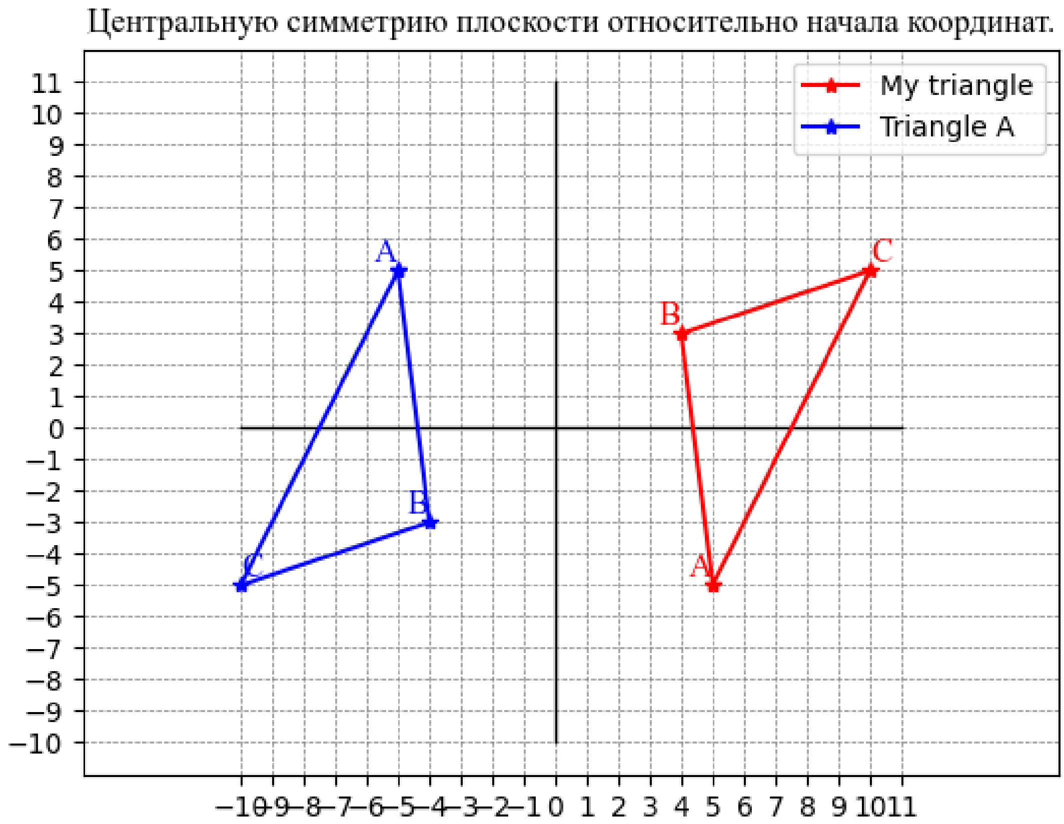


Пункт 1

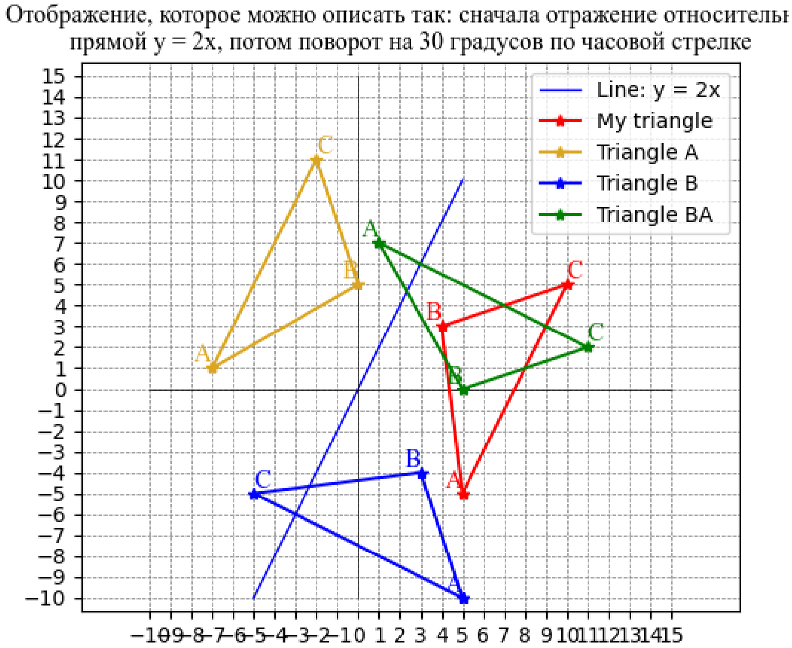


Пункт 2

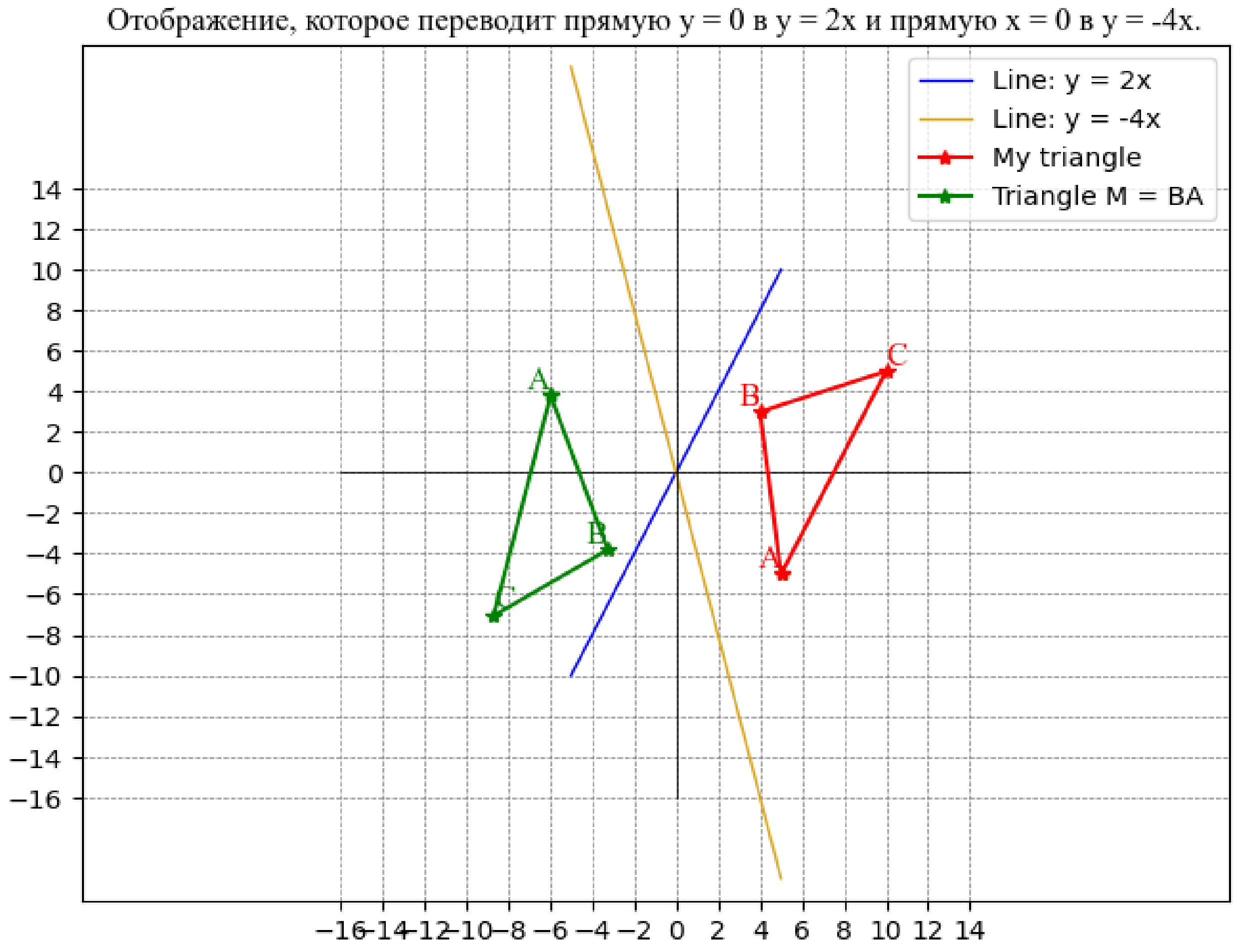
Пункт 3



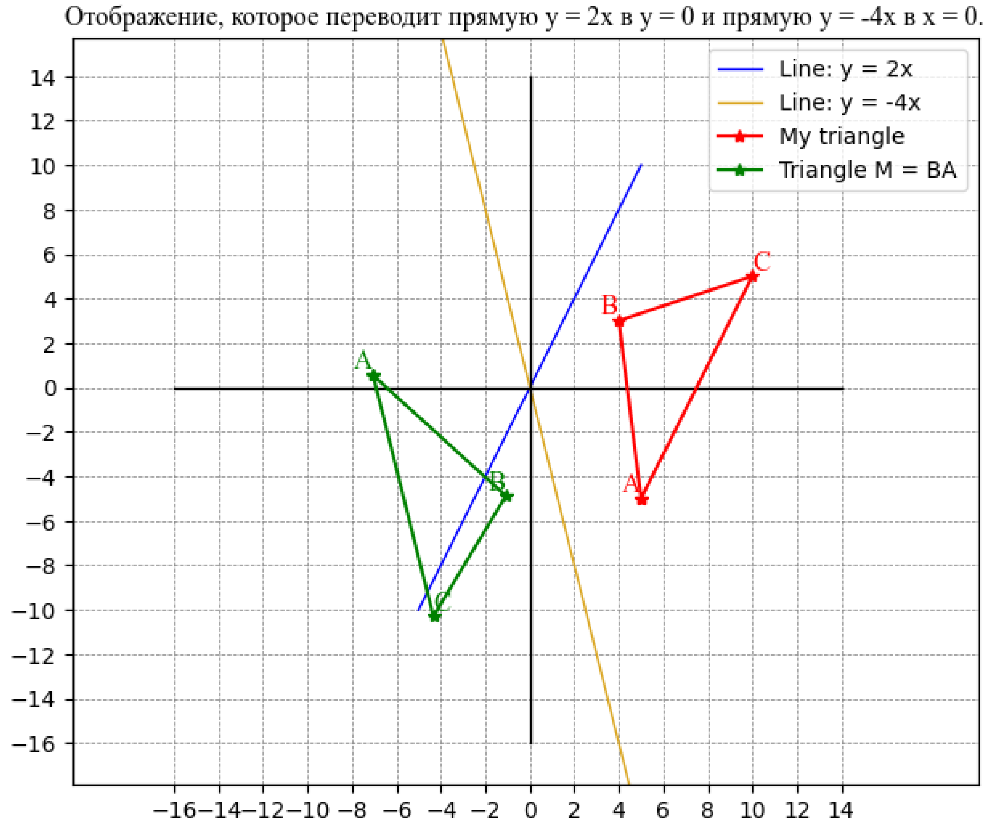
Пункт 4



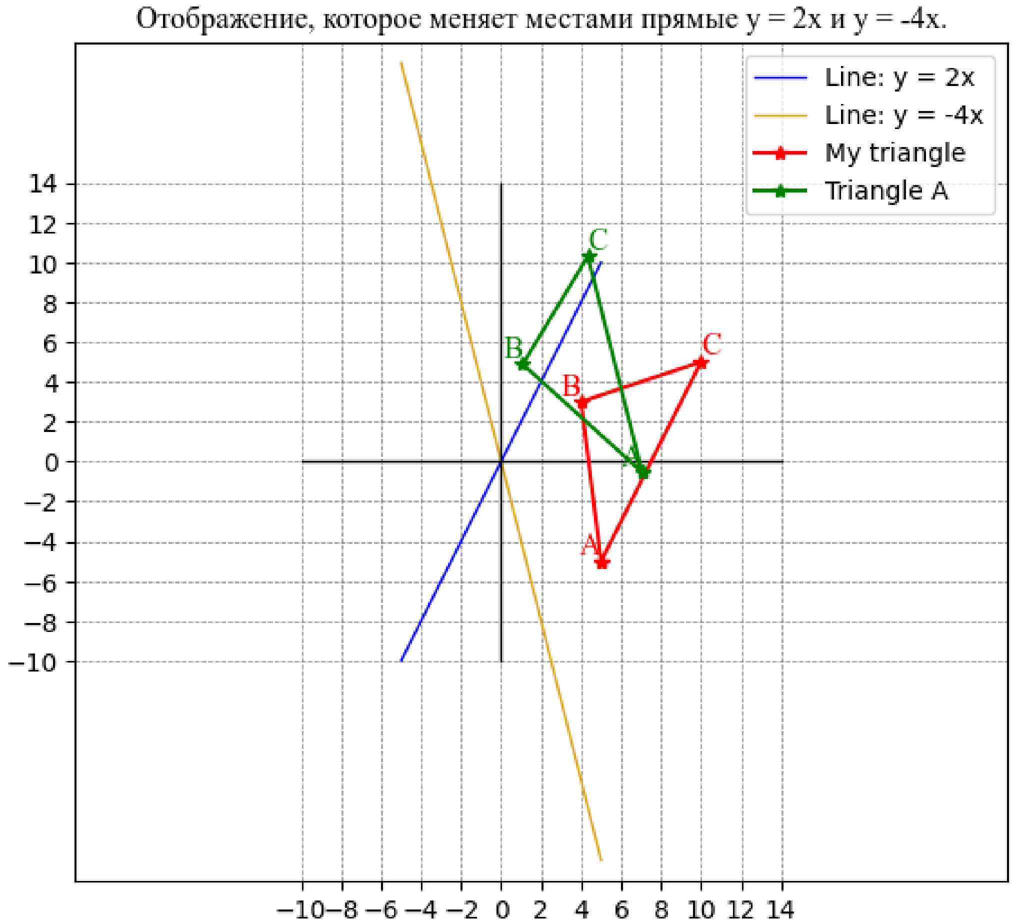
Пункт 5



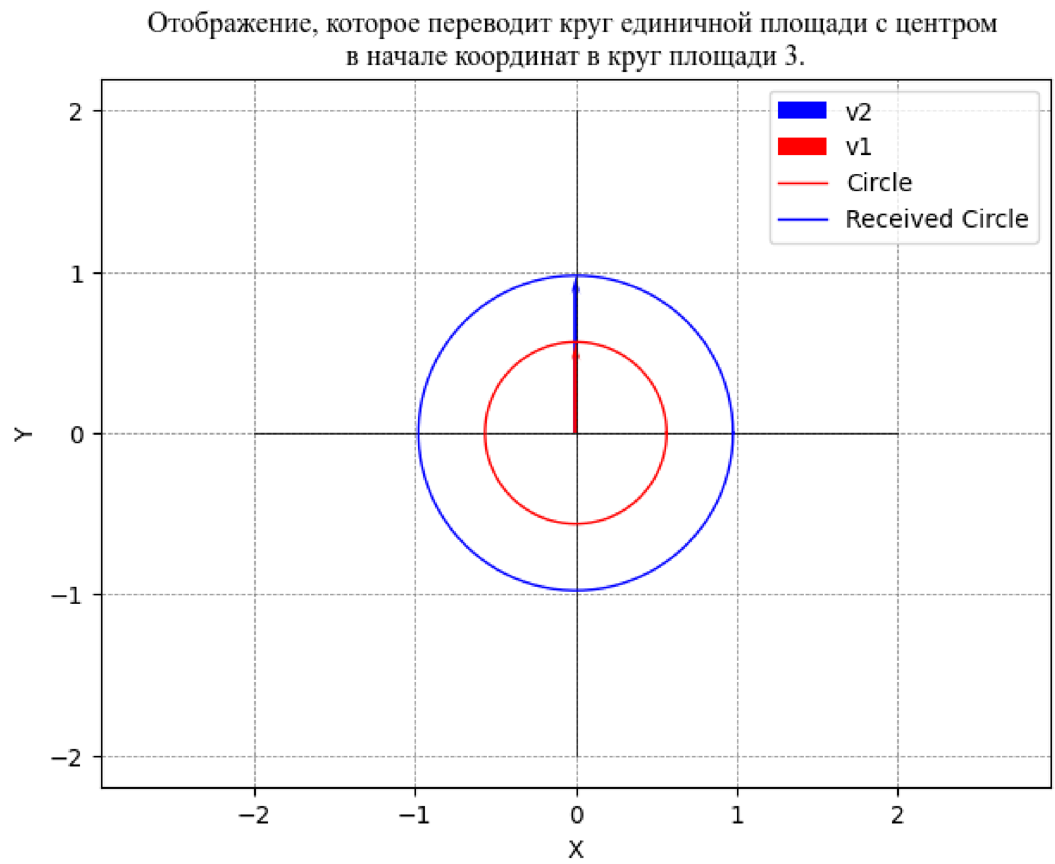
Пункт 6



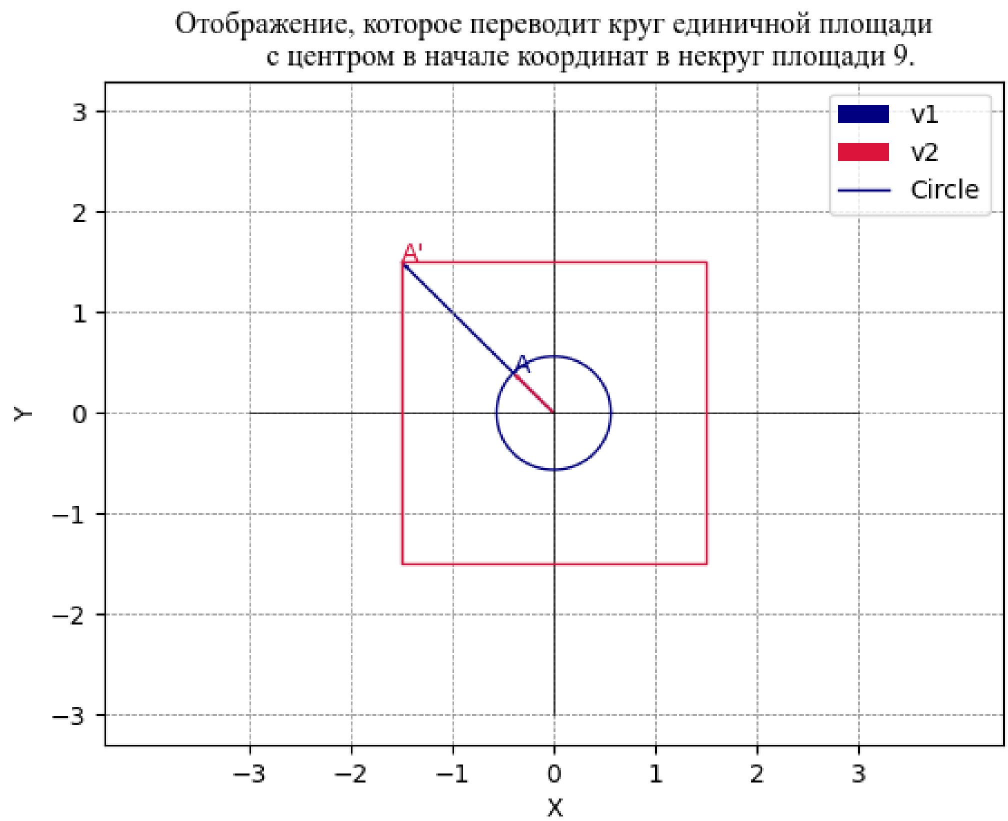
Пункт 7



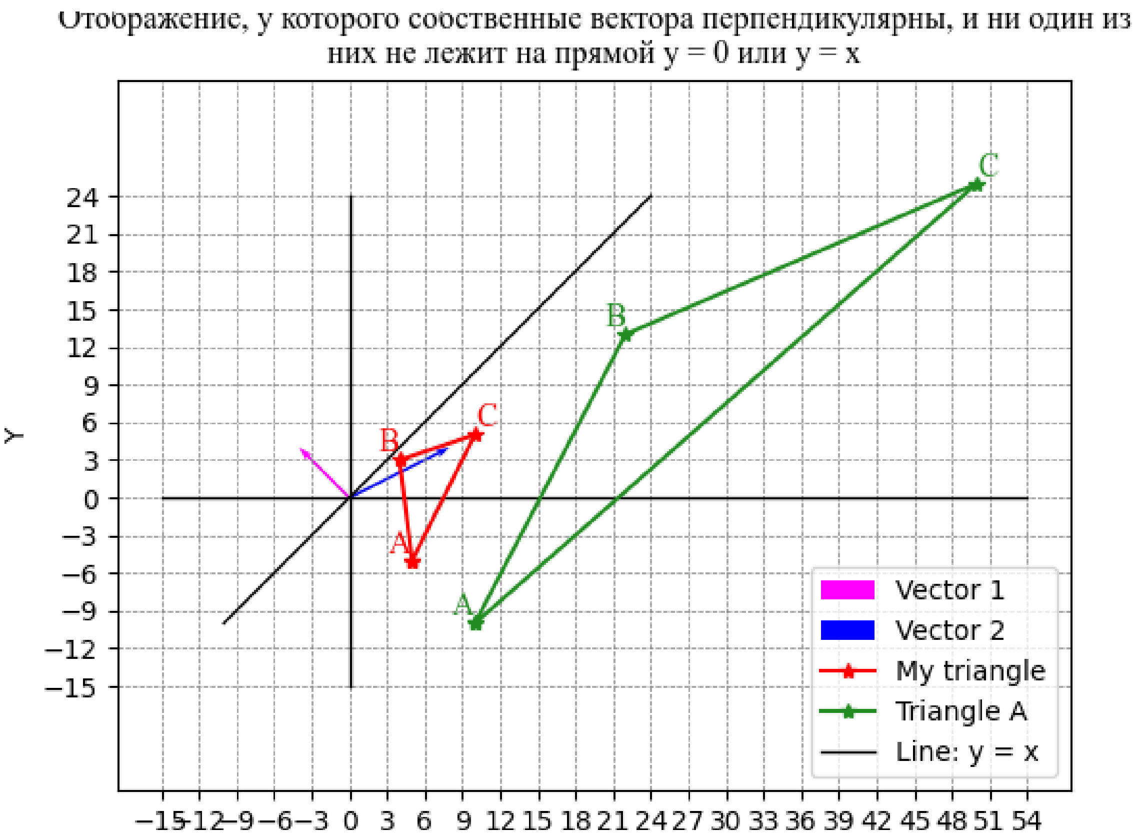
Пункт 8



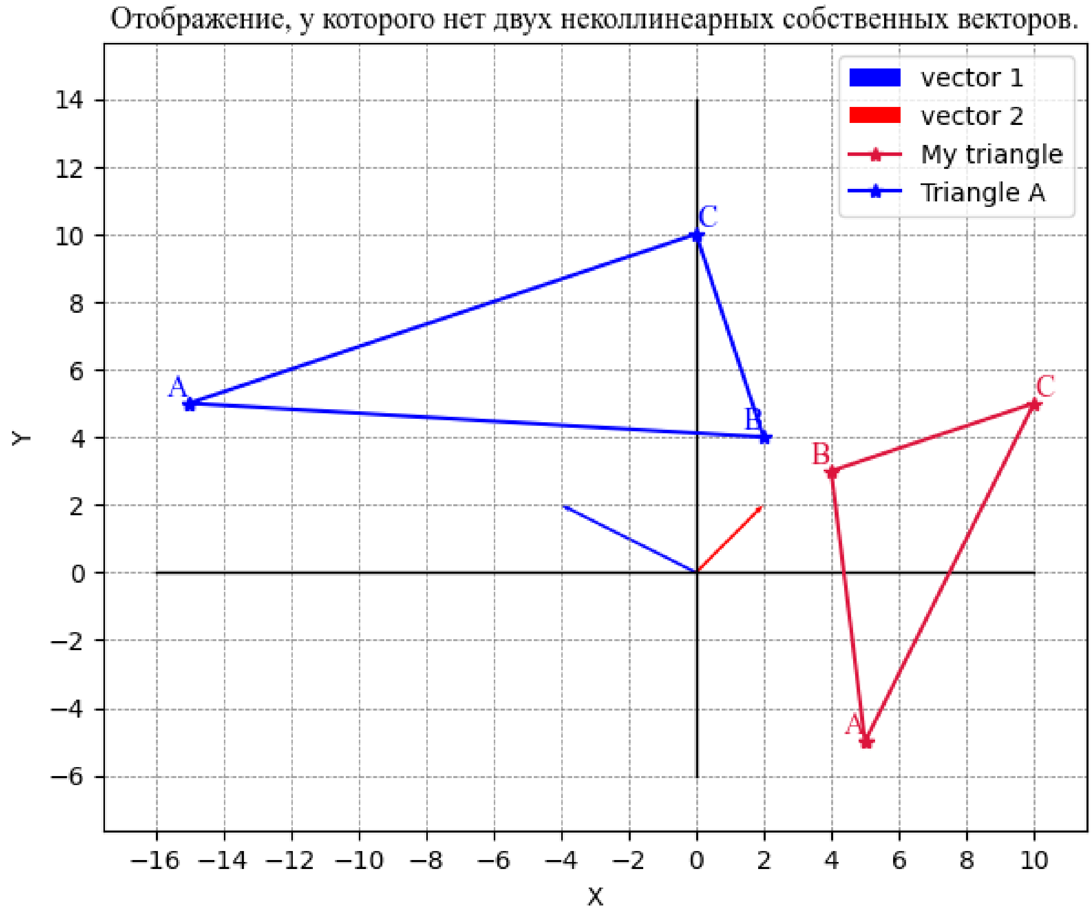
Пункт 9



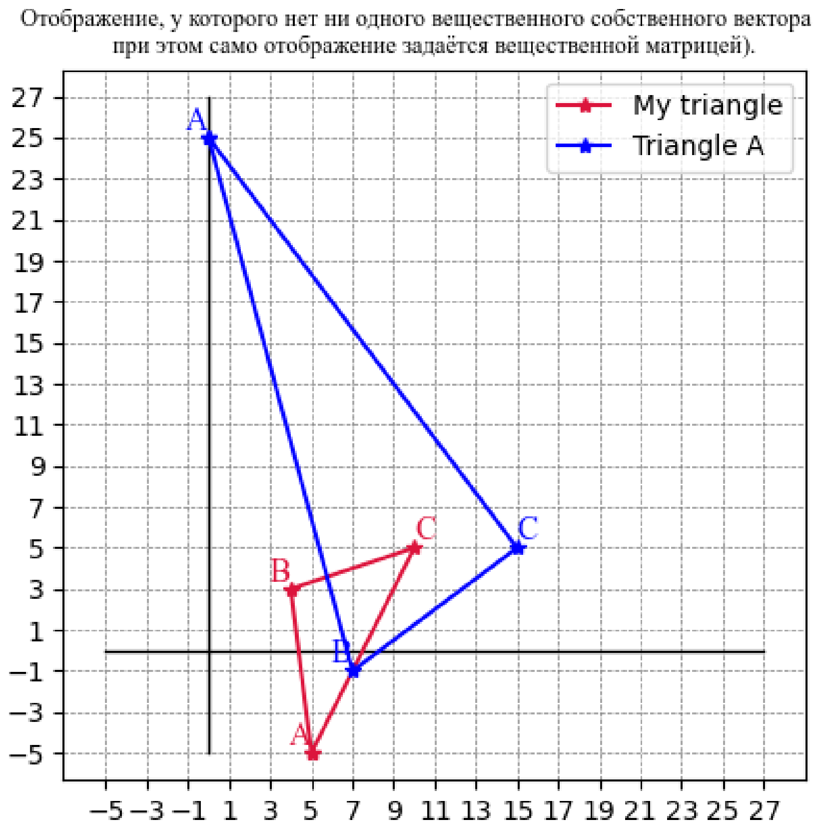
Пункт 10



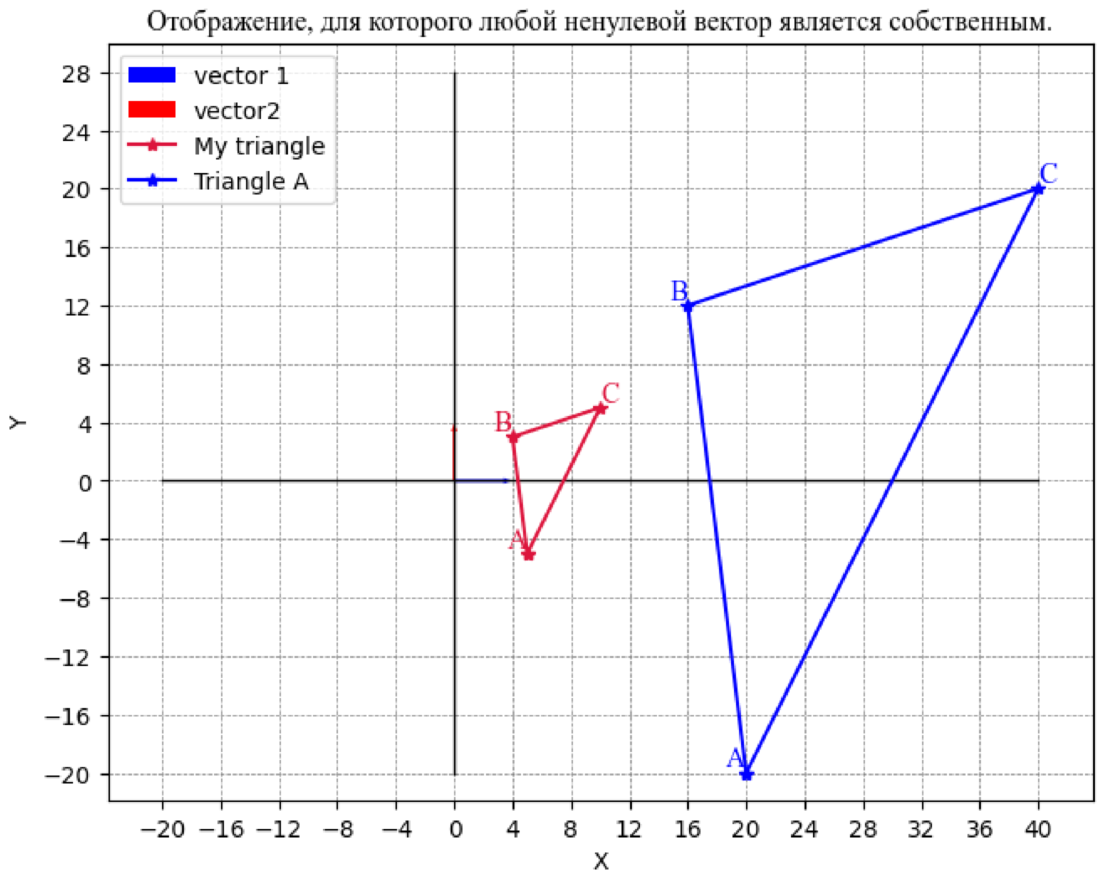
Пункт 11



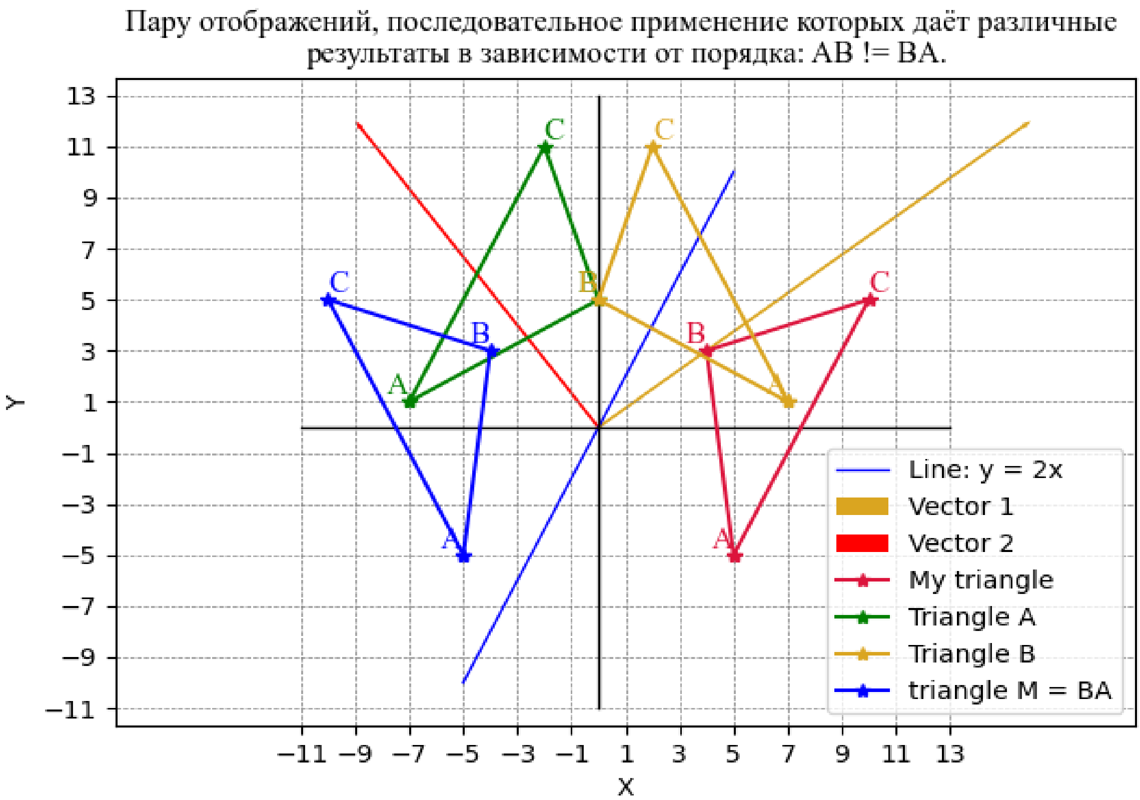
Пункт 12



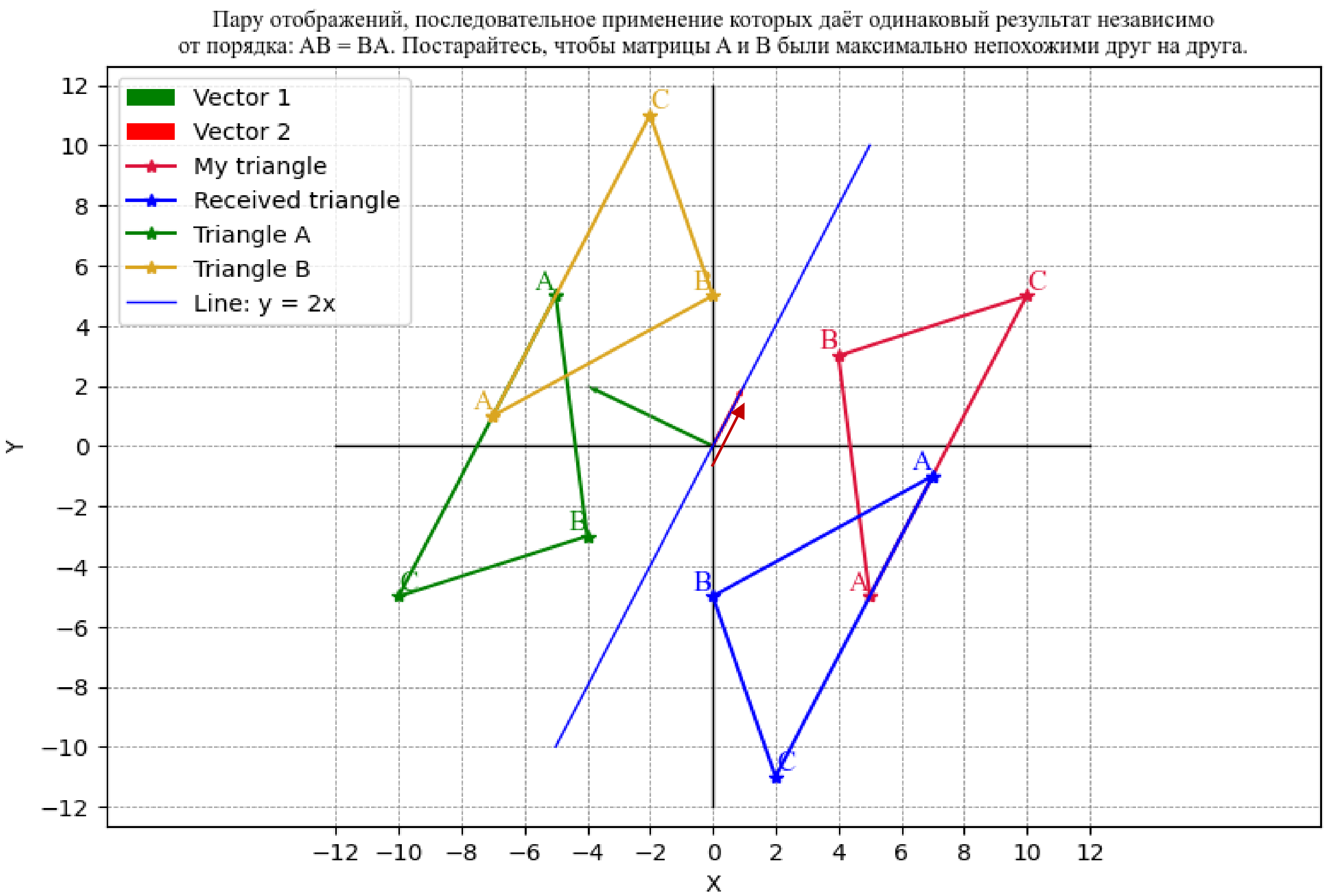
Пункт 13



Пункт 14



Пункт 15



Пункт 16

GITHUB link: https://github.com/Khanhngoc2020/Practise-Linear-Algebra.git