Министерство образования и науки Российской Федерации Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Факультет Системы управления и робототехники

Отчет по лабораторной работе №4 «Динамические системы»

Преподаватель:

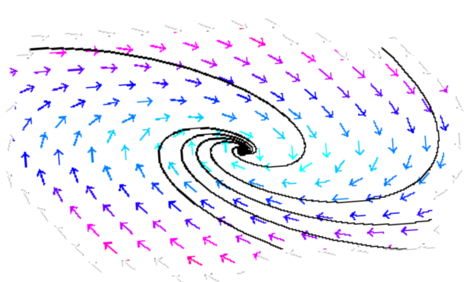
Перегудин А. А.,

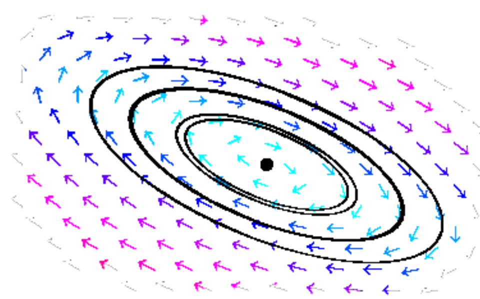
Ассистент фак. СУиР

Выполнила:

студентка гр. R3235

Нгуен Кхань Нгок





Санкт-Петербург 2023

ЗАДАНИЕ 1. ПРИДУМАЙТЕ НЕПРЕРЫВНОЕ

Задайтесь двумя неколлинеарными векторами $v_1, v_2 \in R^2$, не лежащими на координатных осях. Придумайте непрерывные динамические системы со следующими свойствами (по одной для каждого пункта)

1. Система асимптотически устойчива, при этом если x(0) = v_1, то x(t)∈ span{v_1}, а если x(0)=v_2, то x(t) ∈ span{v_2} при всех t ≥ 0.

× *Выбираем матрица A =* $\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \boldsymbol{\lambda_1 = -6}, \quad \boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$

$\rightarrow \boldsymbol{\lambda_2 = -2}, \quad \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$

У нас формулы: $x_0 = v_1$ $\quad$ $x(t) = e^{At} v_1$ $\quad$ $x(t) = e^{\lambda_1 t} v_1$

× При $\boldsymbol{x(0) = v_1}$

$$x_1(t) = e^{At} x_0 = e^{\lambda_1 t} v_1 = e^{-6t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-6t} \\ e^{-6t} \end{bmatrix} \rightarrow x(t) \in span\{v_1\}$$

× При $\boldsymbol{x(0) = v_2}$

$$x_2(t) = e^{At} x_0 = e^{\lambda_2 t} v_2 = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} \rightarrow x(t) \in span\{v_2\}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1(t)} \\ \boldsymbol{x_2(t)} \end{bmatrix} = \boldsymbol{e^{-6t}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} + \boldsymbol{e^{-2t}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

2. Система неустойчива, при этом у матрицы A не существует двух неколлинеарных собственных векторов

× *Выбираем матрица A =* $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \boldsymbol{\lambda_1 = -1} \rightarrow \boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$

$\rightarrow \boldsymbol{\lambda_2 = \ \ 3} \rightarrow \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$

× *Т.к. у матрицы A существует положительное собственное число*

→ Система неустойчива

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} \end{bmatrix} + \boldsymbol{e^{-3t}} \left[- \begin{matrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \end{matrix} \right]$$

3. Система неустойчива, при этом если $x(0) = v_1$, то $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$

× *Выбираем матрица* $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \boldsymbol{\lambda_1 = -1 \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}}$

$\rightarrow \boldsymbol{\lambda_2 = 6 \rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}}$

× *Т.к. у матрицы А существует положительное собственное число*

→ Система неустойчива

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{-t}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix} + e^{6t}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

У нас формулы: $x(t) = e^{\lambda_1 t} v_1$

$$\rightarrow x(t) = e^{-1t} v_1 = e^{-t}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$

× $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} e^{-\frac{1}{2}t} = 0$

× $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} e^{-t} = 0$

4. Система асимптотически устойчива, при этом матрица А $\in R^2$ имеет комплексные собственные вектора вида $v_1 \pm v_2 i \in C^2$.

× *Выбираем* $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \boldsymbol{\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i \rightarrow v_{1,2} = \begin{bmatrix} -1 \mp i \\ 1 \end{bmatrix}}$

× *Т.к. у матрицы А существует отрицательная вещественная часть и* $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$

→ Система асимптотически устойчива

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{At}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = Pe^{Jt}P^{-1}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+i & -1-i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \exp\left(\begin{bmatrix} -1-2i & 0 \\ 0 & -1+2i \end{bmatrix} t\right) \begin{bmatrix} -1+i & -1-i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \exp\left(\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} t \right) \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e^{-t}\cos(2t) & -e^{-t}\sin(2t) \\ e^{-t}\sin(2t) & -e^{-t}\cos(2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1(t)} \\ \boldsymbol{x_2(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e^{-t}[\cos(2t) + \sin(2t)]} & \boldsymbol{2e^{-t}[\cos(2t) + \sin(2t)]} \\ \boldsymbol{-e^{-t}\sin(2t)} & \boldsymbol{-e^{-t}[\cos(2t) + \sin(2t)]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1(0)} \\ \boldsymbol{x_2(0)} \end{bmatrix}$$

5. Система неустойчива, при этом матрица A имеет такие же собственные вектора, как в предыдущем пункте.

× *Выбираем матрица A =* $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \boldsymbol{\lambda_{1,2} = 3 \pm 6i \rightarrow v_{1,2} = \begin{bmatrix} \pm i \\ 1 \end{bmatrix}}$

× *Т.к. у матрицы A существует положителная вещественная часть*

→ Система неустойчива

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = Pe^{Jt}P^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} exp\left(\begin{bmatrix} 3+6i & 0 \\ 0 & 3-6i \end{bmatrix} t \right) \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} exp\left(\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} t \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t}\cos(6t) & e^{3t}\sin(6t) \\ -e^{3t}\sin(6t) & e^{3t}\cos(6t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1(t)} \\ \boldsymbol{x_2(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e^{3t}\cos(6t)} & \boldsymbol{-e^{3t}\sin(6t)} \\ \boldsymbol{e^{3t}\sin(6t)} & \boldsymbol{e^{3t}\cos(6t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1(0)} \\ \boldsymbol{x_2(0)} \end{bmatrix}$$

6. Система не является асимптотически устойчивой, но не является и неустойчивой, при этом матрица A имеет собственные вектора такие же, как в пункте 4.

× *Выбираем матрица A =* $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \boldsymbol{\lambda_{1,2} = \pm 2i \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \mp i \\ 1 \end{bmatrix}}$

× *Т.к. у матрицы A вещественная часть = 0*

→ Система устойчива (но не асимптотически устойчива)

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = Pe^{Jt}P^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} exp\left(\begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix} t\right) \begin{bmatrix} 2i & -2i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} exp\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} t\right) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{0t}\cos(2t) & e^{0t}\sin(2t) \\ -e^{0t}\sin(2t) & e^{0t}\cos(2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2t) + \sin(2t) & -2\sin(2t) \\ \sin(2t) & \cos(2t) - \sin(2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}}$$

ЗАДАНИЕ 2. ЗАМОДЕЛИРУЙТЕ НЕПРЕРЫВНОЕ.

Задайтесь тремя различными наборами ненулевых начальных условий x(0) и постройте графики x_1(t), x_2(t), а также фазовые траектории $x_2(x_1)$ для каждой системы и каждого набора начальных условий. Поместите графики, соответствующие различным наборам начальных условий, но относящиеся к одной системе, на одну картинку. Сделайте выводы о характере движения каждой системы.

1. Система асимптотически устойчива: **A =** $\begin{bmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-6} \end{bmatrix}$

× *Определяем* $x_1(t), x_2(t)$ *при* $x(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, $x(0) = \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \end{bmatrix}$ и $x(0) = \begin{bmatrix} -13 \\ -19 \end{bmatrix}$

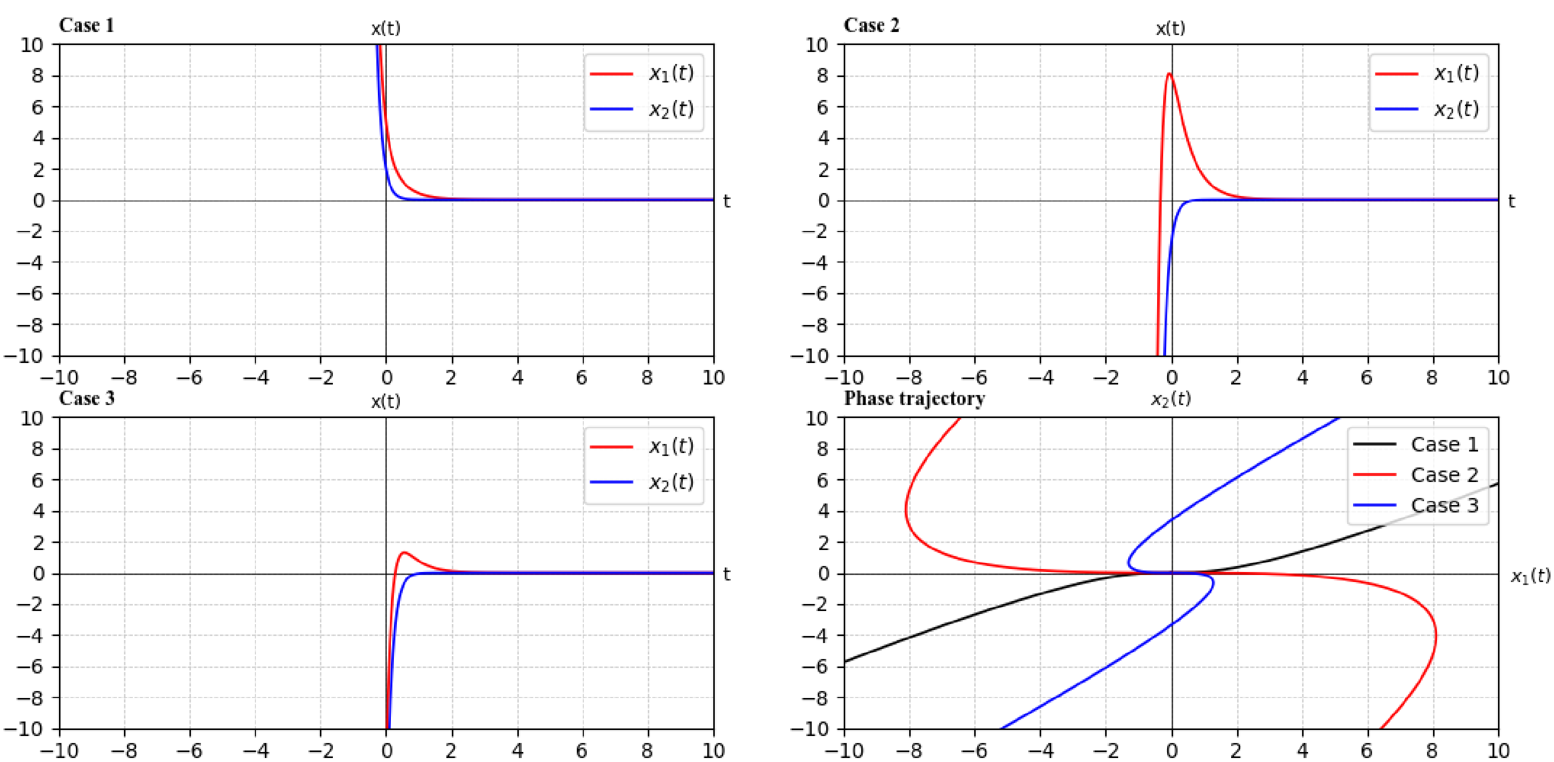
$$\boldsymbol{\lambda_1 = -6}, \qquad \boldsymbol{\lambda_2 = -2}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{At}.x(0) = e^{At}.\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-6t} + e^{-2t} \\ 0 & e^{-6t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1(t)} \\ \boldsymbol{x_2(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{3e^{-2t} + 2e^{-6t}} \\ \mathbf{2e^{-6t}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{At}.x(0) = e^{At}.\begin{bmatrix} 8 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-6t} + e^{-2t} \\ 0 & e^{-6t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1(t)} \\ \boldsymbol{x_2(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{11e^{-2t} - 3e^{-6t}} \\ \mathbf{2 - 3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{At}.x(0) = e^{At}.\begin{bmatrix} -13 \\ -19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-6t} + e^{-2t} \\ 0 & e^{-6t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -13 \\ -19 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1(t)} \\ \boldsymbol{x_2(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{6e^{-2t} - 19e^{-6t}} \\ \mathbf{-19e^{-6t}} \end{bmatrix}$$

Система асимптотически устойчива



$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

2. Система неустойчива, при этом у матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ не существует двух неколлинеарных собственных векторов

× *Определяем* $x_1(t), x_2(t)$ *при* $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $x(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ и $x(0) = \begin{bmatrix} -9 \\ -5 \end{bmatrix}$

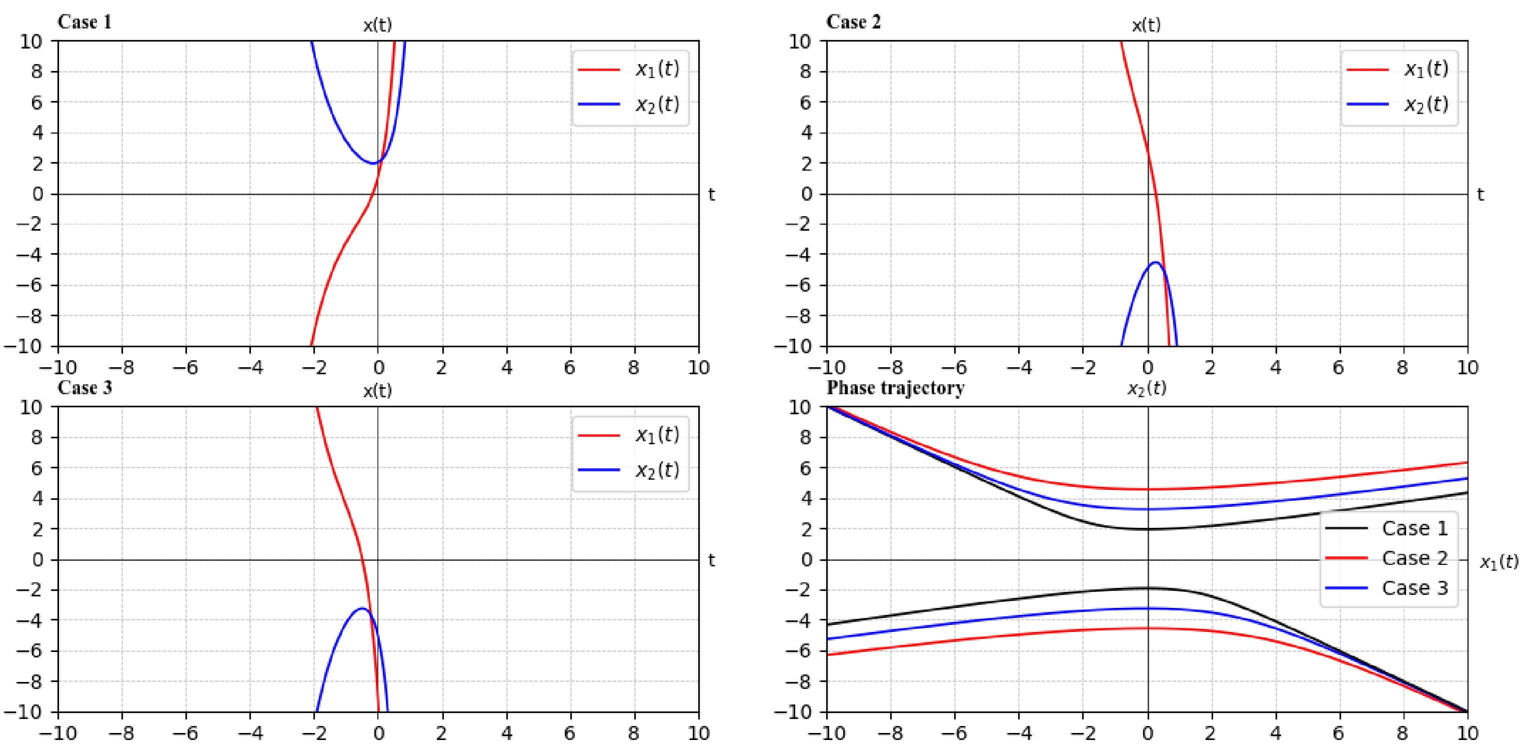
$$\boldsymbol{\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = 3}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{3t} & -\frac{3}{4}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{3t} \\ -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{3t} & \frac{3}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1(t)} \\ \boldsymbol{x_2(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{4}e^{3t} - \frac{5}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{4}e^{3t} + \frac{5}{4}e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{3t} & -\frac{3}{4}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{3t} \\ -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{3t} & \frac{3}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1(t)} \\ \boldsymbol{x_2(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}e^{3t} + \frac{9}{2}e^{-t} \\ -\frac{1}{2}e^{3t} - \frac{9}{2}e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} -9 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{3t} & -\frac{3}{4}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{3t} \\ -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{3t} & \frac{3}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 \\ -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1(t)} \\ \boldsymbol{x_2(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{21}{2}e^{3t} + \frac{3}{2}e^{-t} \\ -\frac{7}{2}e^{3t} - \frac{3}{2}e^{-t} \end{bmatrix}$$

Система неустойчива



3. Система неустойчива, при этом если $x(0) = v_1$, то $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$, $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 \; = \; 6}$$

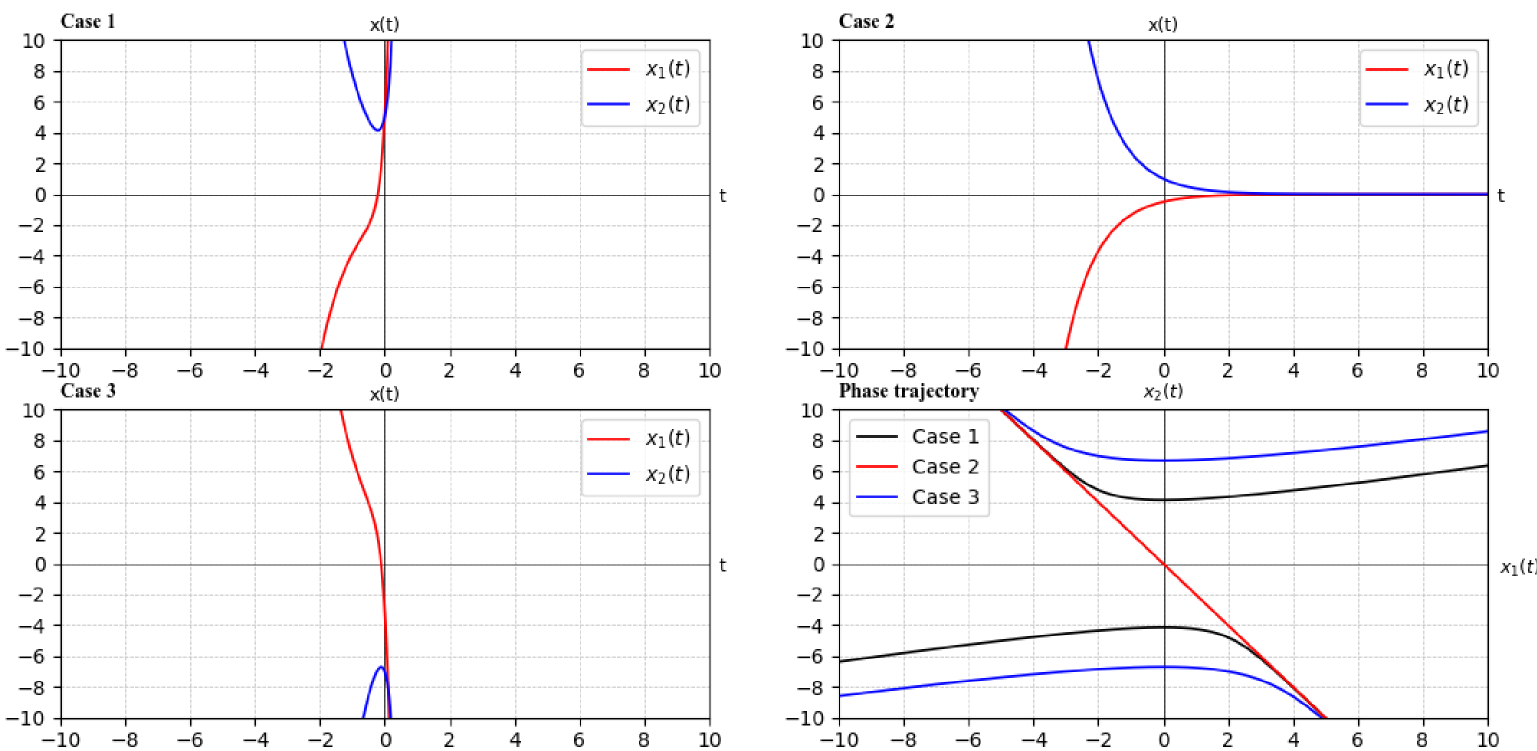
× *Определяем* $x_1(t), x_2(t)$ *при* $x(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$, $x(0) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ и $x(0) = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{At}.\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{7}e^{6t} + \frac{1}{7}e^{-t} & \frac{3}{7}e^{6t} - \frac{3}{7}e^{-t} \\ \frac{2}{7}e^{6t} - \frac{2}{7}e^{-t} & \frac{1}{7}e^{6t} + \frac{6}{7}e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1(t)} \\ \boldsymbol{x_2(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\frac{45}{7}e^{6t} - \frac{10}{7}e^{-t}} \\ \boldsymbol{\frac{15}{7}e^{6t} + \frac{20}{7}e^{-t}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{At}.\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{7}e^{6t} + \frac{1}{7}e^{-t} & \frac{3}{7}e^{6t} - \frac{3}{7}e^{-t} \\ \frac{2}{7}e^{6t} - \frac{2}{7}e^{-t} & \frac{1}{7}e^{6t} + \frac{6}{7}e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1(t)} \\ \boldsymbol{x_2(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{-\frac{1}{2}e^{-t}} \\ \boldsymbol{e^{-t}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{At}.\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{7}e^{6t} + \frac{1}{7}e^{-t} & \frac{3}{7}e^{6t} - \frac{3}{7}e^{-t} \\ \frac{2}{7}e^{6t} - \frac{2}{7}e^{-t} & \frac{1}{7}e^{6t} + \frac{6}{7}e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1(t)} \\ \boldsymbol{x_2(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{-\frac{39}{7}e^{6t} + \frac{18}{7}e^{-t}} \\ \boldsymbol{-\frac{13}{7}e^{6t} - \frac{36}{7}e^{-t}} \end{bmatrix}$$

Система неустойчива



$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

4. Система асимптотически устойчива, при этом матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \in R^2$ имеет комплексные собственные вектора вида $v_1 \pm v_2 i \in C^2$.

$$\boldsymbol{\lambda_1 = -1 \pm 2i \to v_{1,2} = \begin{bmatrix} -1 \mp i \\ 1 \end{bmatrix}}$$

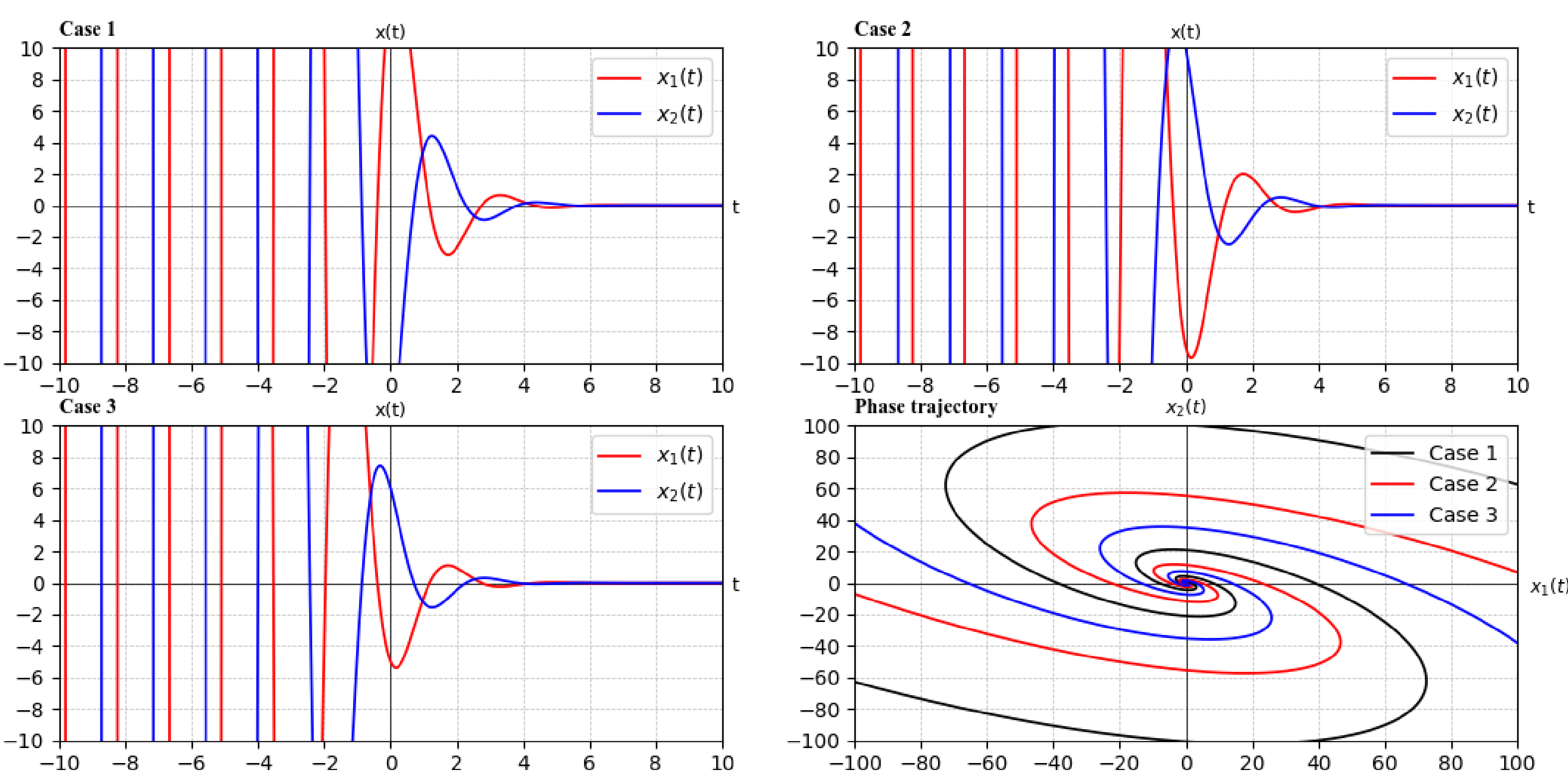
× *Определяем* $x_1(t), x_2(t)$ *при* $x(0) = \begin{bmatrix} -20 \\ 17 \end{bmatrix}$, $x(0) = \begin{bmatrix} 11 \\ -10 \end{bmatrix}$ и $x(0) = \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}[\cos(2t) + \sin(2t)] & 2e^{-t}[\cos(2t) + \sin(2t)] \\ -e^{-t}\sin(2t) & -e^{-t}[\cos(2t) + \sin(2t)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -20 \\ 17 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14\cos t + 14\sin(2t)}{e^t} \\ \frac{-17\cos t + 3\sin(2t)}{e^t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}[\cos(2t) + \sin(2t)] & 2e^{-t}[\cos(2t) + \sin(2t)] \\ -e^{-t}\sin(2t) & -e^{-t}[\cos(2t) + \sin(2t)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ -10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-9\cos t - 9\sin(2t)}{e^t} \\ \frac{10\cos t - \sin(2t)}{e^t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}[\cos(2t) + \sin(2t)] & 2e^{-t}[\cos(2t) + \sin(2t)] \\ -e^{-t}\sin(2t) & -e^{-t}[\cos(2t) + \sin(2t)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-5\cos t - 5\sin(2t)}{e^t} \\ \frac{6\cos t - \sin(2t)}{e^t} \end{bmatrix}$$

Система асимптотически устойчива



5. Система неустойчива, при этом матрица $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$ имеет такие же собственные вектора, как в предыдущем пункте.

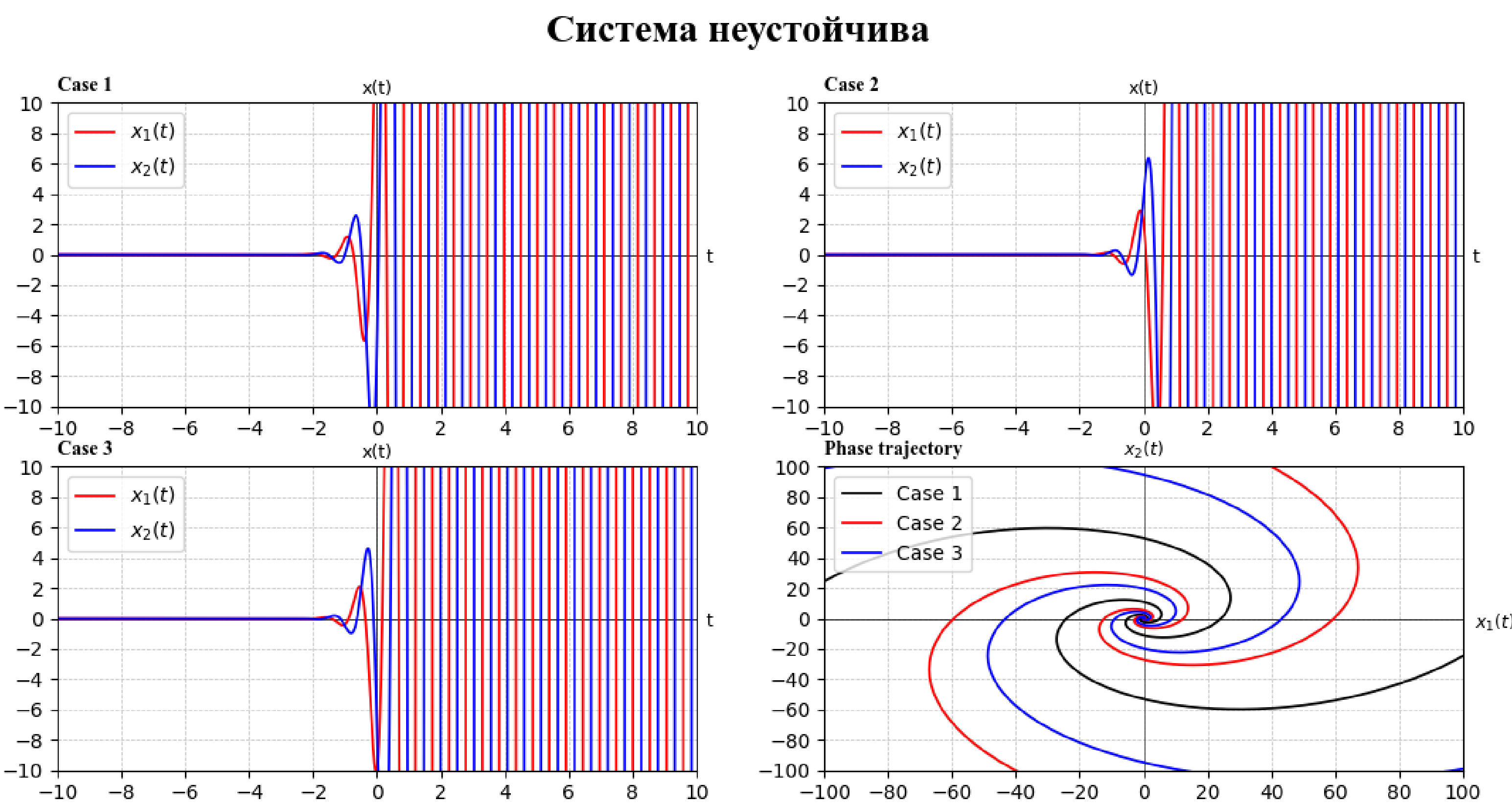
$$\lambda_{1,2} = 3 \pm 6i \to v_{1,2} = \begin{bmatrix} \pm i \\ 1 \end{bmatrix}$$

× *Определяем* $x_1(t), x_2(t)$ *при* $x(0) = \begin{bmatrix} 20 \\ -6 \end{bmatrix}$, $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ и $x(0) = \begin{bmatrix} -10 \\ -7 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t}\cos(6t) & -e^{3t}\sin(6t) \\ e^{3t}\sin(6t) & e^{3t}\cos(6t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20e^{3t}cos + 6e^{3t}sin(6t) \\ -6e^{3t}cos(6t) + 20e^{3t}sin(6t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t}\cos(6t) & -e^{3t}\sin(6t) \\ e^{3t}\sin(6t) & e^{3t}\cos(6t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{3t}cos - 4e^{3t}sin(6t) \\ 4e^{3t}cos(6t) + 2e^{3t}sin(6t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t}\cos(6t) & -e^{3t}\sin(6t) \\ e^{3t}\sin(6t) & e^{3t}\cos(6t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ -7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10e^{3t}cos + 7e^{3t}sin(6t) \\ -7e^{3t}cos(6t) - 10e^{3t}sin(6t) \end{bmatrix}$$



6. Система не является асимптотически устойчивой, но не является и неустойчивой, при этом матрица A=$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ имеет собственные вектора такие же, как в пункте 4.

$$\boldsymbol{\lambda_{1,2} = \pm 2i \to v_1 = \begin{bmatrix} 1 \mp i \\ 1 \end{bmatrix}}$$

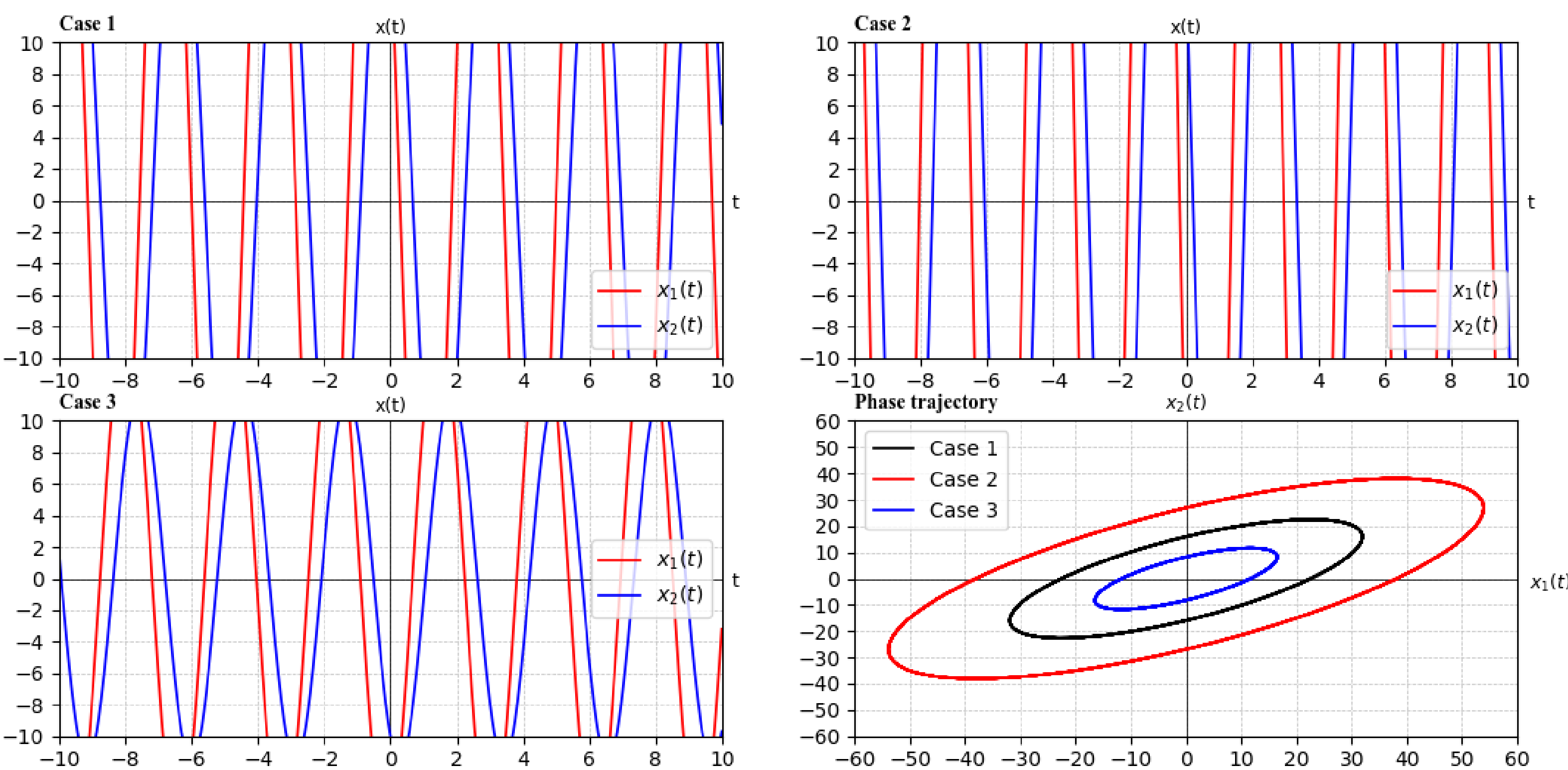
× *Определяем* $x_1(t), x_2(t)$ *при* $x(0) = \begin{bmatrix} 17 \\ 22 \end{bmatrix}$, $x(0) = \begin{bmatrix} -20 \\ 15 \end{bmatrix}$ и $x(0) = \begin{bmatrix} -16 \\ -10 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(2t) + sin(2t) & -2sin(2t) \\ sin(2t) & cos(2t) - sin(2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 \\ 22 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1(t)} \\ \boldsymbol{x_2(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{17cos(2t) - 27sin(2t)} \\ \boldsymbol{22cos(2t) - 5sin(2t)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(2t) + sin(2t) & -2sin(2t) \\ sin(2t) & cos(2t) - sin(2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -20 \\ 15 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1(t)} \\ \boldsymbol{x_2(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{-20cos(2t) - 50sin(2t)} \\ \boldsymbol{15cos(2t) - 35sin(2t)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(2t) + sin(2t) & -2sin(2t) \\ sin(2t) & cos(2t) - sin(2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -16 \\ -10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1(t)} \\ \boldsymbol{x_2(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{-16cos(2t) + 4sin(2t)} \\ \boldsymbol{-10cos(2t) - 16sin(2t)} \end{bmatrix}$$

Система устойчива (но не асимптотически устойчива)



ЗАДАНИЕ 3. ПРИДУМАЙТЕ ДИСКРЕТНОЕ.

Придумайте дискретные динамические системы, обладающие следующими собственными числами (при этом ни одна из придуманных вами матриц A не должна быть диагональной!):

1. $\lambda_{1,2} = -1$
   - *Выбираем матрица A =* $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
2. $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} i$
   - *Выбираем матрица A =* $\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$
3. $\lambda_{1,2} = \pm i$
   - *Выбираем матрица A =* $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$
4. $\lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} i$
   - *Выбираем матрица A =* $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$
5. $\lambda_{1,2} = 1$
   - *Выбираем матрица A =* $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

6-8 Те же собственные числа, что и в пунктах 1, 3, 5, только умноженные на выбранную вами константу c такую, что $0 < c < 1$.

- *Выбираем c =* $\frac{1}{2}$

$$\rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \rightarrow \mathrm{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{2} i \rightarrow A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \rightarrow \mathrm{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

9-11 Те же собственные числа, что и в пунктах 1, 3, 5, только умноженные на выбран*ную вами константу d такую, что d > 1.*

- *Выбираем* $d = 2$

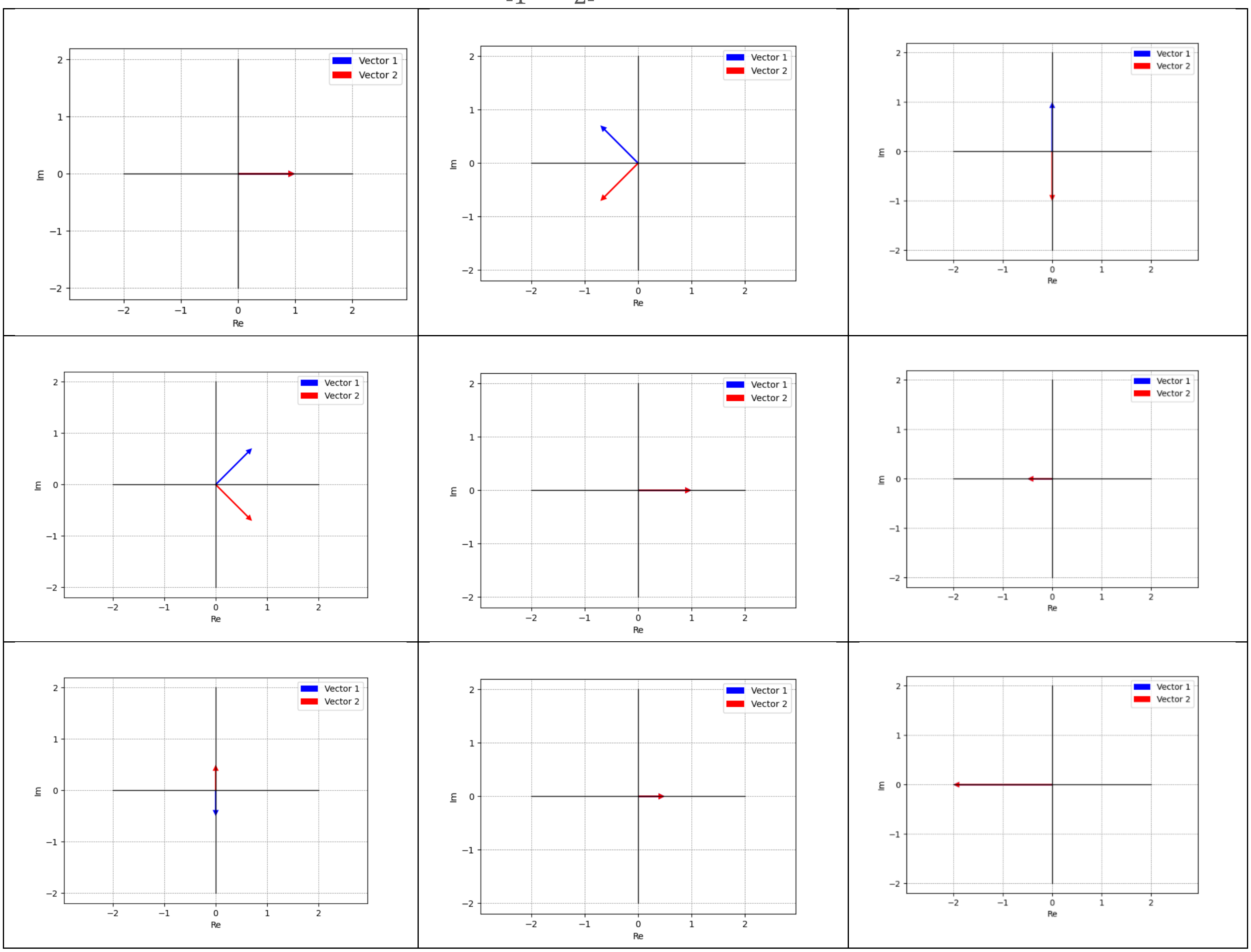
$$\rightarrow \lambda_{1,2} = -2 \rightarrow A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

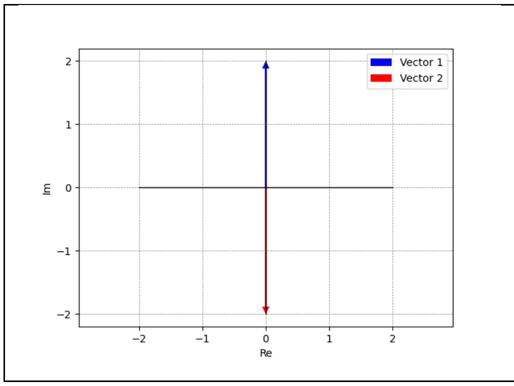
$$\rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i \rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

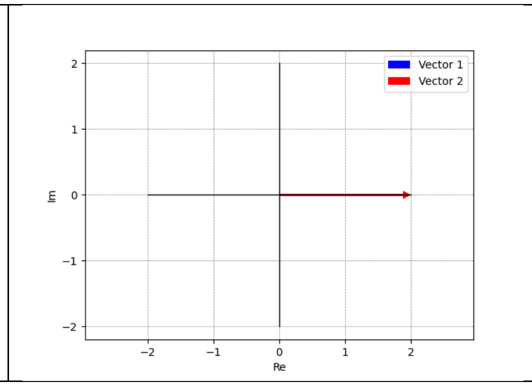
$$\rightarrow \lambda_{1,2} = 2 \rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

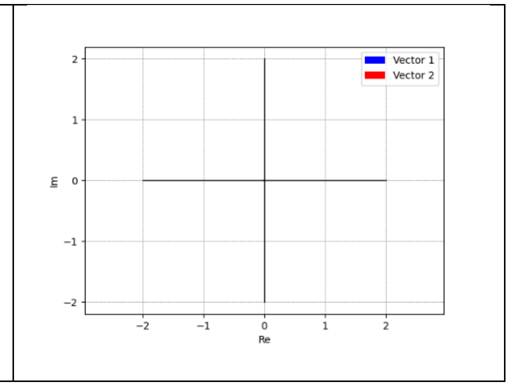
12. $\lambda_{1,2} = 0$

- *Выбираем матрица* $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$









ЗАДАНИЕ 4. ЗАМОДЕЛИРУЙТЕ ДИСКРЕТНОЕ.

Задайтесь ненулевыми начальными условиями x(0) и постройте графики x1(k), x2(k) для каждой системы. Как влияет расположение собственных чисел на комплексной плоскости на характер движения дискретной системы?

Дайте максимально подробный ответ.

1. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = -1$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1^k & 1k \\ 0 & -1^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (-1)^k & 1^k k \\ 0 & 1^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

× *Определяем* $x_1(k), x_2(k)$ *при* $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^k & 1k \\ 0 & 1^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1(k)} \\ \boldsymbol{x_2(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2(-1)^k - 3(-1)^k k} \\ \mathbf{3(-1)^k} \end{bmatrix}$$

2. $A = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} i$

$$J = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \rightarrow J^k = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi k}{4}\right) & \sin\left(\frac{\pi k}{4}\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi k}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi k}{4}\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = PJ^kP^{-1} = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi k}{4}\right) & \sin\left(\frac{\pi k}{4}\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi k}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi k}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) & \sin\left(\frac{\pi}{4}k\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

× *Определяем* $x_1(k), x_2(k)$ *при* $x(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) & \sin\left(\frac{\pi}{4}k\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1(k)} \\ \boldsymbol{x_2(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{3\cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) + 4\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)} \\ \mathbf{4\cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) - 3\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)} \end{bmatrix}$$

3. $A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \to \lambda_{1,2} = \pm i$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\mathrm{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} \to J^k = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) & \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) & \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = PJ^kP^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) & \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) & \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) & \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) & \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) - 3\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{5} & \frac{-34\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{25} \\ \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) & \frac{5\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) + 3\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

× *Определяем* $x_1(k), x_2(k)$ *при* $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) & \sin\left(\frac{\pi}{4}k\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1(k)} \\ \boldsymbol{x_2(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2\cos}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{k}\right) + \mathbf{3\sin}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{k}\right) \\ \mathbf{3\cos}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{k}\right) - \mathbf{2\sin}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{k}\right) \end{bmatrix}$$

4. $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \to \lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} i$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad sin\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \to \beta = \frac{\pi}{4}$$

$$J = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = PJ^kP^{-1} = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\cos(\pi k)}{4} & \frac{\sin(\pi k)}{4} \\ -\frac{\sin(\pi k)}{4} & \frac{\cos(\pi k)}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) & \sin\left(\frac{\pi}{4}k\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

× *Определяем* $x_1(k), x_2(k)$ *при* $x(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) & \sin\left(\frac{\pi}{4}k\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1(k)} \\ \boldsymbol{x_2(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{3\cos}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{k}\right) - \mathbf{5\sin}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{k}\right) \\ \mathbf{5\cos}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{k}\right) + \mathbf{3\sin}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{k}\right) \end{bmatrix}$$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = 1$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^k & 1k \\ 0 & 1^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

× *Определяем* $x_1(k), x_2(k)$ *при* $x(0) = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1(k)} \\ \boldsymbol{x_2(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-5k-3} \\ \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

6. $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} & 5 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1^k}{2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1^k}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1^k}{2^k} & -\dfrac{5(-1)^k+5}{2^k} \\ 0 & \dfrac{1^k}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

× *Определяем* $x_1(k), x_2(k)$ *при* $x(0) = \begin{bmatrix} -10 \\ -15 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1^k}{2^k} & -\dfrac{5(-1)^k+5}{2^k} \\ 0 & \dfrac{1^k}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ -15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1(k)} \\ \boldsymbol{x_2(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathbf{65(-1)^k-75}}{\mathbf{2^k}} \\ -\dfrac{\mathbf{15}}{\mathbf{2^k}} \end{bmatrix}$$

7. $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{2}i$

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{i}{2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{i}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = PJ^kP^{-1} = \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\cos(\pi k)}{4} & \frac{\sin(\pi k)}{4} \\ -\frac{\sin(\pi k)}{4} & \frac{\cos(\pi k)}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}k\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

× *Определяем* $x_1(k), x_2(k)$ *при* $x(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}k\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1(k)} \\ \boldsymbol{x_2(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{3\cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) - 5\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)} \\ \mathbf{5\cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) + 3\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)} \end{bmatrix}$$

8. $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \to \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^k}{2^k} & -\frac{(-1)^k}{2^k}k \\ 0 & \frac{(-1)^k}{2^k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

× *Определяем* $x_1(k), x_2(k)$ *при* $x(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^k}{2^k} & -\frac{(-1)^k}{2^k}k \\ 0 & \frac{(-1)^k}{2^k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1(k)} \\ \boldsymbol{x_2(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\frac{3(-1)^k - 5(-1)^k}{2^k}k} \\ \mathbf{\frac{5(-1)^k}{2^k}} \end{bmatrix}$$

9. $A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \to \lambda_{1,2} = -2$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^k 2^k & 2(-1)^k 2^k k \\ 0 & (-1)^k 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

× *Определяем* $x_1(k), x_2(k)$ *при* $x(0) = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^k 2^k & 2(-1)^k 2^k k \\ 0 & (-1)^k 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1(k)} \\ \boldsymbol{x_2(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{-5(-1)^k 2^k + 10(-1)^k 2^k k} \\ \boldsymbol{5(-1)^k 2\text{^}k} \end{bmatrix}$$

10. $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = 2$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^k & 4 \cdot 2^k k \\ 0 & 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

× *Определяем* $x_1(k), x_2(k)$ *при* $x(0) = \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^k & 4 \cdot 2^k k \\ 0 & 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1(k)} \\ \boldsymbol{x_2(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{9 \cdot 2^k + 40 \cdot 2^k k} \\ \boldsymbol{10 \cdot 2\text{^}k} \end{bmatrix}$$

11. $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = PD^kP^{-1} \begin{bmatrix} x_2(0) \\ x_1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & -4k \\ k & -2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

× *Определяем* $x_1(k), x_2(k)$ *при* $x(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & -4k \\ k & -2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1(k)} \\ \boldsymbol{x_2(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{-10k} \\ \boldsymbol{-5k} \end{bmatrix}$$

ЗАДАНИЕ 5. ОСЦИЛЛЯТОР?.

Рассмотрите непрерывную систему вида

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = ax_1 + bx_2 \end{cases}$$

Проанализируйте устойчивость и характер движения данной системы при

1. $a < 0, b = 0$

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda\, I) = 0 \to \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -a & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow \lambda^2 + a = 0 \leftrightarrow \lambda = \ \pm i\sqrt{a}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \cos\left(t\sqrt{|a|}\right) + d_1 \sin\left(t\sqrt{|a|}\right) \\ c_2 \cos\left(t\sqrt{|a|}\right) + d_2 \sin\,(t\sqrt{|a|} \end{bmatrix} (c, d \in R)$$

$\rightarrow$ Система устойчива

2. $a < 0, b < 0$

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \to \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -a & -b - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\to -\lambda(-b - \lambda) + a = 0 \to \lambda^2 + b\lambda + a = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = b^2 - 4a$$

$\Delta > 0$:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2}, b < 0, a < 0 \to \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2} b < 0, a < 0 \to \lambda_2 < 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ Система неустойчива

$\Delta < 0$:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{b^2 - ac}}{2} \rightarrow Re(\lambda) < 0$$

→ Система асимптотически устойчива

$\Delta = 0$:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{-b}{2(-a)} < 0$$

→ Система асимптотически устойчива

3. $a > 0, b = 0$

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ a & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 - a = 0 \rightarrow \lambda = \pm\sqrt{a}$$

Поскольку матрица A имеет одно собственное значение больше чем 0, то система неустойчива.

4. $a > 0, b < 0$

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda\, I) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ a & -b - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -\lambda(-b - \lambda) - a = 0 \leftrightarrow \lambda^2 + b\lambda - a = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = b^2 + 4a$$

$\Delta > 0$:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2}, b < 0, a > 0 \rightarrow \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 + 4a}}{2} b < 0, a > 0 \rightarrow \lambda_2 < 0 \end{cases}$$

→ Система неустойчива

$\Delta < 0$:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{b^2+ac}}{2} \rightarrow Re(\lambda) < 0$$

→ Система асимптотически устойчива

$\Delta = 0$:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{-b}{2a} > 0$$

→ Система неустойчива

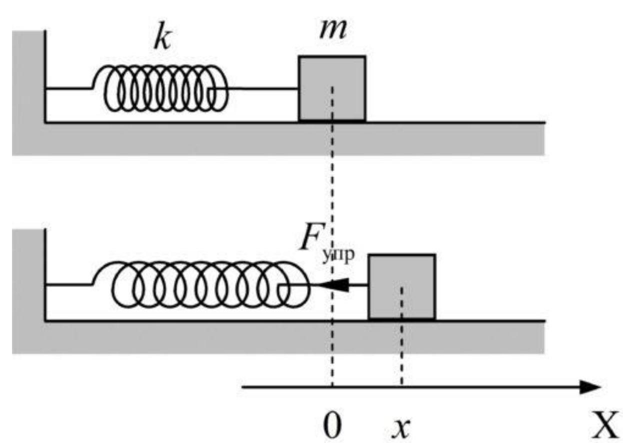
Для каждого из 4-х случаев придумайте физическую систему, движение которой приближённо подчиняется указанному уравнению. Постройте графики движения x(t). Дайте физическую интерпретацию переменных x_1, x_2 а также параметров a и b.

1. $a < 0, b = 0$

Пружинный маятник — механическая система, состоящая из пружины с коэффициентом упругости (твердости) k, один конец которой жестко закреплен, другой конец несет нагрузку массой m.

Второй закона Ньютона для такой системы при условии отсутствия внешних сил и сил трения имеет вид:

$$\boxed{ma = -kx \leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$



$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = v \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1' = x_2 & (x_1' = v) \\ x_2' = -\dfrac{k}{m}x_1 & (x_2' = a) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

× *При* $k = 10\frac{N}{m}, m = 1kg$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{При } x_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1(t)} \\ \boldsymbol{x_2(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{-\cos(\sqrt{10}t) + \frac{\sqrt{10}}{5}\sin(\sqrt{10}t)} \\ \boldsymbol{2\cos(\sqrt{10}t) + \sqrt{10}\sin(\sqrt{10}t)} \end{bmatrix}$$

2. $a < 0, b < 0$

$$\boxed{m\bar{a} = \bar{F_c} + \bar{F_y}}$$

× Если на систему оказывают влияние внешние силы, то уравнение колебаний перепишется так.

Где: $F_c = c.v = c.\dot{x}$ − сила сопротивления.

$F_y = -k.x$ − сила упругости.

В случае наличия затухания, пропорционального скорости колебаний с коэффициентом с:

$$ma = -F_y - F_c \leftrightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = v \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1' = x_2 & (x_1' = v) \\ x_2' = -\dfrac{c}{m}x_2 - \dfrac{k}{m}x_1 & (x_2' = a) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

× $\text{При } k = 1\frac{N}{m}, m = 1kg, c = 2 \rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

× $\text{При } x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1(t)} \\ \boldsymbol{x_2(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{(7t + 2)e^{-t}} \\ \boldsymbol{(-7t + 5)e^{-t}} \end{bmatrix}$