$$\begin{bmatrix} \text{М} & \text{А} & \text{Т} \\ \text{Р} & \text{И} & \text{Ч} \\ \text{Н} & \text{А} & \text{Я} \end{bmatrix}$$ лекция

# Что такое матрица?

# Что такое матрица?

## Двумерный массив

| | Column 1 | Column 2 | Column 3 | Column 4 |
|---|---|---|---|---|
| Row 1 | a[0][0] | a[0][1] | a[0][2] | a[0][3] |
| Row 2 | a[1][0] | a[1][1] | a[1][2] | a[1][3] |
| Row 3 | a[2][0] | a[2][1] | a[2][2] | a[2][3] |

# Что такое матрица?

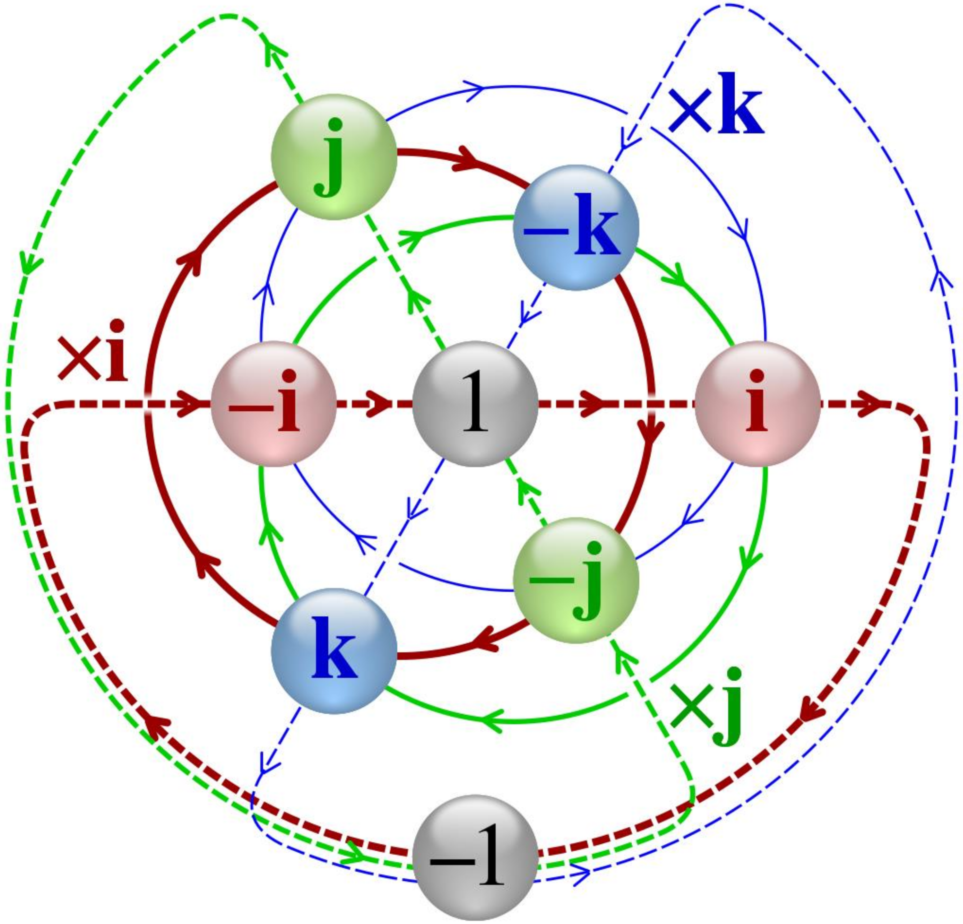
Двумерный массив

| | Column 1 | Column 2 | Column 3 | Column 4 |
|---|---|---|---|---|
| Row 1 | a[0][0] | a[0][1] | [illegible] | [illegible] |
| [illegible] | a[1][0] | a[1][1] | a[1][2] | a[1][3] |
| Row 3 | a[2][0] | a[2][1] | a[2][2] | a[2][3] |

**Самый непродуктивный взгляд**

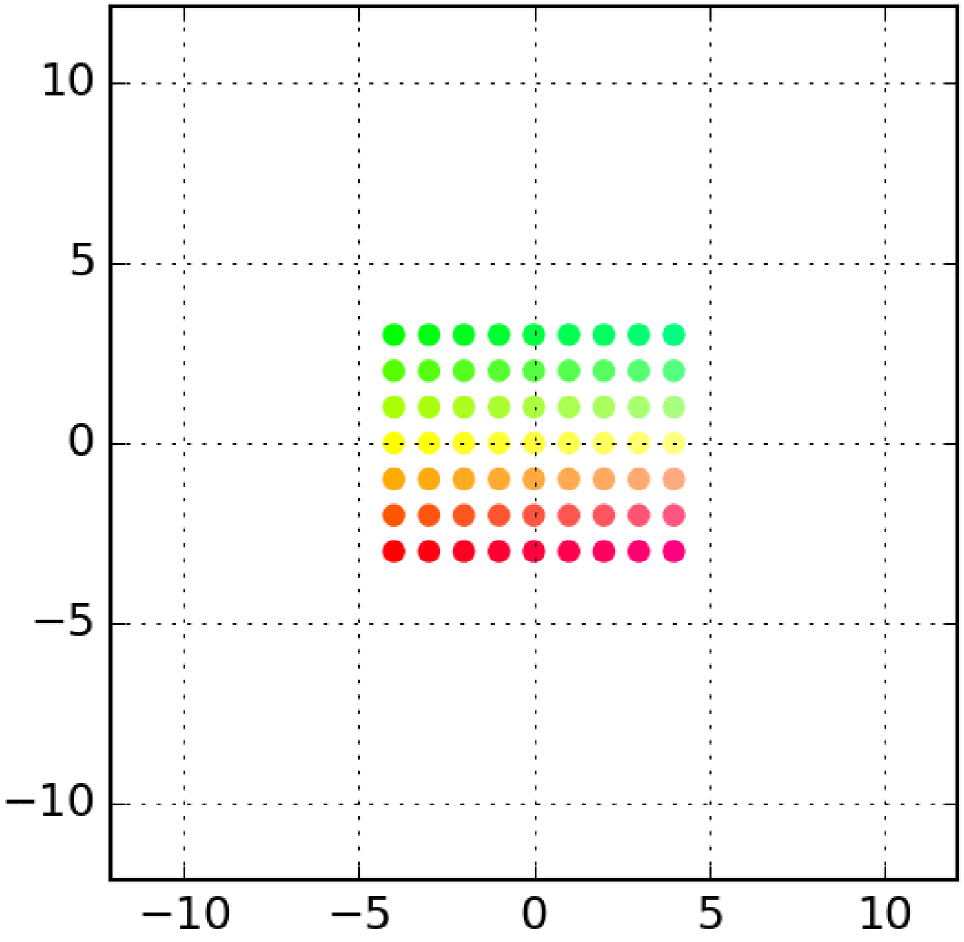
# Что такое матрица?

Гиперчисло



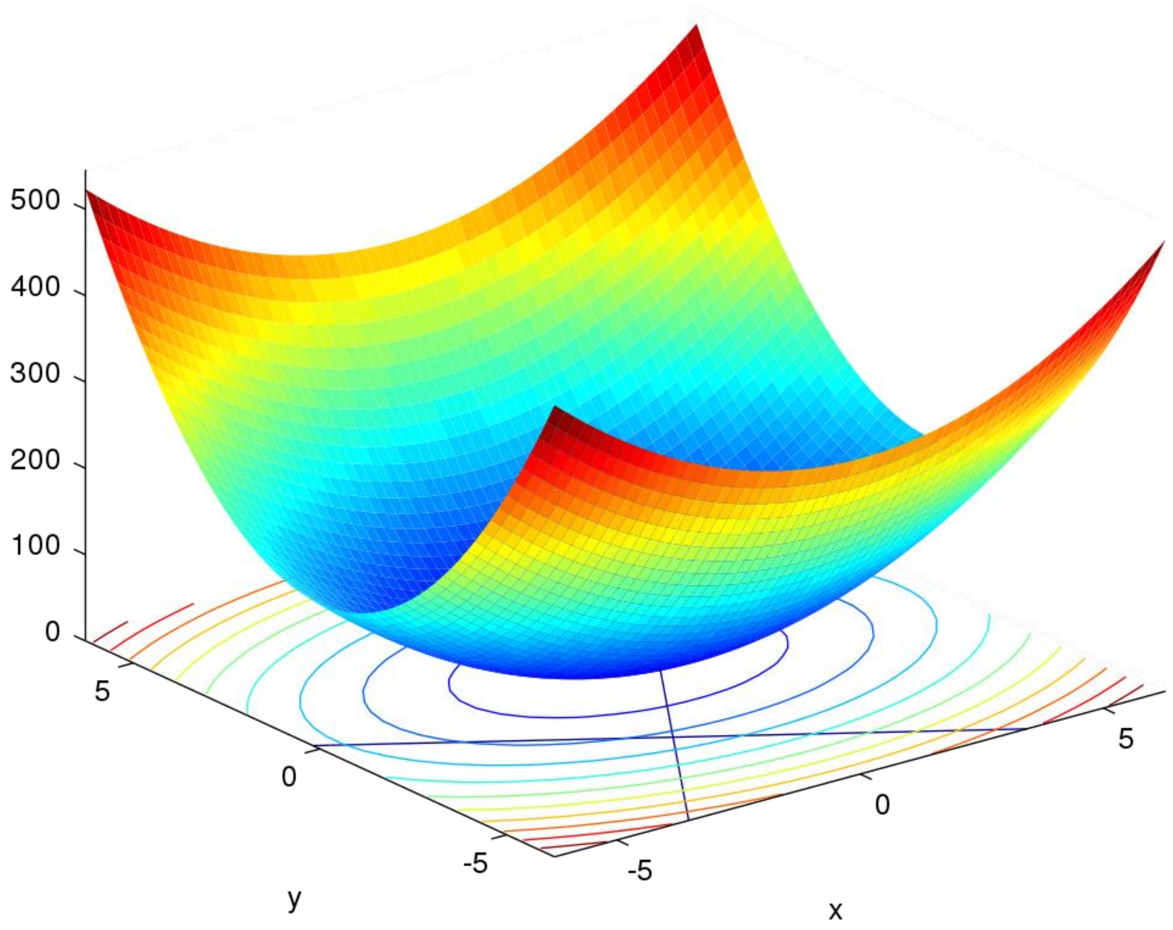
# Что такое матрица?

## Линейное отображение



# Что такое матрица?

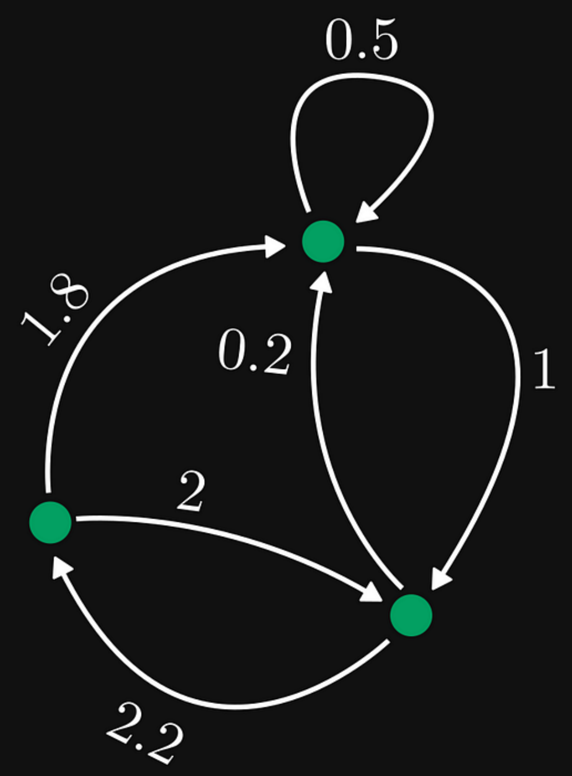
## Билинейная форма



# Что такое матрица?

## Взвешенный граф

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0 & 2.2 \\ 1.8 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$



Сегодня смотрим на матрицы
как на гиперчисла

# Векторы

**Вектор**

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Вектор-столбец)

$$\xleftrightarrow{T}$$

**Ковектор**

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(Вектор-строка)

# Векторы

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \qquad \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \\ -17.1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5$$

$\mathbb{R}^n$ – пространство $n$-мерных векторов (столбцов вещественных чисел)

# Векторы

## Скалярное произведение

$$a = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

число

$$a^\top b = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 10 \cdot 3 = 33$$

(строка на столбец)

# Векторы

## Длина вектора

$$\|a\| = \sqrt{a^\top a}$$

$$a = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\|a\| = \sqrt{9 + 16 + 0} = 5$$

## Ортогональность

$$a^\top b = 0$$

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ортогональны

# Какие бывают матрицы?

$$
\begin{array}{cc}
 & n \\
m & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
\end{array} \in \mathbb{R}^{m \times n}
$$

**Высокие**

$$\begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

**Широкие**

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

**Квадратные**

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

# Какие бывают матрицы?

Вещественные

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & -\pi & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 2.1 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

Комплексные

$$\begin{bmatrix} i & 5+i & 1 \\ 3 & 1/2 & 0 \\ 0 & 4i & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

Булевы

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 5}$$

И всякие другие…

# Какие бывают матрицы?

Вещественные

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & -\pi & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 2.1 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

Комплексные

$$\begin{bmatrix} i & 5+i & 1 \\ 3 & 1/2 & 0 \\ 0 & 4i & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Булевы

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 5}$$

И всякие другие…

# Действия над матрицами

## Транспонирование

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

Векторы становятся ковекторами

# Действия над матрицами

Транспонирование

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}^{\top} = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

Ковекторы становятся векторами

# Действия над матрицами

## Транспонирование

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Размерность меняется соответственно

# Действия над матрицами

## Сложение

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

## Умножение на число

$$2 \times \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

# Действия над матрицами

## Сложение

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

## Умножение на число

$$2 \times \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

## То же самое

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

# Действия над матрицами

## Сложение

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

## Умножение на число

$$2 \times \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

## То же самое

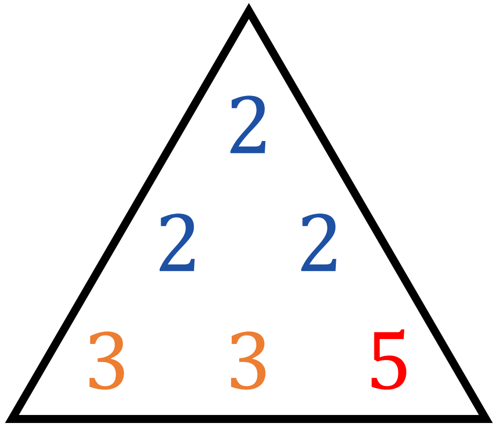
$$2 \times \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

# Действия над матрицами

Какая разница, как разместить числа?

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$




Разница появляется при умножении матриц!

# Действия над матрицами

## Умножение матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Строка на столбец, ковектор на вектор

# Действия над матрицами

## Умножение матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Строка на столбец, ковектор на вектор

# Действия над матрицами

## Умножение матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Строка на столбец, ковектор на вектор

# Действия над матрицами

## Умножение матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & {\color{green}*} & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Строка на столбец, ковектор на вектор

# Действия над матрицами

## Умножение матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Строка на столбец, ковектор на вектор

# Действия над матрицами

## Умножение матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ \color{red}{0} & \color{red}{1} & \color{red}{0} \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \color{blue}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \color{blue}{0} & 3 & 0 \\ 1 & \color{blue}{2} & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & \color{green}{0} & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Строка на столбец, ковектор на вектор

# Действия над матрицами

## Умножение матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & 0 & * & * \\ * & * & \color{green}{*} & * \end{bmatrix}$$

Строка на столбец, ковектор на вектор

# Действия над матрицами

## Умножение матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & 0 & * & * \\ * & * & 6 & * \end{bmatrix}$$

Строка на столбец, ковектор на вектор

# Действия над матрицами

## Умножение матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & 0 & * & * \\ * & * & 6 & * \end{bmatrix}$$

Строка на столбец, ковектор на вектор

# Действия над матрицами

## Умножение матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & * & * & * \\ * & 8 & * & * \\ * & 0 & * & * \\ * & * & 6 & * \end{bmatrix}$$

Строка на столбец, ковектор на вектор

# Действия над матрицами

## Умножение матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Результат состоит из скалярных произведений

# Действия над матрицами

## Сложение

$$A_{m\times n} + B_{m\times n} = C_{m\times n}$$

$$\begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

## Умножение

$$A_{m\times n} B_{n\times k} = C_{m\times k}$$

$$\begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

# Действия над матрицами

## Сложение

$$A_{m\times n} + B_{m\times n} = C_{m\times n}$$

$$\begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

## Умножение

$$A_{m\times n} B_{n\times k} = C_{m\times k}$$

$$\begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

Какими должны быть матрицы $A$ и $B$,
чтобы их можно было и складывать, и умножать?

# Действия над матрицами

Какими должны быть матрицы $A$ и $B$,
чтобы их можно было и складывать, и умножать?

Квадратными одного размера!

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & A & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & B & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

# Действия над матрицами

Пусть $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Верно ли, что…

$$\boxed{A + B = B + A}$$

?

$$\boxed{AB = BA}$$

?

# Действия над матрицами

Пусть $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Верно ли, что…

$$\boxed{A + B = B + A}$$

Да

$$\boxed{AB \neq BA}$$

Нет!

Сложение работает как обычно,
а вот умножение в общем случае некоммутативно

# Действия над матрицами

$$AB \neq BA$$

Пример

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

# Действия над матрицами

## Нуль-матрица

$$0_{2\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 0_{3\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + 0 = 0 + A = A$$

## Единичная матрица

$$I_{2\times2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AI = IA = A$$

# Действия над матрицами

Действия над числами $\mathbb{R}$

$a + b$ | $a - b$ | $ab$ | $\frac{a}{b} = ab^{-1}$

Не всегда возможно

Действия над матрицами $\mathbb{R}^{n\times n}$

$A + B$ | $A - B$ | $AB$ | $AB^{-1}$

# Обратная матрица

Матрица $X$ такая, что

$$AX = XA = I$$

называется обратной для матрицы $A$

# Обратная матрица

Матрица $A^{-1}$ такая, что

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

называется обратной для матрицы $A$

# Обратная матрица

Числа $\mathbb{R}$

$$5 \cdot (1/5) = 1$$

Число

Обратное число

Только у одного числа нет обратного

Матрицы $\mathbb{R}^{n \times n}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица

Обратная матрица

У многих матриц нет обратных

# Обратная матрица

В каком случае у матрицы нет обратной?

Если определитель равен нулю

$$\boxed{\det A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1} \text{ не существует}}$$

# Обратная матрица

Что такое определитель?

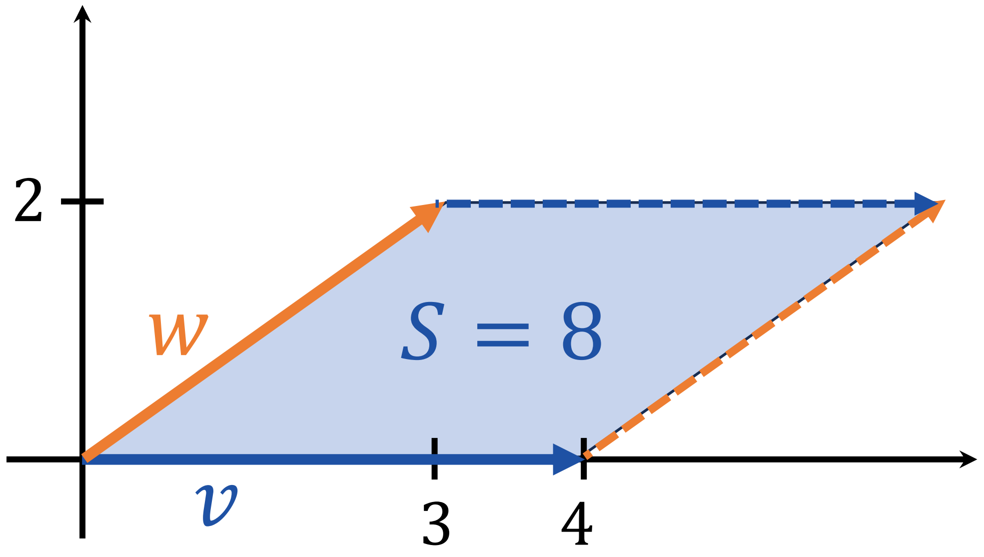
# Определитель матрицы

Определитель – ориентированный (+/-) гиперобъём параллелепипеда, построенного на столбцах матрицы

## Примеры

$$\det\begin{bmatrix}4 & 3\\0 & 2\end{bmatrix} = 8$$

$$v = \begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$$



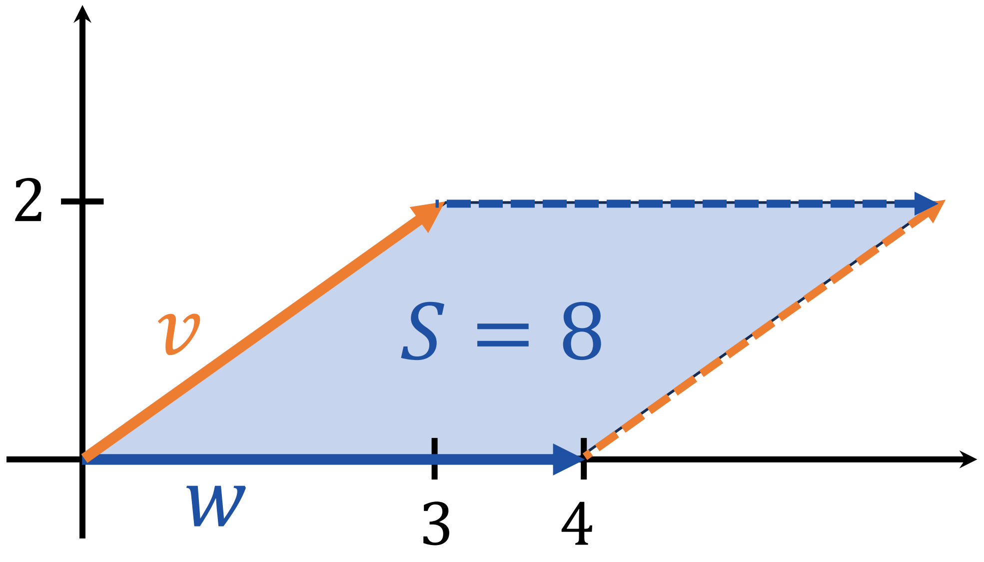
# Определитель матрицы

**Определитель** – ориентированный (+/-) гиперобъём параллелепипеда, построенного на столбцах матрицы

## Примеры

$$\det\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = ?$$

$$v = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$



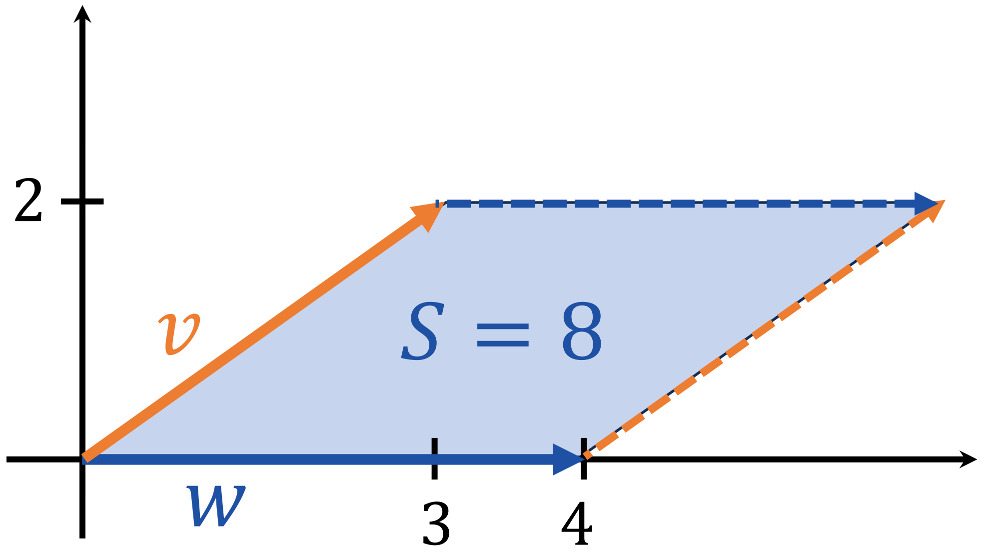
# Определитель матрицы

**Определитель** – ориентированный (+/-) гиперобъём параллелепипеда, построенного на столбцах матрицы

## Примеры

$$\det\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = -8$$

$$v = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$



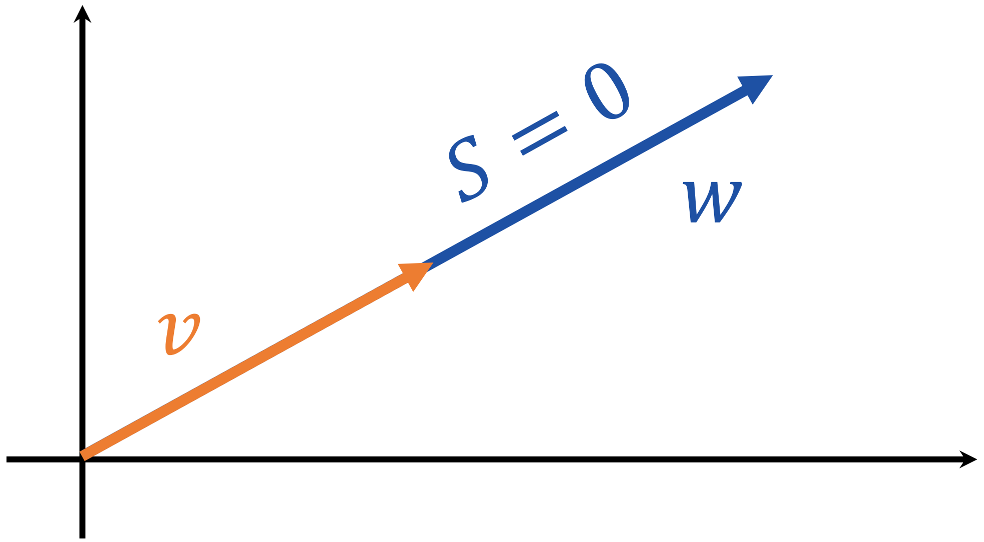
# Определитель матрицы

Определитель – ориентированный (+/-) гиперобъём параллелепипеда, построенного на столбцах матрицы

## Примеры

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 0$$

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

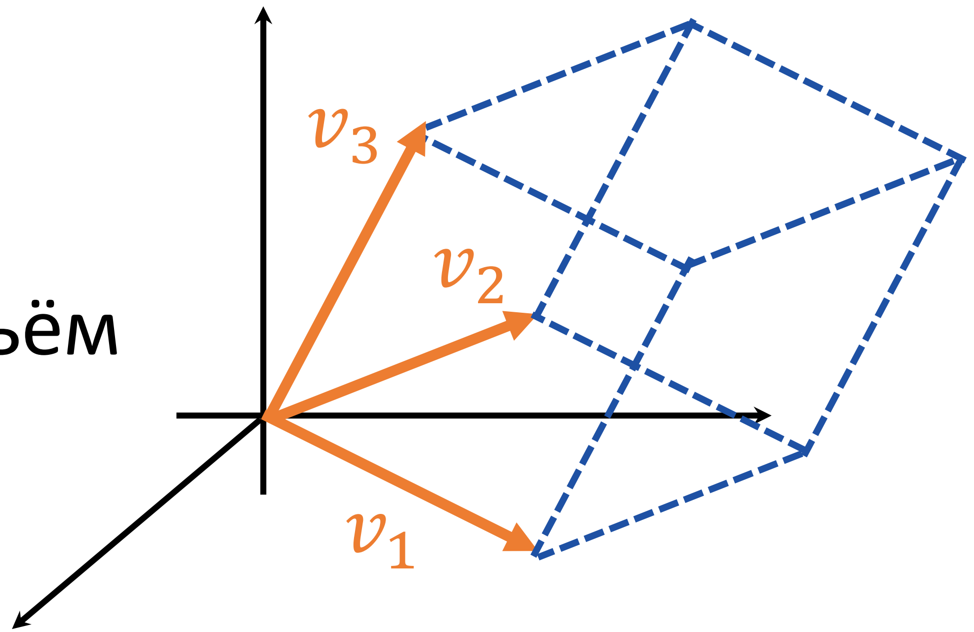


# Определитель матрицы

Определитель – ориентированный (+/-) гиперобъём параллелепипеда, построенного на столбцах матрицы

## Примеры

$$\det \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \pm \text{объём}$$



# Ранг матрицы

**Ранг** – число линейно независимых столбцов матрицы

## Примеры

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = 3$$

Векторы $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ линейно независимы

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} = 2$$

$1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ – линейная зависимость

# Ранг матрицы

**Ранг** – число линейно независимых столбцов матрицы

## Примеры

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = 1$$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

# Ранг матрицы

Ранг – число линейно независимых столбцов матрицы

В общем случае (для прямоугольных матриц)
ранг не превышает наименьшую размерность матрицы

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix}_{3\times 5} \qquad B = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix}_{4\times 2}$$

$$\operatorname{rank} A \in \{0,1,2,3\} \qquad \operatorname{rank} B \in \{0,1,2\}$$

# Ранг матрицы

Ранг – число линейно независимых столбцов матрицы

Для квадратных матриц:

Если ранг неполный, то определитель – ноль

$$\operatorname{rank} A_{n\times n} < n \quad \Leftrightarrow \quad \det A = 0$$

Если ранг полный, то определитель – не ноль

$$\operatorname{rank} A_{n\times n} = n \quad \Leftrightarrow \quad \det A \neq 0$$

# Ранг матрицы

$$\text{rank} = 0 \qquad \det = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank} = 1 \qquad \det = 0$$

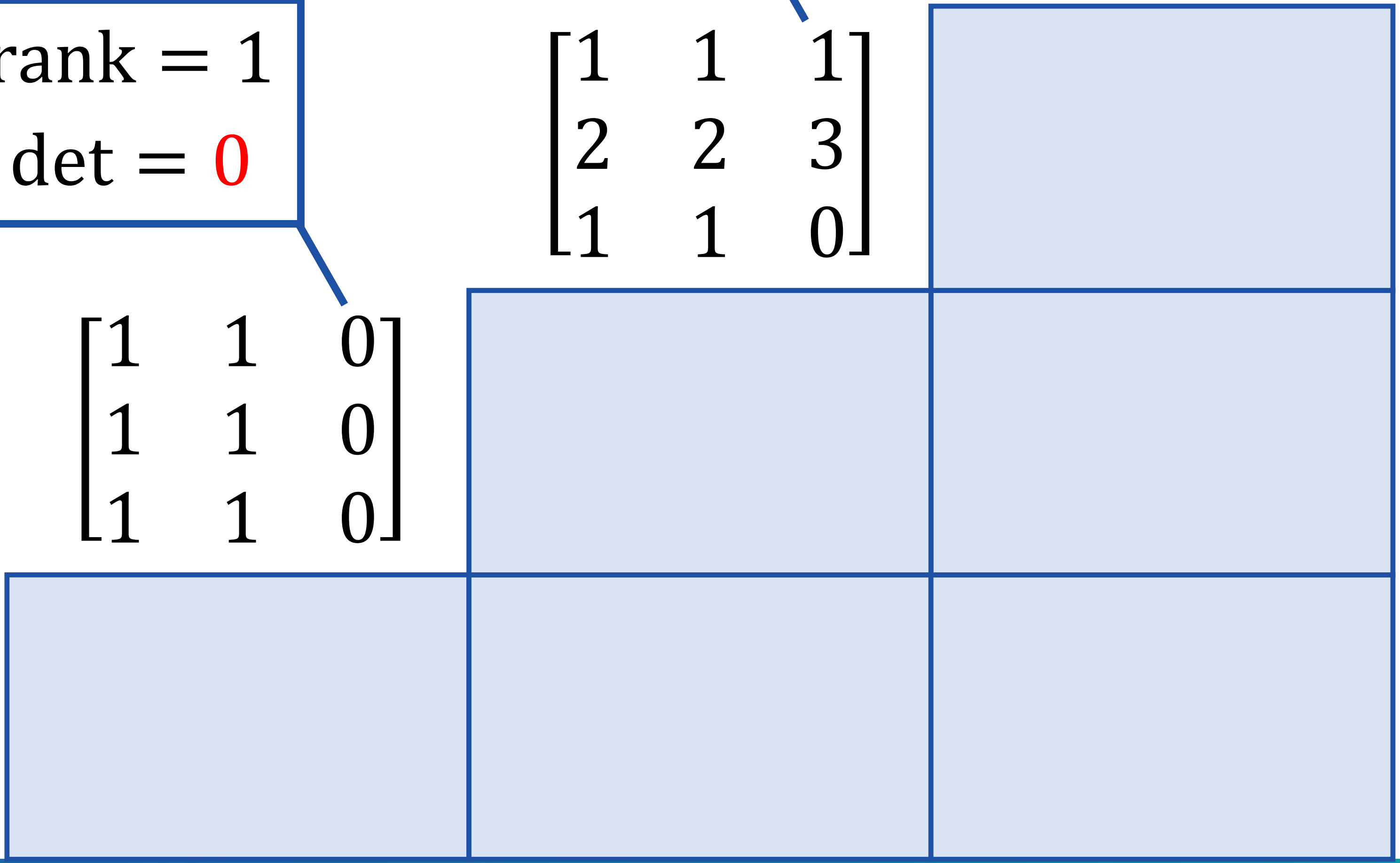
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank} = 2 \qquad \det = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank} = 3 \qquad \det = 6$$



# Ранг матрицы

Обратимая матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

0

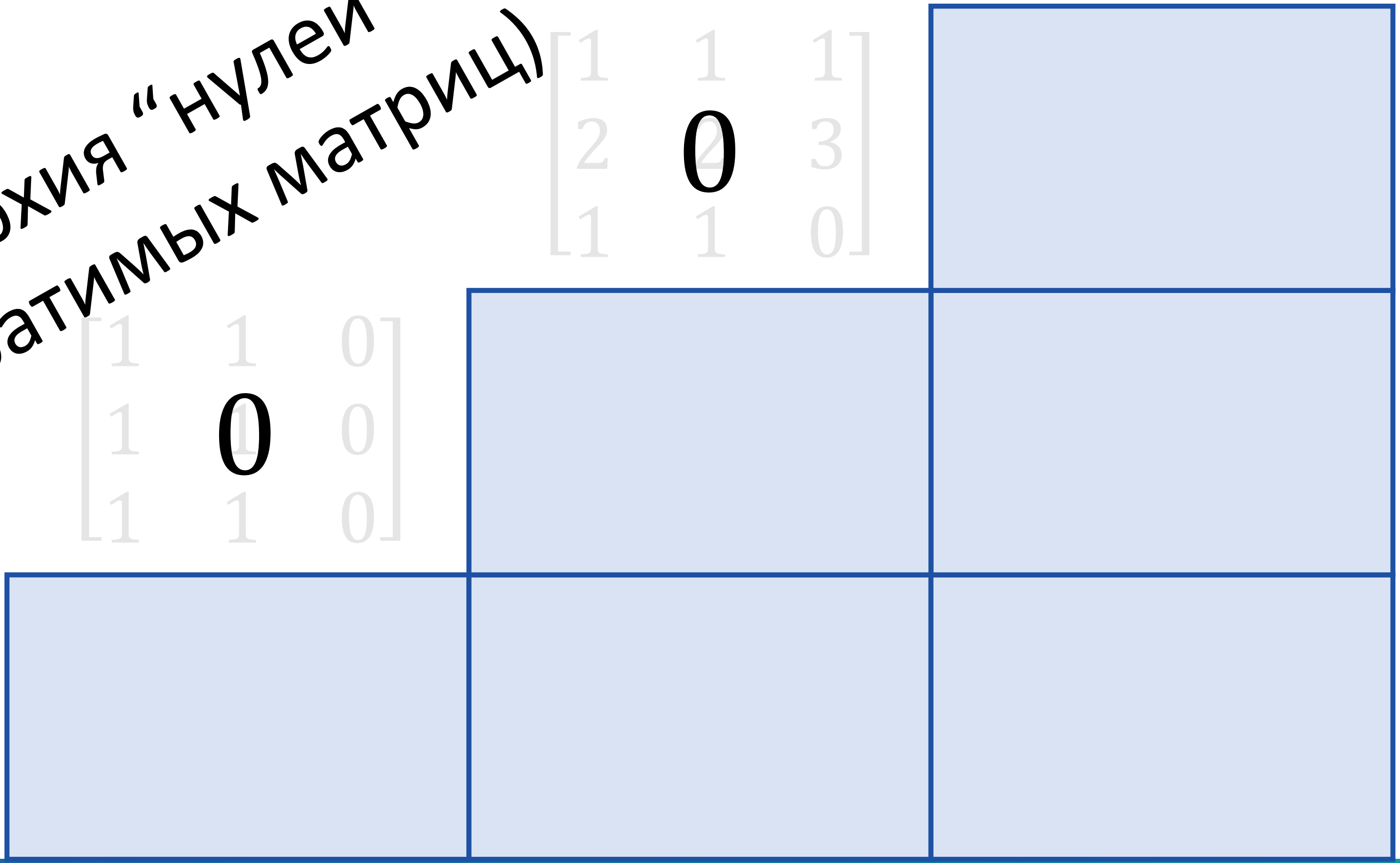
Иерархия “нулей” (необратимых матриц)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

0

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

0



# Ранг матрицы

## Свойство понижения ранга

Ранг произведения всегда не больше,
чем каждый из рангов сомножителей

$$\operatorname{rank}(AB) \le \operatorname{rank}(A) \qquad \operatorname{rank}(AB) \le \operatorname{rank}(B)$$

$$\boxed{\operatorname{rank}(AB) \le \min(\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B)}$$

Умножение на матрицу неполного ранга – как умножение на ноль

# Ваши обязательные умения

- ✓ Вычислять ранг
- ✓ Вычислять определитель
- ✓ Находить обратную матрицу

# След матрицы

Для квадратной матрицы $A$ **следом** называется сумма элементов главной диагонали

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 5 & 1 \\ 7 & 100 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{trace} A = 0 + 5 + (-1) + 7 = 11$$

# Специальные случаи умножения

## Матрица × столбец = столбец

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Линейная комбинация столбцов матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

# Специальные случаи умножения

## Строка × матрица = строка

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{cases} a\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ +\, b\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \\ +\, c\begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Линейная комбинация строк матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix}$$

# Специальные случаи умножения

## Столбец и строка

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 1a + 2b + 3c + 4d$$

$\det = ?$

$\mathrm{trace} = ?$

$\mathrm{rank} = ?$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1a & 2a & 3a & 4a \\ 1b & 2b & 3b & 4b \\ 1c & 2c & 3c & 4c \\ 1d & 2d & 4d & 4d \end{bmatrix}$$

$\det = ?$

$\mathrm{trace} = ?$

$\mathrm{rank} = ?$

# Мини-тест

Какой вариант правильный?

| I | II | III |
|---|---|---|
| $(AB)^\top = AB$ | $(AB)^\top = A^\top B^\top$ | $(AB)^\top = B^\top A^\top$ |

# Мини-тест

Какой вариант правильный?

| I | II | III |
| --- | --- | --- |
| $\det I_{n\times n} = n$ | $\det I_{n\times n} = 1$ | $\det I_{n\times n} = 0$ |

# Мини-тест

Какой вариант правильный?

| I | II | III |
|---|---|---|
| $\operatorname{trace} I_{n\times n} = n$ | $\operatorname{trace} I_{n\times n} = 1$ | $\operatorname{trace} I_{n\times n} = 0$ |

# Мини-тест

Какой вариант правильный?

| I | II |
| --- | --- |
| $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ | $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ |

# Мини-тест

Какой вариант правильный?

I

$$\det(A^{\top}) = \det A$$

II

$$\det(A^{\top}) = \frac{1}{\det A}$$

# Мини-тест

Какой вариант правильный?

| I | II |
| --- | --- |
| $\det(A^{-1}) = \det A$ | $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$ |

# Мини-тест

Верно ли, что…

$$\boxed{\det(A + B) = \det A + \det B}$$

# Мини-тест

Верно ли, что…

$$\boxed{\operatorname{trace}(A + B) = \operatorname{trace} A + \operatorname{trace} B}$$

# Мини-тест

Верно ли, что…

$$\boxed{(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}}$$

# Мини-тест

Верно ли, что…

$$\boxed{(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}}$$

# Мини-тест

Верно ли, что…

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

# Мини-тест

Верно ли, что…

$$\boxed{\det(AB) = \det A + \det B}$$

# Мини-тест

Верно ли, что…

$$\boxed{\operatorname{trace}(AB) = \operatorname{trace} A + \operatorname{trace} B}$$

# Мини-тест

Верно ли, что…

$$\boxed{\det(AB) = \det A \cdot \det B}$$

# Мини-тест

Верно ли, что…

$$\boxed{\operatorname{trace}(AB) = \operatorname{trace} A \cdot \operatorname{trace} B}$$

# Мини-тест

Верно ли, что…

$$\boxed{\det(AB) = \det(BA)}$$

# Мини-тест

Верно ли, что…

$$\boxed{\mathrm{trace}(AB) = \mathrm{trace}(BA)}$$

# Мини-тест

Верно ли, что…

$$\boxed{\mathrm{trace}(ABC) = \mathrm{trace}(BCA)}$$

# Мини-тест

Верно ли, что…

$$\mathrm{trace}(ABC) = \mathrm{trace}(CBA)$$

# Хорошие типы матриц

## Диагональные

$$D = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

## Хорошо умножаются

$$D_1 D_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 c_2 \end{bmatrix} = D_2 D_1$$

# Хорошие типы матриц

## Диагональные

$$D = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

## Хорошо обращаются

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{bmatrix}$$

# Хорошие типы матриц

## Диагональные

$$D = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

Легко посчитать определитель

$$\det D = abc$$

# Хорошие типы матриц

## Треугольные

$$T = \begin{bmatrix} a & d & f \\ 0 & b & e \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

Легко посчитать определитель

$$\det T = abc$$

# Хорошие типы матриц

Треугольные

$$T = \begin{bmatrix} a & d & f \\ 0 & b & e \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

Умножаются… не так уж плохо

$$T_1 T_2 = \begin{bmatrix} a_1 & * & * \\ 0 & b_1 & * \\ 0 & 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & * & * \\ 0 & b_2 & * \\ 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 & ** & ** \\ 0 & b_1 b_2 & ** \\ 0 & 0 & c_1 c_2 \end{bmatrix} \neq T_2 T_1$$

# Хорошие типы матриц

## Треугольные

$$T = \begin{bmatrix} a & d & f \\ 0 & b & e \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

## Обращаются… ну так себе

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a & ** & ** \\ 0 & 1/b & ** \\ 0 & 0 & 1/c \end{bmatrix}$$

# Хорошие типы матриц

## Треугольные

$$T = \begin{bmatrix} a & d & f \\ 0 & b & e \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

В целом похуже диагональных

# Хорошие типы матриц

## Симметричные $\mathbb{S}^n$

$$S \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$S^\top = S$$

$$S = \begin{bmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{bmatrix}$$

## Примеры

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# Хорошие типы матриц

## Симметричные $\mathbb{S}^n$

$$S \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad S = \begin{bmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{bmatrix}$$

$$S^\top = S$$

## Обратная тоже симметричная

$S^{-1}$ существует $\Rightarrow$ $S^{-1} \in \mathbb{S}^n$

# Хорошие типы матриц

## Симметричные $\mathbb{S}^n$

$$S \in \mathbb{R}^{n \times n} \qquad S^\top = S \qquad S = \begin{bmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{bmatrix}$$

Произведение необязательно симметрично

$$A, B \in \mathbb{S}^n \quad \nRightarrow \quad AB \in \mathbb{S}^n$$

# Хорошие типы матриц

## Симметричные $\mathbb{S}^n$

$$S \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$S^\top = S$$

$$S = \begin{bmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{bmatrix}$$

Произведение необязательно симметрично

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = ?$$

# Хорошие типы матриц

## Симметричные $\mathbb{S}^n$

$$S \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$S^\top = S$$

$$S = \begin{bmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{bmatrix}$$

## Произведение необязательно симметрично

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

# Хорошие типы матриц

## Симметричные $\mathbb{S}^n$

$$S \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$S^\top = S$$

$$S = \begin{bmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{bmatrix}$$

Есть хорошие свойства…

… но о них в следующих лекциях

# Хорошие типы матриц

## Ортогональные $\mathrm{O}(n)$

$$V \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$V^{-1} = V^{\top}$$

$$V = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

## По определению:

$$V^{\top} V = \begin{bmatrix} — & v_1^{\top} & — \\ — & v_2^{\top} & — \\ — & v_3^{\top} & — \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^{\top} v_1 & v_1^{\top} v_2 & v_1^{\top} v_3 \\ v_2^{\top} v_1 & v_2^{\top} v_2 & v_2^{\top} v_3 \\ v_3^{\top} v_1 & v_3^{\top} v_2 & v_3^{\top} v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Хорошие типы матриц

## Ортогональные $\mathrm{O}(n)$

$$V \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$V^{-1} = V^\top$$

$$V = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

## Свойство столбцов

Попарно ортогональны: $v_1^\top v_2 = v_1^\top v_3 = v_2^\top v_3 = 0$

Нормированы: $\|v_1\| = \|v_2\| = \|v_3\| = 1$

# Хорошие типы матриц

## Ортогональные $\mathrm{O}(n)$

$$V \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$V^{-1} = V^{\top}$$

$$V = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

## Пример

$$V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

# Хорошие типы матриц

## Ортогональные $\mathrm{O}(n)$

$$V \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$V^{-1} = V^\top$$

$$V = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

## Пример

$$V^\top V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}+\frac{1}{4} & -\frac{3}{4}+\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4}+\frac{3}{4} & \frac{1}{4}+\frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Хорошие типы матриц

## Ортогональные $\mathrm{O}(n)$

$$V \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$V^{-1} = V^{\top}$$

$$V = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

## Определитель

$$V^{\top} V = I$$

# Хорошие типы матриц

## Ортогональные $\mathrm{O}(n)$

$$V \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$V^{-1} = V^\top$$

$$V = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

## Определитель

$$\det(V^\top V) = \det I$$

# Хорошие типы матриц

## Ортогональные $O(n)$

$$V \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$V^{-1} = V^\top$$

$$V = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

## Определитель

$$\det V^\top \cdot \det V = \det I$$

# Хорошие типы матриц

## Ортогональные $\mathrm{O}(n)$

$$V \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$V^{-1} = V^{\top}$$

$$V = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

## Определитель

$$\det V \cdot \det V = \det I$$

# Хорошие типы матриц

## Ортогональные $\mathrm{O}(n)$

$$V \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$V^{-1} = V^\top$$

$$V = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

## Определитель

$$(\det V)^2 = \det I$$

# Хорошие типы матриц

## Ортогональные $\mathrm{O}(n)$

$$V \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$V^{-1} = V^{\top}$$

$$V = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

## Определитель

$$(\det V)^2 = 1$$

# Хорошие типы матриц

## Ортогональные $\mathrm{O}(n)$

$$V \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$V^{-1} = V^{\top}$$

$$V = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

## Определитель

$$\det V = \pm 1$$

# Хорошие типы матриц

## Ортогональные $\mathrm{O}(n)$

$$V \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$V^{-1} = V^{\top}$$

$$V = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

## Групповые свойства

Замкнутость по умножению: $A, B \in \mathrm{O}(n) \;\Rightarrow\; AB \in \mathrm{O}(n)$

Замкнутость по обращению: $A \in \mathrm{O}(n) \;\Rightarrow\; A^{-1} \in \mathrm{O}(n)$

# Хорошие типы матриц

## Специальные ортогональные $\mathrm{SO}(n)$

$$U \in \mathrm{O}(n)$$

$$\det U = 1$$

$$U = \begin{bmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

## Групповые свойства

Замкнутость по умножению: $A, B \in \mathrm{SO}(n) \Rightarrow AB \in \mathrm{SO}(n)$

Замкнутость по обращению: $A \in \mathrm{SO}(n) \Rightarrow A^{-1} \in \mathrm{SO}(n)$

# Комплексные числа как вещественные матрицы

**Комплексные числа**

$$a + bi \in \mathbb{C}$$

**Матрицы**

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

**Базисные числа**

$$1, i \in \mathbb{C}$$

**Базисные матрицы**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

# Комплексные числа как вещественные матрицы

ITsMOre than a UNIVERSITY

## Комплексные числа

$$a + bi \in \mathbb{C}$$

## Матрицы

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

## Умножение чисел

$$(a + bi)(c + di) =$$
$$= (ac - bd) + (ad + bc)i$$

## Умножение матриц

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad + bc) & ac - bd \end{bmatrix}$$

# Комплексные числа как вещественные матрицы

## Комплексные числа

$$a + bi \in \mathbb{C}$$

## Матрицы

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

## Сопряжение

$$\overline{a + bi} = a - bi$$

## Транспонирование

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

# Комплексные числа как вещественные матрицы



## Комплексные числа

$$a + bi \in \mathbb{C}$$

## Матрицы

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

## Квадрат модуля

$$|a + bi| = a^2 + b^2$$

## Определитель

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = a^2 + b^2$$

# Комплексные числа как вещественные матрицы

## Комплексные числа

$$a + bi \in \mathbb{C}$$

## Матрицы

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

## Вещественность

$$a \in \mathbb{R}$$

## Симметричность

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \in \mathbb{S}^2$$

# Кватернионы как вещественные матрицы

| Кватернионы | | Матрицы |
|---|---|---|
| $a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ | | $\begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times4}$ |
| Сложение, умножение | $\sim$ | Сложение, умножение |
| Сопряжение | $\sim$ | Транспонирование |
| $\lvert a + bi + cj + dk\rvert^4$ | $\sim$ | Определитель |

# Невещественные матрицы: комплексные

$$\begin{bmatrix} i & 5+i & 1 \\ 3 & 1/2 & 6 \\ 0 & -4i & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

Всё то же самое,
только вместо транспонирования $\mathrm{T}$ эрмитово сопряжение $\mathrm{H}$

$$\begin{bmatrix} i & 5+i & 1 \\ 3 & 1/2 & 6 \\ 0 & -4i & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} -i & 3 & 0 \\ 5-i & 1/2 & 4i \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

# Невещественные матрицы: комплексные

$$\begin{bmatrix} i & 5+i & 1 \\ 3 & 1/2 & 6 \\ 0 & -4i & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

Вместо симметричных – эрмитовы

$$A^{\mathrm{H}} = A$$

Вместо ортогональных – унитарные

$$A^{-1} = A^{\mathrm{H}}$$

# Невещественные матрицы: комплексные

$$\begin{bmatrix} i & 5+i & 1 \\ 3 & 1/2 & 6 \\ 0 & -4i & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

Вместо симметричных – эрмитовы

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$$

Вместо ортогональных – унитарные

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i & i \\ i & -i \end{bmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -i & -i \\ -i & i \end{bmatrix}$$

# Невещественные матрицы: модулярные

Пример по модулю 12

$$\begin{bmatrix} 14 & 20 \\ 15 & 21 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \pmod{12}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 18 \\ 12 & 20 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \pmod{12}$$

Обратима ли матрица?

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

# Невещественные матрицы: модулярные

## Пример по модулю 12

$$\begin{bmatrix} 14 & 20 \\ 15 & 21 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \pmod{12}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 18 \\ 12 & 20 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \pmod{12}$$

## Обратима ли матрица?

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = 12 \equiv 0 \pmod{12}$$

# Невещественные матрицы: модулярные

Пример по модулю 12

$$\begin{bmatrix} 14 & 20 \\ 15 & 21 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \pmod{12}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 18 \\ 12 & 20 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \pmod{12}$$

Как обыкновенная – да!

Обратима ли матрица?

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = 12 \equiv 0 \pmod{12}$$

Как модулярная – нет!

# Функции от матриц

Если функция аналитическая (может быть задана рядом Тейлора)

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots,$$

то её можно вычислять и от квадратных матриц:

$$f(A) = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + c_3 A^3 + \cdots$$

$$\sin\left(\begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix}\right) \qquad \exp\left(\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}\right) \qquad \log\left(I + \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}\right)$$

# Функции от матриц

| Числовой вариант | Матричный вариант |
| --- | --- |
| $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ | $\sin^2 A + \cos^2 A = I$ |
| $e^0 = 1$ | $e^{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ |
| $e^{i\pi} = -1$ | $e^{\begin{bmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ |

Сегодня мы смотрели на матрицы как на гиперчисла

В следующих лекциях мы рассмотрим
более плодотворную точку зрения

# Всем большое спасибо!