Лабораторная работа №4

“Динамические системы”

По практической линейной алгебре

Преподаватель: Перегудин А.А.

Выполнил: Нгуен Тхань Чунг

Группа: R3235

Задание 1. Придумайте непрерывное.

1. Система асимптотически устойчива, при этом если x(0) = v_1, то x(t) ∈ Span{v_1}, а если x(0) = v_2, то x(t) ∈ Span{v_2} при всех t ≥ 0.

- $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

  - $\lambda_1 = -5;\ \lambda_2 = -2$
  - $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix};\ v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

- Первый случай: $x(0) = v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
  - $x(t) = e^{At}.x(0) = e^{At}.\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-5t} \\ e^{-5t} \end{bmatrix} = e^{-5t}.\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
  - $x(t)\ \epsilon\ Span\{v_1\}$

- Второй случай: $x(0) = v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$
  - $x(t) = e^{At}.x(0) = e^{At}.\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}.e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} = e^{-2t}.\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$
  - $x(t)\ \epsilon\ Span\{v_2\}$

2. Система неустойчива, при этом у матрицы A не существует двух неколлинеарных собственных векторов.

- $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$
  - $\lambda_1 = 3\ ;\quad \lambda_2 = -3$
  - $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix};\ v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

- $\lambda_1 = 3\ >\ 0\ \rightarrow$ Система неустойчива.

3. Система неустойчива, при этом если x(0) = v_1, то $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ = 0.

- $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$
    - $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = 2$
    - $v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$; $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

- $\lambda_2 = 2 > 0 \rightarrow$ Система неустойчива.
- $x(0) = v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$
    - $x(t) = e^{At}.x(0) = e^{At}.\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ 3.e^{-2t} \end{bmatrix}$
    - $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \left(\frac{1}{3}.e^{-2t}\right) = 0$
    - $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to\infty} (e^{-2t}) = 0$

4. Система асимптотически устойчива, при этом матрица A $\in R^2$ имеет комплексные собственные вектора вида $v_1 \pm v_2 i \in C^2$.

- ❖ $v_1 = \left(-\frac{2}{5}, 1\right)$; $v_2 = \left(\frac{1}{5}, 0\right)$
- $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$
    - $\lambda_1 = -1 - i$; $\lambda_2 = -1 + i$
    - $v_1 = \begin{bmatrix} \frac{-2+i}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$; $v_2 = \begin{bmatrix} \frac{-2-i}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$

5. Система неустойчива, при этом матрица А имеет такие же собственные вектора, как в предыдущем пункте.

- $v_1 = \left(-\frac{1}{8},\ 1\right);\ v_2 = \left(\frac{\sqrt{15}}{8}, 0\right)$

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$
  - $\lambda_1 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2} i\ ;\ \lambda_2 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2} i$
  - $v_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{15}}{8} i \\ 1 \end{bmatrix};\ v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{15}}{8} i \\ 1 \end{bmatrix}$

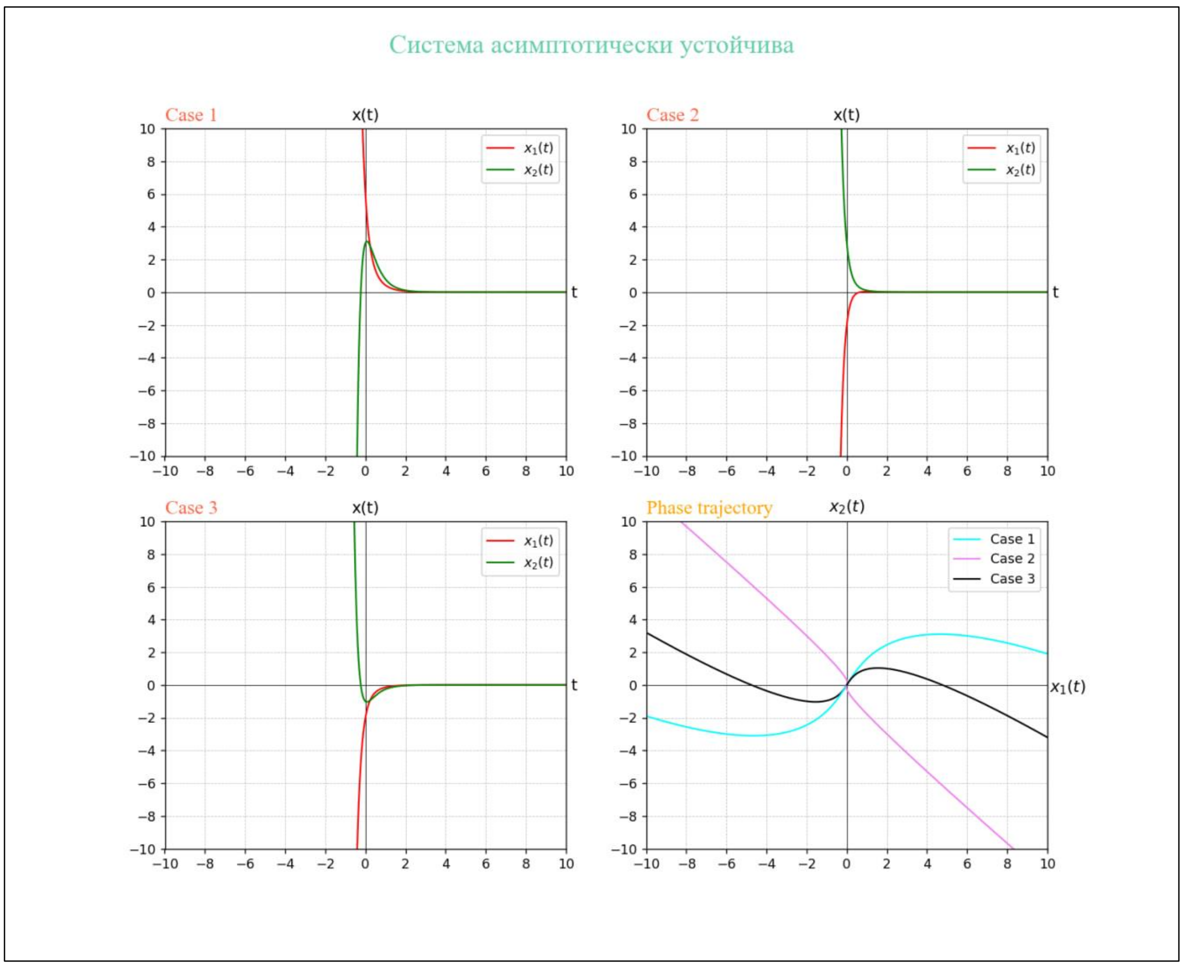
6. Система не является асимптотически устойчивой, но не является и неустойчивой, при этом матрица А имеет собственные вектора такие же, как в пункте 4.

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -8 & -2 \end{bmatrix}$
  - $\lambda_{1,2} = \pm 6\, i$
  - $v_{1,2} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \pm 6i \end{bmatrix}$

Задание 2. Замоделируйте непрерывное.

1. Система асимптотически устойчива, при этом если x(0) = v_1, то x(t) ∈ Span{v_1}, а если x(0) = v_2, то x(t) ∈ Span{v_2} при всех t ≥ 0.

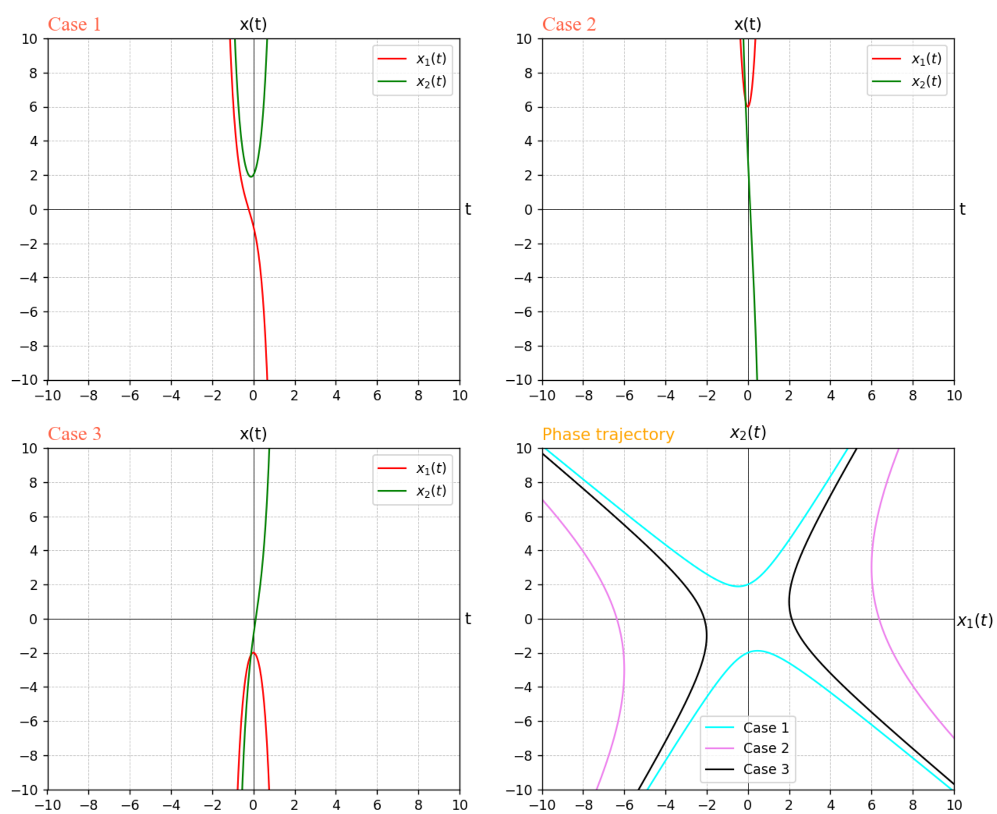
- $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$
- x(0) = $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$
  - $x(t) = e^{At}.x(0) = e^{At}.\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} + 3e^{-5t} \\ 6e^{-2t} - 3e^{5t} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} + 3e^{-5t} \\ 6e^{-2t} - 3e^{5t} \end{bmatrix}$
- x(0) = $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$
  - $x(t) = e^{At}.x(0) = e^{At}.\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{7}{3}e^{-5t} \\ \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{7}{3}e^{-5t} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{7}{3}e^{-5t} \\ \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{7}{3}e^{-5t} \end{bmatrix}$
- x(0) = $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$
  - $x(t) = e^{At}.x(0) = e^{At}.\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-e^{3t} - 1}{e^{5t}} \\ \frac{-2e^{3t}+1}{e^{5t}} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-2t} - e^{-5t} \\ -2e^{-2t} + e^{5t} \end{bmatrix}$



2. Система неустойчива, при этом у матрицы A не существует двух неколлинеарных собственных векторов.

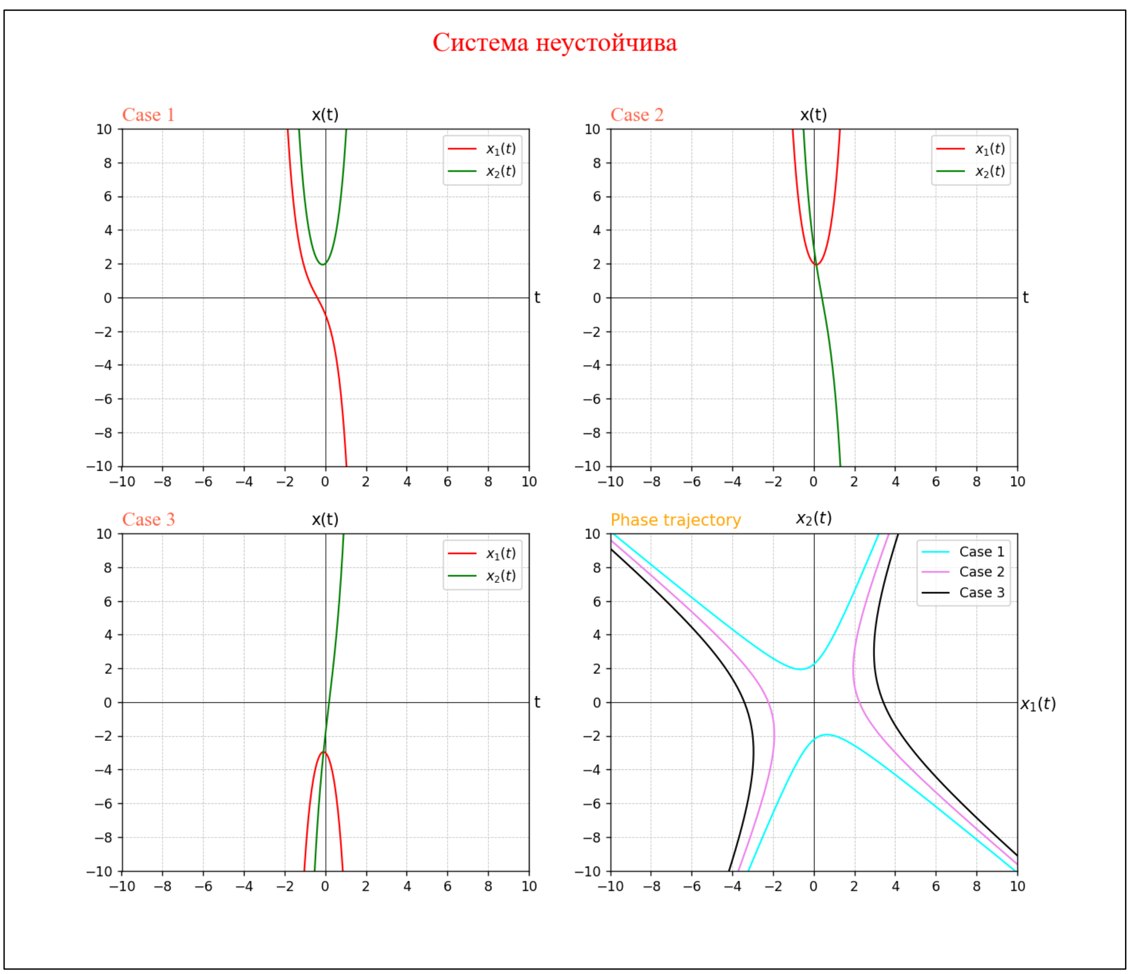
- $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$
- x(0) = $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$
  - $x(t) = e^{At}.x(0) = e^{At}.\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3}e^{3t} + \frac{1}{3}e^{-3t} \\ \frac{4}{3}e^{3t} + \frac{2}{3}e^{-3t} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3}e^{3t} + \frac{1}{3}e^{-3t} \\ \frac{4}{3}e^{3t} + \frac{2}{3}e^{-3t} \end{bmatrix}$
- x(0) = $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$
  - $x(t) = e^{At}.x(0) = e^{At}.\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{3t} + 3e^{-3t} \\ -3e^{3t} + 6e^{-3t} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{3t} + 3e^{-3t} \\ -3e^{3t} + 6e^{-3t} \end{bmatrix}$
- x(0) = $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$
  - $x(t) = e^{At}.x(0) = e^{At}.\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{3t} - e^{-3t} \\ e^{3t} - 2e^{-3t} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{3t} - e^{-3t} \\ e^{3t} - 2e^{-3t} \end{bmatrix}$

Система неустойчива



3. Система неустойчива, при этом если x(0) = v_1, то $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

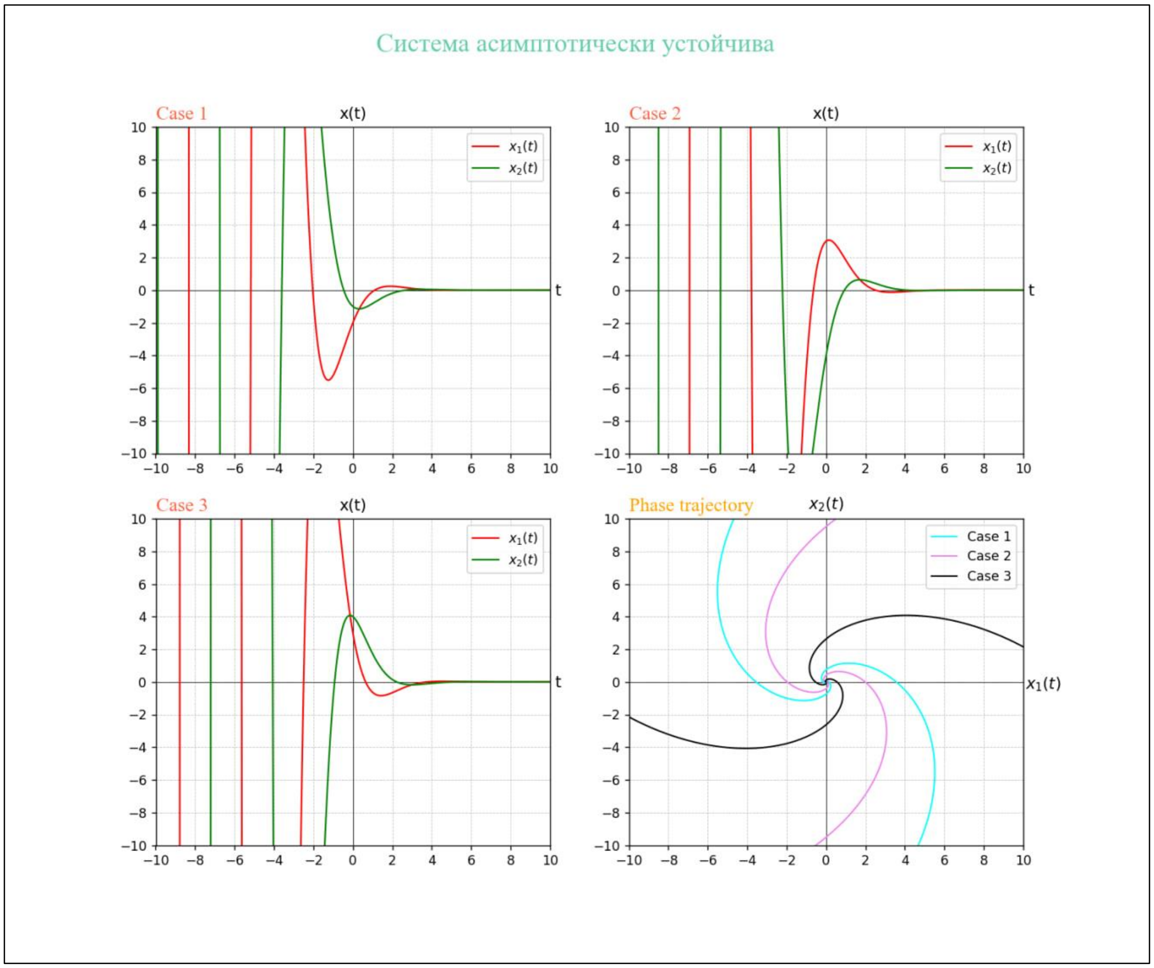
- $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$
- x(0) = $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$
  - $x(t) = e^{At}.x(0) = e^{At}.\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4}e^{2t} + \frac{1}{4}e^{-2t} \\ \frac{5}{4}e^{2t} + \frac{3}{4}e^{-2t} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4}e^{2t} + \frac{1}{4}e^{-2t} \\ \frac{5}{4}e^{2t} + \frac{3}{4}e^{-2t} \end{bmatrix}$
- x(0) = $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
  - $x(t) = e^{At}.x(0) = e^{At}.\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}e^{2t} + \frac{5}{4}e^{-2t} \\ -\frac{3}{4}e^{2t} + \frac{15}{4}e^{-2t} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}e^{2t} + \frac{5}{4}e^{-2t} \\ -\frac{3}{4}e^{2t} + \frac{15}{4}e^{-2t} \end{bmatrix}$
- x(0) = $\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$
  - $x(t) = e^{At}.x(0) = e^{At}.\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{4}e^{2t} - \frac{5}{4}e^{-2t} \\ \frac{7}{4}e^{2t} - \frac{15}{4}e^{-2t} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{4}e^{2t} - \frac{5}{4}e^{-2t} \\ \frac{7}{4}e^{2t} - \frac{15}{4}e^{-2t} \end{bmatrix}$



4. Система асимптотически устойчива, при этом матрица A ∈ R^2 имеет комплексные собственные вектора вида $v_1 \pm v_2 i \in C^2$.

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$
  - $\lambda_1 = -1 - i$; $\lambda_2 = -1 + i$
  - $v_1 = \begin{bmatrix} \frac{-2+i}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$; $v_2 = \begin{bmatrix} \frac{-2-i}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$
- $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2+i}{5} & \frac{-2-i}{5} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1-i & 0 \\ 0 & -1+i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-2+i}{5} & \frac{-2-i}{5} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$
  - $A = \begin{bmatrix} \frac{-2}{5} & \frac{-1}{5} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-2}{5} & \frac{-1}{5} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$
  - $e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{5} & \frac{-1}{5} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -e^{-t}cos(t) & e^{-t}sin(t) \\ -e^{-t}sin(t) & -e^{-t}cos(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

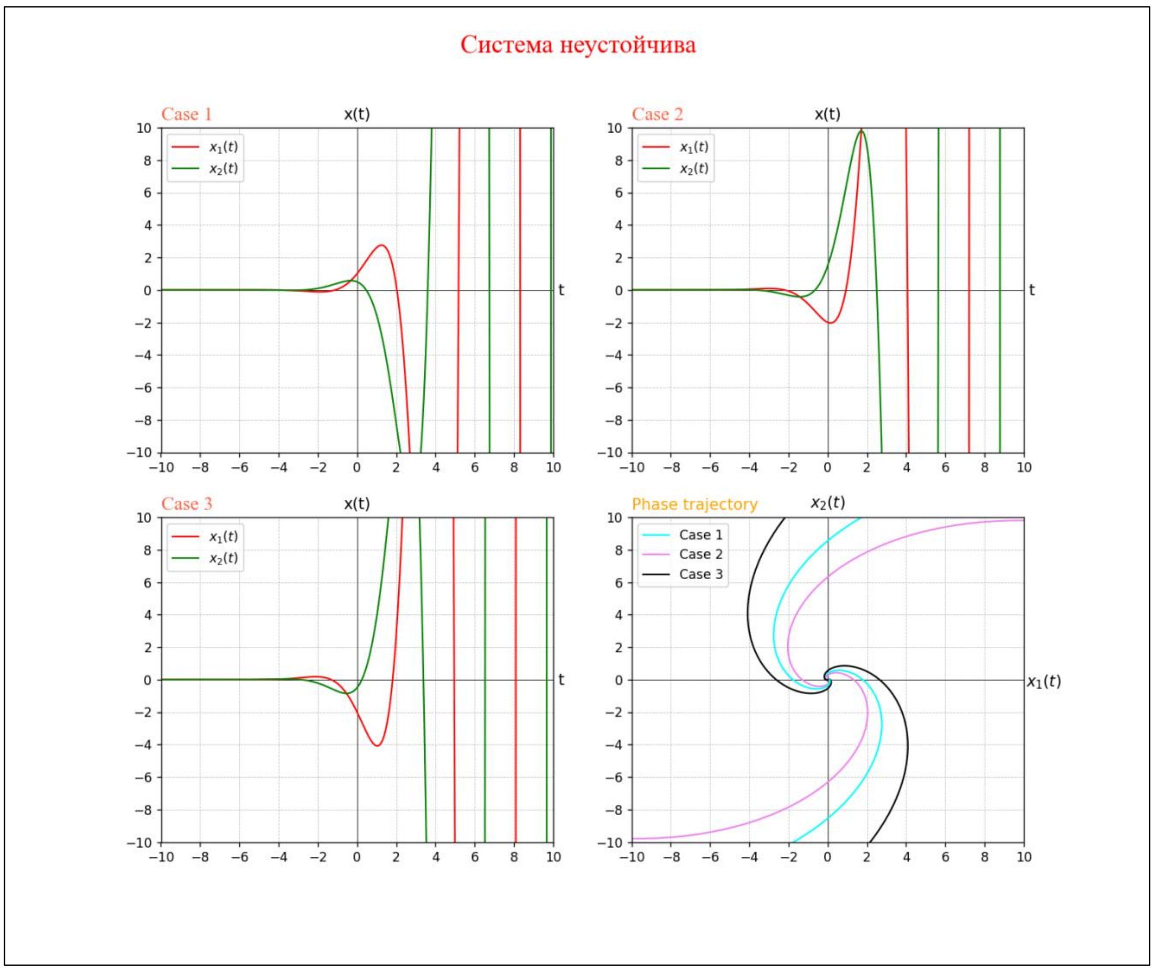
- x(0) = $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
  - $x(t) = e^{At}.x(0) \rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{-t}cos(t) + e^{-t}sin(t) \\ -e^{-t}cos(t) - 2e^{-t}sin(t) \end{bmatrix}$
- x(0) = $\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$
  - $x(t) = e^{At}.x(0) \rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-t}cos(t) + 4e^{-t}sin(t) \\ -4e^{-t}cos(t) + 3sin(t) \end{bmatrix}$
- x(0) = $\begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$
  - $x(t) = e^{At}.x(0) \rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-t}cos(t) + 4e^{-t}sin(t) \\ 4e^{-t}cos(t) + 3e^{-t}sin(t) \end{bmatrix}$



5. Система неустойчива, при этом матрица A имеет такие же собственные вектора, как в предыдущем пункте.

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
  - $\lambda_1 = 1 - i$; $\lambda_2 = 1 + i$
  - $v_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$; $v_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$
- $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 - i & 0 \\ 0 & 1 + i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$
  - $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$
  - $e^{At} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^t.cos(t) & -e^t.sin(t) \\ e^t.sin(t) & e^t.cos(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

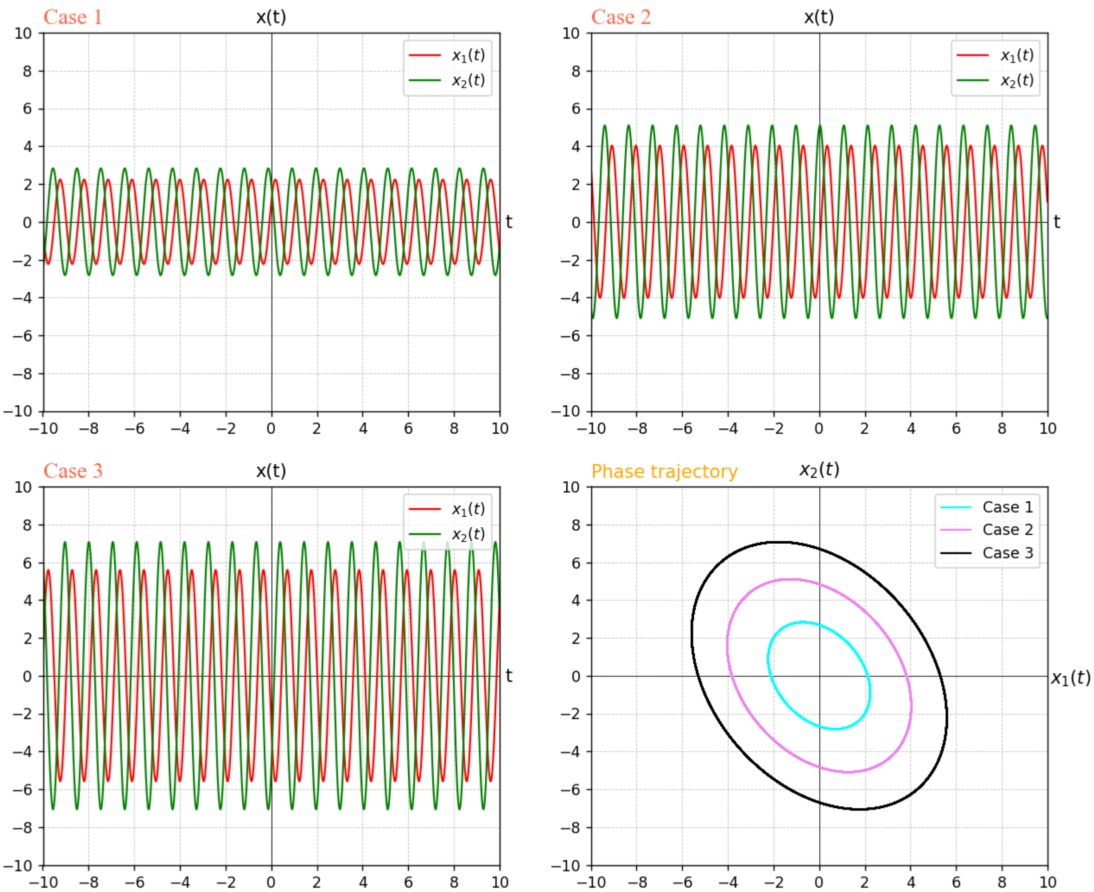
- x(0) = $\begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$
  - $x(t) = e^{At}.x(0) \rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t}.cos(t) + 0{,}5.e^{t}.sin(t) \\ 0{,}5.e^{t}.cos(t) - e^{t}.sin(t) \end{bmatrix}$
- x(0) = $\begin{bmatrix} -2 \\ 1{,}5 \end{bmatrix}$
  - $x(t) = e^{At}.x(0) \rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{t}.cos(t) + 1{,}5.e^{t}.sin(t) \\ 1{,}5.e^{t}.cos(t) + 2e^{t}.sin(t) \end{bmatrix}$
- x(0) = $\begin{bmatrix} -2 \\ -0.5 \end{bmatrix}$
  - $x(t) = e^{At}.x(0) \rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{t}.cos(t) - 0{,}5.e^{t}.sin(t) \\ -0{,}5.e^{t}.cos(t) + 2e^{t}.sin(t) \end{bmatrix}$



6. Система не является асимптотически устойчивой, но не является и неустойчивой, при этом матрица A имеет собственные вектора такие же, как в пункте 4.

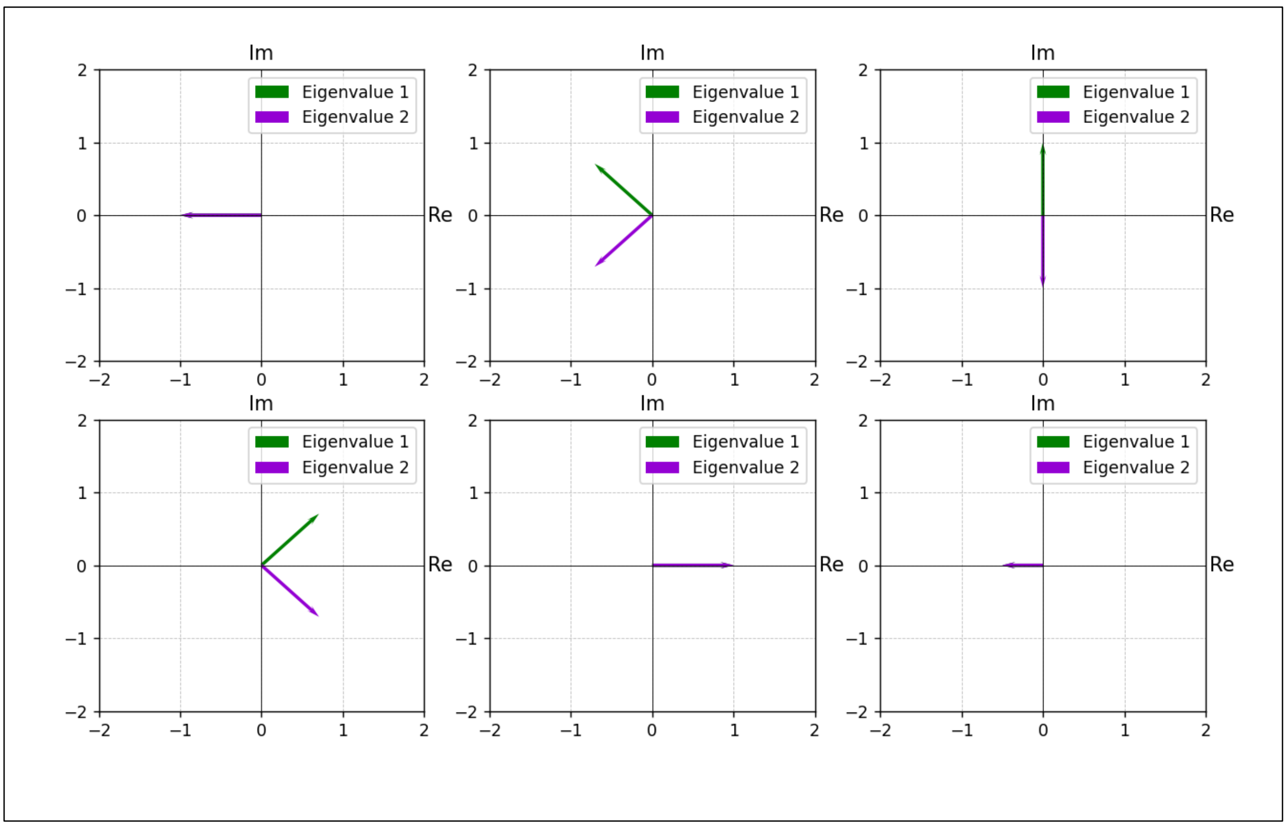
- $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -8 & -2 \end{bmatrix}$
    - $\lambda_{1,2} = \pm 6\, i$
    - $v_{1,2} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \pm 6i \end{bmatrix}$
- $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -2 + 6i & -2 - 6i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6i & 0 \\ 0 & -6i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -2 + 6i & -2 - 6i \end{bmatrix}^{-1}$
    - $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}^{-1}$
    - $e^{At} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos(6t) & sin(6t) \\ -sin(6t) & cos(6t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}^{-1}$
- x(0) = $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
    - $x(t) = e^{At}.x(0) \rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(6t) + 2sin(6t) \\ 2cos(6t) - 2sin(6t) \end{bmatrix}$
- x(0) = $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$
    - $x(t) = e^{At}.x(0) \rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2cos(6t) + 3.5sin(6t) \\ 5cos(6t) + sin(6t) \end{bmatrix}$
- x(0) = $\begin{bmatrix} -2.5 \\ -5 \end{bmatrix}$
    - $x(t) = e^{At}.x(0) \rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.5cos(6t) - 5sin(6t) \\ -5cos(6t) + 5sin(6t) \end{bmatrix}$

Система устойчива (но не асимптотически)

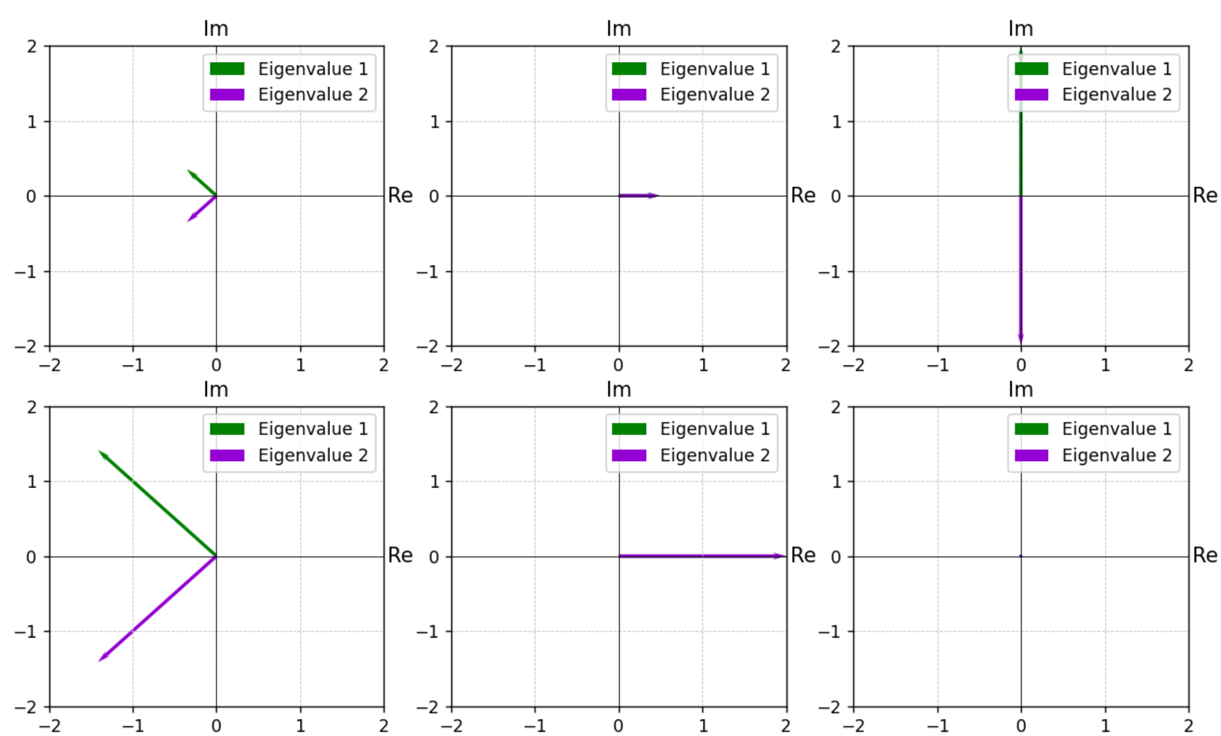


Задание 3. Придумайте дискретное

1. $\lambda_{1,2} = -1$ ➢ $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	2. $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} i$ ➢ $A = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$	3. $\lambda_{1,2} = \pm i$ ➢ $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$
4. $\lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} i$ ➢ $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$	5. $\lambda_{1,2} = 1$ ➢ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	6. $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}$ ➢ $A = \begin{bmatrix} -0.5 & 5 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$



7. $\lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{2}i$ ➢ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1{,}25 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	8. $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}$ ➢ $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 2 & 0.5 \end{bmatrix}$	9. $\lambda_{1,2} = \pm 2$ ➢ $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$
10. $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ ➢ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$	11. $\lambda_{1,2} = 2$ ➢ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$	12. $\lambda_{1,2} = 0$ ➢ $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$



Задание 4. Замоделируйте дискретное.

1. $\lambda_{1,2} = -1$

- $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
- $x(k) = A^k . x_0$
- $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
  - ✓ $x(k) = A^k . \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = P.D^k.P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^k . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
  - ✓ $x(k) = \begin{bmatrix} 2.(-1)^k - (-1)^k.k \\ (-1)^k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.(-1)^k - (-1)^k.k \\ (-1)^k \end{bmatrix}$

2. $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} i$

- $A = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$
- $x(k) = A^k . x_0$
- $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
  - ✓ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
  - ✓ $J = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \rightarrow J^k = \begin{bmatrix} cos\left(\frac{k.\pi}{4}\right) & sin\left(\frac{k.\pi}{4}\right) \\ -sin\left(\frac{k.\pi}{4}\right) & cos\left(\frac{k.\pi}{4}\right) \end{bmatrix}$
  - ✓ $A^k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos\left(\frac{k.\pi}{4}\right) & sin\left(\frac{k.\pi}{4}\right) \\ -sin\left(\frac{k.\pi}{4}\right) & cos\left(\frac{k.\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\left(\frac{k.\pi}{4}\right) & -sin\left(\frac{k.\pi}{4}\right) \\ sin\left(\frac{k.\pi}{4}\right) & cos\left(\frac{k.\pi}{4}\right) \end{bmatrix}$

❖ $x(k) = A^k . x(0) = \begin{bmatrix} cos\left(\frac{k.\pi}{4}\right) & -sin\left(\frac{k.\pi}{4}\right) \\ sin\left(\frac{k.\pi}{4}\right) & cos\left(\frac{k.\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\left(\frac{k.\pi}{4}\right) - 2sin\left(\frac{k.\pi}{4}\right) \\ 2cos\left(\frac{k.\pi}{4}\right) + sin\left(\frac{k.\pi}{4}\right) \end{bmatrix}$

$3. \lambda_{1,2} = \pm i$

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$
- $x(k) = A^k . x_0$
- $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
  - ✓ $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$
  - ✓ $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} \rightarrow J^k = \begin{bmatrix} cos\left(\frac{k.\pi}{2}\right) & -sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) \\ sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) & cos\left(\frac{k.\pi}{2}\right) \end{bmatrix}$
  - ✓ $A^k = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos\left(\frac{k.\pi}{2}\right) & -sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) \\ sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) & cos\left(\frac{k.\pi}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} cos\left(\frac{k.\pi}{2}\right) - 2sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) & -5sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) \\ sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) & cos\left(\frac{k.\pi}{2}\right) + 2sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) \end{bmatrix}$$

- ❖ $x(k) = A^k . x(0) = \begin{bmatrix} cos\left(\frac{k.\pi}{2}\right) + 2sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) & 5sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) \\ -sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) & cos\left(\frac{k.\pi}{2}\right) - 2sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\left(\frac{k.\pi}{2}\right) - 12sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) \\ 2cos\left(\frac{k.\pi}{2}\right) + 5sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) \end{bmatrix}$$

4. $\lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} i$

- $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$
- $x(k) = A^k . x_0$
- $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
  - ✓ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
  - ✓ $J = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \rightarrow J^k = \begin{bmatrix} cos\left(\frac{k.\pi}{4}\right) & -sin\left(\frac{k.\pi}{4}\right) \\ sin\left(\frac{k.\pi}{4}\right) & cos\left(\frac{k.\pi}{4}\right) \end{bmatrix}$
  - ✓ $A^k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos\left(\frac{k.\pi}{4}\right) & -sin\left(\frac{k.\pi}{4}\right) \\ sin\left(\frac{k.\pi}{4}\right) & cos\left(\frac{k.\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\left(\frac{k.\pi}{4}\right) & sin\left(\frac{k.\pi}{4}\right) \\ -sin\left(\frac{k.\pi}{4}\right) & cos\left(\frac{k.\pi}{4}\right) \end{bmatrix}$

❖ $x(k) = A^k . x(0) = \begin{bmatrix} cos\left(\frac{k.\pi}{4}\right) & sin\left(\frac{k.\pi}{4}\right) \\ -sin\left(\frac{k.\pi}{4}\right) & cos\left(\frac{k.\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2cos\left(\frac{k.\pi}{4}\right) + sin\left(\frac{k.\pi}{4}\right) \\ cos\left(\frac{k.\pi}{4}\right) - 2sin\left(\frac{k.\pi}{4}\right) \end{bmatrix}$

5. $\lambda_{1,2} = 1$

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $x(k) = A^k . x_0$
- $x(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$
  - ✓ $x(k) = A^k . \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = P \cdot D^k \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k . \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$
  - ✓ $x(k) = \begin{bmatrix} 2k - 2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k - 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

6. $\lambda_{1,2} = -\dfrac{1}{2}$

- $A = \begin{bmatrix} -0.5 & 5 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$
- $x(k) = A^k . x_0$
- $x(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

✓ $x(k) = A^k . \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = P \cdot D^k \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}^k . \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

✓ $x(k) = \begin{bmatrix} -2.(-0.5)^k - 10.(-0.5)^k . k \\ (-0.5)^k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.(-0.5)^k - 10.(-0.5)^k . k \\ (-0.5)^k \end{bmatrix}$

7. $\lambda_{1,2} = \pm\dfrac{1}{2}i$

- $A = \begin{bmatrix} 1 & -1,25 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
- $x(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$
  - ✓ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$
  - ✓ $J = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ -sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} \rightarrow J^k = \begin{bmatrix} cos\left(\frac{k.\pi}{2}\right) & sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) \\ -sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) & cos\left(\frac{k.\pi}{2}\right) \end{bmatrix}$
  - ✓ $A^k = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos\left(\frac{k.\pi}{2}\right) & sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) \\ -sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) & cos\left(\frac{k.\pi}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

❖ $x(k) = A^k . x(0) = \begin{bmatrix} cos\left(\frac{k.\pi}{2}\right) + 2sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) & 5sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) \\ -sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) & cos\left(\frac{k.\pi}{2}\right) - 2sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2cos\left(\frac{k.\pi}{2}\right) - 9sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) \\ 2cos\left(\frac{k.\pi}{2}\right) - 8sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) \end{bmatrix}$$

8. $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}$

- $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 2 & 0.5 \end{bmatrix}$
- $x(k) = A^k . x_0$
- $x(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$
  - ✓ $x(k) = A^k . \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = P \cdot D^k \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}^k . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$
  - ✓ $x(k) = \begin{bmatrix} -2.(0.5)^k \\ (-2k+1).(0.5)^k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.(0.5)^k \\ (-2k+1).(0.5)^k \end{bmatrix}$

9. $\lambda_{1,2} = \pm 2$

- $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$
- $x(k) = A^k . x_0$
- $x(0) = \begin{bmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$
  - ✓ $x(k) = A^k . \begin{bmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} = P \cdot D^k \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^k . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$
  - ✓ $x(k) = \begin{bmatrix} 0{,}5.(-1)^k.2^k - 0{,}25.2^k \\ 0{,}5.(-1)^k.2^k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5.(-1)^k.2^k - 0{,}25.2^k \\ 0{,}5.(-1)^k.2^k \end{bmatrix}$

10. $\lambda_{1,2} = \pm 2i$

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$
- $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
  - ✓ $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$
  - ✓ $J = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ -sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} \rightarrow J^k = \begin{bmatrix} cos\left(\frac{k.\pi}{2}\right) & sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) \\ -sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) & cos\left(\frac{k.\pi}{2}\right) \end{bmatrix}$
  - ✓ $A^k = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos\left(\frac{k.\pi}{2}\right) & sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) \\ -sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) & cos\left(\frac{k.\pi}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

❖ $x(k) = A^k.x(0) = \begin{bmatrix} cos\left(\frac{k.\pi}{2}\right) + sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) & 2sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) \\ -sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) & cos\left(\frac{k.\pi}{2}\right) - sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\left(\frac{k.\pi}{2}\right) + 5sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) \\ 2cos\left(\frac{k.\pi}{2}\right) - 3sin\left(\frac{k.\pi}{2}\right) \end{bmatrix}$$

11. $\lambda_{1,2} = 2$

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$
- $x(k) = A^k.x_0$
- $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$
  - ✓ $x(k) = A^k.\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = P \cdot D^k \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^k . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$
  - ✓ $x(k) = \begin{bmatrix} 2^k \\ -2.2^k + 5.2^k.k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^k \\ -2.2^k + 5.2^k.k \end{bmatrix}$

12. $\lambda_{1,2} = 0$

- $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$
- $x(k) = A^k . x_0$
- $x(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$
  - ✓ $x(k) = A^k . \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = P \cdot D^k \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k . \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$
  - ✓ $x(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $[k > 1]$
  - ✓ $x(k) = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \end{bmatrix}$ $[k = 1]$

Задание 5. Осциллятор ?

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 , \\ \dot{x_2} = ax_1 + bx_2 \end{cases}$$

1. a < 0, b = 0
   - $\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$
   - $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}, b = 0$
   - $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix}$
   - $|A - \lambda I| = 0 \leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ a & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow \lambda^2 - a = 0 \leftrightarrow \lambda^2 = a \ \ (a < 0) \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{a}. i$
   - $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 cos(mt) & d_1 sin(mt) \\ c_2 cos(mt) & d_2 sin(mt) \end{bmatrix}, \ c, \ d \in R; \ m = \sqrt{|a|}$

   ➡ Система устойчива

2. a < 0, b < 0

- ✓ $\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$
- ✓ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$
- ✓ $|A - \lambda I| = 0 \leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ a & b - \lambda \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow \lambda^2 - b\lambda - a = 0$

$$\leftrightarrow \Delta = b^2 + 4a$$

❖ $\Delta > 0$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = \dfrac{b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2}, \ b < 0, \quad b < \sqrt{b^2 + 4a} \quad \rightarrow \ \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 = \dfrac{b - \sqrt{b^2 + 4a}}{2}, \ b < 0, \quad -\sqrt{b^2 + 4a} < 0 \rightarrow \ \lambda_2 < 0 \end{array}\right.$$

➡ Система асимптотически устойчива.

❖ $\Delta < 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{b \pm i\sqrt{b^2 + 4a}}{2} \rightarrow Re(\lambda) = \frac{b}{2}, \ b < 0 \rightarrow Re(\lambda) < 0$$

➡ Система асимптотически устойчива.

❖ $\Delta = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b}{2a} < 0 \ ; (a < 0, b < 0)$$

➡ Система асимптотически устойчива.

3. a > 0, b = 0

- $\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$
- $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}, b = 0$
- $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix}$
- $|A - \lambda I| = 0 \leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ a & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow \lambda^2 - a = 0 \leftrightarrow \lambda^2 = a \ \ (a > 0) \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{a}$

→ Поскольку матрица A имеет одно собственное значение больше 0, то система неустойчива.

4. a > 0, b < 0

- $\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$
- $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$
- $|A - \lambda I| = 0 \leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ a & b - \lambda \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow \lambda^2 - b\lambda - a = 0$

$$\leftrightarrow \Delta = b^2 + 4a$$

- $\Delta > 0$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2} \\ \lambda_2 = \dfrac{b - \sqrt{b^2 + 4a}}{2} < 0 \ (\forall a > 0, b < 0) \end{cases}$$

✓ $\lambda_1 = \frac{b + \sqrt{b^2+4a}}{2} < 0$

$\leftrightarrow b + \sqrt{b^2 + 4a} < 0 \leftrightarrow \sqrt{b^2 + 4a} < -b \leftrightarrow b^2 + 4a < b^2$

$\leftrightarrow 4a < 0$

$\leftrightarrow a < 0$ (Противоречит начальному условию задачи при $a > 0$)

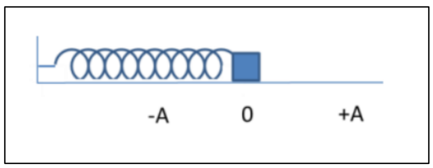
$$\text{И так,} \ \ \lambda_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2} > 0$$

Система неустойчива.

Для каждого из 4-х случаев придумайте физическую систему, движение которой приближённо подчиняется указанному уравнению. Постройте графики движения x(t). Дайте физическую интерпретацию переменных $x_1,\ x_2$ а также параметров a и b.

1. a < 0, b = 0

- Пружинный маятник — механическая система, состоящая из пружины с коэффициентом упругости (твердости) k, один конец которой жестко закреплен, другой конец несет нагрузку массой m.



- Второй закона Ньютона для такой системы при условии ***отсутствия внешних сил и сил трения*** имеет вид:

$$\boxed{ma = -kx \leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

✓ $\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = v \end{cases} \to \begin{cases} x_1' = x_2 & (x_1' = v) \\ x_2' = -\frac{k}{m}x_1 & (x_2' = a) \end{cases}$

✓ $\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

✓ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix}$

✓ При k = 10 $\left(\frac{N}{m}\right)$ и m = 1 (Kg) $\to A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 0 \end{bmatrix}$

- ✓ При $x(0)=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-cos(\sqrt{10}t)+\frac{\sqrt{10}}{5}.sin(\sqrt{10}t)\\2.cos(\sqrt{10}t)+\sqrt{10}.sin(\sqrt{10}t)\end{bmatrix}$

2. a < 0, b < 0

- Если на систему оказывают влияние внешние силы, то уравнение колебаний перепишется так:

$$\boxed{m\overline{a}=\overline{F_c}+\overline{F_y}}$$

Где: $F_c=c.v=c.\dot{x}$ - сила сопротивления.

$F_y=-k.x$ - сила упругости.

В случае наличия затухания, пропорционального скорости колебаний с коэффициентом c:

$$\boxed{ma=-F_y-F_c\leftrightarrow\ddot{x}+\frac{c}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=0}$$

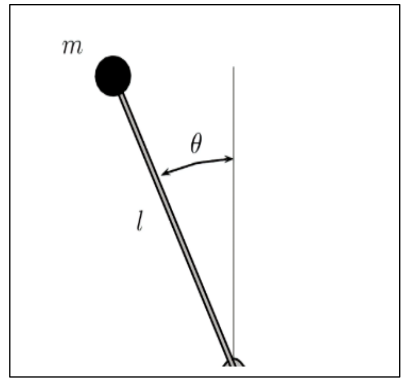
- ✓ $\begin{cases}x_1=x\\x_2=v\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x_1'=x_2 & (x_1'=v)\\x_2'=-\frac{c}{m}x_2-\frac{k}{m}x_1 & (x_2'=a)\end{cases}$

- ✓ $\begin{bmatrix}\dot{x_1}\\\dot{x_2}\end{bmatrix}=A\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-\frac{k}{m} & -\frac{c}{m}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$

- ✓ При k = 1 $\left(\frac{N}{m}\right)$; c = 2; m = 1 (Kg) $\rightarrow A=\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & -2\end{bmatrix}$

- ✓ При $x(0)=\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(7t+2).e^{-t}\\(-7t+5).e^{-t}\end{bmatrix}$

3. a > 0, b = 0



- Перевернутый маятник с неподвижной точкой опоры.

С неподвижной точкой опоры равнение движения аналогично прямому маятнику за исключением того, что знак углового положения измеряется от вертикальной позиции неустойчивого равновесия:

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{l}.sin(\theta) = 0$$

При достаточно малом θ, то есть: $sin(\theta) \approx \theta \ \rightarrow \ddot{\theta} - \frac{g}{l}.\theta = 0$

- ✓ $\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \omega \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1' = x_2 & (x_1' = \omega) \ \text{« угловая скорость »} \\ x_2' = \frac{g}{l}x_1 & (x_2' = \ \varepsilon) \ \text{« угловое ускорение »} \end{cases}$

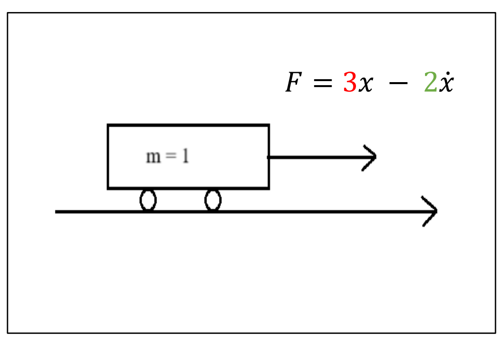
- ✓ $\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

- ✓ При g = 9.8 $\left(\frac{m}{s^2}\right)$; l = 2.45 (m) $\rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

- ✓ При $x(0) = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{4} \\ \frac{2\pi}{3} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\pi}{24}(e^{-2t} + 7.e^{2t}) \\ \frac{\pi}{12}(e^{-2t} + 7.e^{2t}) \end{bmatrix}$

4. a > 0, b < 0

- Тележка с ПД – регулятором (без трения).



$$\boxed{ma = F \leftrightarrow \ddot{x} = 3x - 2\dot{x}}$$

- ✓ $\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = v \end{cases} \to \begin{cases} x_1' = x_2 & (x_1' = v) \\ x_2' = 3x_1 - 2x_2 & (x_2' = a) \end{cases}$

- ✓ $\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

- ✓ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

- ✓ При $x(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{t} - e^{-3t} \\ -e^{-t} + 3e^{3t} \end{bmatrix}$

Результаты (графики)