Нахождение решения систем уравнений

Как посчитать экспоненту и степень матрицы при нахождении общего решения уравнений?

<u>Нахождение матричной экспоненты:</u>
Воспользуемся жордановым разложением:

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$$

Тогда

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{J_n t} \end{bmatrix}$$

Где J_i – жордановы блоки.

Матричная экспонента стандартных жордановых блоков.

Матричный блок J_i	Его экспонента $e^{J_i t}$
$[\lambda]$	$[e^{\lambda t}]$
$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \frac{t^3}{3!}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} e^{at}\cos(bt) & e^{at}\sin(bt) \\ -e^{at}\sin(bt) & e^{at}\cos(bt) \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} e^{at}\cos(bt) & e^{at}\sin(bt) & te^{at}\cos(bt) & te^{at}\sin(bt) \\ -e^{at}\sin(bt) & e^{at}\cos(bt) & -te^{at}\sin(bt) & te^{at}\cos(bt) \\ 0 & 0 & e^{at}\cos(bt) & e^{at}\sin(bt) \\ 0 & 0 & -e^{at}\sin(bt) & e^{at}\cos(bt) \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Заметьте:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda \boldsymbol{I} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \lambda \boldsymbol{I} + \boldsymbol{U} \to e^{Jt} = e^{(\lambda \boldsymbol{I} + \boldsymbol{U})t} = \underbrace{e^{\lambda t}}_{\text{скаляр}} \cdot \underbrace{e^{\boldsymbol{U}t}}_{\text{матрица}}$$

Нахождение матричной степени:

Воспользуемся жордановым разложением:

$$A^k = PJ^kP^{-1}$$

Тогда

$$J^k = \begin{bmatrix} J_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_n^k \end{bmatrix}$$

Где J_i – жордановы блоки.

Матричная степень стандартных жордановых блоков.

Матричный блок J_i	Его степень J_i^k
$[\lambda]$	$[\lambda^k]$
$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2!}\lambda^{k-2} & \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\lambda^{k-3} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2!}\lambda^{k-2} \\ 0 & 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^k \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} r\cos(\omega) & r\sin(\omega) \\ -r\sin(\omega) & r\cos(\omega) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} r^k\cos(\omega k) & r^k\sin(\omega k) \\ -r^k\sin(\omega k) & r^k\cos(\omega k) \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} r\cos(\omega) & r\sin(\omega) & 1 & 0 \\ -r\sin(\omega) & r\cos(\omega) & 0 & 1 \\ 0 & 0 & r\cos(\omega) & r\sin(\omega) \\ 0 & 0 & -r\sin(\omega) & r\cos(\omega) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} r^k\cos(\omega k) & r^k\sin(\omega k) & kr^{k-1}\cos(\omega(k-1)) & kr^{k-1}\sin(\omega(k-1)) \\ -r^k\sin(\omega k) & r^k\cos(\omega k) & -kr^{k-1}\sin(\omega(k-1)) & kr^{k-1}\cos(\omega(k-1)) \\ 0 & 0 & r^k\cos(\omega k) & r^k\sin(\omega k) \\ 0 & 0 & -r^k\sin(\omega k) & r^k\cos(\omega k) \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0^k & 0^{k-1} & 0^{k-2} & 0^{k-3} \\ 0 & 0^k & 0^{k-1} & 0^{k-2} \\ 0 & 0 & 0^k & 0^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0^k \end{bmatrix}$ принять: $0^k = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ 1, & k = 0 \end{cases}$

Заметьте:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\omega) & r\sin(\omega) \\ -r\sin(\omega) & r\cos(\omega) \end{bmatrix} \text{ при } r = \sqrt{a^2 + b^2}, \ \omega = \operatorname{atan2}(b, a)$$