МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ОТЧЕТ
по лабораторной работе №4

Динамические системы

Автор: Дженжеруха Кирилл
Учебная группа: R3242
Номер ИСУ: 368103
Преподаватель: Перегудин Алексей Алексеевич

Санкт-Петербург
2023

Содержание

Математика — это единственный совершенный
метод водить самого себя за нос.
Альберт Эйнштейн

В этой работе мы исследуем и отобразим графически работу динамических систем – непрерывных ($t \in \mathbb{R}$) и дискретных ($k \in \mathbb{Z}$). В общем виде они выглядят следующим образом:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \qquad x(k+1) = Ax(k),$$

где $x(\cdot) \in \mathbb{R}^2$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Задание 1. Придумываем непрерывное

В соответствии с условием задания зададим вектора $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ следующим образом:

$$\boxed{v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

(1) Заметим, что для выполнения условия пункта должны выполняться следующие условия:

$$e^{At} \cdot v_1 = \alpha \cdot v_1, \quad e^{At} \cdot v_2 = \beta \cdot v_2,$$

где α, β – некоторые константы.

NB Заметим, что условия, приведенные выше, похожи на то, что использовалось для нахождения собственных векторов заданной матрицы:

$$M \cdot x = \lambda x,$$

где x – собственный вектор, λ – выбранное собственное число матрицы M.

Следовательно, мы можем сделать вывод, что и здесь используется то же самое соотношение, только в несколько ином виде. Следовательно, стоит сказать две вещи: во-первых, заданные нами вектора v_1 и v_2 должны быть собственными векторами матрицы A, а во-вторых, числа α и β определены вполне корректно:

$$\alpha = e^{\lambda_1 t}, \quad \beta = e^{\lambda_2 t},$$

где $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma_A$ – собственные числа, соответствующие собственным векторам v_1 и v_2.

Заметим, что для вычисления матричной экспоненты нам нужно выполнить разложение вида

$$e^{At} = P \cdot e^{Dt} \cdot P^{-1},$$

где P – матрица собственных векторов матрицы A, то есть матрица, столбцы которой – векторы v_1 и v_2. Следовательно, для того, чтобы вычислить матрицу A, нам необходимо придумать матрицу D – диагональную матрицу, соответствующую матрице A. При этом заметим, что на побочной диагонали матрицы D вследствие ее диагональности будут стоять нули, а на главной – собственные числа матрицы A. Значит, при условии, что непрерывная система $\dot{x}(t) = Ax(t)$ асимптотически устойчива, матрица D имеет следующий вид:

$$D = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix}, \quad \varphi, \psi \in \mathbb{R};\ \varphi < 0,\ \psi < 0.$$

Пусть $\sigma_A = \{-4^{(1)}, -2^{(1)}\}$ – спектр матрицы A. Значит, матрица A будет выглядеть так:

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{15} \begin{pmatrix} -40 & 16 \\ 25 & -50 \end{pmatrix}}$$

(2) Рассмотрим случай с вещественными собственными числами. По определению система неустойчива, если у нее есть хотя бы одно положительное вещественное собственное число. Значит, достаточно, к примеру, взять матрицу вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

ее спектр $\sigma = \{a^{(2)}\}$, собственные векторы будут иметь вид $(k\ 0)^T$, а следовательно, будут коллинеарными $\forall k \in \mathbb{R}$.

Примером такой матрицы может являться следующая:

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

(3) Для того чтобы выполнялось условие, необходимо и достаточно, чтобы одно из собственных чисел было положительным , а второе – отрицательным. Тогда мы можем взять матрицу A такую, что одному из ее собственных чисел – положительному – соответствовал собственный вектор, равный v_1. В этом случае, руководствуясь формулой $x(t) = e^{At} \cdot x(0)$, мы можем сделать вывод, что $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$, если выполняется ранее выведенное условие. Таким образом, матрица A может выглядеть следующим образом:

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{11} \begin{pmatrix} -8 & -12 \\ -90 & -14 \end{pmatrix}}.$$

(4) Для асимптотической устойчивости нам необходимо выполнение следующего условия:

$$\mathrm{Re}(\lambda) < 0 \quad \forall \lambda \in \sigma_A,$$

где λ – собственное число матрицы A.

По условию пункта имеем, что собственные вектора должны быть следующими:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2+4i \\ -5+5i \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2-4i \\ -5-5i \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица A в соответствии со спектральным разложением имеет вид

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix}^T,$$

где λ_1, λ_2 – собственные числа, удовлетворяющие условию.

В качестве примера матрицы A можем взять следующую матрицу:

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i \Rightarrow A = \boxed{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -10 & -1 \end{pmatrix}}.$$

(5) Аналогично выполним и этот пункт – единственное, что придется поменять, это собственные числа. Нам необходимо, чтобы система была неустойчивой – для этого нужно, чтобы выполнялось противополжное условие:

$$\mathrm{Re}(\lambda) > 0 \quad \forall \lambda \in \sigma_A,$$

где λ – собственное число матрицы A.

Вычислим матрицу A аналогично предыдущему пункту:

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i \Rightarrow A = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}}.$$

(6) Интересный момент – системы, матрицы которых имеют комплексные собственные числа и, как следствие, комплексные собственные вектора, могут быть устойчивы, но не асимптотически, для этого нам необходимо выполнение следующего условия:

$$\mathrm{Re}(\lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in \sigma_A,$$

где λ – собственное число матрицы A.

Вычислим матрицу A аналогично предыдущим пунктам:

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i \Rightarrow A = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -10 & 2 \end{pmatrix}}.$$

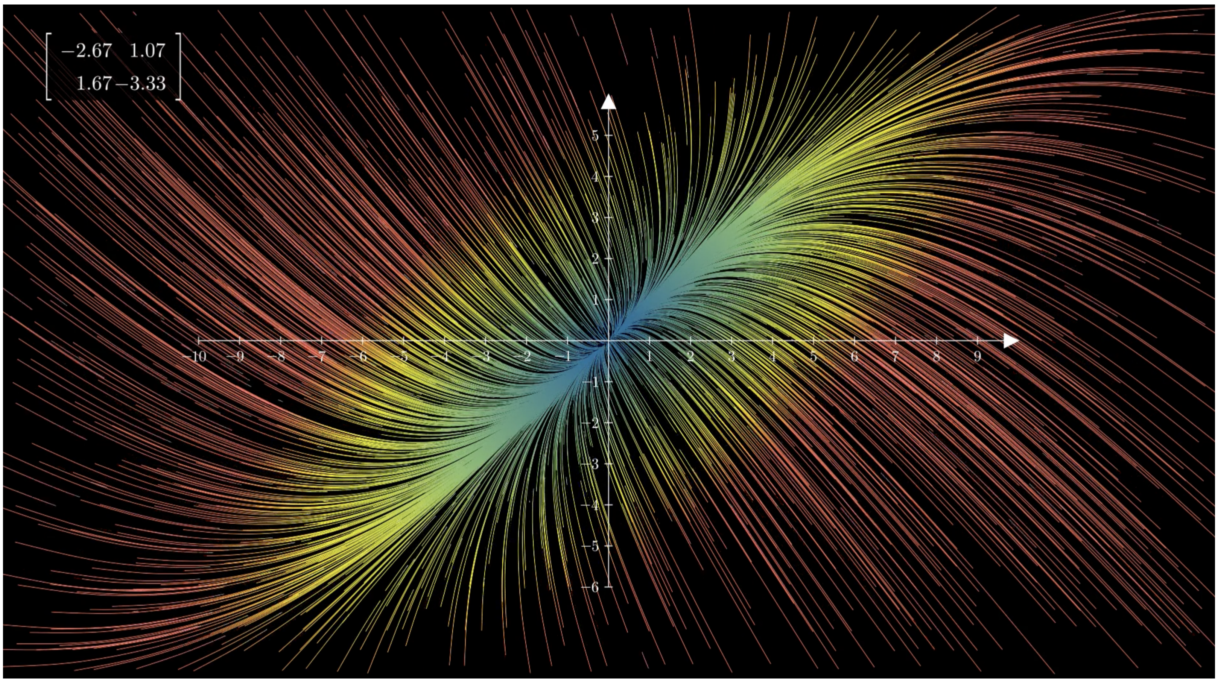
NB В пунктах **(5)** и **(6)** не приведены собственные вектора, поскольку по условию задания они совпадают с собственными векторами из пункта **(4)**.

Задание 2. Моделируем непрерывное

NB В этом задании было необходимо замоделировать придуманные нами непрерывные системы. Для этого была использована библиотека **Manim** языка **Python**. Ниже будут представлены скриншоты анимаций процессов, а все видео вы сможете найти в файлах к лабораторной.

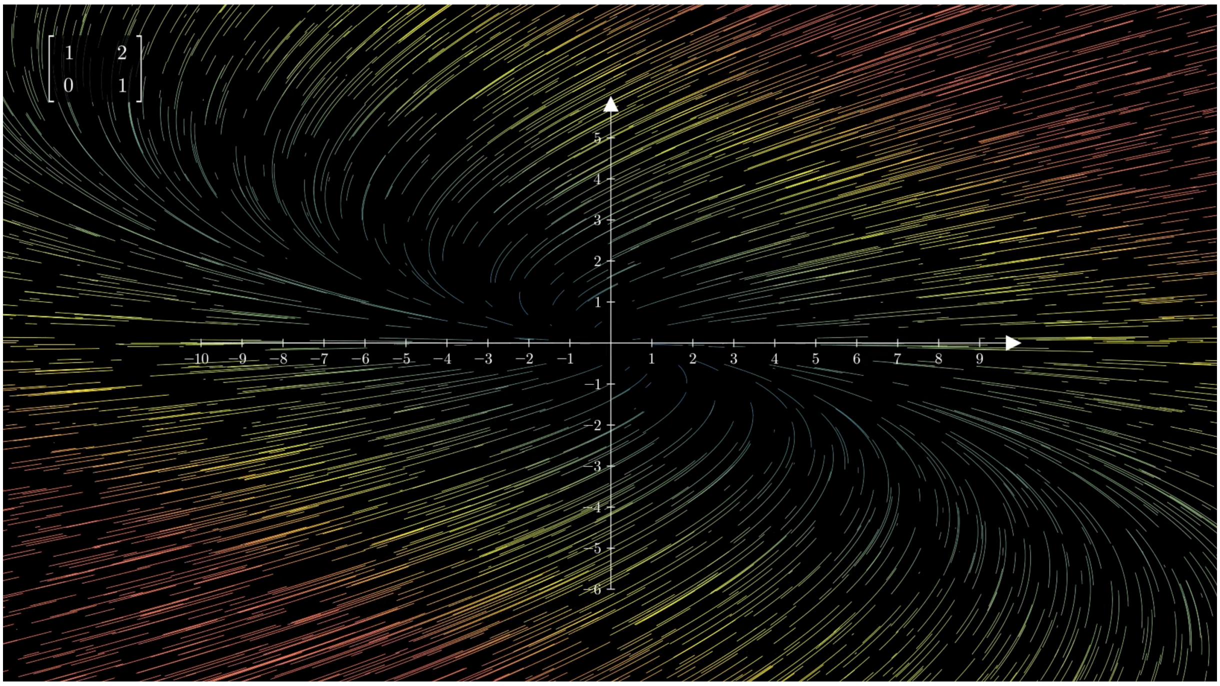
На скриншотах изображены траектории систем. Для асимптотической устойчивости видно, что траектории стремятся к началу координат, для устойчивости, но не асимптотической траектории должны быть ограничены какой-либо фигурой, например, эллипсом (причем отметим, что для каждой ветви траектории он может быть свой, это зависит от заданный начальных условий, которые для каждой ветви свои).

(1) Изображение для пункта **1**:



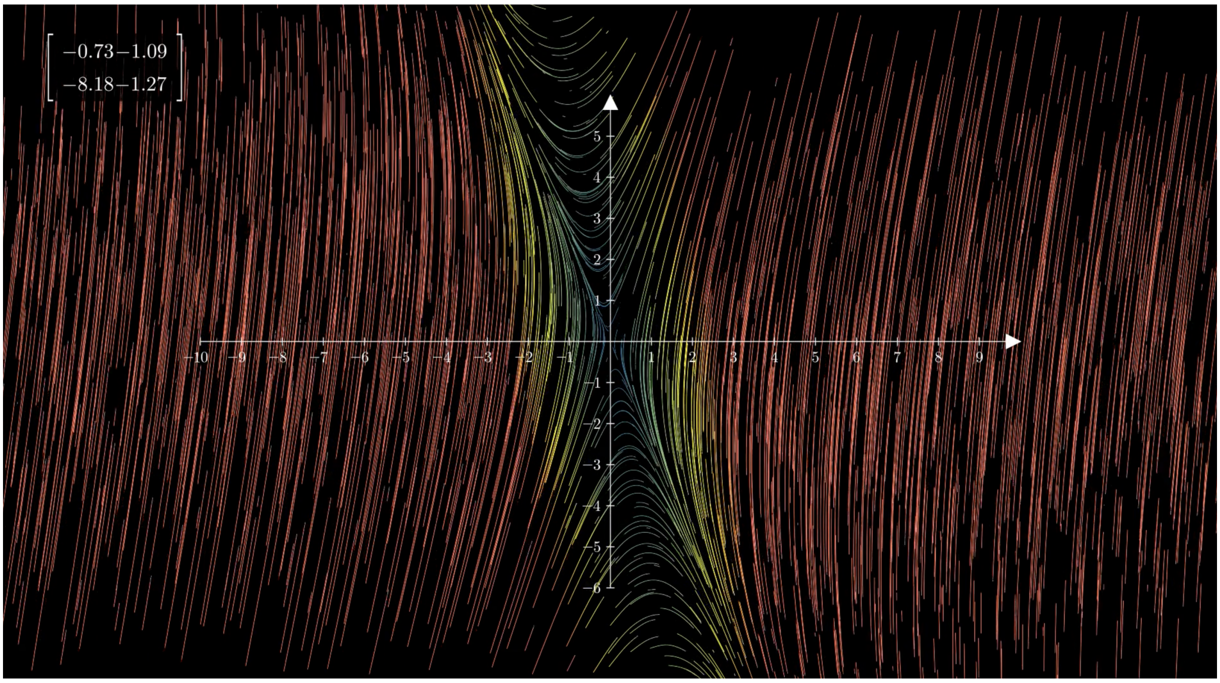
Асимптотическая устойчивость подтверждается.

(2) Изображение для пункта **2**:



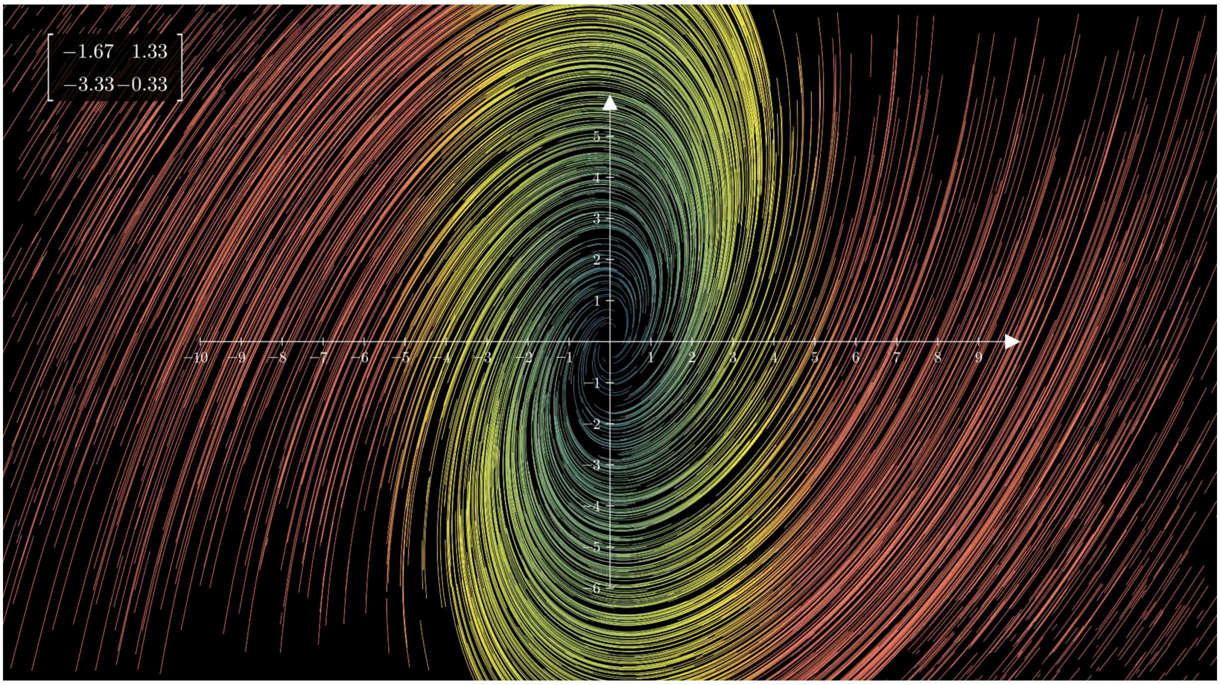
Здесь методом пристального взгляда видна **неустойчивость**.

(3) Изображение для пункта **3**:



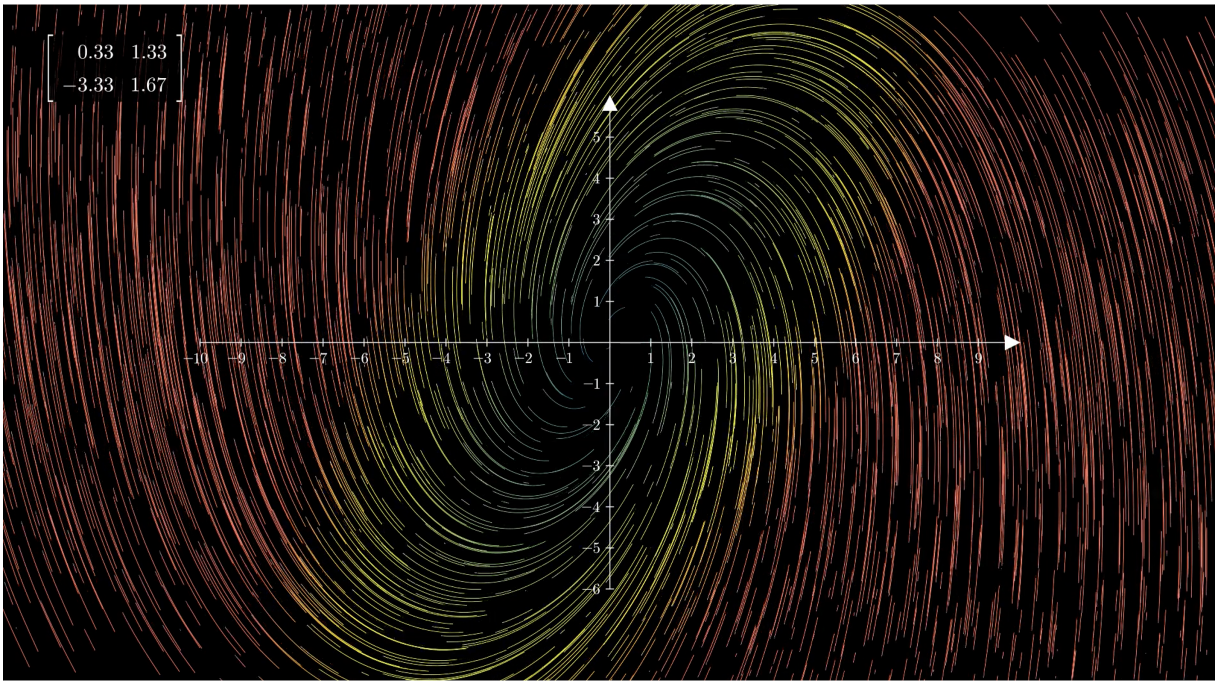
На данном рисунке также можно видеть **неустойчивость** системы, причем стоит отметить, что из-за того, что одно из собственных чисел заданной матрицы все же отрицательное, система по одному из направлений стремится быть устойчивой, но улетает от положения равновесия за счет второго направления траекторий.

(4) Изображение для пункта **4**:



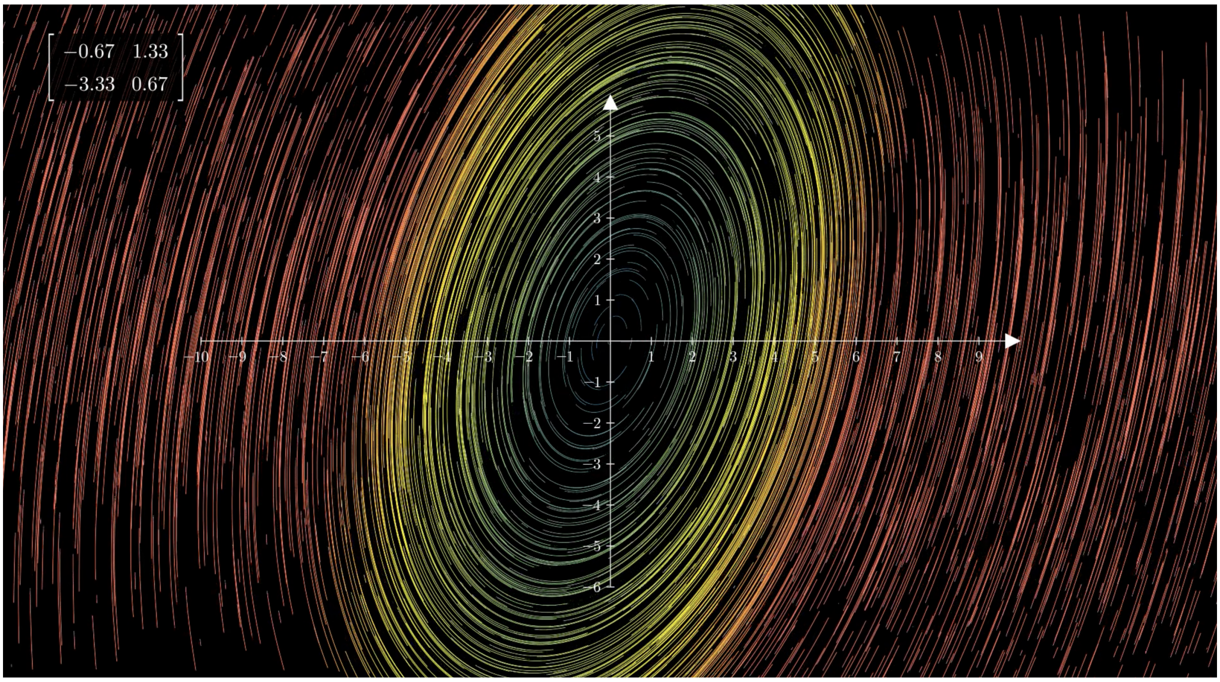
Тут изображена **асимптотически устойчивая** система – это видно по сходящимся к нулю траекториям.

(5) Изображение для пункта **5**:



В этом пункте мы видим уже привычную нам **неустойчивость** – траектории двигаются в направлении бесконечности.

(6) Изображение для пункта **6**:



А здесь дело обстоит интереснее – здесь изображена система **устойчивая, но не асимптотически**. Все дело в том, что траектории ограничиваются соответствующими каждой из них эллипсами, но при этом к нулю не идут.

Задание 3. Придумываем дискретное

(1) Мы знаем, что при жордановом разложении матрицы жорданова нормальная форма состоит из жордановых блоков, отвечающих соответствующим собственным значениям. Следовательно, мы можем взять матрицу A равной соответствующей ей жордановой форме:

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

(2) В заданиях, где собственные числа являются парой сопряженных комплексных чисел, мы можем поступать следующим образом – мы можем овеществить комплексную матрицу, используя следующую форму:

$$\begin{pmatrix} \varphi & -\psi \\ \psi & \varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi = \mathrm{Re}(\lambda),\ \psi = \mathrm{Im}(\lambda).$$

Тогда матрица A будет выглядеть следующим образом:

$$A = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}.$$

(3) Аналогично предыдущему пункту матрица A выглядит так:

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

(4) Аналогично предыдущему пункту матрица A выглядит так:

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

(5) Аналогично пункту **(1)** матрицу A можно представить следующим образом:

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

(6-8) Зададим произвольную c такую, что $0 < c < 1$. Пусть $c = \dfrac{1}{3}$. Матрица A будет иметь тот же вид, что и в пунктах **(1)**, **(3)**, **(5)** соответственно, при этом стоит отметить важное замечание о том, что матрица не умножается на константу c по соответствующему правилу умножения в пунктах **(1)**, **(3)** – не забываем, что матрицы представлены в виде **жордановой нормальной формы**, а значит, умножатся на константу только элементы главной диагонали.

NB Так как умножение на константу комплексного числа умножается и вещественная, и мнимая часть, мы можем просто умножить овеществленную матрицу на выбранную нами константу – так можно сделать потому, что матрица A в этих случаях состоит из чисел, равных или противоположных по знаку $\mathrm{Re}(\lambda)$ и $\mathrm{Im}(\lambda)$.

После небольшой теоретической справки запишем, чему будут равны матрицы A для соответствующих пунктов:

$$A_6 = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}, \quad A_7 = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}, \quad A_8 = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

(9-11) Зададим произвольную d такую, что $d > 1$. Пусть $d = 7$. Отметим, что теоретические замечание, приведенные в предыщуем пункте, применимы и для этого случая, поэтому сразу запишем, чему будут равны соответствующие матрицы A:

$$A_9 = \boxed{\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}}, \quad A_{10} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}}, \quad A_{11} = \boxed{\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}}.$$

(12) Если оба собственных числа матрицы равны 0, то теоретически любой вектор является для нее собственным, поскольку выполняется соотношение

$$A - \lambda E = 0.$$

Следовательно, чтобы матрица не была диагональной, сделаем ее равной соответствующей жордановой форме аналогично пункту **(1)**:

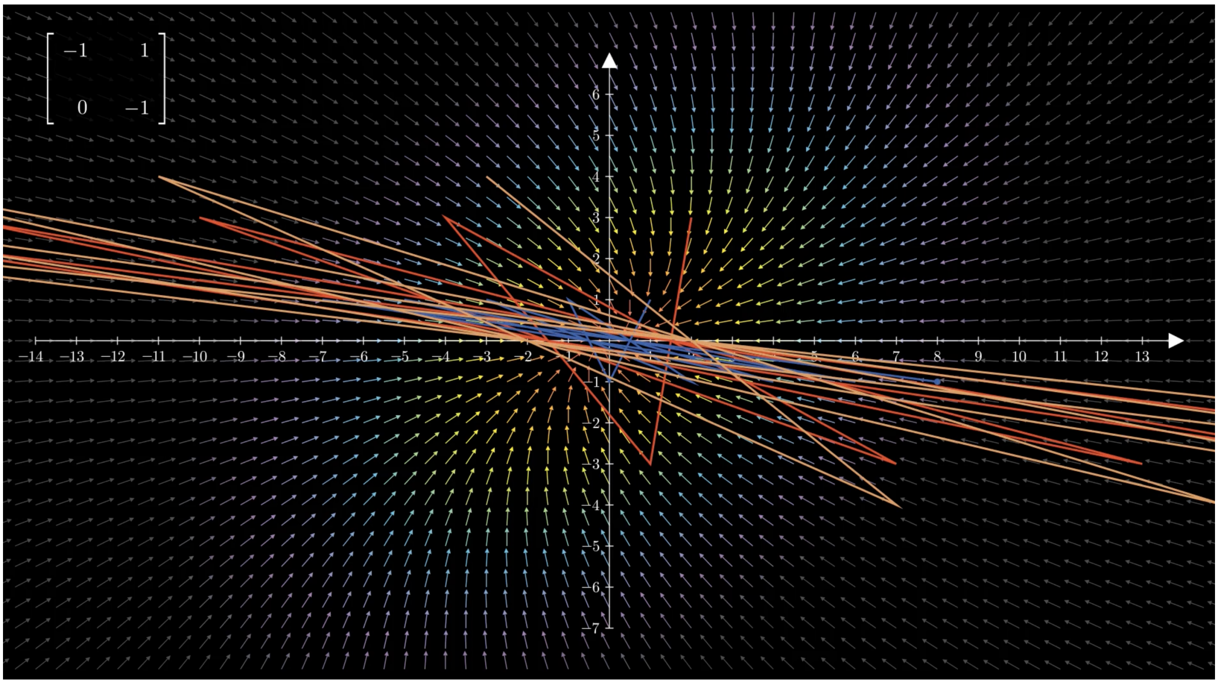
$$A = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Задание 4. Моделируем дискретное

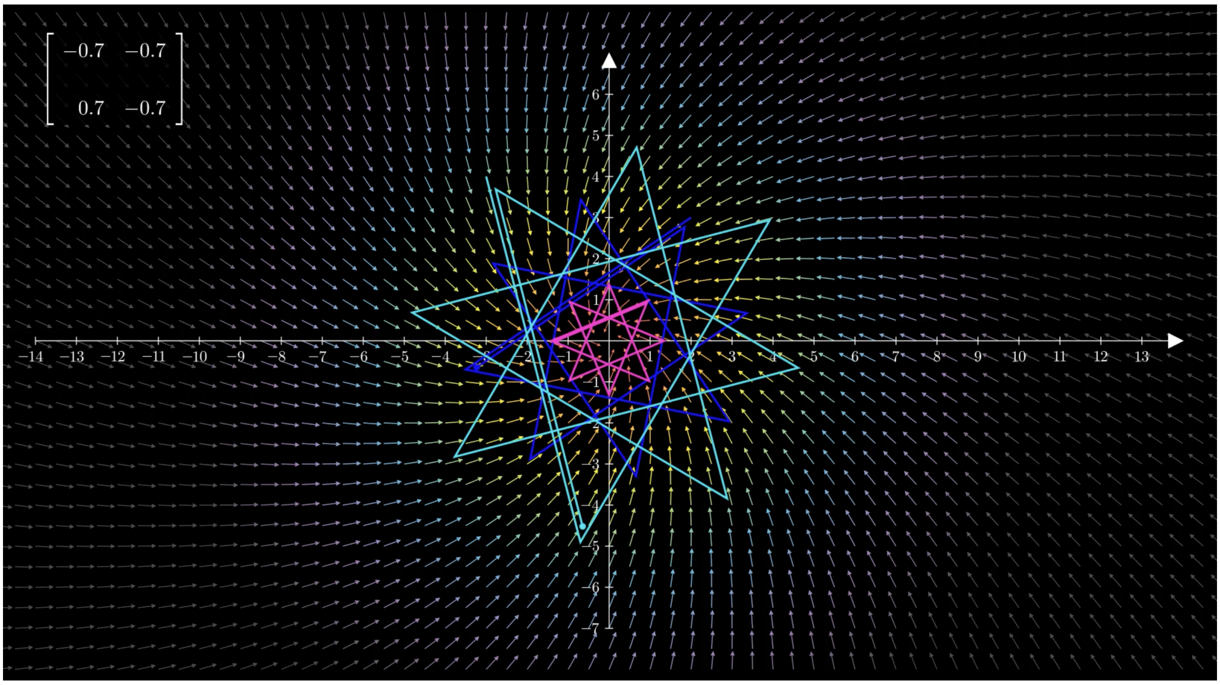
NB В этом задании было необходимо замоделировать придуманные нами дискретные системы. Для этого также была использована библиотека **Manim** языка **Python**. Ниже будут представлены скриншоты анимаций процессов, а все видео вы также сможете найти в файлах к лабораторной.

На скриншотах представлено векторное поле (по направлению маленьких стрелок) и траектории дискретных динамических систем (цветными линиями).

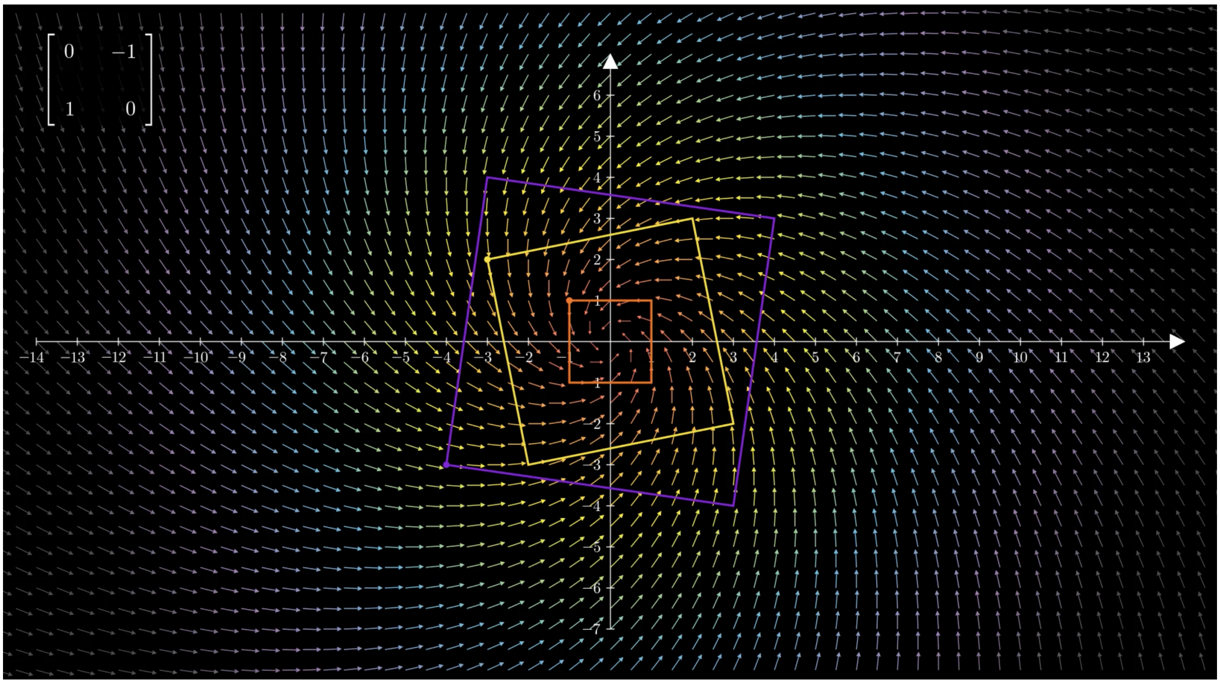
(1) Изображение для пункта **1**:



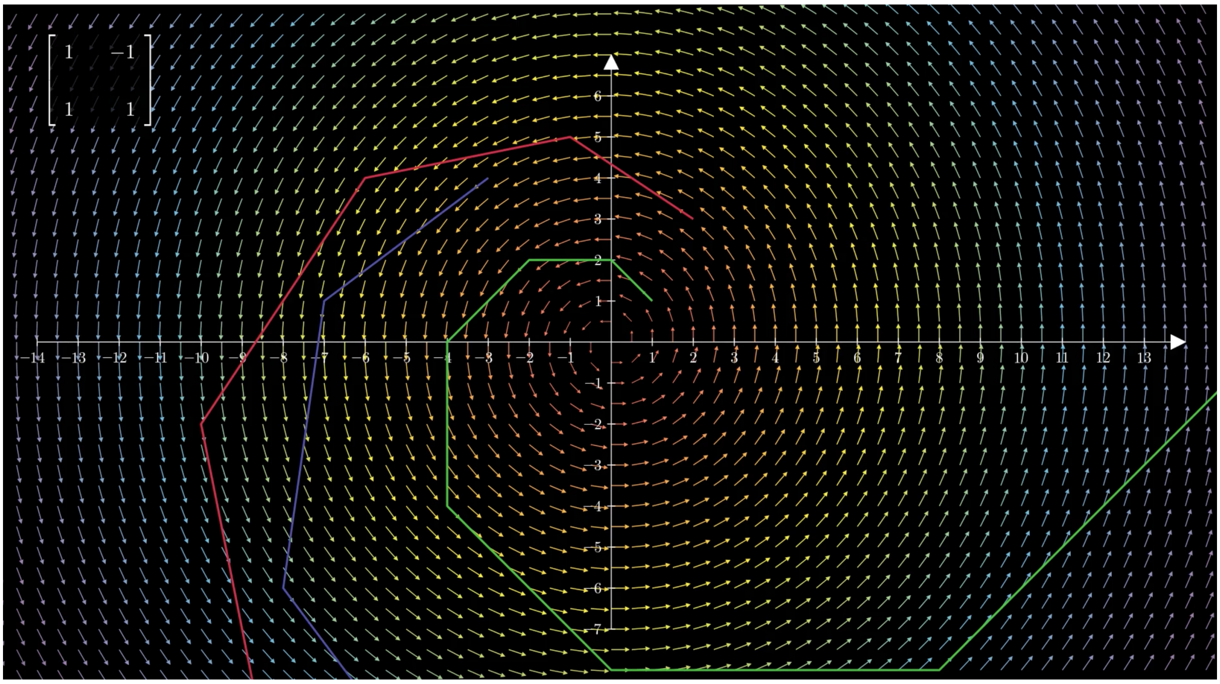
(2) Изображение для пункта **2**:



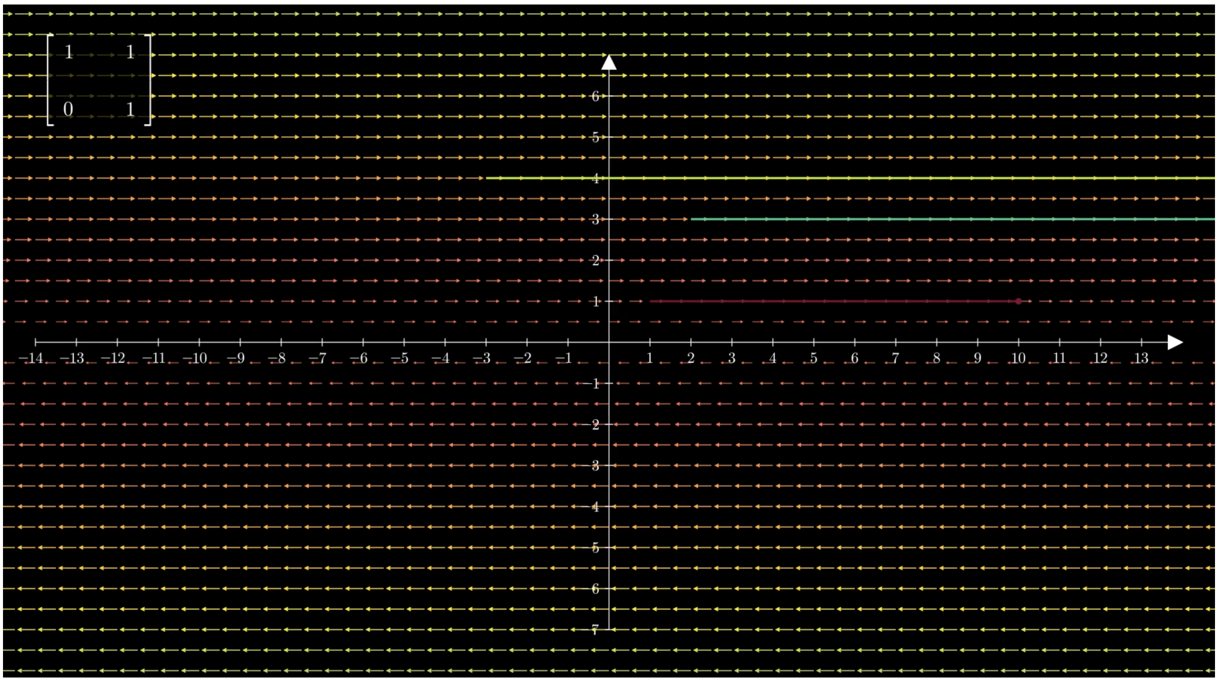
(3) Изображение для пункта **3**:



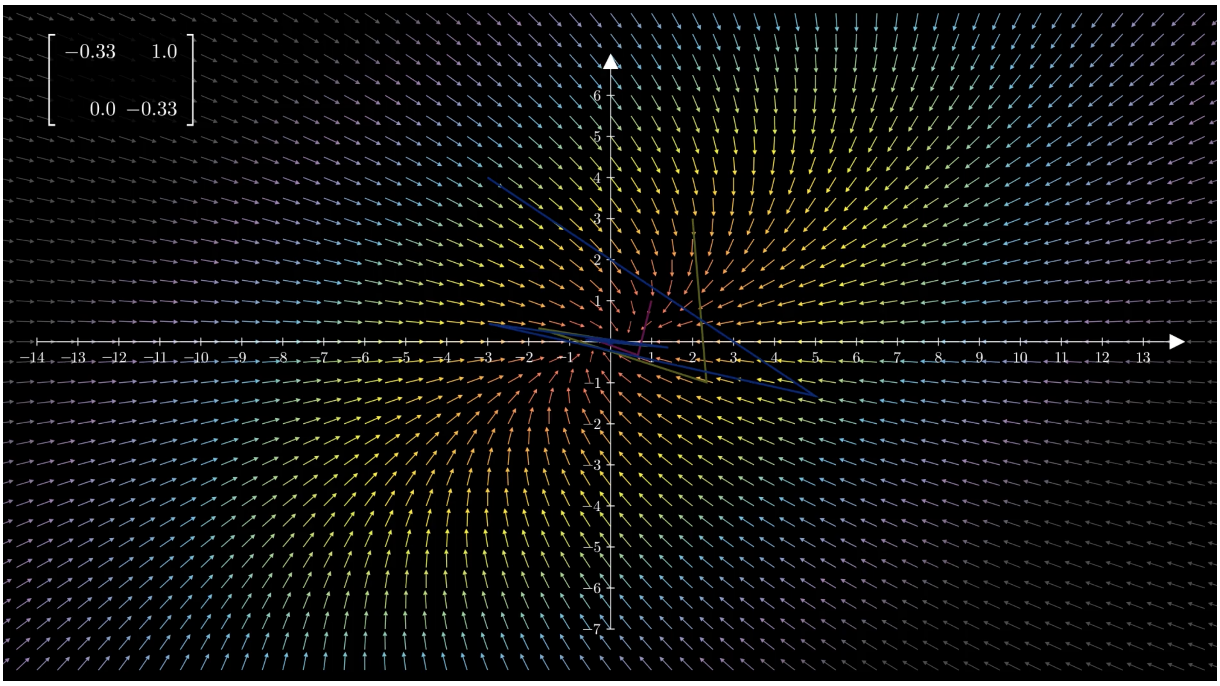
(4) Изображение для пункта **4**:



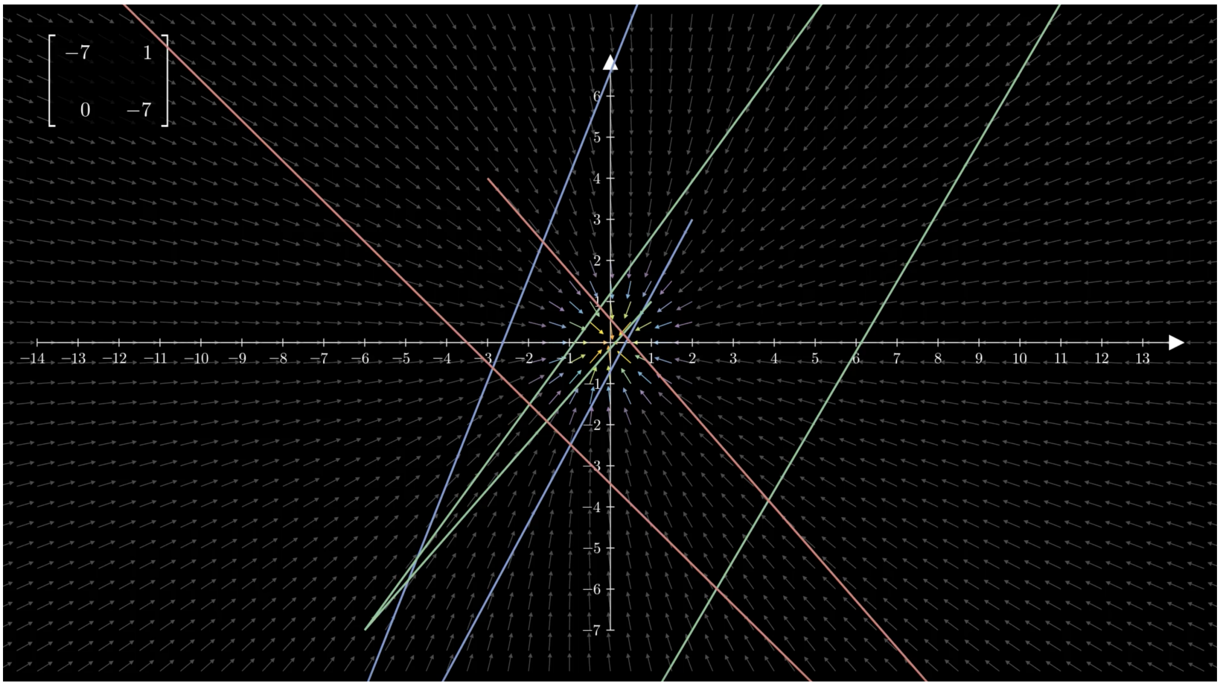
(5) Изображение для пункта **5**:



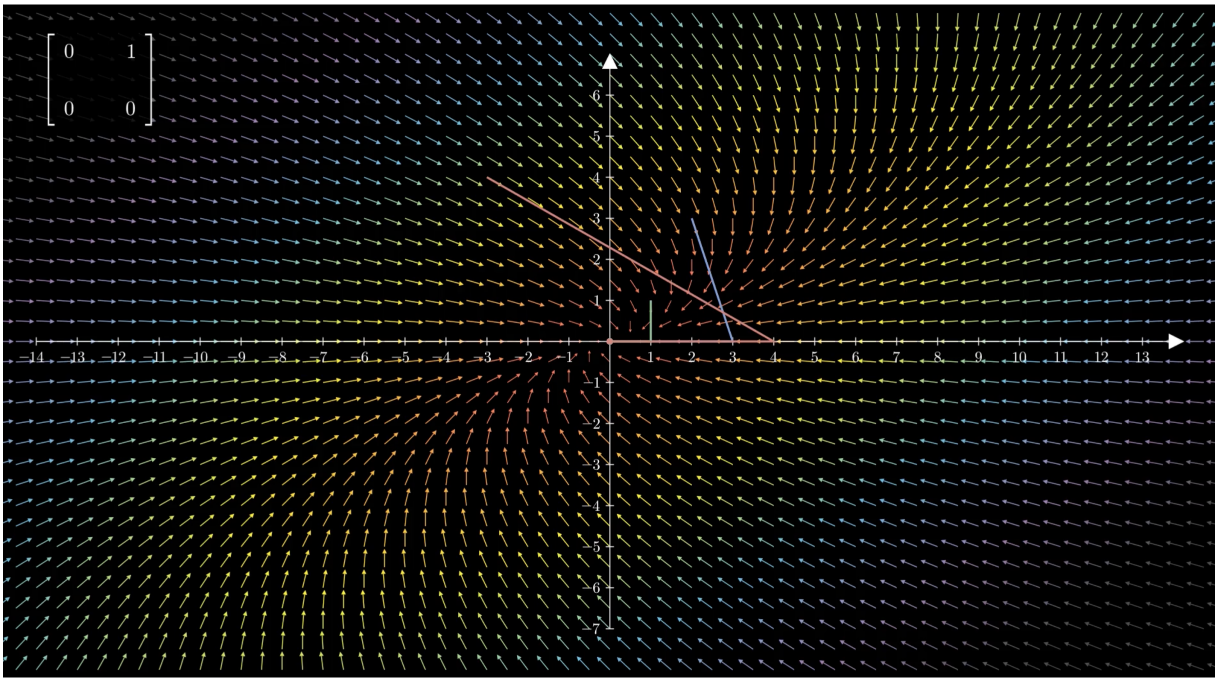
(6-9) Изображение для пунктов **6-8**:



(9-11) Изображение для пунктов **9-11**:



(12) Изображение для пункта **12**:



NB Отметим следующий момент: в задании 3 было необходимо указать точки, соответствующие начальным значениям. Отдельно эти изображения не приведены, но на скриншотах векторного поля и траектории отчетливо видно начальные точки для всех трех траекторий.

Задание 5. Проанализируем осциллятор

Рассмотрим систему вида

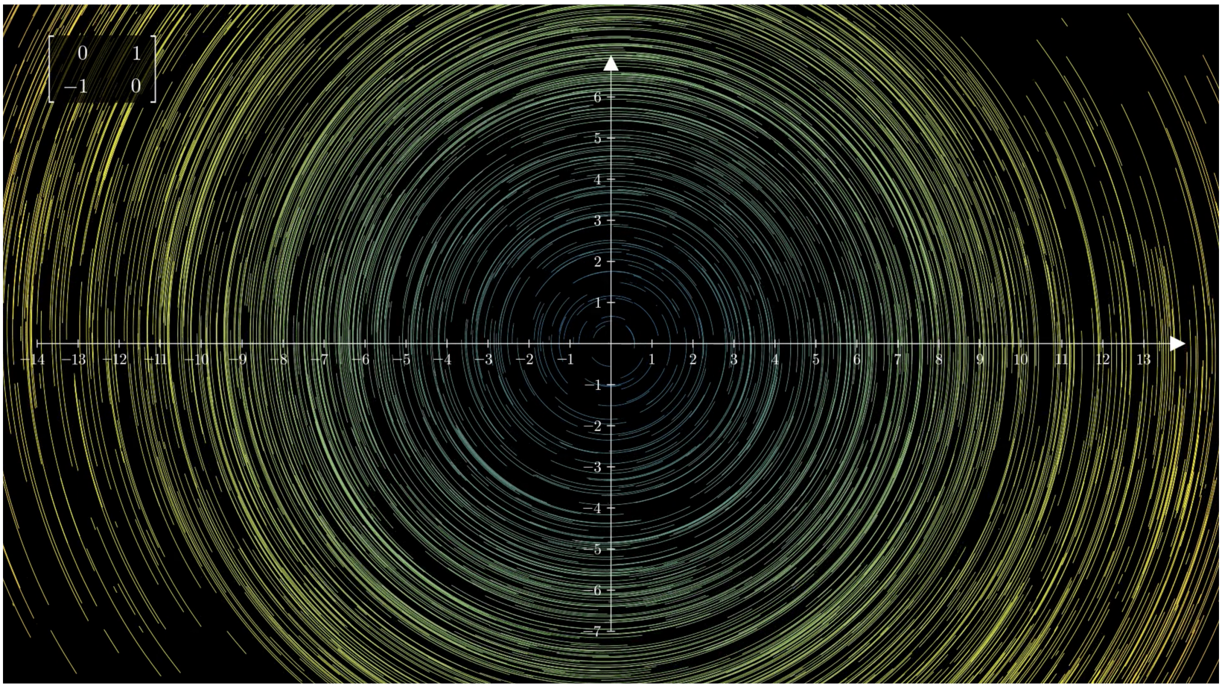
$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \cdot x(t).$$

(1) Проанализируем поведение системы при $a < 0$, $b = 0$. Очевидно, что матрица будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, собственные числа данной матрицы будут следующими: $\lambda_{1,2} = \pm|a|i$, а значит, система будет **устойчивой, но не асимптотически**, потому что $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$.

Пример такой системы – колесо, которое вращается вокруг оси. Каждая его точка описывает эллипс собственного радиуса – мы перемещаемся от центра колеса к краю как если бы мы интегрировали площадь по радиусу.



(2) Проанализируем поведение системы при $a < 0$, $b < 0$. Очевидно, что матрица будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Здесь чуть сложнее – выражение для собственных чисел будет иметь следующий вид:

$$\lambda_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4a}}{2}.$$

Отсюда следует четыре случая:

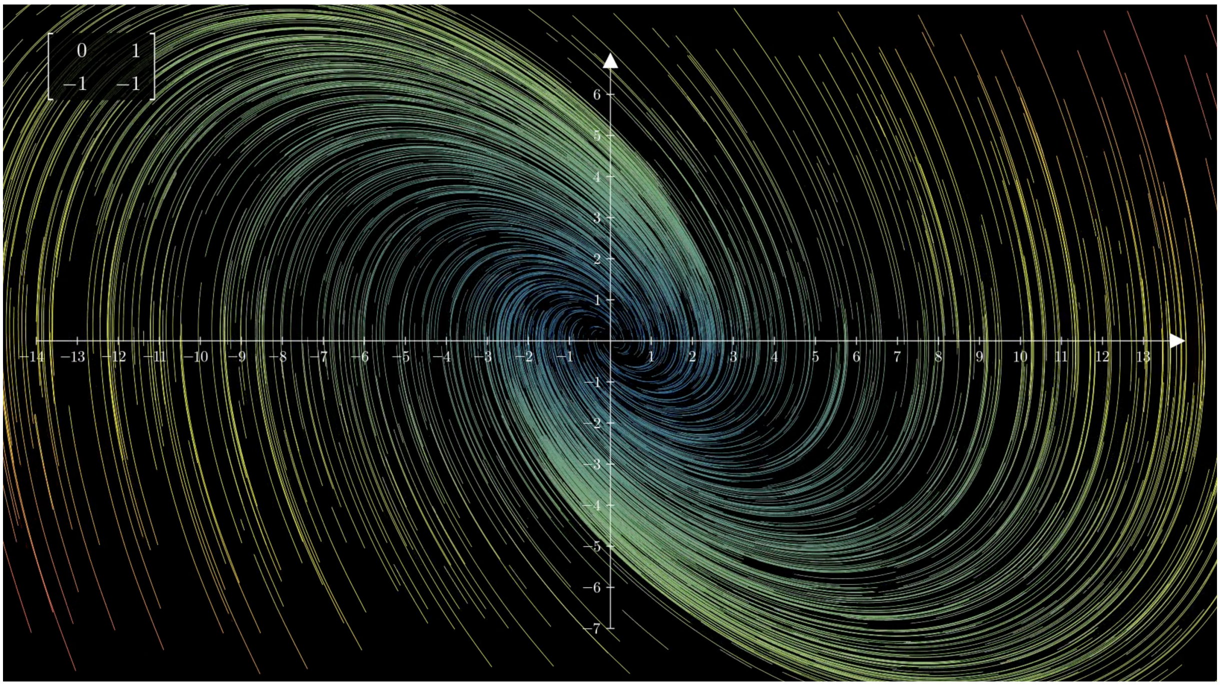
$$b^2 = -4a \Rightarrow \sqrt{D} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{b}{2} \Rightarrow \textbf{неустойчивость};$$

$$b^2 < -4a \Rightarrow \sqrt{D} < 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(\lambda) < 0 \Rightarrow \textbf{асимптотическая устойчивость};$$

$$b^2 > -4a \Rightarrow \sqrt{D} > 0;\ \sqrt{D} \geqslant \frac{-b}{2} \Rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{R},\ \mathrm{sign}\,\lambda_1 \neq \mathrm{sign}(\lambda_2) \Rightarrow \textbf{неустойчивость};$$

$$b^2 > -4a;\ 0 < \sqrt{D} < \frac{-b}{2} \Rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{R},\ \mathrm{sign}\,\lambda_1 = \mathrm{sign}(\lambda_2) \Rightarrow \textbf{асимптот. устойчивость}.$$

Приведем **пример** для второго случая – например, подобную траекторию могут описывать ветровые потоки при столкновении холодного и теплого воздуха в точке, соответствующей началу координат.

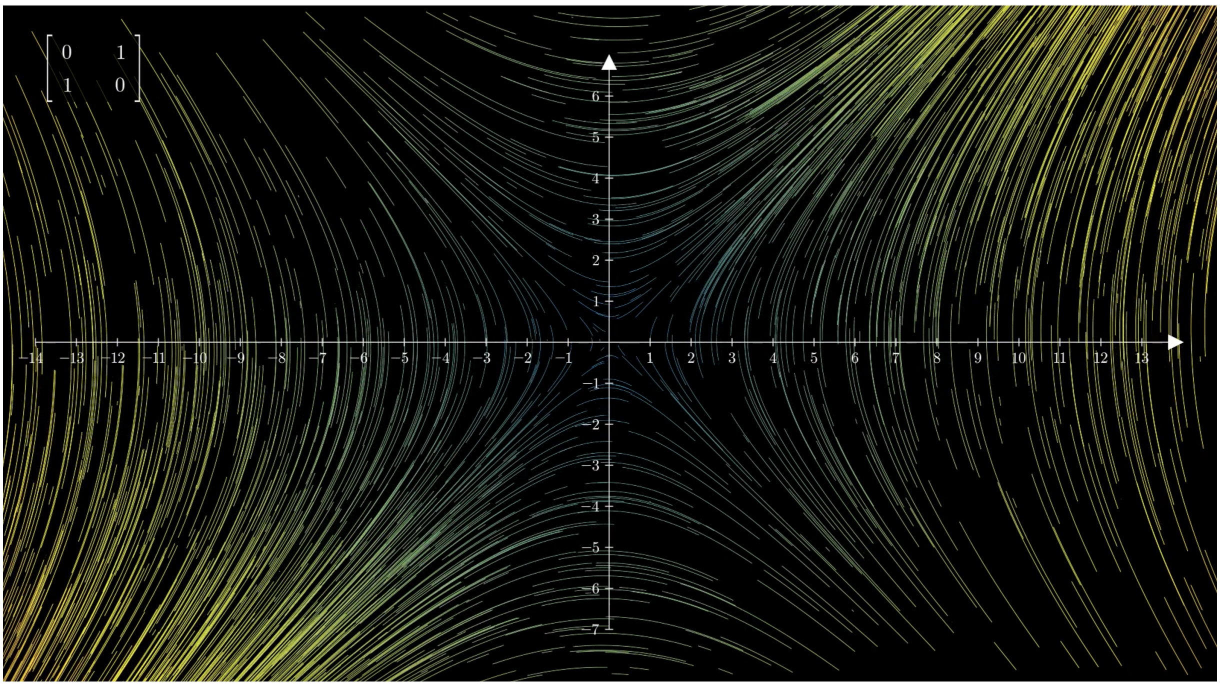


(3) Проанализируем поведение системы при $a > 0$, $b = 0$. Очевидно, что матрица будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь понятно, что собственные числа данной матрицы будут следующими: $\lambda_{1,2} = \pm a \Rightarrow$ система **неустойчива**, так как хотя бы одно из собственных чисел всегда будет неотрицательным.

Пример подобной системы – волны, ударяющиеся о стену, если бы они плавно растекались по ней после удара (можно считать этот график изображением процесса в момент удара).



(4) Проанализируем поведение системы при $a > 0$, $b < 0$. Очевидно, что матрица будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Выражение для собственных чисел, аналогично пункту **(2)**, будет иметь следующий вид:

$$\lambda_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4a}}{2},$$

при этом заметим, что $b^2 + 4a > 0$.

Таким образом, нам необходимо рассмотреть два случая

$$\sqrt{D} \geqslant \frac{-b}{2} \Rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{R},\ \operatorname{sign}\lambda_1 \neq \operatorname{sign}(\lambda_2) \Rightarrow \textbf{неустойчивость};$$

$$\sqrt{D} < \frac{-b}{2} \Rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{R},\ \operatorname{sign}\lambda_1 = \operatorname{sign}(\lambda_2) \Rightarrow \textbf{асимптотическая устойчивость}.$$

Пример такой системы для первого рассмотренного случая аналогичен предыдущему.