Стандартный базис и другие базисы

Стандартный базис и другие базисы

$$\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} = 4\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 5\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} + 3\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} - 5\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + 0\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + 4\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

Стандартный базис и другие базисы

$$\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} = 4\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 5\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix}$$

(в стандартном базисе)

$$\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} + 3\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} - 5\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\\-5\end{bmatrix}$$

(в другом базисе)

$$\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + 0\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + 4\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix}$$

(в ещё каком-то базисе)

Стандартный базис и другие базисы

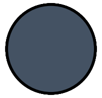
Когда мы пишем $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$,

то автоматически задаём координаты вектора

в стандартном базисе

До выбора базиса у вектора вообще нет координат,

он просто **нечто**



Стандартный базис и другие базисы

$$\bullet = 4 \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 5 \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \bullet = \begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix}$$ (в стандартном базисе)

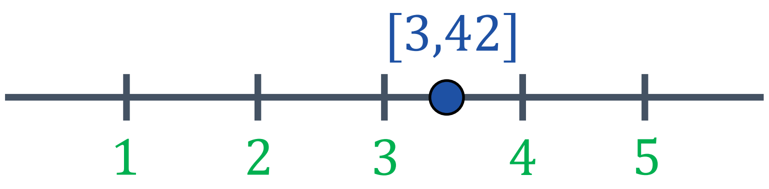
$$\bullet = 1 \cdot \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} - 5 \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \bullet = \begin{bmatrix}1\\3\\-5\end{bmatrix}$$ (в другом базисе)

$$\bullet = 1 \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \bullet = \begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix}$$ (в ещё каком-то базисе)

Стандартный базис и другие базисы

Точка на прямой не имеет координат, пока не заданы деления

$\Rightarrow$



Стандартный базис и другие базисы

Если мы просто пишем вектор $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, то это значит, что мы задали его в стандартном базисе.

Стандартный базис и другие базисы

Если мы просто пишем вектор $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, то это значит, что мы задали его в стандартном базисе.

Но, может быть, мы хотим поменять базис?

Замена базиса вектора

Замена базиса вектора

Новый базис

Координаты вектора
в стандартном базисе

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} | \\ v_1 \\ | \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} | \\ v_2 \\ | \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} | \\ v_3 \\ | \end{bmatrix}$$

Координаты вектора
в новом базисе

Замена базиса вектора

Новый базис

Координаты вектора в стандартном базисе

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} | \\ v_1 \\ | \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} | \\ v_2 \\ | \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} | \\ v_3 \\ | \end{bmatrix}$$

Координаты вектора в новом базисе

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Замена базиса вектора

Новый базис

Координаты вектора
в стандартном базисе

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Координаты вектора
в новом базисе

$$v = P\hat{v}$$

$$\Updownarrow$$

$$P^{-1}v = P^{-1}P\hat{v}$$

$$\Updownarrow$$

$$\hat{v} = P^{-1}v$$

Замена базиса вектора

Новый базис

Координаты вектора в новом базисе

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Координаты вектора в стандартном базисе

Замена базиса вектора

Новый базис

Координаты вектора в новом базисе

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Координаты вектора в стандартном базисе

Формула для замены базиса вектора

$$\hat{v} = P^{-1} v$$

Пример замены базиса вектора

Найти координаты вектора $\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix}$ относительно базиса $\left\{\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$

$$v = \begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\2 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad \hat{v} = ?$$

Пример замены базиса вектора

Найти координаты вектора $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ относительно базиса $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$$v = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{v} = ?$$

$$\hat{v} = P^{-1}v = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Замена базиса матрицы (линейного преобразования)

Замена базиса матрицы

Пусть матрица A переводит вектор x в вектор y

$$y = Ax$$

Пусть вектора x и y после замены базиса превращаются в $\hat{x}$ и $\hat{y}$:

$$\hat{x} = P^{-1}x \qquad \hat{y} = P^{-1}y$$

Какая матрица теперь связывает вектора $\hat{x}$ и $\hat{y}$?

$$\hat{y} = B\hat{x}$$

Уже не A, какая-то другая!

Замена базиса матрицы

Исходные равенства

$$y = Ax$$

$$\hat{x} = P^{-1}x$$

$$\hat{y} = P^{-1}y$$

$$\hat{y} = B\hat{x}$$

Манипуляции

$$\hat{y} = B\hat{x}$$

$$P^{-1}y = BP^{-1}x$$

$$PP^{-1}y = PBP^{-1}x$$

$$y = PBP^{-1}x$$

$$y = Ax$$

Результат

$$\boxed{A = PBP^{-1}}$$

$$\boxed{B = P^{-1}AP}$$

Замена базиса матрицы

Формула для замены базиса матрицы

$$B = P^{-1}AP$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & B & * \\ * & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & P & * \\ * & * & * \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & A & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & P & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

Коммутативная диаграмма (множества)

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P^{-1}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "P^{-1}"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "B"] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}
$$

Отображение
в стандартном базисе

Переход в новый базис

Отображение
в новом базисе

Коммутативная диаграмма (элементы)

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto, "A"] \arrow[d, mapsto, "P^{-1}"'] & y \\
\hat{x} \arrow[r, mapsto, "B"] & \hat{y} \arrow[u, mapsto, "P"']
\end{tikzcd}
$$

Было отображение
в стандартном базисе

Нырнули
в новый базис

Вынырнули
обратно

$$A = PBP^{-1}$$

Выполнили отображение в
новом базисе

Пример замены базиса матрицы

Матрица $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ задана в стандартном базисе. Найти её вид в базисе $\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

Пример замены базиса матрицы

Матрица $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ задана в стандартном базисе. Найти её вид в базисе $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{A} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Пример на диаграмме

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
x \arrow[r, dash] & \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \arrow[r, mapsto, "\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}", "A"'] \arrow[d, mapsto, "P^{-1}", "\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}"'] & \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \arrow[r, dash] \arrow[d, mapsto, "P^{-1}"', "\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}"] & y = Ax \\
\hat{x} \arrow[r, dash] & \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} \arrow[r, mapsto, "\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}", "\hat{A}"'] & \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} \arrow[r, dash] & \hat{y} = \hat{A}\hat{x}
\end{tikzcd}
$$

Подобные матрицы

матрицы, соответствующие одному и тому же преобразованию, заданному в разных базисах

Свойства подобных матриц

Свойства подобных матриц

Если A и B — подобные матрицы, то

$$\boxed{\begin{aligned} \det A &= \det B \\ \operatorname{trace} A &= \operatorname{trace} B \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} \operatorname{rank} A &= \operatorname{rank} B \\ \operatorname{nullity} A &= \operatorname{nullity} B \end{aligned}}$$

Определитель и след матрицы не зависят от выбранной системы координат, то есть являются геометрическими свойствами линейного преобразования

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Эти матрицы выглядят по-разному, но описывают одно и то же преобразование пространства

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -4 & -3 & -2 \\ -0 & -0 & -1 \end{bmatrix}$$