# Практическая работа №4

Динамическая практика

# Какая ты сегодня тыква?

1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

6. 

7. 

8. 

# Дифференциальные уравнения

В рамках данной практики мы будем рассматривать **линейные однородные стационарные** дифференциальные уравнения.

Уравнения вида: $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0$

# Найди лишние...

1. $\ddot{y} + 1 = 0$
2. $y^5 = 5\ddot{y} - 2\dot{y}$
3. $\ddot{y} + 3y = e^t$
4. $t\dot{y} - y = 0$
5. $y = 0$
6. $e^2 y = \sin(40°)\,\ddot{y}$
7. $\dddot{y} = -y^{(4)}$
8. $2\frac{\ddot{y}}{y} = 1$

Найди все неподходящие под прошлое определение уравнения. $y$ зависит от $t$

Напиши все неправильные ответы в чат.

Вслух скажи почему они не подходят.

# Как их решать?

Уравнение:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0$$

Характеристический полином:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

| Корни полинома | Моды | Кратные корни |
|---|---|---|
| $\lambda = \alpha$ | $e^{\alpha t}$ | $te^{\alpha t}, t^2 e^{\alpha t}, t^3 e^{\alpha t}, \dots$ |
| $\lambda = \alpha \pm \beta i$ | $e^{\alpha t} \sin \beta t, e^{\alpha t} \cos \beta t$ | $te^{\alpha t} \sin \beta t, te^{\alpha t} \cos \beta t,$ <br> $t^2 e^{\alpha t} \sin \beta t, t^2 e^{\alpha t} \cos \beta t, \dots$ |
| $\lambda = 0$ | $1$ | $t, t^2, t^3, t^4, \dots$ |

# Как их решать?

| Корни полинома | Моды | Кратные корни |
|---|---|---|
| $\lambda = \alpha$ | $e^{\alpha t}$ | $te^{\alpha t}, t^2 e^{\alpha t}, t^3 e^{\alpha t}, \ldots$ |
| $\lambda = \alpha \pm \beta i$ | $e^{\alpha t} \sin \beta t\,, e^{\alpha t} \cos \beta t$ | $te^{\alpha t} \sin \beta t\,, te^{\alpha t} \cos \beta t\,,$<br>$t^2 e^{\alpha t} \sin \beta t\,, t^2 e^{\alpha t} \cos \beta t\,, \ldots$ |
| $\lambda = 0$ | $1$ | $t, t^2, t^3, t^4, \ldots$ |

Решение – линейная комбинация мод.

Пример: $\ddot{y} = 4y \;\rightarrow\; \lambda^2 = 4 \;\rightarrow\; \lambda_{1,2} = \pm 2$

Ответ: $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$

# Сопоставь ответы

1. $9\ddot{y} = 0$
2. $\ddot{y} = 9y$
3. $\ddot{y} = -9y$
4. $\ddot{y} = 9\dot{y}$
5. $\dddot{y} = 9\dot{y}$
6. $\dddot{y} = 9\ddot{y}$

a. $y(t) = c_1 + c_2 e^{3t} + c_3 e^{-3t}$
b. $y(t) = c_1 + c_2 t$
c. $y(t) = c_1 \sin 3t + c_2 \cos 3t$
d. $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{9t}$
e. $y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-3t}$
f. $y(t) = c_1 + c_2 e^{9t}$

Напиши ответ в чат или ответь вслух.

# Уравнения посложнее

Найдите общее решение дифференциальных уравнений:

1. $\dddot{y} + 3\ddot{y} + 3\dot{y} + y = 0$

2. $\dddot{y} + \ddot{y} + \dot{y} + y = 0$

3. $y^{(4)} - 5\ddot{y} + 4y = 0$

# Найти уравнение по решению

Найти простейшее дифференциальное уравнение, которое могло породить такую траекторию.

1. $y(t) = \cos(t)$

2. $y(t) = t^2 - e^{2t}$

3. $y(t) = e^{-2t}\sin(2) - e^{-2t}\cos(2)$

# Решить задачу Коши

Найти частное решение дифференциального уравнения для начальных условий.

Пример: $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0, \quad y(0) = 2, \quad \dot{y}(0) = -1$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -1$$

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$$

$$\dot{y}(t) = -c_1 e^{-t} + c_2 (e^{-t} - t e^{-t})$$

$$y(0) = c_1 e^0 + 0 = 2, \qquad \dot{y}(0) = -c_1 e^0 + c_2 (e^0 - 0) = -1$$

$$c_1 = 2, \qquad -c_1 + c_2 = -1$$

Ответ: $y(t) = 2e^{-t} + te^{-t}$

# Теперь решите задачу Коши самостоятельно

Найдите решение задачи Коши.

1. $\dddot{y} - 2\ddot{y} + 5\dot{y} = 0$ при $y(0) = 5,\ \dot{y}(0) = 0,\ \ddot{y}(0) = 10$

2. $\ddot{y} + y = 0$ при $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \dot{y}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

3. $\dddot{y} = 0$ при $y(-2) = 2,\ \dot{y}(1) = 8,\ \ddot{y}(3) = 2$

# Устойчивость

Каким **корням** соответствуют неустойчивые моды? 🤔

- **Неустойчивая**

Если в решение входит хотя бы одна неустойчивая мода.

- **Устойчивая**

Если в решение не входит ни одна неустойчивая мода.

- **Асимптотически устойчивая**

Если в решение стремится к нулю.

# Определите устойчивость уравнений

1. $\ddot{y} = 0$
2. $\dot{y} = -\sin 1\, y$
3. $\ddot{y} = -\sin 2\, y$
4. $\ddot{y} = \pi y$
5. $\ddot{y} = -\sqrt{7}\dot{y}$
6. $\dddot{y} = -2\dot{y}$
7. $\dddot{y} + 23021!\,\ddot{y} = 0$
8. $y^{(4)} + 2\ddot{y} + y = 0$

Охарактеризуй устойчивость дифференциальных уравнений.

Напиши в чат:

- Н – неустойчивость;
- У – устойчивость;
- А – асимптотическая устойчивость.

Или ответь вслух.

# Критерий Гурвица

Уравнения вида: $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0,\ \ a_n > 0.$

Составим матрицу из коэффициентов:

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Дифференциальное уравнение **асимптотически устойчиво**, если все ведущие угловые миноры этой матрицы положительны.

# Критерий Гурвица

Уравнения вида: $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0,\ \ a_n > 0.$

Составим матрицу из коэффициентов:

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Дифференциальное уравнение **асимптотически устойчиво**, если все ведущие угловые миноры этой матрицы положительны.

# Примеры нахождения

1. $a_1\dot{y} + a_0 y = 0$

$$[a_0] \;\rightarrow\; a_1, a_0 > 0$$

2. $a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = 0$

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix} \rightarrow a_2, a_1, a_0 > 0$$

3. $a_3\dddot{y} + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = 0$

$$\begin{bmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{bmatrix} \rightarrow a_3, a_2, a_1, a_0 > 0, \qquad a_2 a_1 > a_3 a_0$$

# Применим критерий

Найдите при каких $a$ дифференциальные уравнения асимптотически устойчивы.

1. $\ddot{y} - a\dot{y} + y = 0$

2. $\dddot{y} + 3\ddot{y} + 2\dot{y} + ay = 0$

3. $\dddot{y} + (4 - a)\ddot{y} + (2 + a)\dot{y} + 5y = 0$

# Непрерывные системы

Теперь рассмотрим **системы линейных однородных стационарных** дифференциальных уравнений **первого порядка**.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases} \rightarrow \quad \dot{x} = Ax$$

# Какая между ними связь?

Любое линейное дифференциальное уравнение $n$-порядка можно преобразовать в систему $n$ уравнений первого порядка.

Уравнения вида: $y^{(n)} = -a_{n-1}y^{(n-1)} - \dots - a_2\ddot{y} - a_1\dot{y} - a_0 y$

Выполним замену:

$$\begin{matrix} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ \vdots \\ x_n = y^{(n-1)} \end{matrix} \quad \to \quad \begin{matrix} \dot{x}_1 = \dot{y} \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} \\ \vdots \\ \dot{x}_n = y^{(n)} \end{matrix} \quad \to \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = -a_{n-1}x_n - \dots - a_2 x_3 - a_1 x_2 - a_0 x_1 \end{cases}$$

Можно ли от **любой** системы перейти к **одному** дифференциальному уравнению? 🤔

# Как их решать?

Уравнения вида: $\dot{x} = Ax$

С начальным условием: $x(0) = x_0$

Имеет решение: $x(t) = e^{At}x_0$

Пример:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$e^{\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} t} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{2t} - e^{-t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{2t} - e^{-t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}\big(x_1(0) - x_2(0)\big) + e^{2t}x_2(0) \\ e^{2t}x_2(0) \end{bmatrix}$$

# Найти собственные вектора, числа и Nullspace. Определите устойчивость.

1. $$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

2. $$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

3. $$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 1 & 4\\ 4 & -2 & 4\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

# Дискретные системы

Также рассмотрим **системы линейных однородных стационарных** дискретных уравнений **первого порядка**.

$$\begin{cases} x_1(k+1) = a_{11}x_1(k) + a_{12}x_2(k) + \dots + a_{1n}x_n(k) \\ x_2(k+1) = a_{21}x_1(k) + a_{22}x_2(k) + \dots + a_{2n}x_n(k) \\ \vdots \\ x_n(k+1) = a_{n1}x_1(k) + a_{n2}x_2(k) + \dots + a_{nn}x_n(k) \end{cases} \rightarrow \quad x(k+1) = Ax(k)$$

$x\{T(k+1)\} = Ax\{Tk\}$, $Tk$ – время, $T$ – ширина шага

# Как их решать?

Уравнения вида: $x(k+1) = Ax(k)$

С начальным условием: $x(0) = x_0$

Имеет решение: $x(k) = A^k x_0$

Пример:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (-1)^k & 2^k - (-1)^k \\ 0 & 2^k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^k & 2^k - (-1)^k \\ 0 & 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^k \left(x_1(0) - x_2(0)\right) + 2^k x_2(0) \\ 2^k x_2(0) \end{bmatrix}$$

# Найдите решение. Проверить устойчивость.

1. $$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

2. $$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

3. $$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

# Дискретизация

Уравнения вида: $\dot{x}(t) = Ax(t)$

Хотим получить: $x(k+1) = A_d x(k)$

Шаг дискретизации: $T$

Рассмотрим решение уравнения: $x(t) = e^{At}x_0$

Выполним замену: $t = Tk \quad \rightarrow \quad x(Tk) = e^{ATk}x_0 = (e^{AT})^k x_0$

Зная, что решение дискретной системы уравнений имеет вид: $x\{Tk\} = A_d^k x_0$

Заключаем, что $A_d = e^{AT}$

# Дискретизировать системы

Найти эквивалентные системы в дискретном времени.

1. $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ при $T = 0.5$

2. $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ при $T = 1$

3. $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ при $T = 1$

# Разностные уравнения

Отражением дифференциальных уравнений для дискретных систем являются разностные уравнения, давайте их рассмотрим.

Уравнения вида:

$$a_n y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + \cdots + a_2 y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = 0$$

# Как их решать?

Уравнение:

$$a_n y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + \cdots + a_2 y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = 0$$

Характеристический полином:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

| Корни полинома | Моды | Кратные корни |
|---|---|---|
| $\lambda = \alpha$ | $\alpha^k$ | $k\alpha^k, k^2\alpha^k, k^3\alpha^k, \ldots$ |
| $\lambda = \alpha(\cos\beta \pm \sin\beta\, i)$ | $\alpha^k \cos\beta k$,<br>$\alpha^k \sin\beta k$ | $k\alpha^k \sin\beta k, k\alpha^k \cos\beta k$,<br>$k^2\alpha^k \sin\beta k, k^2\alpha^k \cos\beta k, \ldots$ |
| $\lambda = 0$ | Решение от них не зависит | |

# Как их решать?

| Корни полинома | Моды | Кратные корни |
|---|---|---|
| $\lambda = \alpha$ | $\alpha^k$ | $k\alpha^k, k^2\alpha^k, k^3\alpha^k, \ldots$ |
| $\lambda = \alpha(\cos\beta \pm \sin\beta\, i)$ | $\alpha^k \cos\beta k$,<br>$\alpha^k \sin\beta k$ | $k\alpha^k \sin\beta k, k\alpha^k \cos\beta k$,<br>$k^2\alpha^k \sin\beta k, k^2\alpha^k \cos\beta k, \ldots$ |
| $\lambda = 0$ | Решение от них не зависит | |

Решение – линейная комбинация мод.

Пример: $y(k+3) = 9y(k+1) \rightarrow \lambda^3 = 9\lambda \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 3,\ \lambda = 0$

Ответ: $y(k) = c_1 3^k + c_2(-3)^k$

# Найти общее решение

Найдите общее решение разностных уравнений.

1. $y(k+4) + 25y(k+2) = 0$

2. $y(k+2) - y(k) = 0$

3. $y(k+2) + 6y(k+1) + 9y(k) = 0$

# Решение последовательности для Фибоначчи

Числа Фибоначчи: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

В форме разностного уравнения: $y(k+2) = y(k+1) + y(k)$

При начальных условиях: $y(1) = 1,\ \ y(2) = 1$

Найти решение.

# Анализ нелинейных систем

Линеаризация

# Линеаризация

Это замена **нелинейных** уравнений на близкие к ним по динамическим свойствам **линейные** уравнения.

Рассмотрим способ линеаризации, в основе которого лежит разложение нелинейных функций в ряд Тейлора.

# Линеаризация

1) Функция $y(t)$ раскладывается в ряд Тейлора в окрестности точки $a$:

$$y(t) = y(a) + \frac{\dot{y}(a)}{1!}(t-a) + \frac{\ddot{y}(a)}{2!}(t-a)^2 + \frac{\dddot{y}(a)}{3!}(t-a)^3 + \cdots + \frac{y^{(n)}(a)}{n!}(t-a)^n + \cdots$$

2) Отбрасываются все члены высшего порядка малости

Например, для системы второго порядка:

$$y(t) \approx y(a) + \dot{y}(a)(t-a)$$

# Пример

Пусть исходная модель имеет вид: $\dot{x} = f(x), \; f(x) = 3x^2 - 7x + 5$

Разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $a$:

$$f(x) \approx f(a) + \dot{f}(a)(x - a)$$

Линеаризуем модель в окрестностях точки $x = 2$:

$$f(2) = 12 - 14 + 5 = 3$$

$$\dot{f}(x) = 6x - 7$$

$$\dot{f}(2) = 12 - 7 = 5$$

Тогда линеаризованная модель в окрестности выбранной точки:

$$f(x) \approx 3 + 5(x - 2)$$

# Сравним исходную модель и линеаризованную в окрестностях точки $x = 2$

| | $f(x) = 3x^2 - 7x + 5$ | $f(x) \approx 3 + 5(x - 2)$ | Относительная погрешность |
|---|---|---|---|
| $x = 1$ | $1$ | $-2$ | $150\%$ |
| $x = 1.9$ | $2.53$ | $2.5$ | $1{,}2\%$ |
| $x = 1.99$ | $2.9503$ | $2.95$ | $0.01\%$ |
| $x = 2$ | $3$ | $3$ | $0\%$ |
| $x = 2.01$ | $3.0503$ | $3.05$ | $0.0098\%$ |
| $x = 2.1$ | $3.53$ | $3.5$ | $0{,}85\%$ |
| $x = 3$ | $11$ | $8$ | $37{,}5\%$ |

Видно, что при малых отклонениях погрешности получаются незначительными.

Недостаток: необходимость пересчета коэффициентов при существенном изменении значения $x$.

# Точки равновесия

Пусть система имеет вид:

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t) \in \mathbb{R}$$

Тогда точки равновесия – это решения уравнения $f(x) = 0$

**Пример:**

Система: $\dot{x} = 1 - x^2$

Точки равновесия: $\pm 1$

# Задание

Дана система: $\dot{x} = -3x$

a) Какие точки равновесия?
b) Как выглядит линеаризация около точек равновесия?

# Задание

Дана система: $\dot{x} = -3x$

a) Какие точки равновесия?
b) Как выглядит линеаризация около точек равновесия?

**Ответ:**
a) Точки равновесия: $x = 0$
b) Линеаризация около точки $x = 0$: $\dot{x} = -3x$

# Задание

Дана система: $\dot{x} = 7$

a) Какие точки равновесия?
b) Как выглядит линеаризация около точек равновесия?

# Задание

Дана система: $\dot{x} = 7$

a) Какие точки равновесия?
b) Как выглядит линеаризация около точек равновесия?

**Ответ:**
a) Точки равновесия: <u>их нет</u>
b) Линеаризацию сделать не можем, так как нет точки

# Задание

Дана система: $\dot{x} = x^2$

a) Какие точки равновесия?

b) Как выглядит линеаризация около точек равновесия?

# Задание

Дана система: $\dot{x} = x^2$

a) Какие точки равновесия?
b) Как выглядит линеаризация около точек равновесия?

**Ответ:**
a) Точки равновесия: $x = 0$
b) Линеаризация около точки $x = 0$: $\dot{x} = 0$

# Задание

Дана система: $\dot{x} = \sin(x)$

a) Какие точки равновесия?
b) Как выглядит линеаризация около точек равновесия?

# Задание

Дана система: $\dot{x} = \sin(x)$

**Ответ:**

a) Точки равновесия: $x = \pi k, \;\; k \in \mathbb{Z}$

b) Линеаризация около точки:

$x = 2\pi k$: $\dot{x} = x$

$$\sin(x) = x - \boxed{\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots}$$

очень мало!

$x = 2\pi k + \pi$: $\dot{x} = -x$

$$\sin(x) = -x + \boxed{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \cdots}$$

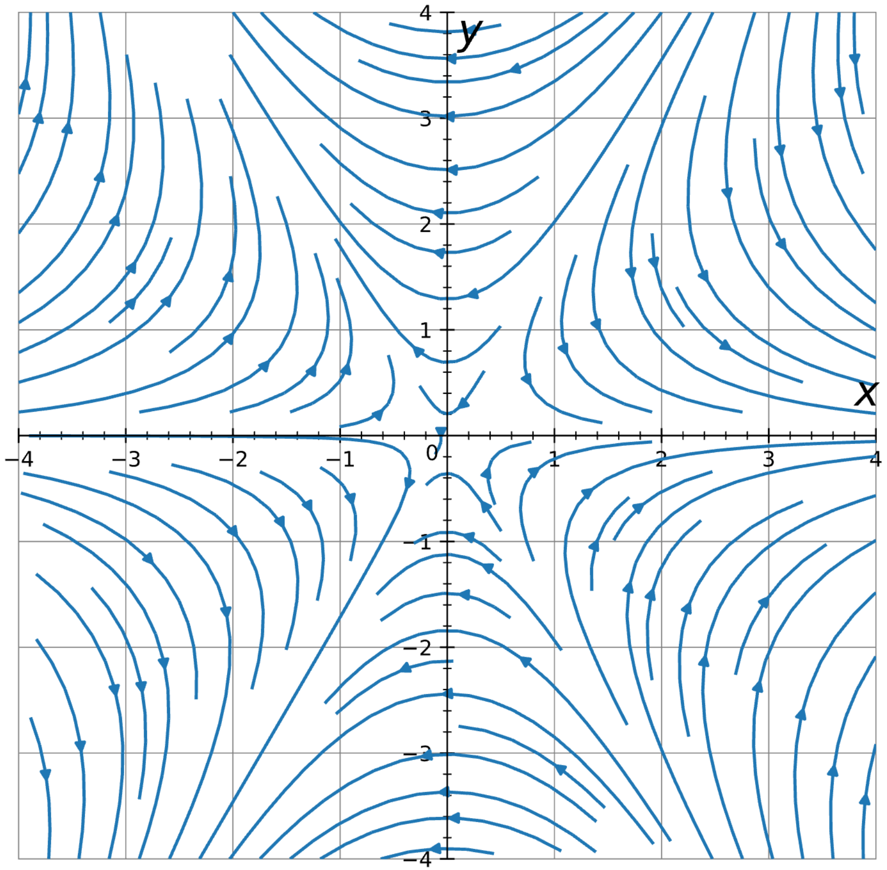
очень мало!

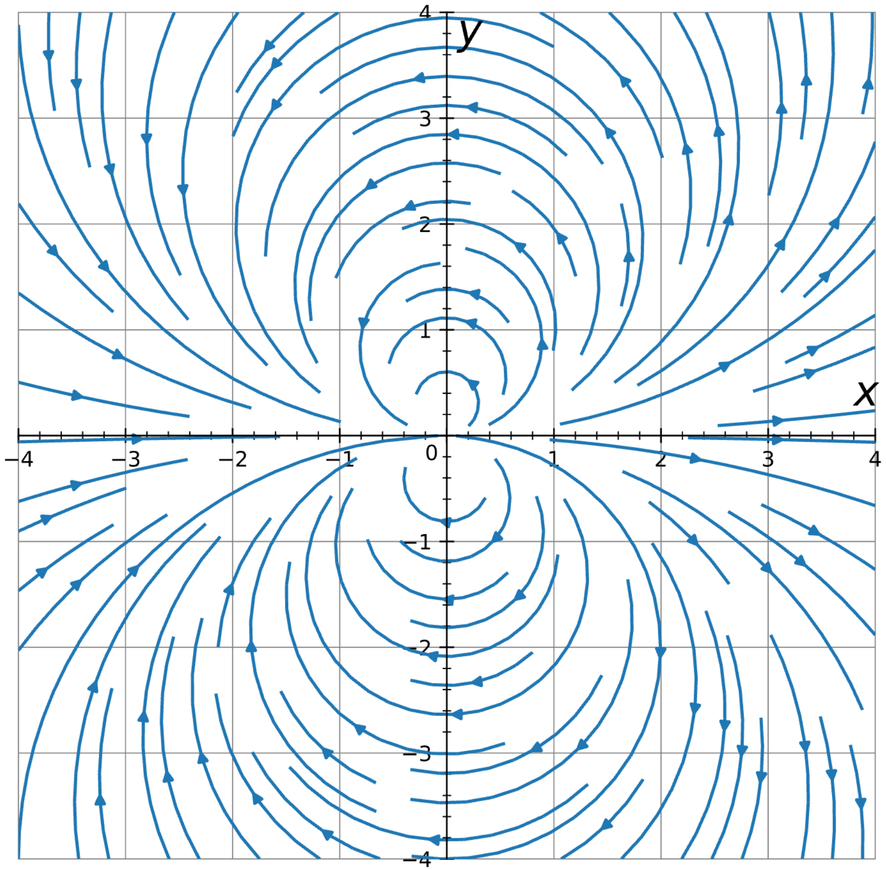
# Фазовые портреты

Фазовая портрет – это пространство точек, отражающих совокупность всех состояний системы. Нанесенные фазовые траектории при различных начальных значениях переменных дает легко обозримый "портрет" системы.

Построение фазового портрета позволяет сделать выводы о характере изменений переменных вектора состояния без знания аналитических решений исходной системы уравнений.

# Фазовые портреты



# Линеаризация динамической системы второго порядка

Пусть система имеет вид: $\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}, \quad x(t), y(t) \in \mathbb{R}$

Точки равновесия: $\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$

Линеаризовать систему можно с помощью матрицы Якоби, которая составляется из частных производных функций $f$ и $g$, рассчитанных в точке равновесия:

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Эта матрица и будет выступать матрицей "$A$" системы.

# Типовые фазовые портреты линейных систем второго порядка

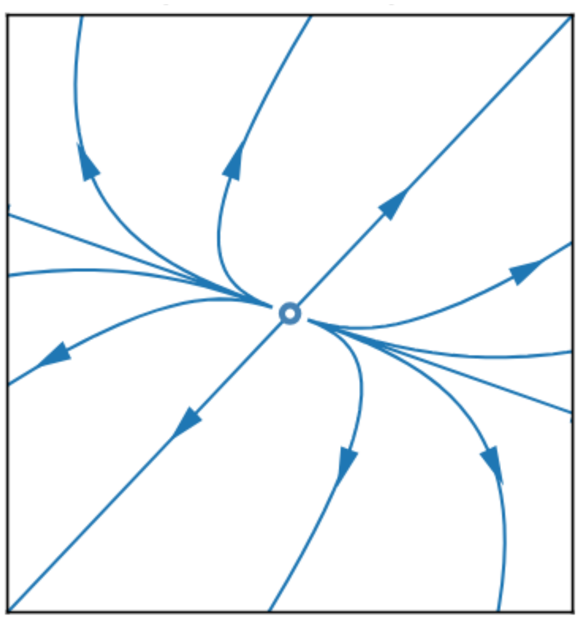
## Неустойчивый узел

Жорданова форма Якобиана:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$



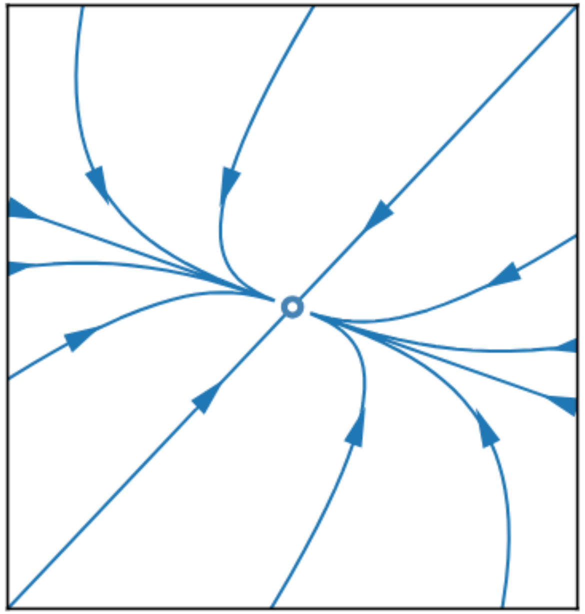
## Устойчивый узел

Жорданова форма Якобиана:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$

$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$



# Типовые фазовые портреты линейных систем второго порядка

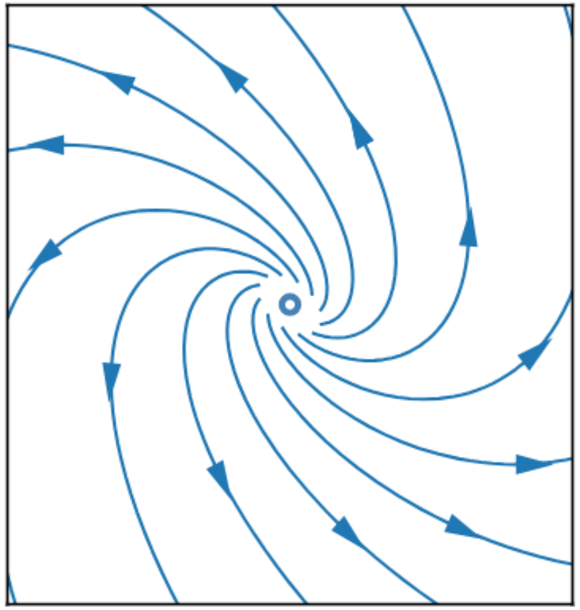
## Неустойчивый фокус

Жорданова форма Якобиана:

$$J = \begin{bmatrix} a & \beta \\ -\beta & a \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = a \pm i\beta$$

$$a > 0$$



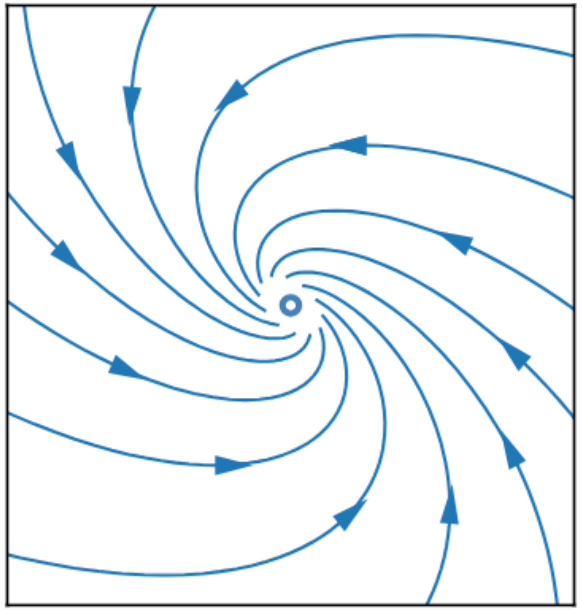
## Устойчивый фокус

Жорданова форма Якобиана:

$$J = \begin{bmatrix} a & \beta \\ -\beta & a \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = a \pm i\beta$$

$$a < 0$$



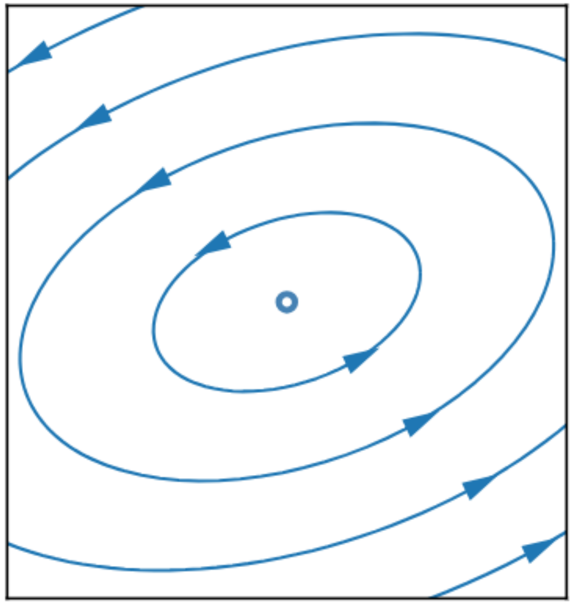
# Типовые фазовые портреты линейных систем второго порядка

## Центр

Жорданова форма Якобиана:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i\beta$$



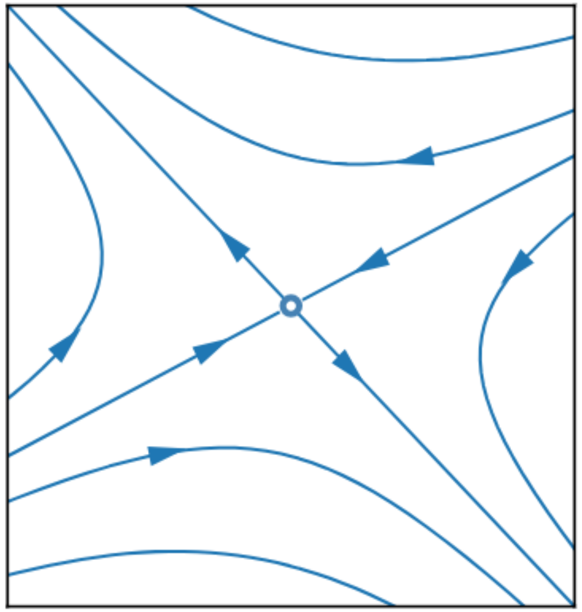
## Седло

Жорданова форма Якобиана:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$$



# Биологический пример. Хищник-жертва

Дана система: $\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) = 3x - xy \\ \dot{y} = g(x,y) = -2y + xy \end{cases}$, $\quad x(t), y(t) \in \mathbb{R}$

Какие точки равновесия у системы? 🤔

# Биологический пример. Хищник-жертва

Дана система: $\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) = 3x - xy \\ \dot{y} = g(x,y) = -2y + xy \end{cases}$, $x(t), y(t) \in \mathbb{R}$

Точки равновесия: $(0,\ 0),\ (2,\ 3)$.

Выполним линеаризацию около точки $(0,\ \ 0)$:

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 - y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -x \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = y \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = -2 + x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \qquad \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 0 \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = -2$$

Матрица Якоби: $J = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ - Седло.

# Биологический пример. Хищник-жертва

Дана система: $\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) = 3x - xy \\ \dot{y} = g(x, y) = -2y + xy \end{cases}$, $\quad x(t), y(t) \in \mathbb{R}$

Точки равновесия: $(0,\ 0)$, $(2,\ 3)$.

Выполним линеаризацию около точки $(2,\ 3)$:

# Биологический пример. Хищник-жертва

Дана система: $\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) = 3x - xy \\ \dot{y} = g(x,y) = -2y + xy \end{cases}$, $x(t), y(t) \in \mathbb{R}$

Точки равновесия: $(0,\ 0),\ (2,\ 3)$.

Выполним линеаризацию около точки $(2,\ 3)$:

Найдем частные производные:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 - y$ $\quad$ $\frac{\partial f}{\partial y} = -x$ $\quad$ $\frac{\partial g}{\partial x} = y$ $\quad$ $\frac{\partial g}{\partial y} = -2 + x$

$\frac{\partial f}{\partial x}(2,3) = 0$ $\quad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(2,3) = -2$ $\quad$ $\frac{\partial g}{\partial x}(2,3) = 3$ $\quad$ $\frac{\partial g}{\partial y}(2,3) = 0$

Матрица Якоби: $J = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ - Центр.

# Биологический пример. Хищник-жертва

Дана система: $\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) = 3x - xy \\ \dot{y} = g(x,y) = -2y + xy \end{cases}$, $\quad x(t), y(t) \in \mathbb{R}$

Точки равновесия: $(0,\ 0)$, $(2,\ 3)$.

Около: $(0,\ 0)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

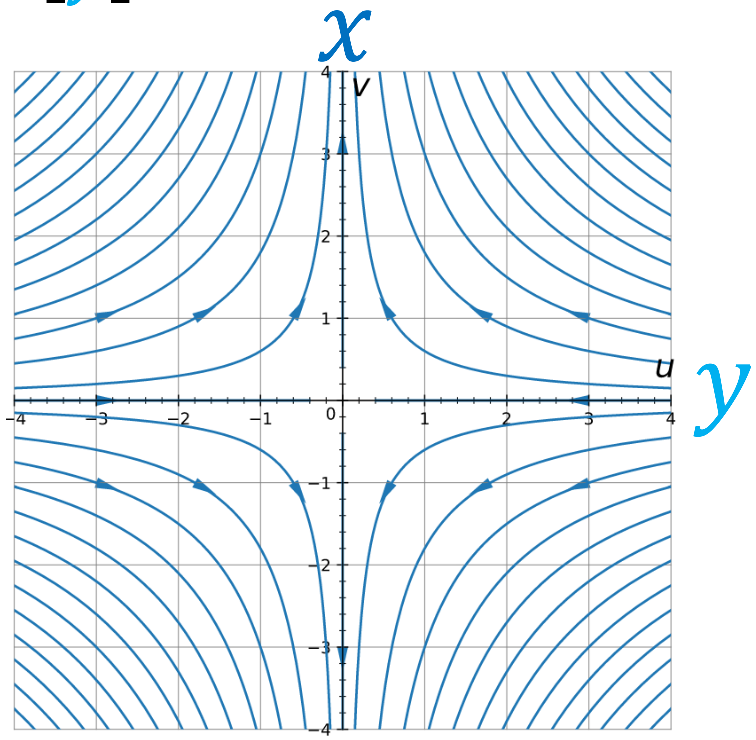
Около: $(2,\ 3)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

# Биологический пример. Хищник-жертва

Около: $(0,\ 0)$

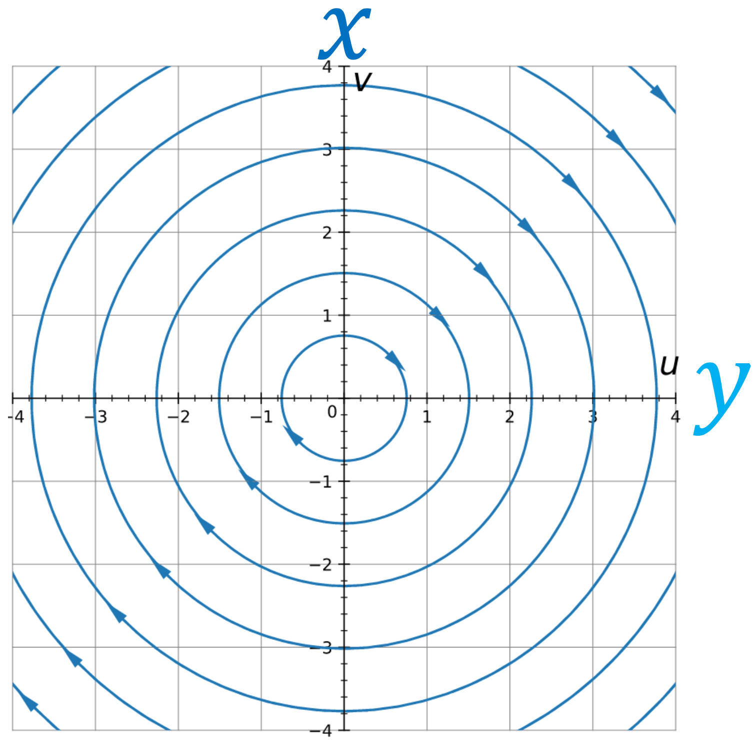
$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$




+

Около: $(2,\ 3)$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -2\\ 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$



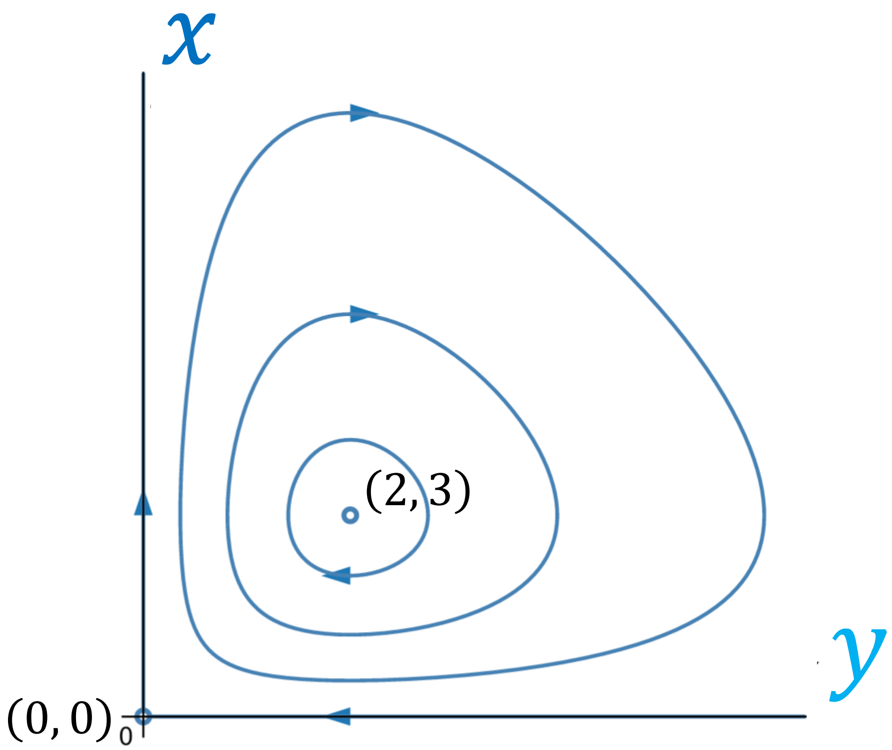
# Биологический пример. Хищник-жертва

Около: $(0,\ 0)$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

Около: $(2,\ 3)$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -2\\ 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$



# Домашнее Задание

По практике №4

# Решить дифференциальное уравнение

1. Найдите общее решение дифференциального уравнения:

$$2y^{(5)} + 5\dddot{y} + 2\dot{y} = 0$$

2. Найдите частое решение дифференциального уравнения для начальных условий:

$$y(0) = \ddot{y}(0) = y^{(4)}(0) = 2, \qquad \dot{y}(0) = \dddot{y}(0) = 0$$

# Решить систему дифференциальных уравнений

1. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

2. Найдите собственные вектора, числа и Nullspace матрицы $A$. Определите устойчивость.

# Решить систему дискретных уравнений

1. Найдите общее решение системы дискретных уравнений:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

2. Найдите собственные вектора, числа и Nullspace матрицы $A$. Определите устойчивость.

# Найти фазовый портрет системы

1. Найдите все точки равновесия нелинейной системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y - \sin x \end{cases}$$

2. Найдите линеаризацию системы в точках равновесия. Установите их тип.
3. Нарисуйте фазовый портрет нелинейной системы по найденной линеаризации.