Линейная лекция

Линейные пространства

Множества, элементы которых можно складывать друг с другом и умножать на числа

V – множество

$v_1, v_2 \in V \quad \Rightarrow \quad v_1 + v_2 \in V$

$v \in V$, c – число $\quad \Rightarrow \quad cv \in V$

Линейные пространства

Множества, элементы которых можно
складывать друг с другом и умножать на числа

V – множество

$v_1, v_2 \in V \quad \Rightarrow \quad v_1 + v_2 \in V$

$v \in V,\ c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad cv \in V$

Линейное пространство над $\mathbb{R}$

Линейные пространства

Множества, элементы которых можно
складывать друг с другом и умножать на числа

V – множество

$$v_1, v_2 \in V \quad \Rightarrow \quad v_1 + v_2 \in V$$

$$v \in V,\ c \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad cv \in V$$

Линейное пространство над $\mathbb{C}$

Линейные пространства

V – множество

$$v_1, v_2 \in V \quad \Rightarrow \quad v_1 + v_2 \in V$$

$$v \in V,\ c \text{ – число} \quad \Rightarrow \quad cv \in V$$

Как называются элементы v линейного пространства?

Векторы

Линейные пространства

V – множество

$$v_1, v_2 \in V \quad \Rightarrow \quad v_1 + v_2 \in V$$

$$v \in V,\ c \text{ – число} \quad \Rightarrow \quad cv \in V$$

Как называются числа c, на которые можно умножать?

Скаляры

Примеры линейных пространств

Вещественные числа $\mathbb{R}$

Сложение векторов

$$2 + 5 = 7$$

Умножение на скаляр

$$-10 \cdot 5 = -50$$

Примеры линейных пространств

Векторы $\mathbb{R}^n$

Сложение векторов

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Умножение на скаляр

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 14 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Примеры линейных пространств

Матрицы $\mathbb{R}^{m\times n}$

Сложение векторов

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Умножение на скаляр

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Примеры линейных пространств

Множество из одного нуля $\{0\}$

Сложение векторов

$$0 + 0 = 0$$

Умножение на скаляр

$$5 \cdot 0 = 0$$

Примеры линейных пространств

Множество P_n многочленов степени $\leq n$

Сложение векторов

$$(1 + x^2) + (x - x^2) = 1 + x$$

Умножение на скаляр

$$5 \cdot (1 + x^2) = 5 + 5x^2$$

Примеры линейных пространств

Множество P_∞ всех многочленов

Сложение векторов

$$(x^2) + (x^{999} - x^2) = x^{999}$$

Умножение на скаляр

$$3 \cdot 2x^{1001} = 6x^{1001}$$

Примеры линейных пространств

Множество C^0 всех непрерывных функций (на $\mathbb{R}$)

Сложение векторов	Умножение на скаляр
$f(x) + g(x)$	$c \cdot f(x)$

Примеры линейных пространств

Множество C^{∞} всех гладких функций (на $\mathbb{R}$)

Сложение векторов

$$f(x) + g(x)$$

Умножение на скаляр

$$\mathrm{c} \cdot f(x)$$

Примеры линейных пространств

Множество l^∞ всех ограниченных последовательностей

Сложение векторов

$$
\begin{array}{cl}
 & 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots \\
+ & \\
 & 7, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots \\
= & \\
 & 8, 5, 6, 5, 6, 5, \ldots
\end{array}
$$

Умножение на скаляр

$$4 \cdot 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

$$= 4, 0, 4, 0, 4, 0, \ldots$$

Примеры линейных пространств

Является ли линейным пространством над $\mathbb{R}$?

Множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел

Примеры линейных пространств

Является ли линейным пространством над $\mathbb{R}$?

Множество $\mathbb{R}_{>0}$ всех положительных чисел

Примеры линейных пространств

Является ли линейным пространством над $\mathbb{R}$?

Множество $\mathbb{S}^n$ симметричных матриц размера $n \times n$

Примеры линейных пространств

Является ли линейным пространством над $\mathbb{R}$?

Множество $O(n)$ ортогональных матриц размера $n \times n$

Примеры линейных пространств

Является ли линейным пространством над $\mathbb{R}$?

Множество $\{ f \mid f(x) = f(-x)\}$ всех чётных функций на $\mathbb{R}$

Примеры линейных пространств

Является ли линейным пространством над $\mathbb{R}$?

Множество $\{ f \mid f(x) = -f(-x)\}$ всех нечётных функций на $\mathbb{R}$

Примеры линейных пространств

Является ли линейным пространством над $\mathbb{R}$?

Множество всех функций, имеющих разрыв типа “скачок”

Примеры линейных пространств

Является ли линейным пространством над $\mathbb{R}$?

Множество всех возрастающих функций

Примеры линейных пространств

Является ли линейным пространством над $\mathbb{R}$?

Множество всех вещественных матриц

Подпространства

Если подмножество W линейного пространства V само является линейным пространством, то оно называется его подпространством

$$W \subseteq V$$

Кто кому подпространство?

C^0 – непрерывные функции

C^∞ – гладкие функции

P_{10} – полиномы степени ≤ 10

P_∞ – все полиномы

F – все функции

$F_\uparrow$ – возрастающие функции

F_{odd} – нечётные функции

F_{even} – чётные функции

$$P_{10} \subset P_\infty \subset C^\infty \subset C^0 \subset F$$

$$F_{\text{odd}} \subset F \qquad F_{\text{even}} \subset F$$

$F_\uparrow$

Я тут лишний

Линейная оболочка

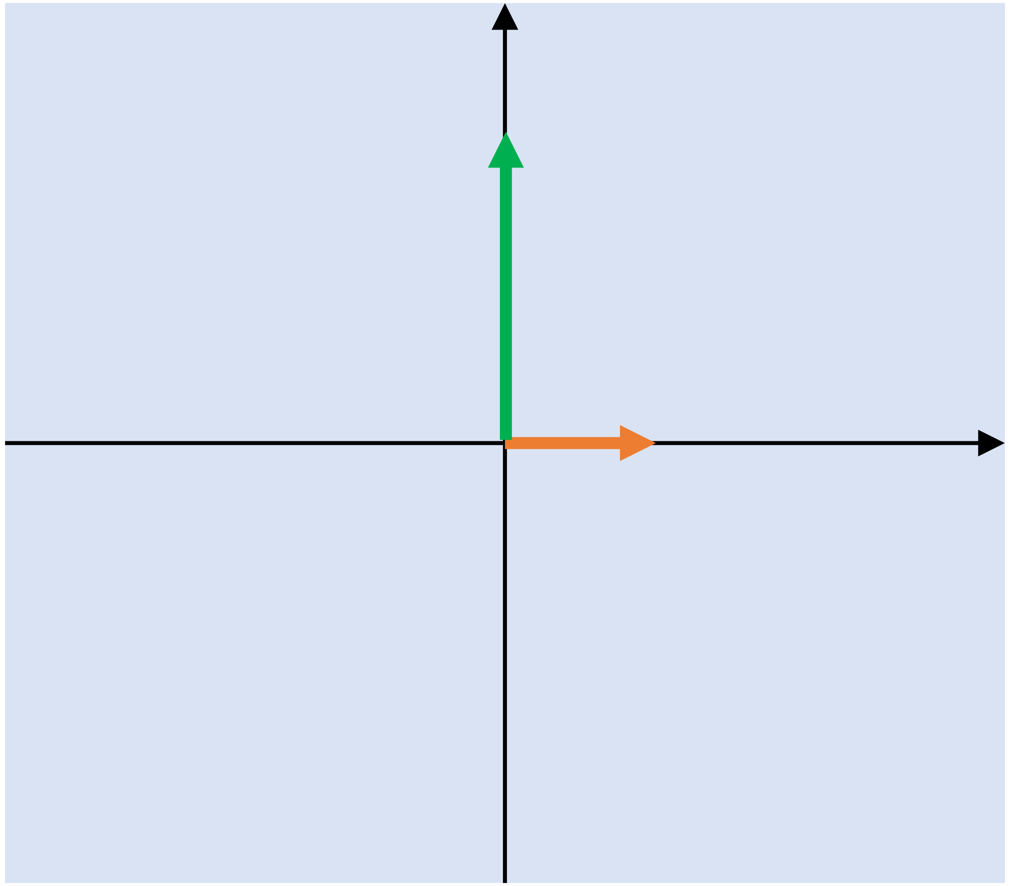
Линейная оболочка набора векторов

$$\mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

множество всех линейных комбинаций этих векторов

Линейная оболочка

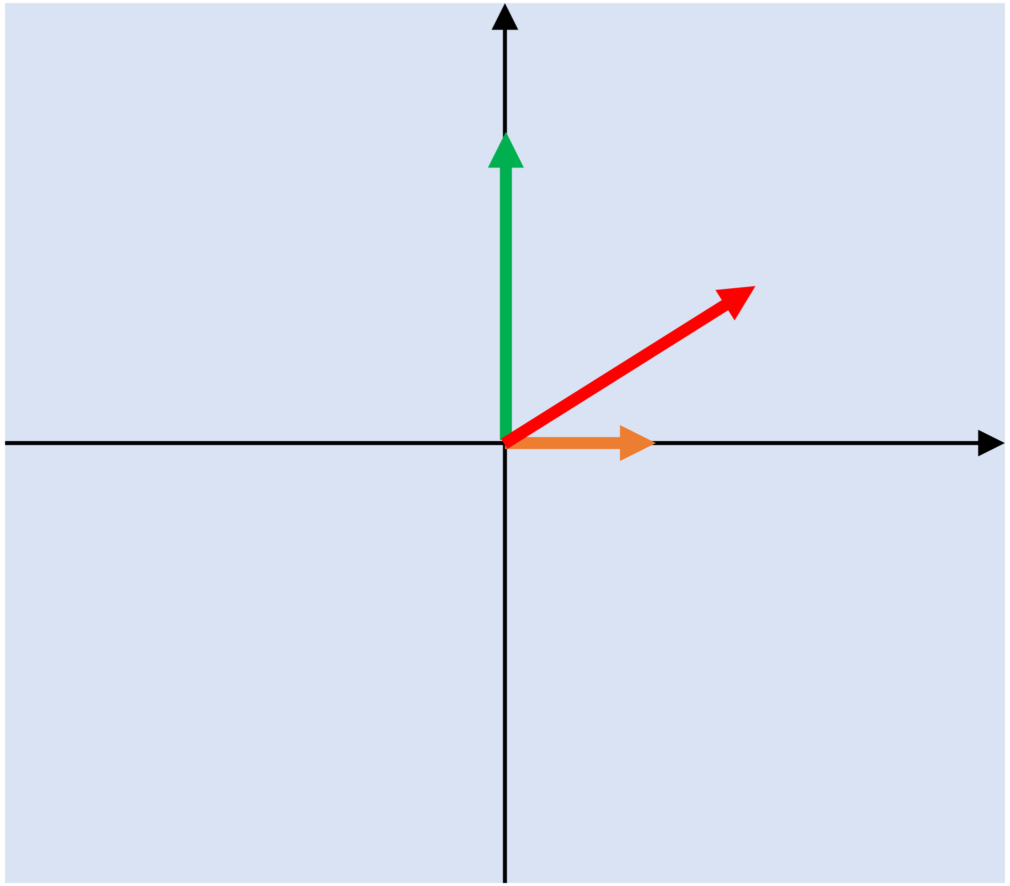
$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$



Линейная оболочка

$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$

$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$

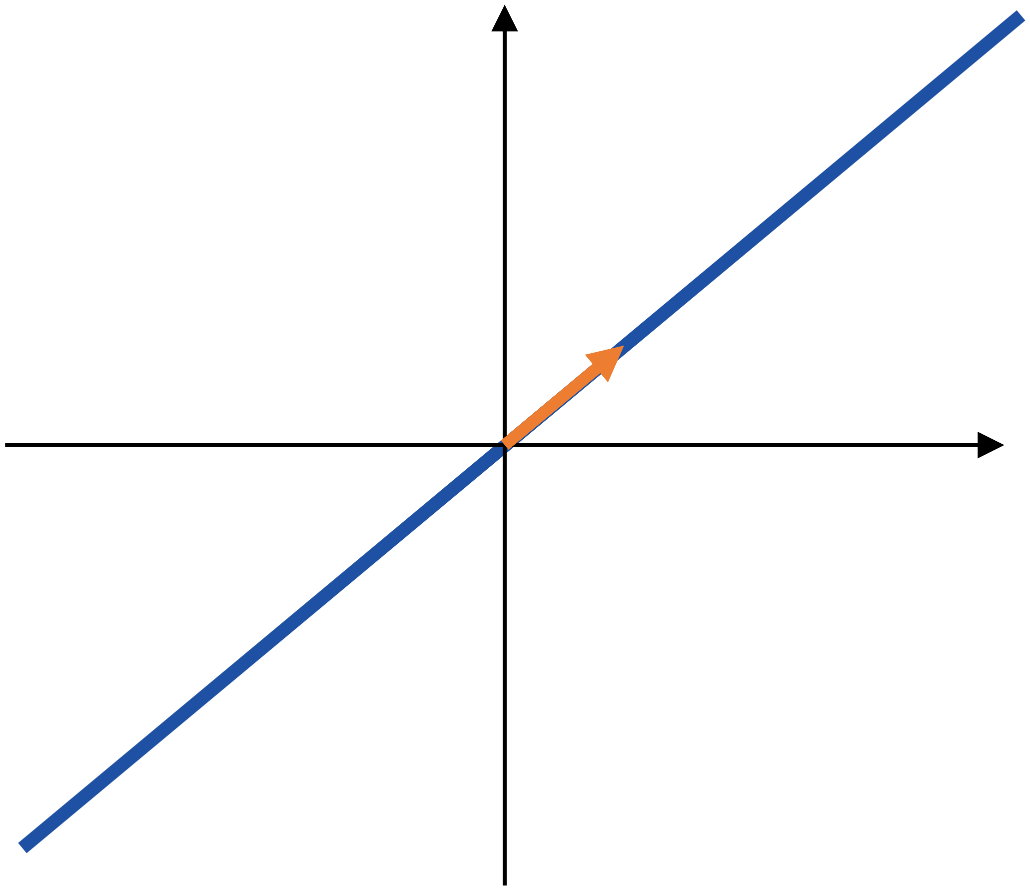


Линейная оболочка

$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$

$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$

$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = \left\{ \begin{bmatrix}a\\a\end{bmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\}$$



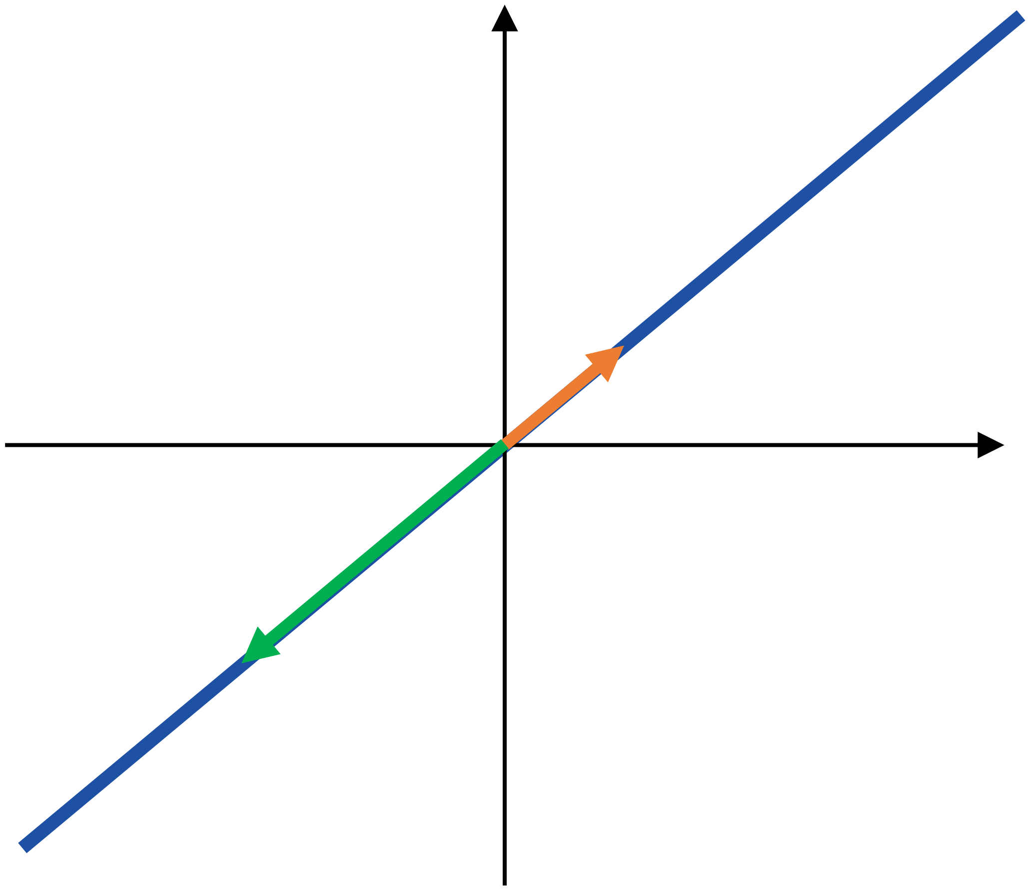
Линейная оболочка

$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}\right)=\mathbb{R}^2$$

$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right)=\mathbb{R}^2$$

$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=\left\{\begin{bmatrix}a\\a\end{bmatrix}\middle|\, a\in\mathbb{R}\right\}$$

$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-5\\-5\end{bmatrix}\right)=\left\{\begin{bmatrix}a\\a\end{bmatrix}\middle|\, a\in\mathbb{R}\right\}$$



Линейная оболочка

Решение линейного однородного дифференциального уравнения – линейная оболочка его мод (простейших решений)

Уравнение	Характеристические корни	Моды
$\ddot{y} + y = 0$	$\lambda_{1,2} = \pm i$	$\sin(t), \cos(t)$

Решение уравнения

$$y(t) = c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t)$$

Линейная оболочка

Решение линейного однородного дифференциального уравнения – линейная оболочка его мод (простейших решений)

Уравнение

$$\ddot{y} + y = 0$$

Характеристические корни

$$\lambda_{1,2} = \pm i$$

Моды

$$\sin(t), \cos(t)$$

Решение уравнения

$$y(t) \in \mathrm{Span}(\sin(t), \cos(t))$$

Линейная оболочка

Является ли линейная оболочка
линейным пространством?

Да!

$$x, y \in \mathrm{Span}(v_1, v_2) \quad c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad x + y \in \mathrm{Span}(v_1, v_2) \quad c \cdot x \in \mathrm{Span}(v_1, v_2)$$

Базис и размерность

Пусть n – наименьшее возможное число элементов набора $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ такого, что $\mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n) = V$

Число n называется размерностью пространства V

$$\dim V = n$$

Сам набор $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ – называется базисом пространства V (одним из возможных)

Базис и размерность

Какова размерность пространства полиномов ≤ 3 степени
$P_3 = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$?

$$P_3 = \mathrm{Span}(1, x, x^2, x^3)$$

$$\dim P_3 = 4$$

Базис и размерность

Какова размерность пространства всех полиномов P_∞?

$$P_\infty = \mathrm{Span}\left(1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, \dots\right)$$

$$\dim P_\infty = \infty$$

(счетная бесконечность)

Базис и размерность

Какова размерность пространства гладких функций C^{∞}?

$$C^{\infty} = \mathrm{Span}(???)$$

$$\dim C^{\infty} = \infty$$

(несчетная бесконечность)

Линейные отображения

Отображение $f : V \to W$ между линейными пространствами V и W называется линейным, если

$$\boxed{\begin{gathered} f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \\ f(cv) = cf(v) \end{gathered}}$$

Примеры линейных отображений

Линейная комбинация координат вектора

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto 2x + 3y$$

Уважает сложение

$$\boxed{f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = 2(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2) = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right)}$$

Примеры линейных отображений

Линейная комбинация координат вектора

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto 2x + 3y$$

Уважает умножение на скаляр

$$\boxed{f\left(c \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = 2cx + 3cy = c \cdot f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)}$$

Примеры линейных отображений

Вычисление следа матрицы

$$tr : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R} : A \mapsto \mathrm{trace}(A)$$

Уважает сложение

$$\boxed{tr(A + B) = \sum (a_{ii} + b_{ii}) = \sum a_{ii} + \sum b_{ii} = tr(A) + tr(B)}$$

Примеры линейных отображений

Вычисление следа матрицы

$$tr : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R} : A \mapsto \mathrm{trace}(A)$$

Уважает умножение на скаляр

$$\boxed{tr(c \cdot A) = \sum c a_{ii} = c \sum a_{ii} = c \cdot tr(A)}$$

Примеры линейных отображений

Взятие производной

$$\frac{d}{dt} : C^{\infty} \to C^{\infty} : y(t) \mapsto \dot{y}(t)$$

Уважает сложение

$$\boxed{\frac{d}{dt}(y_1 + y_2) = \frac{d}{dt}(y_1) + \frac{d}{dt}(y_2)}$$

Примеры линейных отображений

Взятие производной

$$\frac{d}{dt} : C^\infty \to C^\infty : y(t) \mapsto \dot{y}(t)$$

Уважает умножение на скаляр

$$\boxed{\frac{d}{dt}(c \cdot y) = c \cdot \frac{d}{dt}(y)}$$

Примеры линейных отображений

Покупка инвестиционных активов

Количество

Акции Газпрома → 71

Акции Сбербанка → 5.42

Биткоины → 0.003

$$\begin{bmatrix} 71 \\ 5.42 \\ 0.003 \end{bmatrix} \xrightarrow{f} 21509$$

Стоимость в рублях

Является ли отображение f линейным?

Антипримеры

Вычисление длины вектора

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : v \mapsto \|v\|$$

Не уважает сложение

$$\|a + b\| \neq \|a\| + \|b\|$$

Вычисление определителя

$$f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R} : A \mapsto \det(A)$$

Не уважает умножение на скаляр

$$\det(cA) = c^n \det(A) \neq c\det(A)$$

Проверка понимания

Эти отображения – линейные?

$$\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n} : A \mapsto A^{\top}$$

$$\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n} : A \mapsto A^{-1}$$

Матрица как линейное отображение

Матрице $A_{m\times n}$ соответствует линейное отображение

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : x \mapsto Ax$$

Матрица как линейное отображение

Пространство $\mathbb{R}^3$

Пространство $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Матрица как линейное отображение

Пространство $\mathbb{R}^3$ Пространство $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\9\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\5\\2\end{bmatrix}$$

Матрица как линейное отображение

Пространство $\mathbb{R}^3$ Пространство $\mathbb{R}^2$

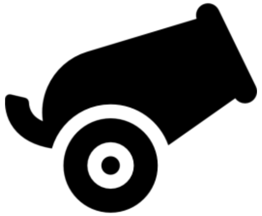
$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}5\\9\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\5\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12\\25\end{bmatrix}$$

Матрица как линейное отображение

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$



Матрица 2×3 сработала как линейное отображение $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

Пространство $\mathbb{R}^3$ | Пространство $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 12 \\ 25 \end{bmatrix}$$

Матрица как линейное отображение

$$\begin{bmatrix} | \\ y \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & A & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ x \\ | \end{bmatrix}$$

Матрица $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ отображает вектор $x \in \mathbb{R}^n$ в вектор $y \in \mathbb{R}^m$
(легко показать, что это отображение – линейное)

Матрица как линейное отображение

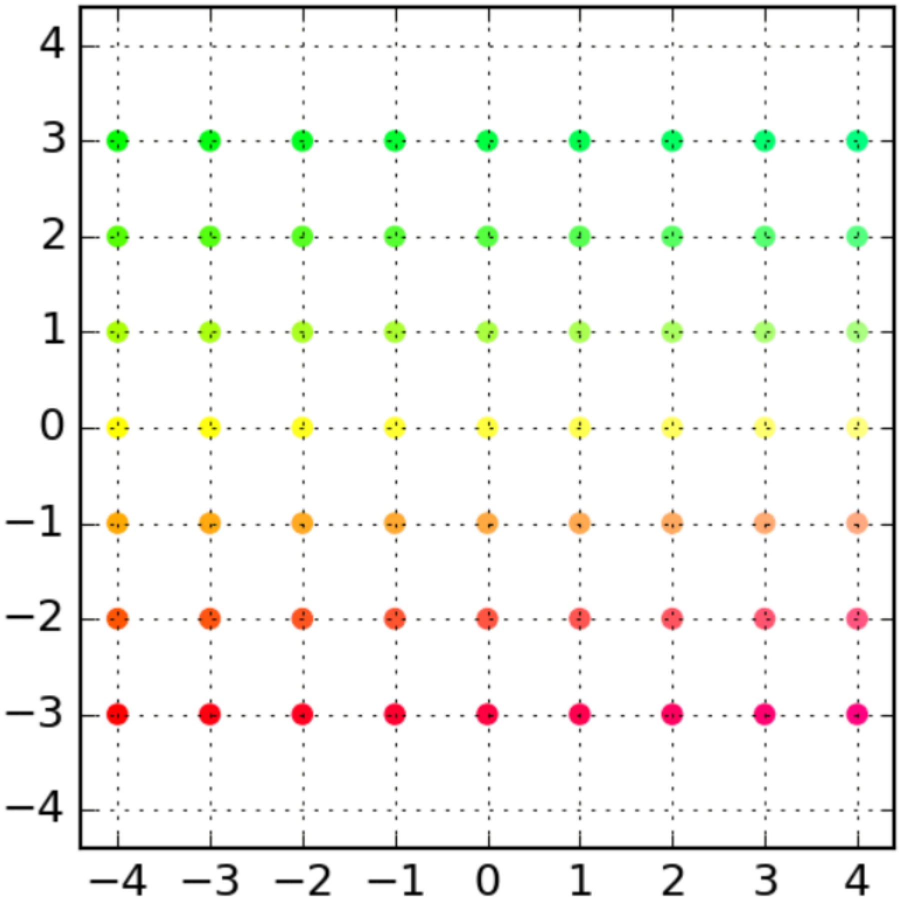
Факт

Любое линейное отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

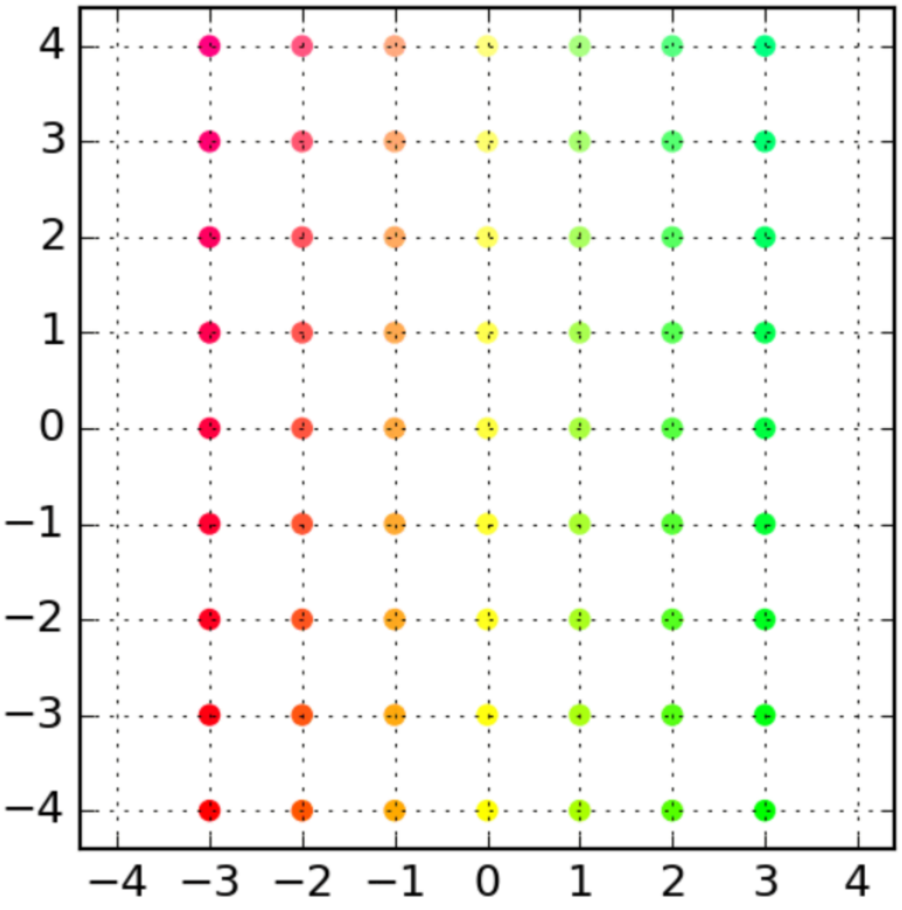
$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad A \quad} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \end{bmatrix}$$

можно задать как умножение на матрицу

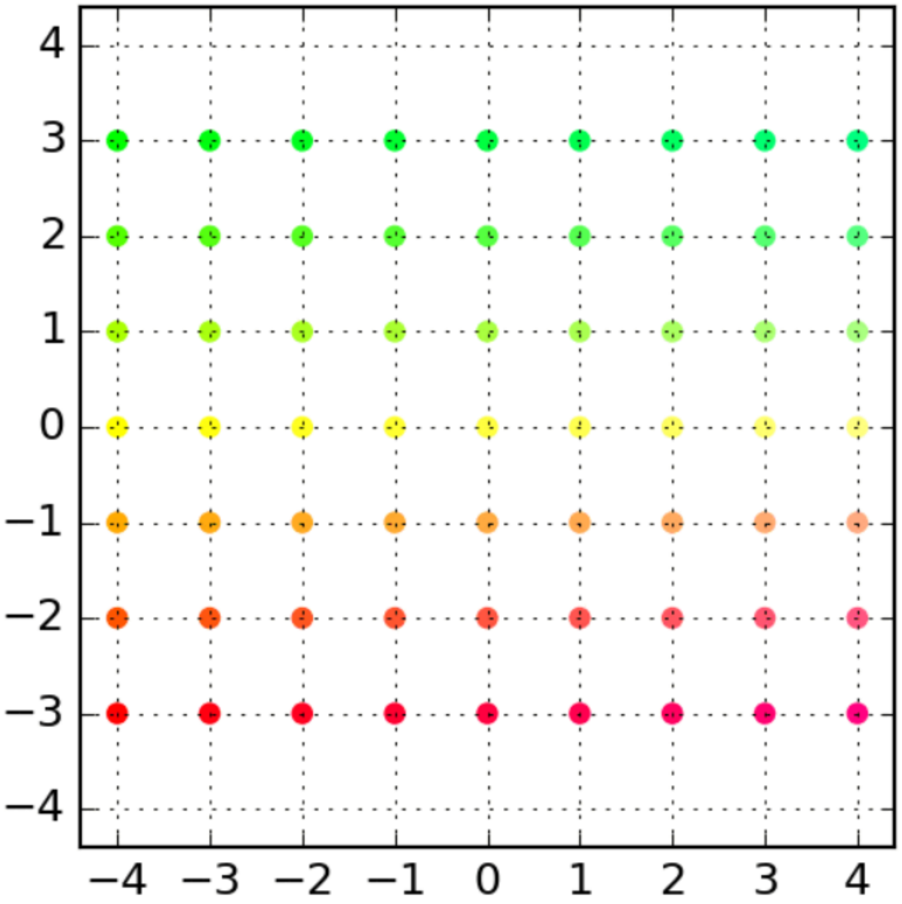
Примеры



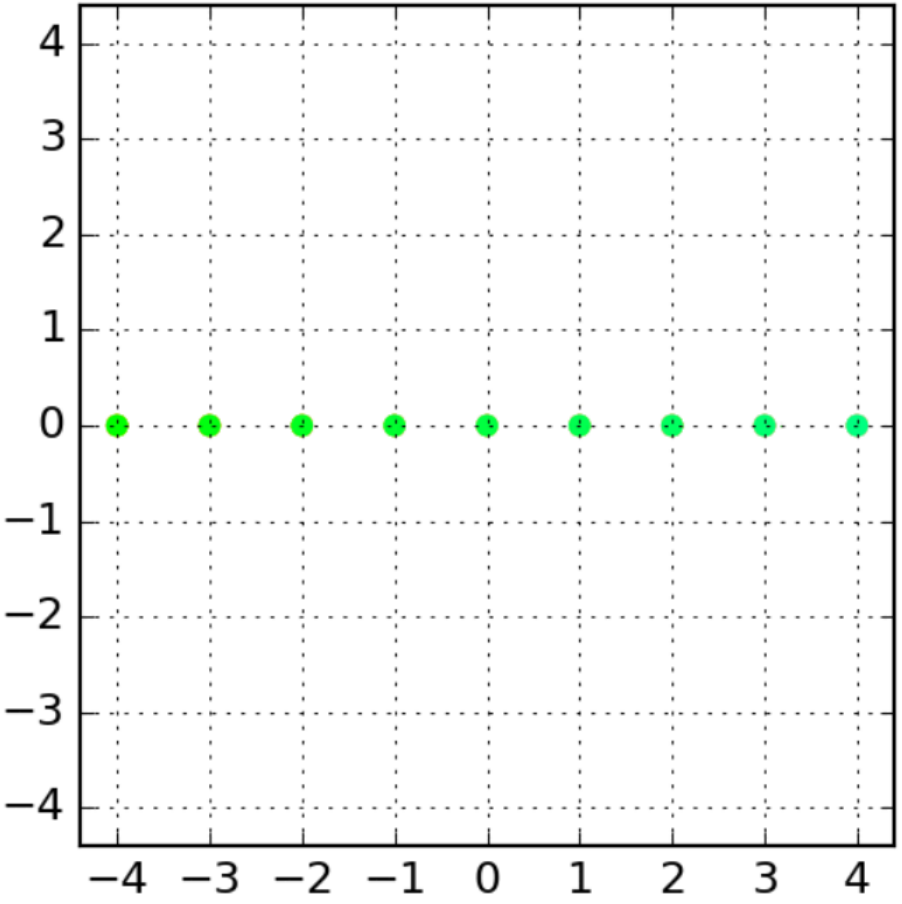
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



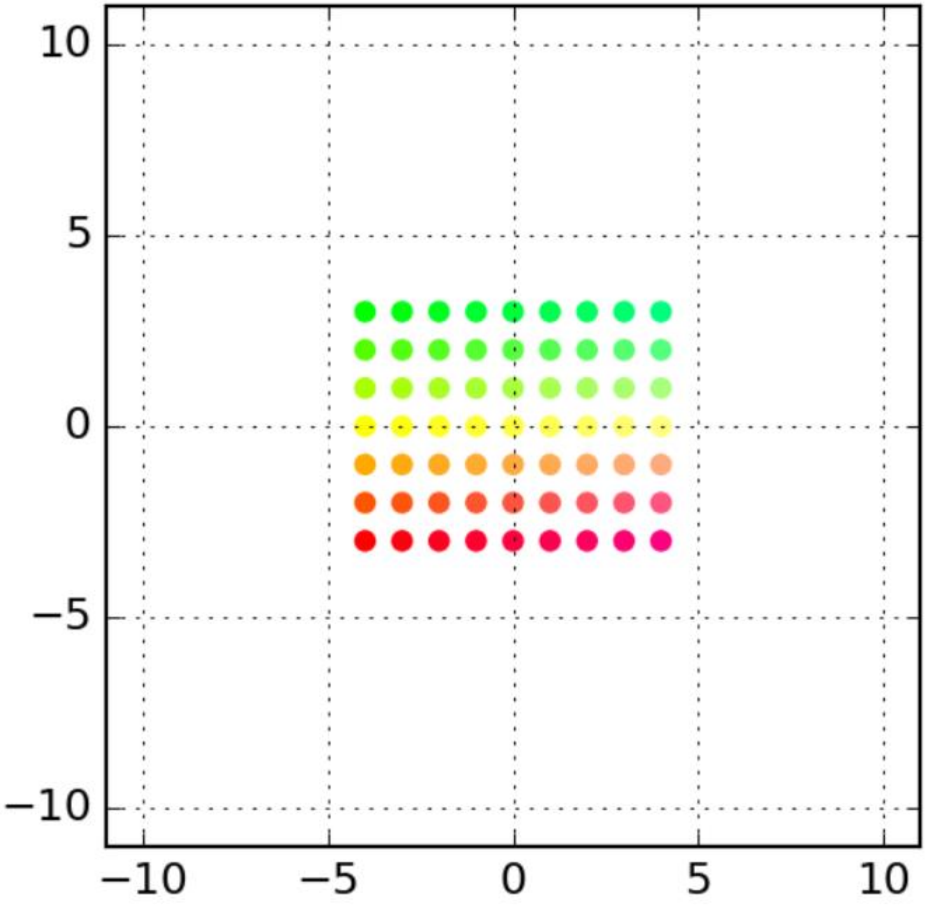
Примеры



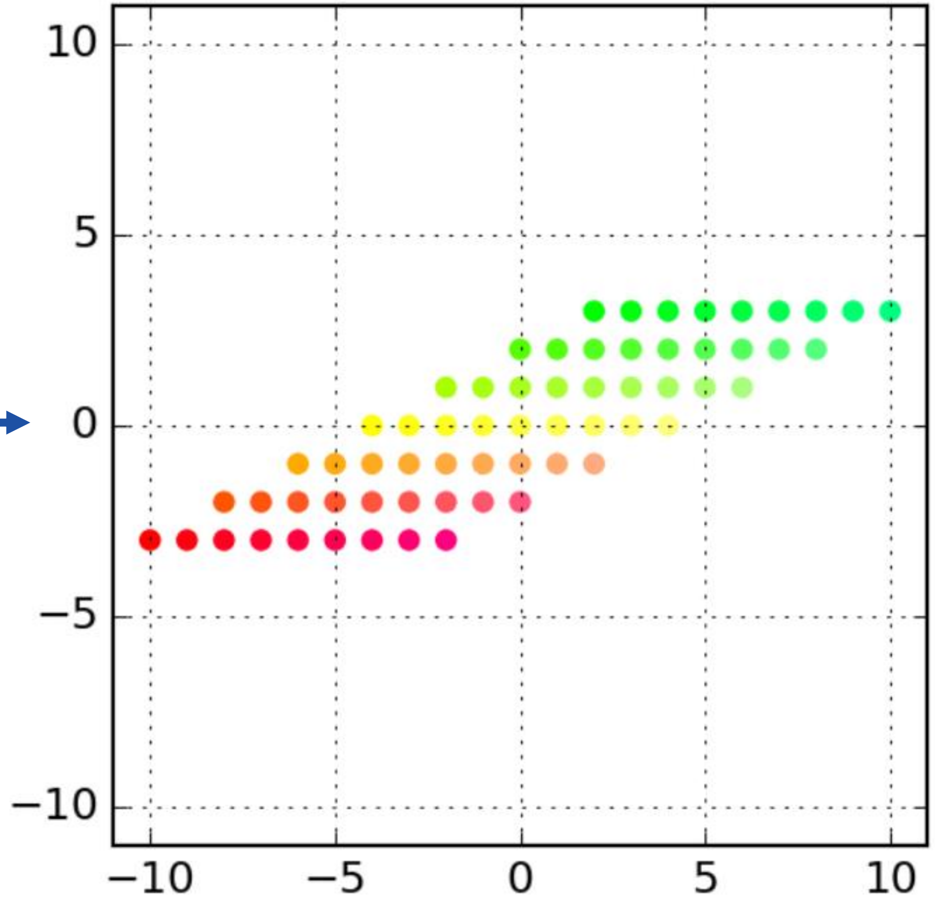
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



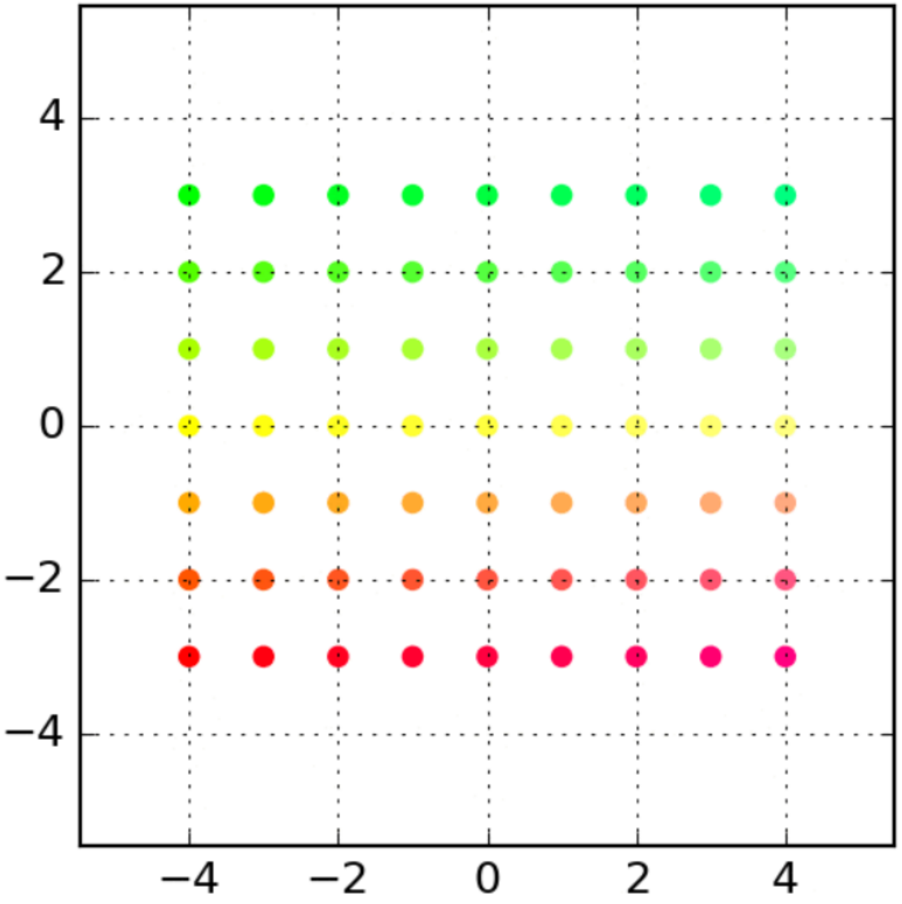
Примеры



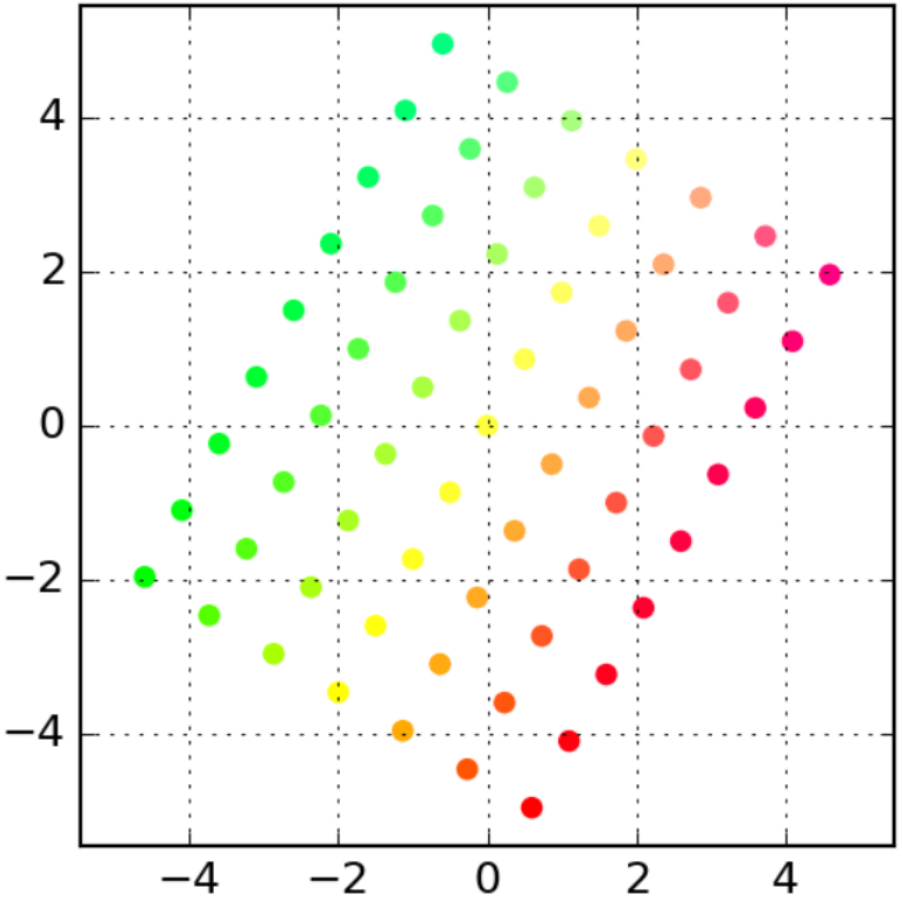
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



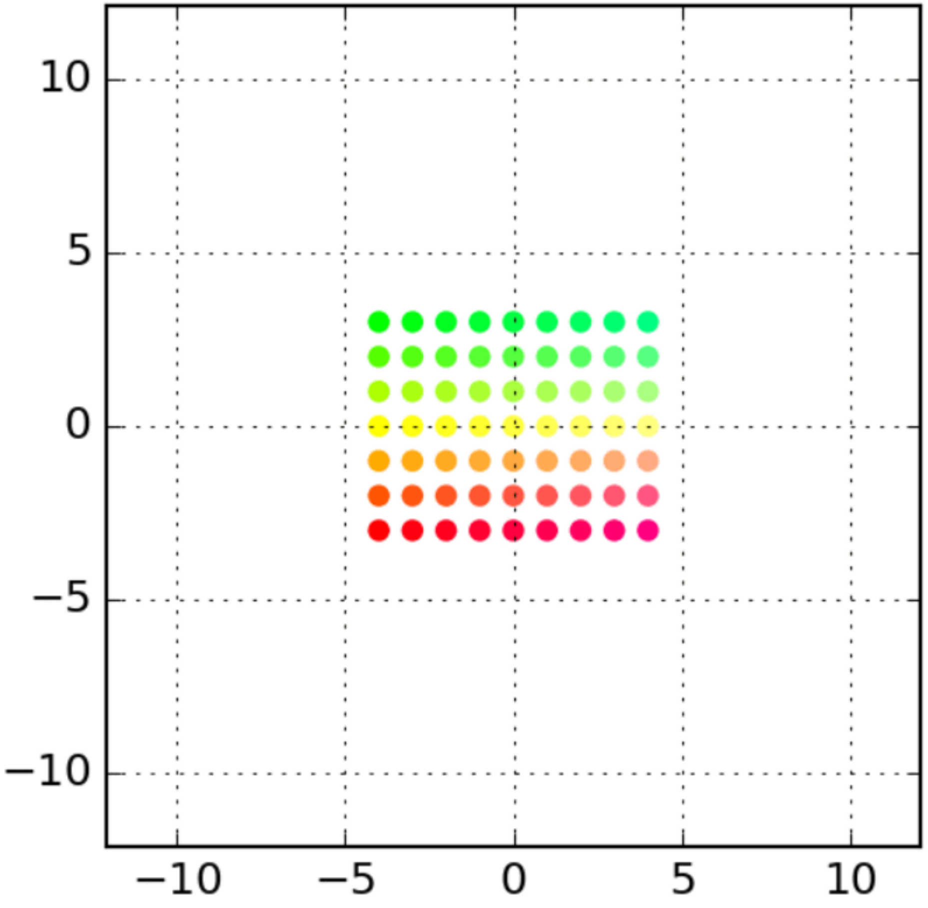
Примеры



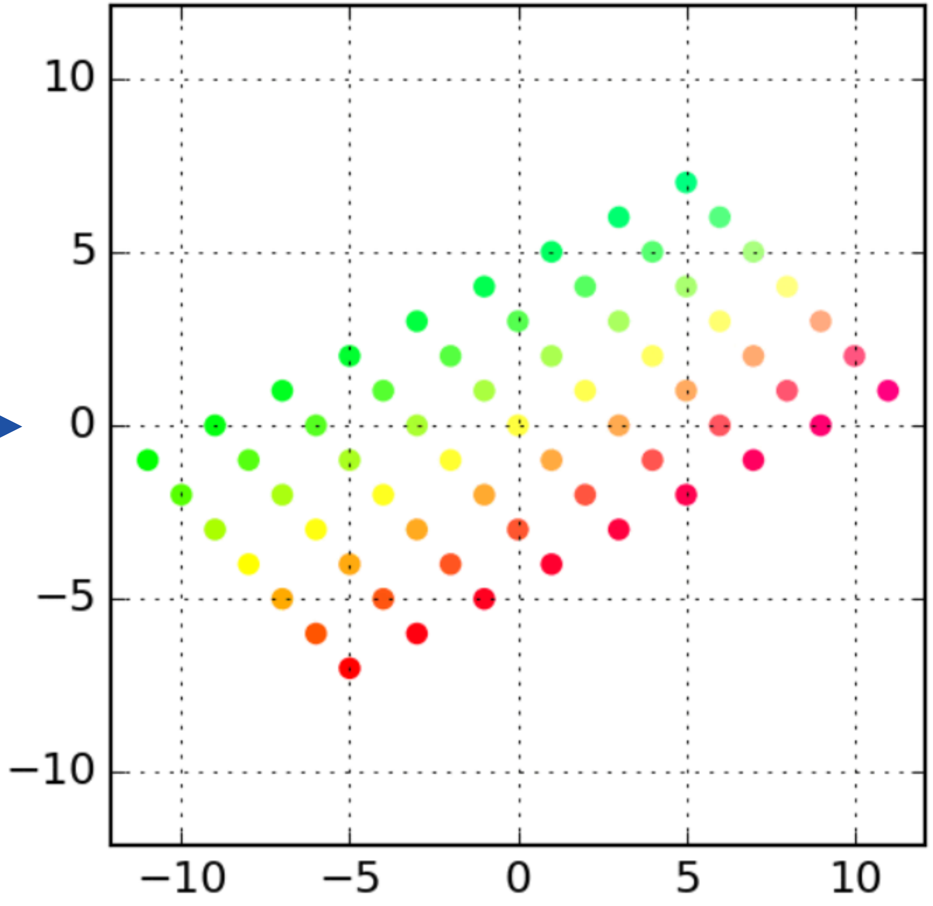
$$\begin{bmatrix} \cos 60° & -\sin 60° \\ \sin 60° & \cos 60° \end{bmatrix}$$



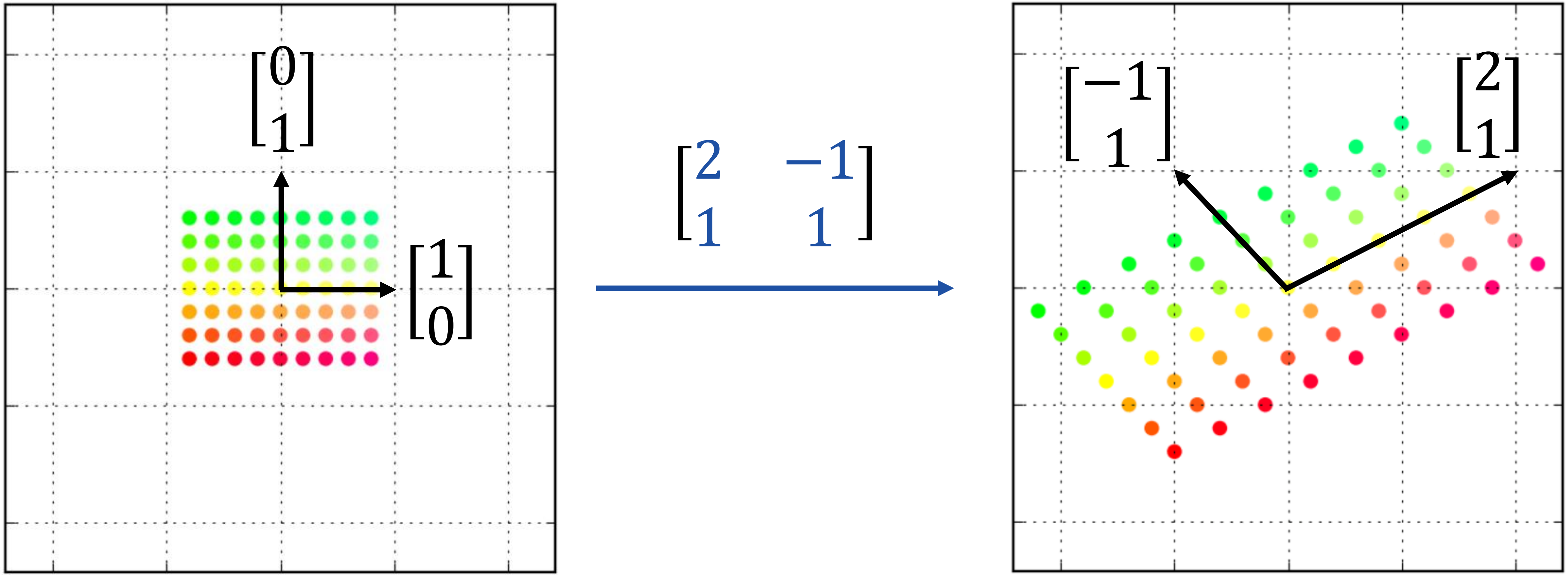
Примеры



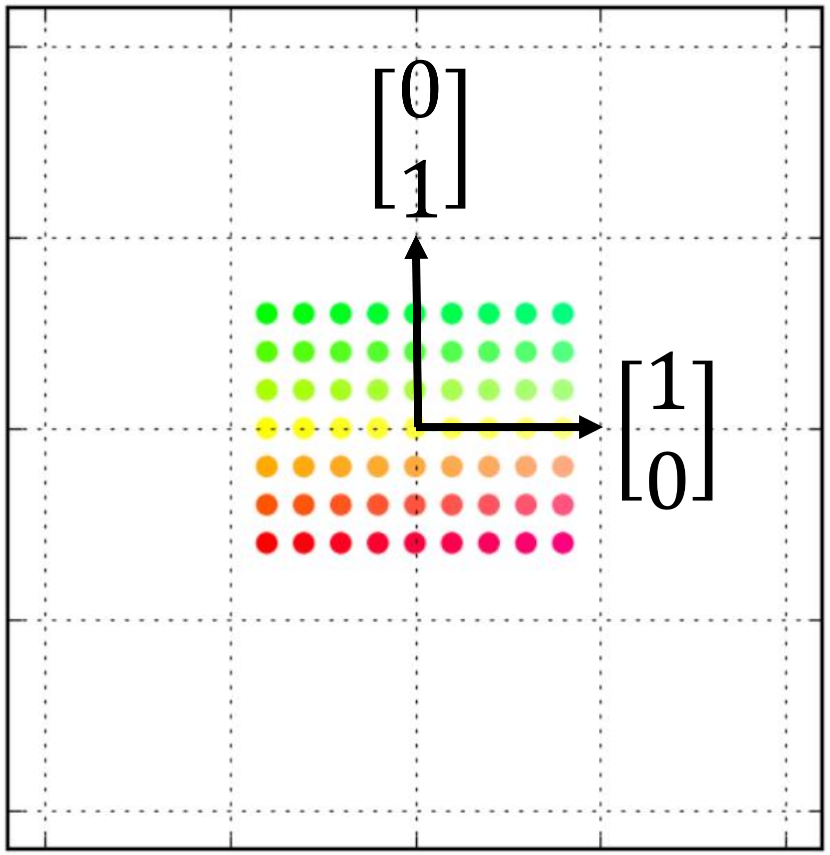
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$



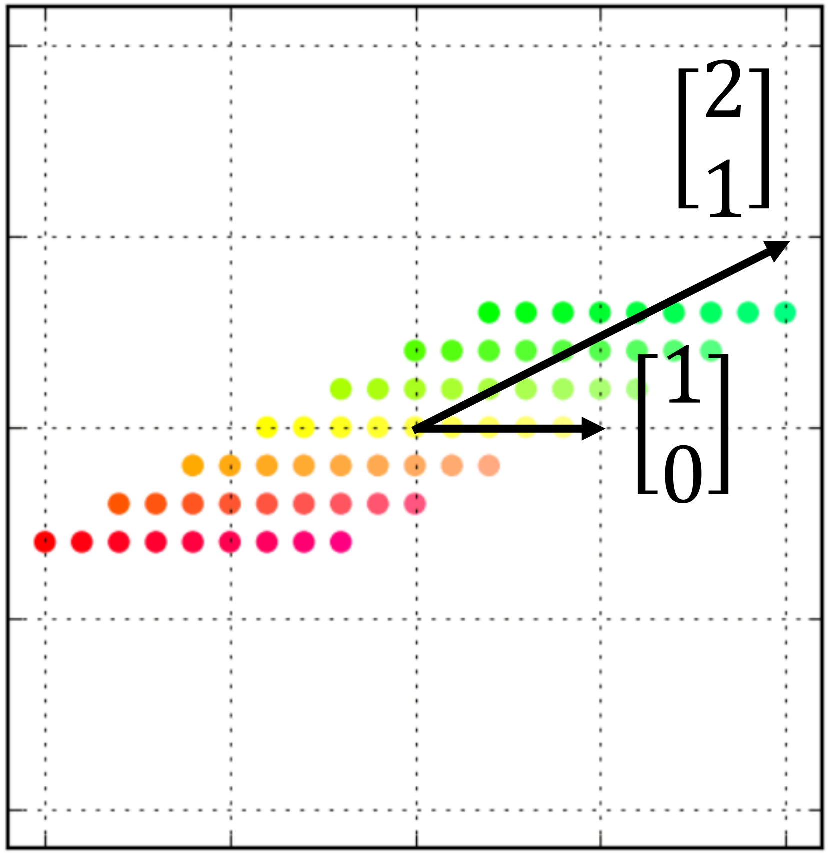
Столбцы матрицы – это...



Столбцы матрицы – это…



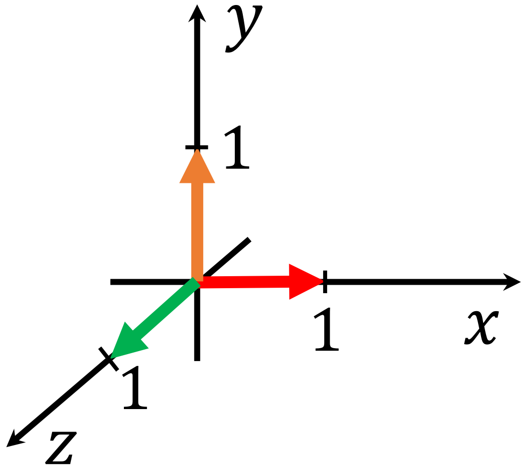
$$\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$$



Столбцы матрицы – это…

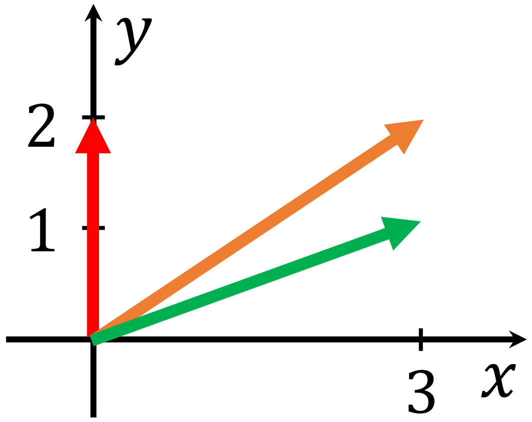
…образы базисных векторов

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix}0 & 3 & 3\\2 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$$



Почему матричное умножение такое?

Правило «строка на столбец» возникает само собой, если

- Столбцы – образы базисных векторов
- Умножение матрицы на вектор – линейное отображение

Пример

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Почему матричное умножение такое?

Правило «строка на столбец» возникает само собой, если

- Столбцы – образы базисных векторов
- Умножение матрицы на вектор – линейное отображение

Пример

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \left(a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Почему матричное умножение такое?

Правило «строка на столбец» возникает само собой, если

- Столбцы – образы базисных векторов
- Умножение матрицы на вектор – линейное отображение

Пример

$$a\begin{bmatrix}0 & 3 & 3\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0 & 3 & 3\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0 & 3 & 3\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Почему матричное умножение такое?

Правило «строка на столбец» возникает само собой, если

- Столбцы – образы базисных векторов
- Умножение матрицы на вектор – линейное отображение

Пример

$$a\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0 & 3 & 3\\2 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0 & 3 & 3\\2 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Почему матричное умножение такое?

Правило «строка на столбец» возникает само собой, если

- Столбцы – образы базисных векторов
- Умножение матрицы на вектор – линейное отображение

Пример

$$a\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0 & 3 & 3\\2 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Почему матричное умножение такое?

Правило «строка на столбец» возникает само собой, если

- Столбцы – образы базисных векторов
- Умножение матрицы на вектор – линейное отображение

Пример

$$a\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$$

Почему матричное умножение такое?

Правило «строка на столбец» возникает само собой, если

- Столбцы – образы базисных векторов
- Умножение матрицы на вектор – линейное отображение

Пример

$$\begin{bmatrix} 0a + 3b + 3c \\ 2a + 2b + 1c \end{bmatrix}$$

Почему матричное умножение такое?

Правило «строка на столбец» возникает само собой, если

- Столбцы – образы базисных векторов
- Умножение матрицы на вектор – линейное отображение

Пример

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0a + 3b + 3c \\ 2a + 2b + 1c \end{bmatrix}$$

Произведение матриц – композиция отображений

Коммутативная диаграмма

$f(x) = Ax$

$g(x) = Bx$

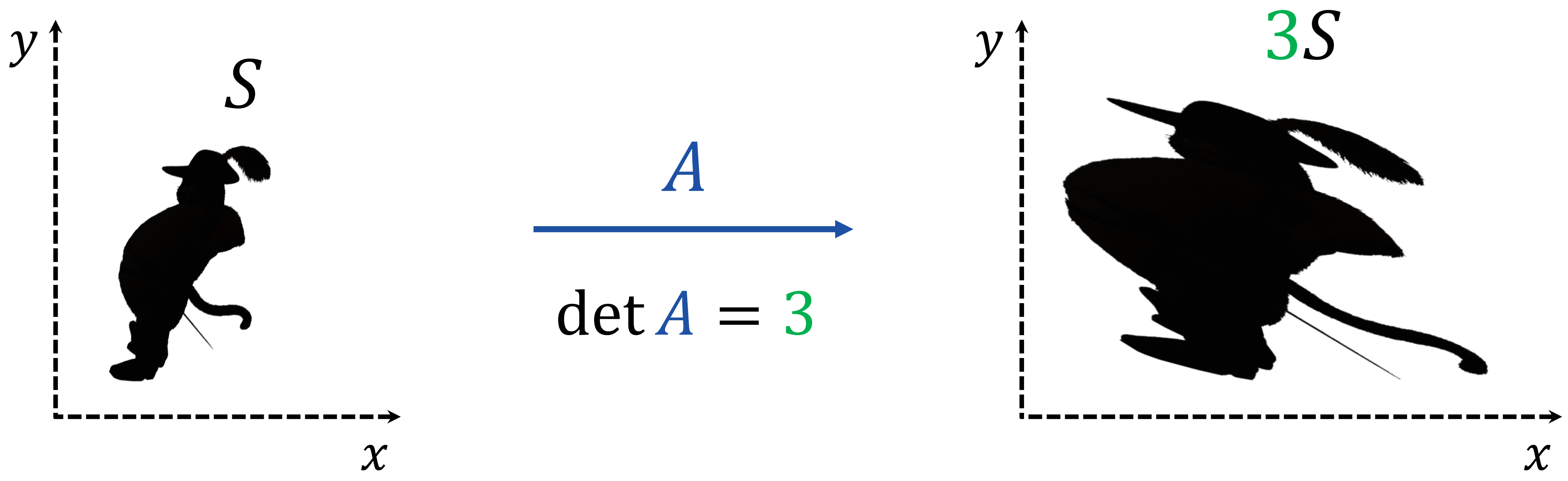
$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^m \arrow[dr, "g"] & \\ \mathbb{R}^n \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"] & & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

$h(x) = Cx$

$$C_{k\times n} = B_{k\times m} A_{m\times n}$$

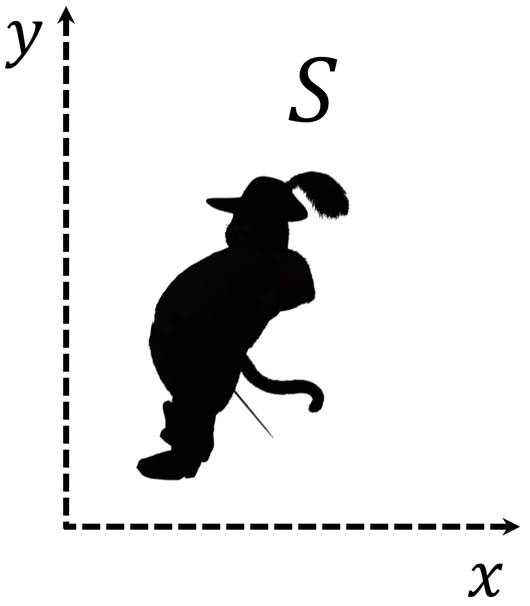
Что такое определитель?

Определитель – множитель площади (объёма) со знаком



Что такое определитель?

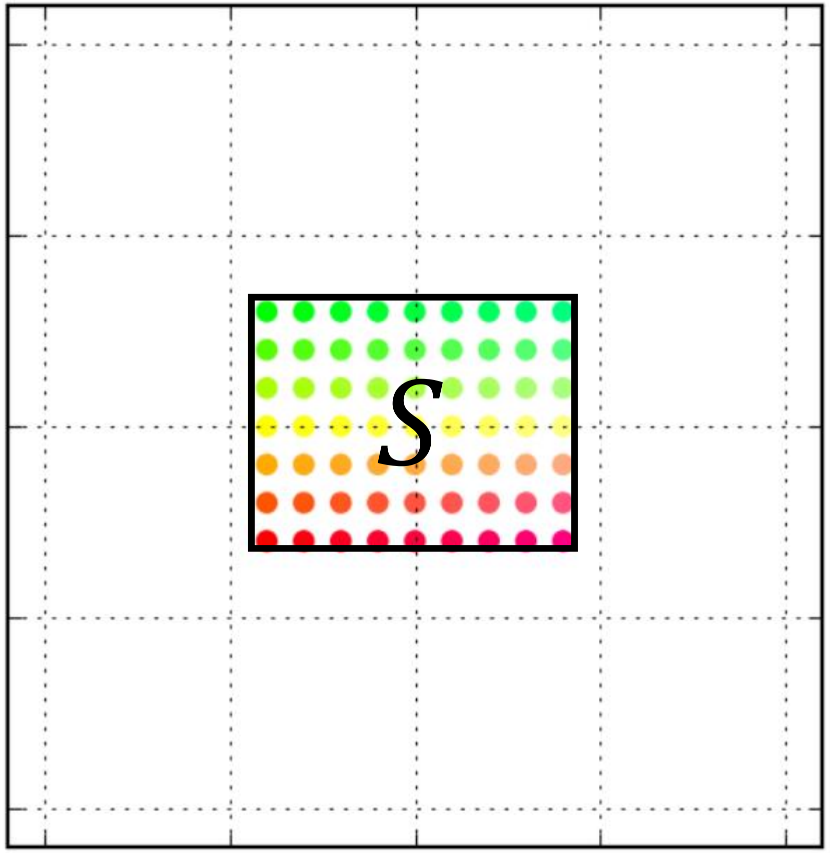
Определитель – множитель площади (объёма) со знаком



$$\xrightarrow{A}$$

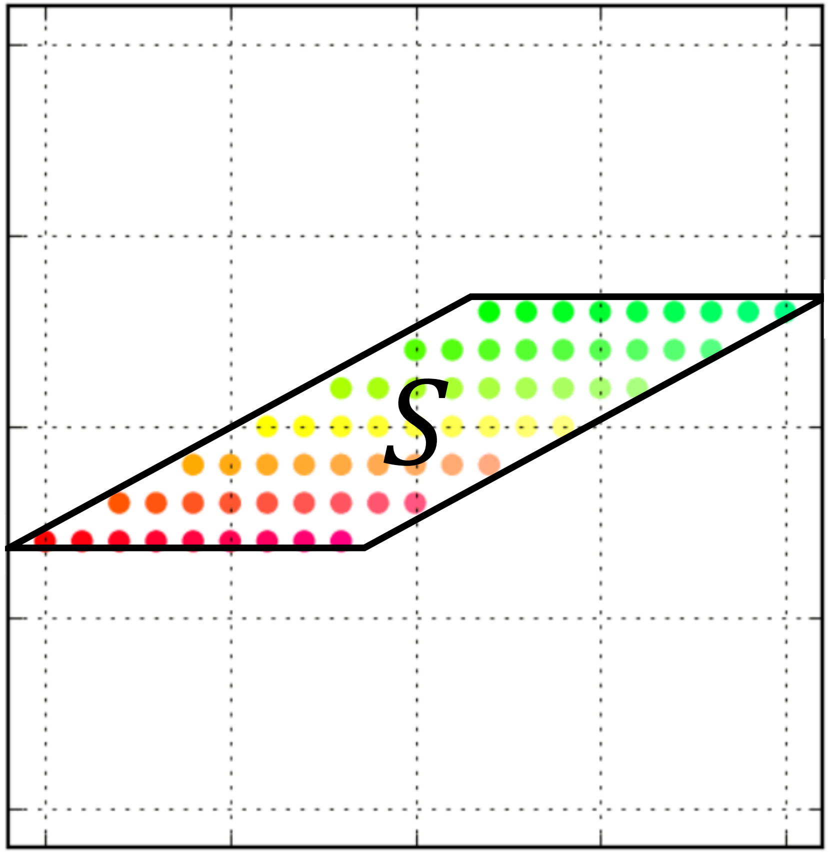
$$\det A = -3$$

Что такое определитель?

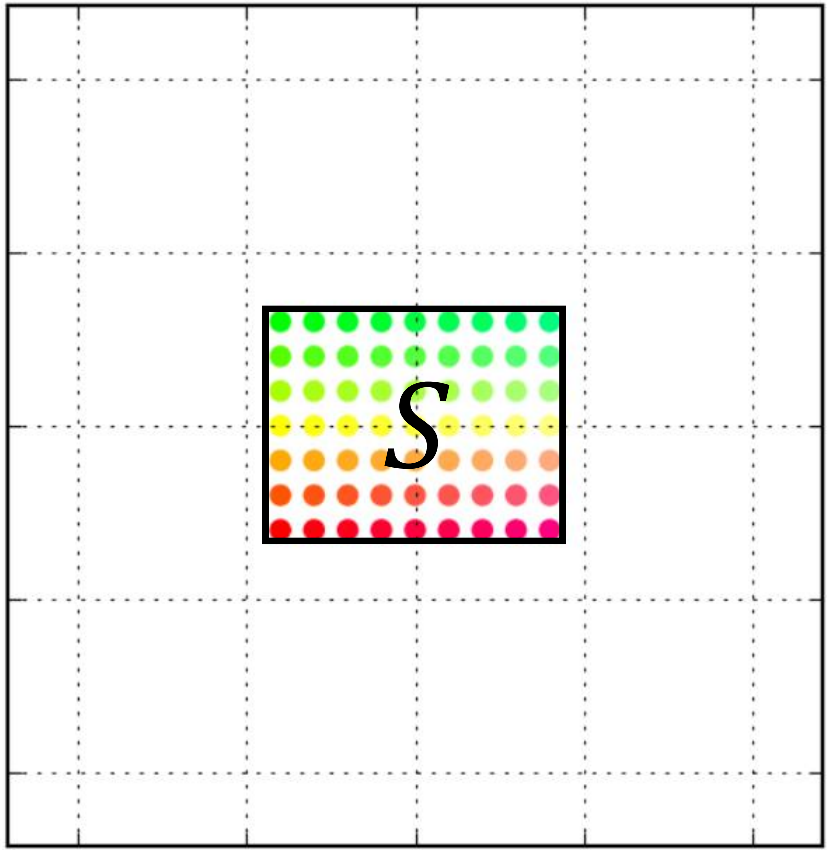


$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det = 1$$

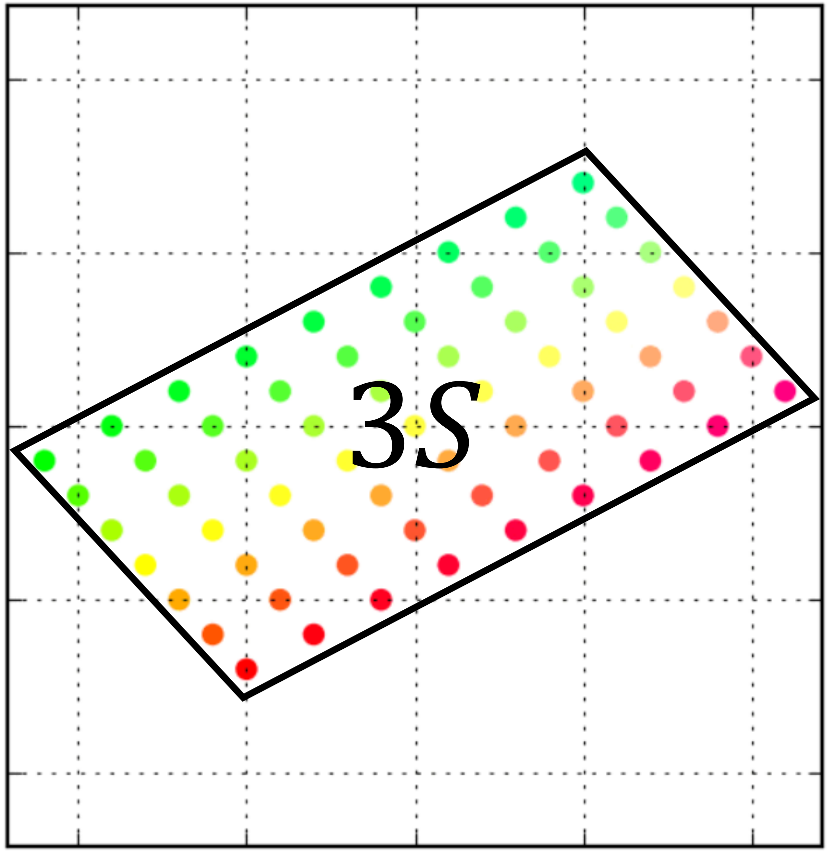


Что такое определитель?



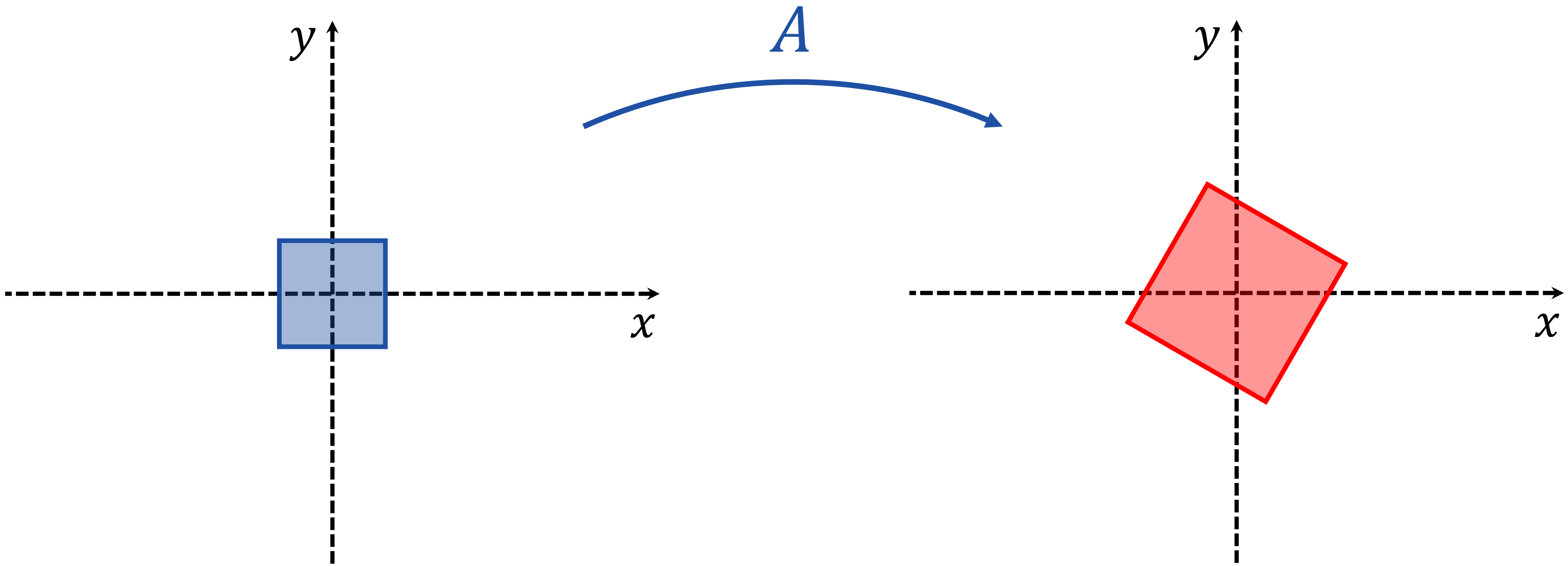
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det = 3$$



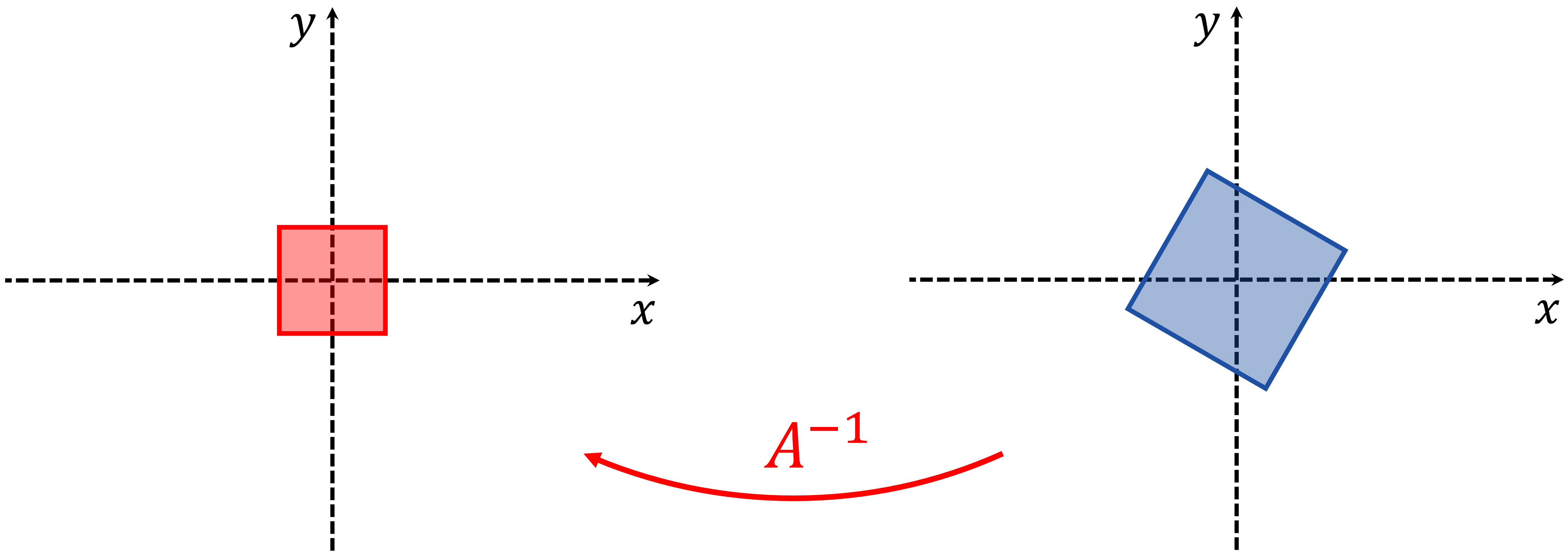
Обратная матрица – обратное преобразование

Матрица A^{-1} возвращает обратно то, что сделала матрица A



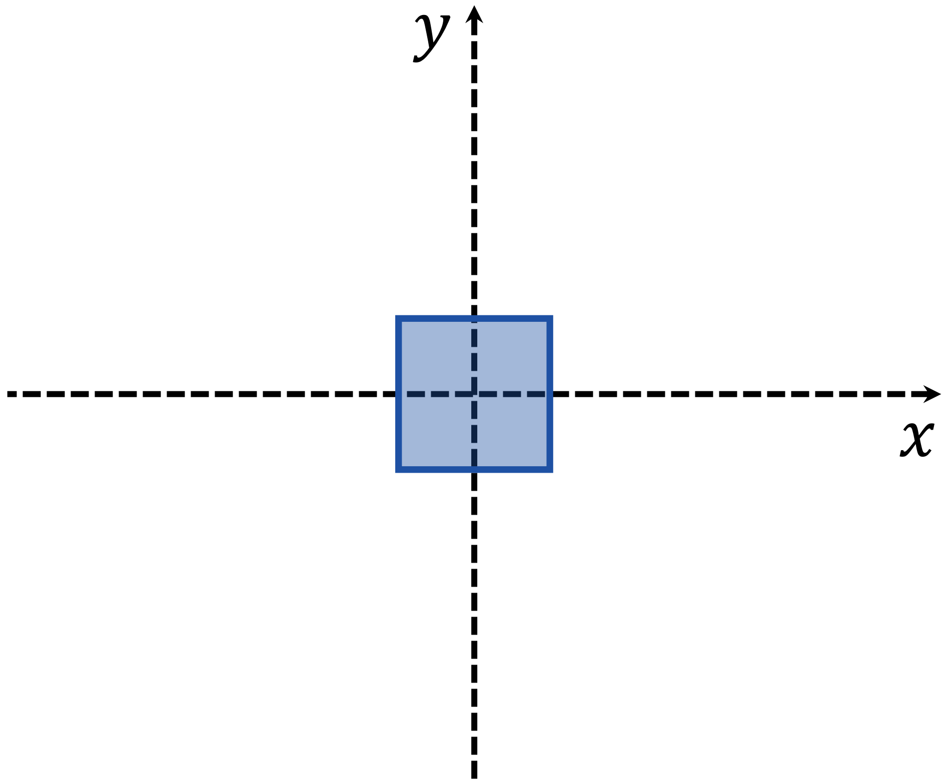
Обратная матрица – обратное преобразование

Матрица A^{-1} возвращает обратно то, что сделала матрица A



Обратная матрица – обратное преобразование

Матрица A^{-1} возвращает обратно то, что сделала матрица A



Нейтральное преобразование

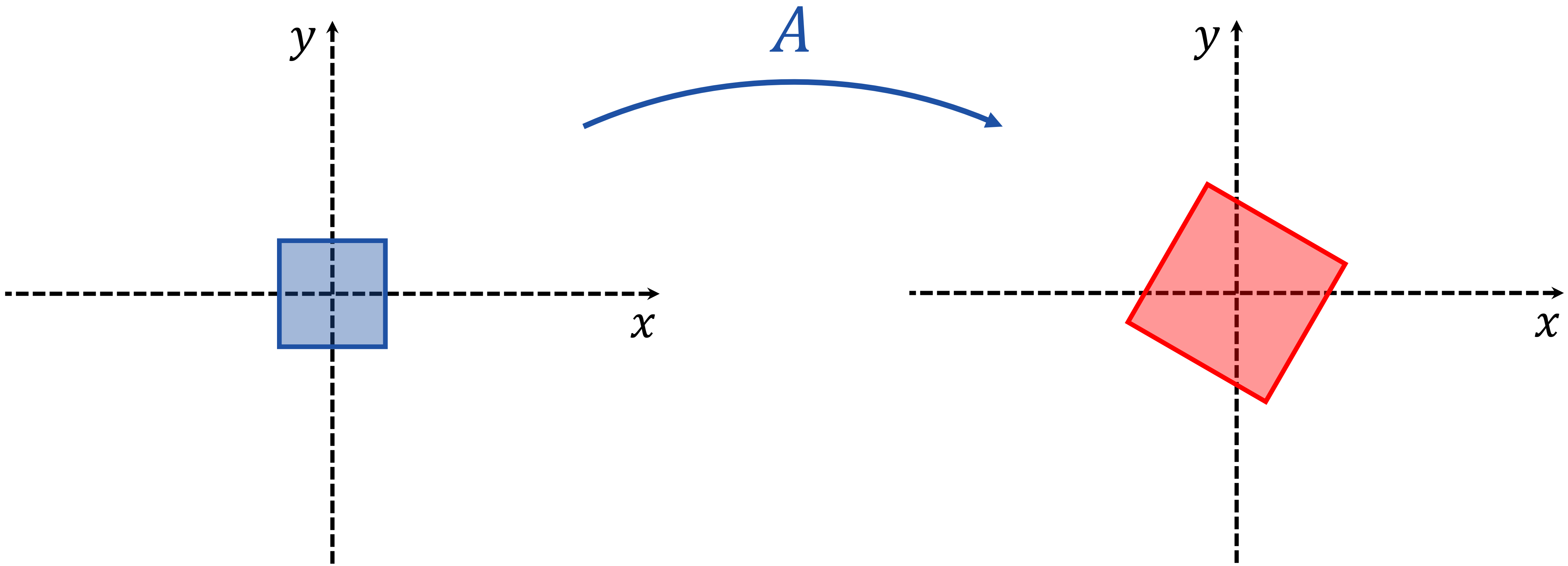
$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

$$\det(A^{-1}A) = \det(A) \cdot \frac{1}{\det(A)} = 1$$

«Увеличение» «Уменьшение»

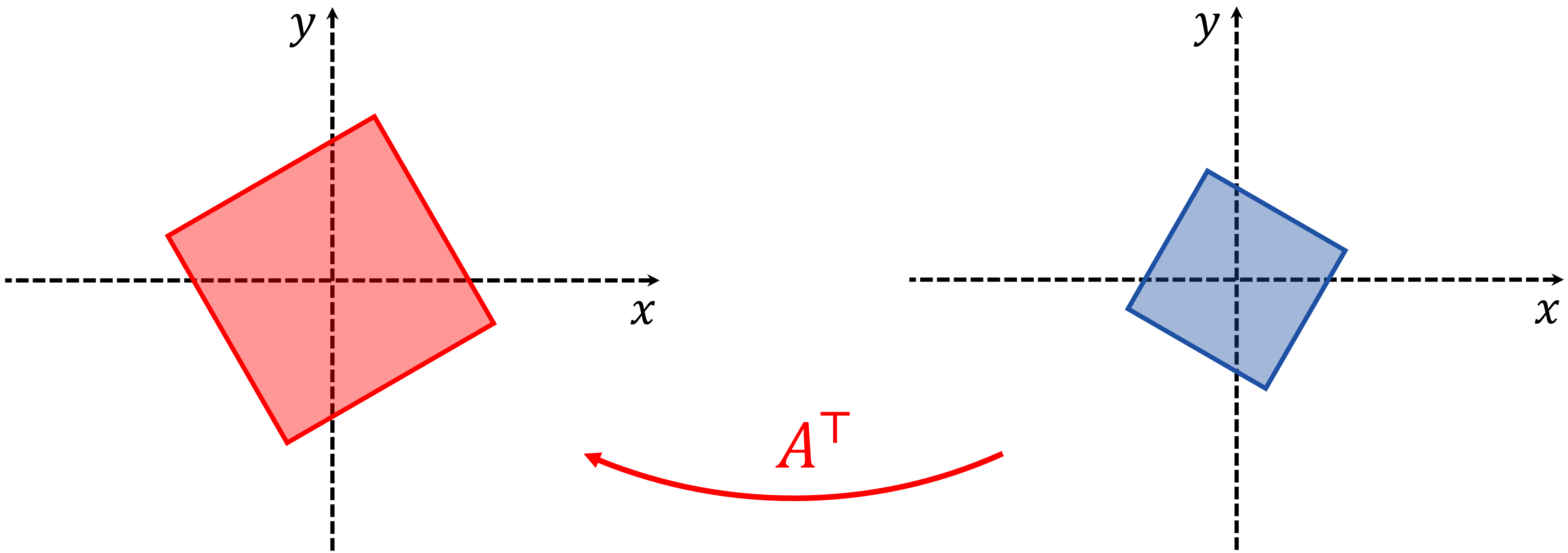
Транспонированная матрица – «в другую сторону»

Матрица $A^{\top}$ делает примерно то же, что A, но «в другую сторону»



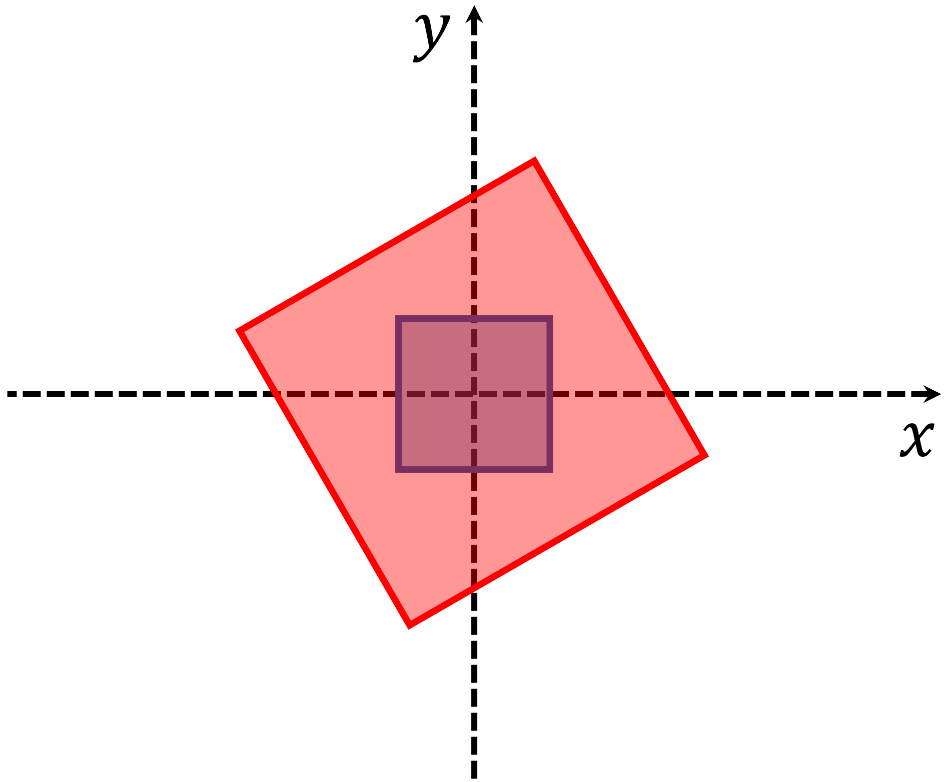
Транспонированная матрица – «в другую сторону»

Матрица $A^{\top}$ делает примерно то же, что A, но «в другую сторону»



Транспонированная матрица – «в другую сторону»

Матрица $A^\top$ делает примерно то же, что A, но «в другую сторону»



Матричные «квадраты»

$AA^\top$ и $A^\top A$

$$\det(A^\top A) = \det(A) \cdot \det(A)$$

«Увеличение» «Увеличение»

Пространства, связанные с матрицей

$\text{Range}\ A$

Множество всех векторов $Ax \in \mathbb{R}^m$, которые могут получиться из всевозможных векторов $x \in \mathbb{R}^n$ в результате отображения $x \mapsto Ax$

$$\text{Range}\ A_{m\times n} = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = Ax, x \in \mathbb{R}^n\}$$

Другие названия

Образ матрицы A, столбцовое пространство матрицы A, $\text{Im}(A)$

Пространства, связанные с матрицей

$$\operatorname{Range}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} = \boxed{\text{множество всех возможных значений произведения } \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}} = \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Range}\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{bmatrix} = \boxed{\text{множество всех возможных значений произведения } \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}} = \left\{\begin{bmatrix}a\\0\end{bmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{R}\right\}$$

Пространства, связанные с матрицей

$\text{Nullspace}\ A$

Множество всех векторов $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что $Ax = 0$,
то есть те вектора, которые отображаются в ноль

$$\boxed{\text{Nullspace}\ A_{m\times n} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0 \in \mathbb{R}^m\}}$$

Другие названия

Нуль-пространство матрицы A, ядро матрицы A, $\text{Ker}(A)$

Пространства, связанные с матрицей

$$\text{Nullspace}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} = $$ множество всех векторов, которые обнуляются: $$\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = 0$$ $$= \left\{\begin{bmatrix}a\\-a\end{bmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\text{Nullspace}\begin{bmatrix}5 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} = $$ множество всех векторов, которые обнуляются: $$\begin{bmatrix}5 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$ $$= \left\{\begin{bmatrix}0\\b\end{bmatrix} \middle| b \in \mathbb{R}\right\}$$

Пространства, связанные с матрицей

Отображение: $A_{m\times n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Пространства:

$\text{Range}\ A$ – линейное подпространство в $\mathbb{R}^m$

$\text{Nullspace}\ A$ – линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$

Размерности:

$\text{rank}\ A = \dim(\text{Range}\ A)$ – размерность образа

$\text{nullity}\ A = \dim(\text{Nullspace}\ A)$ – размерность ядра

Пространства, связанные с матрицей

$$A_{m\times n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$\operatorname{rank} A = \dim(\operatorname{Range} A)$ – размерность образа

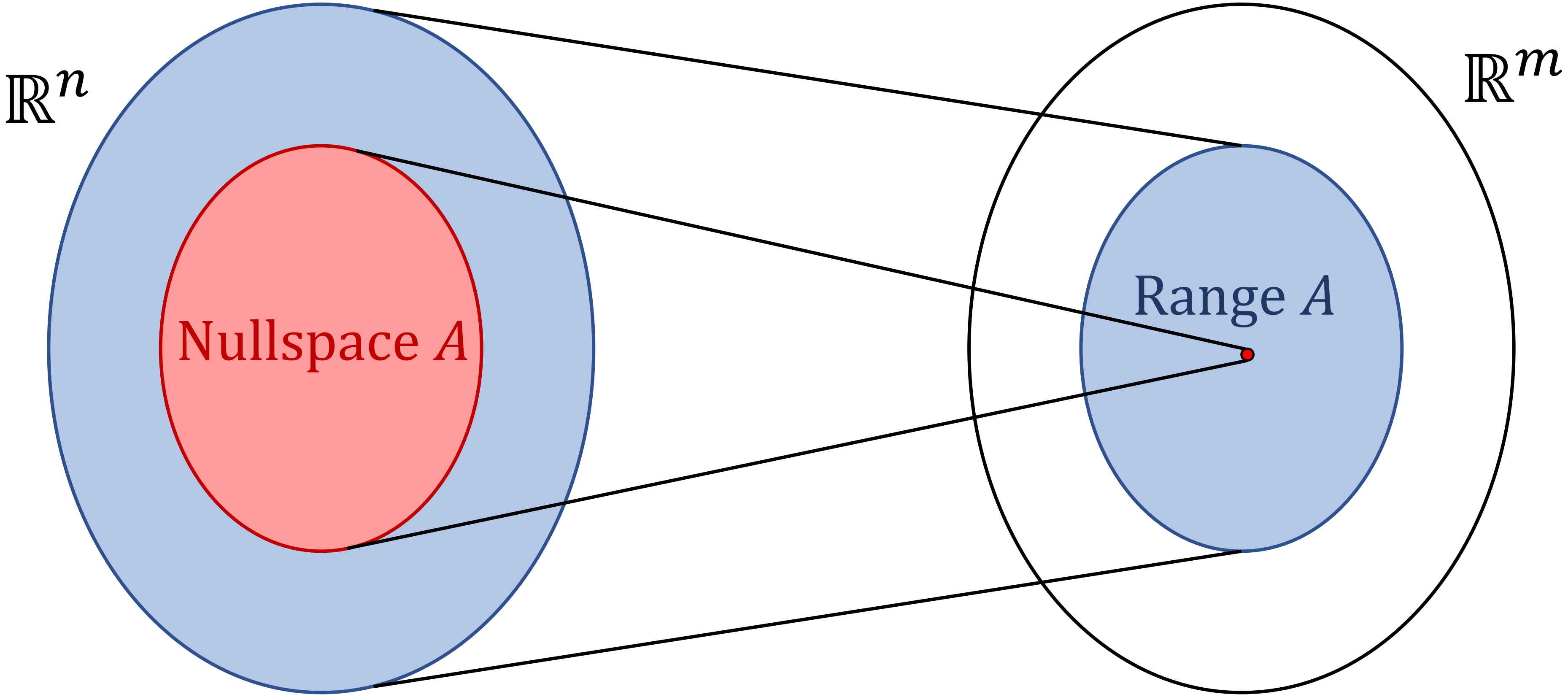
$\operatorname{nullity} A = \dim(\operatorname{Nullspace} A)$ – размерность ядра

Rank-nullity theorem

(теорема о ранге и дефекте, теорема о размерностях ядра и образа)

$$\boxed{\operatorname{rank} A_{m\times n} + \operatorname{nullity} A_{m\times n} = n}$$

Пространства, связанные с матрицей



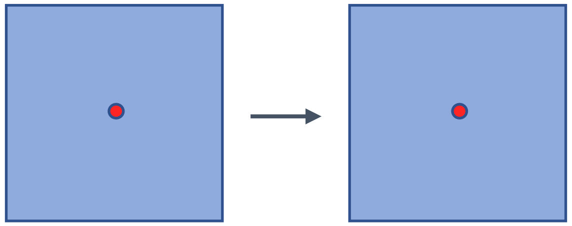
Размерность синенького + размерность красненького =
размерность исходного пространства

Пространства, связанные с матрицей: пример

Рассмотрим три линейных отображения $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

плоскость → плоскость



$$\text{Range } A = \mathbb{R}^2$$

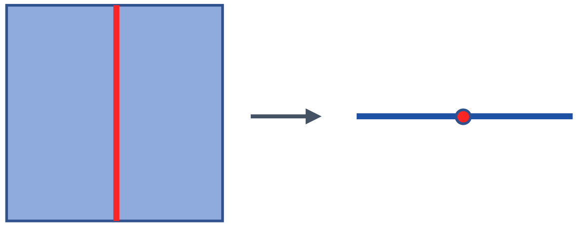
$$\text{rank } A = 2$$

$$\text{Nullspace } A = \{0\}$$

$$\text{nullity } A = 0$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

плоскость → прямая



$$\text{Range } B = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

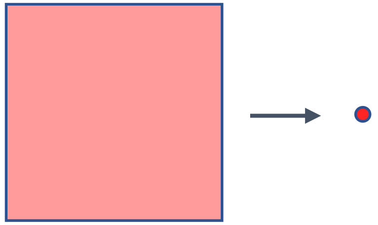
$$\text{rank } B = 1$$

$$\text{Nullspace } B = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\text{nullity } B = 1$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

плоскость → точка



$$\text{Range } C = \{0\}$$

$$\text{rank } C = 0$$

$$\text{Nullspace } C = \mathbb{R}^2$$

$$\text{nullity } C = 2$$

Красивые факты для продвинутых

$$A_{m \times n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Прямая сумма образа матрицы A и ядра матрицы $A^\top$ равна пространству, в которое отображает матрица A

$$\boxed{\text{Range } A \oplus \text{Nullspace } A^\top = \mathbb{R}^m}$$

$\oplus$ – *символ прямой суммы*

Красивые факты для продвинутых

$$A_{m\times n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Прямая сумма ядра матрицы A и образа матрицы $A^\top$ равна пространству, из которого отображает матрица A

$$\boxed{\text{Nullspace}\ A \oplus \text{Range}\ A^\top = \mathbb{R}^n}$$

$\oplus$ – *символ прямой суммы*

Красивые факты для продвинутых

$$A_{m\times n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Образ матрицы A ортогонален ядру матрицы $A^\top$ (и наоборот)

$$\boxed{(\text{Range } A)^\perp = \text{Nullspace } A^\top}$$

$$\boxed{(\text{Nullspace } A)^\perp = \text{Range } A^\top}$$

$\perp$ – *символ ортогонального дополнения*

Образ и ядро дифференциальных операторов

$$\frac{d}{dt} : C^{\infty} \to C^{\infty} : y(t) \mapsto \dot{y}(t)$$

Что является ядром этого отображения?

$$\text{Nullspace}\,\frac{d}{dt} = \{\, f \mid f(x) = const\}$$

Образ и ядро дифференциальных операторов

$$\frac{d}{dt} : C^\infty \to C^\infty : y(t) \mapsto \dot{y}(t)$$

Что является ядром этого отображения?

$$\text{Nullspace}\,\frac{d}{dt} = P_0$$

Образ и ядро дифференциальных операторов

$$\frac{d^2}{dt^2} : P_5 \to P_5 \colon\; y(t) \mapsto \ddot{y}(t)$$

Что является образом и ядром этого отображения?

Чему равны их размерности?

Геометрический смысл ортогональных матриц

Ортогональные $\mathrm{O}(n)$

$V \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad V^{-1} = V^{\top}$

$\det V = \pm 1$

Повороты и отражения

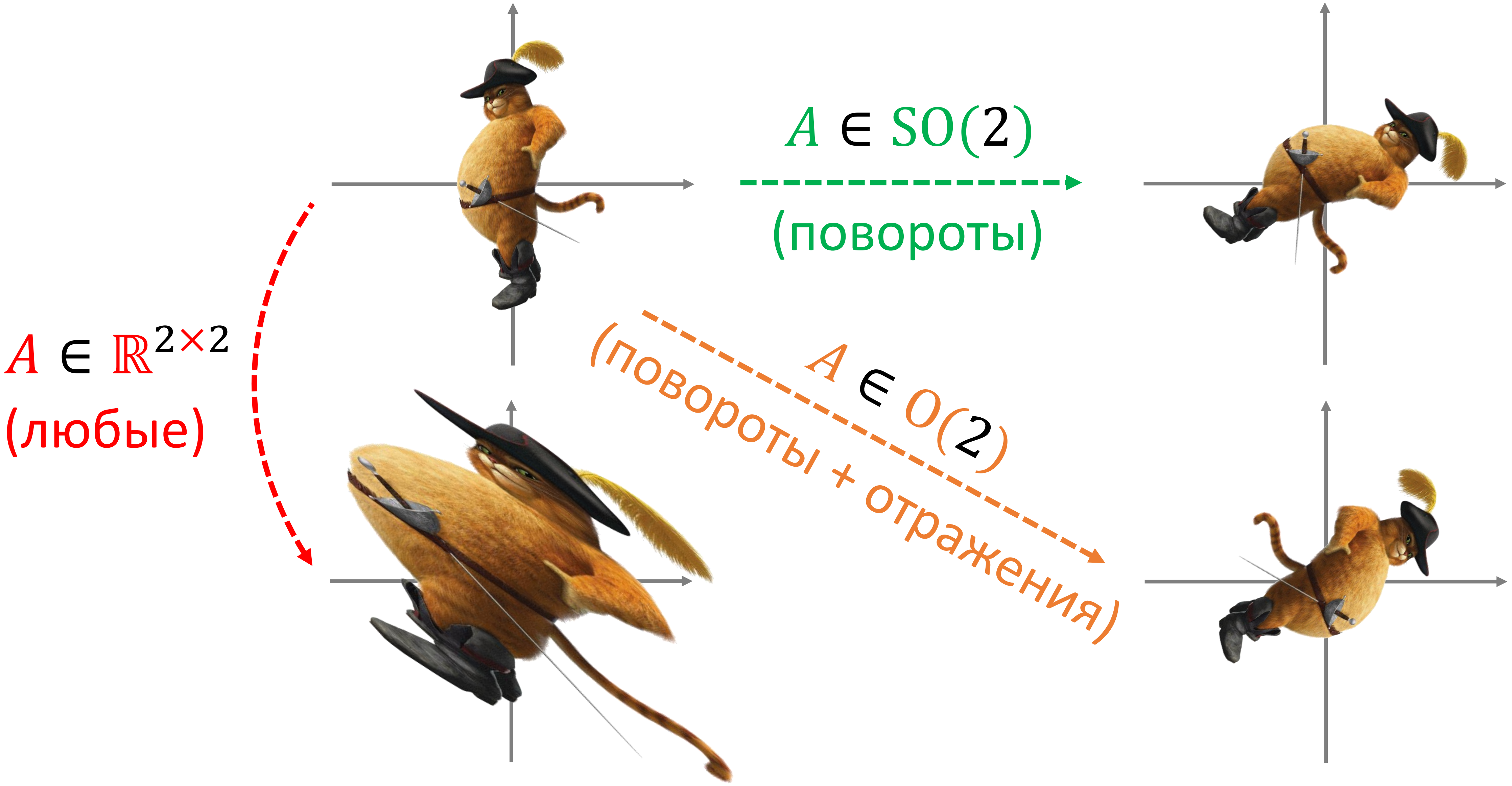
Специальные ортогональные $\mathrm{SO}(n)$

$U \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad U^{-1} = U^{\top}$

$\det U = 1$

Только повороты

Геометрический смысл ортогональных матриц



Геометрический смысл ортогональных матриц

Групповые свойства

Если как-то повернуть и потом ещё как-то повернуть, то результат получится как от одного поворота

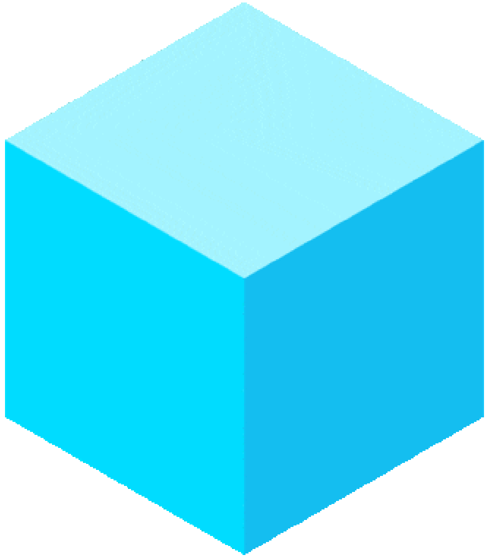
$$A, B \in \mathrm{SO}(n) \quad \Rightarrow \quad AB \in \mathrm{SO}(n)$$

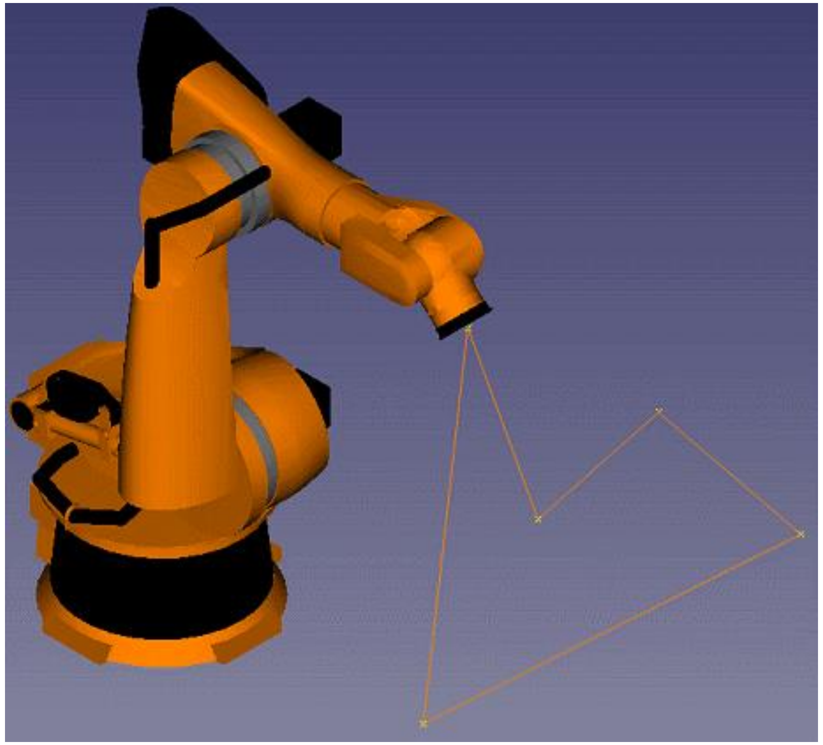
Для любого поворота есть обратный поворот

$$A \in \mathrm{SO}(n) \quad \Rightarrow \quad A^{-1} \in \mathrm{SO}(n)$$

Геометрический смысл ортогональных матриц

Ортогональные матрицы имеют ясный геометрический смысл, поэтому их часто используют в 3D-графике и робототехнике





Всем большое спасибо!