Задание 1. Найдите x и y, при которых матрица A будет иметь $\operatorname{rank}(A) < 3$, где

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & x & 0 \\ 2 & 2 & y & 0 & -4 \\ 4 & 3 & 11 & 1 & -7 \end{bmatrix}.$$

Задание 2. Найдите значение выражения

$$\operatorname{trace}(ABC) \cdot \det(AB) + \operatorname{trace}(BCA) \cdot \det(A+B) + \det(AC),$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Задание 3. Найдите целочисленную обратную матрицу от матрицы A по модулю 4, если

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Задание 4. Найдите решение уравнения

$$AX^\top + XA = B,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 15 & 0 & -5 \\ 12 & 2 & 1 \\ 24 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Задание 5. Дано отображение f такое, что

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -3x_2 \\ 5x_1 \end{bmatrix}.$$

а) Верно ли, что данное отображение является линейным?
б) Существует ли матрица, соответствующая данному отображению? Если существует, найдите эту матрицу, иначе — объясните, почему она не существует.

Задание 6. Определите, выполняется ли равенство $\operatorname{Range}(A) = \operatorname{Range}(B)$ для матриц A и B, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -6 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Задание 7. Дана матрица A и набор векторов v_i:

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 10 & -4 & -5 & 6 \\ -4 & 2 & -9 & 13 & -16 \\ -1 & -4 & -14 & 14 & -15 \\ 5 & -6 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \\ 15 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \\ 15 \\ -10 \end{bmatrix}, \quad v_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

а) Определите, какие вектора v_i входят в $\mathrm{Range}(A)$.
б) Найдите базис $\mathrm{Nullspace}(A)$.
в) Определите $\mathrm{rank}(A)$ и $\mathrm{nullity}(A)$.
г) Выполните проверку, применив для этого rank-nullity теорему.

Задание 8. Дана матрица A:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

а) Найдите собственные числа λ_1, λ_2, λ_3.
б) Найдите собственные вектора v_1, v_2, v_3.
в) Запишите спектральное разложение матрицы A.

Задание 9. Дана матрица A:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

а) Найдите собственные числа λ_1, λ_2, λ_3, λ_4.
б) Определите алгебраические и геометрические кратности собственных чисел.
в) Найдите собственные вектора и присоединенные вектора, соответствующие собственным числам.
г) Запишите жорданово разложение матрицы A.

Задание 10. Придумайте вещественную матрицу с собственными числами с учетом их кратности.

$$\lambda_{1,2} = -1, \mathrm{alg}(1) = 2, \mathrm{geom}(1) = 2,$$

$$\lambda_{3,4,5,6} = \pm i, \mathrm{alg}(\pm i) = 2, \mathrm{geom}(\pm i) = 1,$$

$$\lambda_{7,8} = -1 \pm 3i, \mathrm{alg}(-1 \pm 3i) = 1, \mathrm{geom}(-1 \pm 3i) = 1.$$

Задание 11. Для данной матрицы A выполните жорданово разложение $A = PJP^{-1}$ в комплексном и вещественном представлениях.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Задание 12. Вычислите матричную экспоненту e^{At}, если

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}.$$