Практика №1

Задача на нахождение длины вектора

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad \|a\| = ?$$

Задача на нахождение длины вектора

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad \|a\| = ? \qquad \|a\| = \sqrt{a^\top a}$$

$$\|a\| = \sqrt{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}} = \sqrt{2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 8 \cdot 8} = 10$$

Задача на нахождение длины вектора

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 7i \\ i \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \|a\| = ?$$

Задача на нахождение длины вектора

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 7i \\ i \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \|a\| = ? \qquad \|a\| = \sqrt{a^{\mathrm{H}} a}$$

$$\|a\| = \sqrt{\begin{bmatrix} 1 & -7i & -i & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 7i \\ i \\ 7 \end{bmatrix}} = \sqrt{1 \cdot 1 + (-7i) \cdot 7i + (-i) \cdot i + 7 \cdot 7} = 10$$

Задача на умножение матриц

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 6 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Задача на умножение матриц

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 6 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_{m\times n}B_{n\times k} = C_{m\times k}$$

$$AB, BA, BC, BD, DA, DC, DD$$

Задача на действия с булевыми матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A + B = ?$$

Задача на действия с булевыми матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A + B = ?$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+1 & 0+0 & 0+1 \\ 1+0 & 0+0 & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

Задача на действия с булевыми матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad AB = ?$$

Задача на действия с булевыми матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad AB = ?$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1 & 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Задача на вычисление определителя

$$\det[5] = ?$$

Задача на вычисление определителя

$$\det[5] = ?$$

$$\det[a_{11}] = a_{11}$$

$$\det[5] = 5$$

Задача на вычисление определителя

$$\det[5]$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = ?$$

Задача на вычисление определителя

$$\det[5] \qquad\qquad \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = ?$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = -4$$

Задача на вычисление определителя

$$\det[5] \qquad \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = ?$$

Задача на вычисление определителя

$$\det[5] \qquad \det\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix} \qquad \det\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 3 & 5 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix} = ?$$

$$\det\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - \\ - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}$$

$$\det\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 3 & 5 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix} = 4\cdot 5\cdot 2 + 1\cdot 3\cdot 1 + 2\cdot 3\cdot 1 - 2\cdot 5\cdot 1 - 1\cdot 3\cdot 2 - \\ - 4\cdot 3\cdot 1 = 21$$

Задача на вычисление определителя

$$\det[5] \qquad \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = ?$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$$

$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} M_{11} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} M_{12} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} M_{13} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \cdot \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \cdot \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Задача на вычисление определителя

$$\det[5] \qquad \det\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 2\end{bmatrix} \qquad \det\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\3 & 5 & 3\\1 & 1 & 2\end{bmatrix} = ?$$

$$\det\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\3 & 5 & 3\\1 & 1 & 2\end{bmatrix} = 4\cdot\begin{bmatrix}5 & 3\\1 & 2\end{bmatrix} - 1\cdot\begin{bmatrix}3 & 3\\1 & 2\end{bmatrix} + 2\cdot\begin{bmatrix}3 & 5\\1 & 1\end{bmatrix} =$$

$$= 4\cdot(5\cdot 2 - 3\cdot 1) - 1\cdot(3\cdot 2 - 3\cdot 1) + 2\cdot(3\cdot 1 - 5\cdot 1) = 21$$

Задача на вычисление обратной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = ?$$

Задача на вычисление обратной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = ? \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_{ij}^{\top}$$

$$\det A = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$$

$$M_{11} = \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 \qquad M_{21} = 4 \qquad M_{31} = 4$$

$$M_{12} = \det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \qquad M_{22} = 2 \qquad M_{32} = 4$$

$$M_{13} = \det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad M_{23} = 0 \qquad M_{33} = 4$$

Задача на вычисление обратной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = ? \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_{ij}^{\mathsf{T}}$$

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \to A_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix} \to A_{ij}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & -1 & 1 \\ 0 & 0{,}5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Задача на вычисление обратной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = ?$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_{ij}^{\top}$$

Задача на вычисление обратной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = ?$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_{ij}^{\top}$$

$$\det A = 5 \cdot 2 \cdot 0 = 0$$

$$\det A = 0 \rightarrow A^{+} - \text{псевдообратная матрица}$$

Задача на вычисление ранга

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 9 \\ 3 & x & 8 \\ 5 & 4 & 9 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{rank} A < 3 \qquad x = ?$$

Задача на вычисление ранга

$$A_{3\times3} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 9 \\ 3 & x & 8 \\ 5 & 4 & 9 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{rank} A < 3 \qquad x = ?$$

$$\operatorname{rank} A_{n\times n} = n \quad \Leftrightarrow \quad \det A \neq 0$$

$$\operatorname{rank} A_{n\times n} < n \quad \Leftrightarrow \quad \det A = 0$$

$$\det A = 8\cdot x\cdot 9 + 1\cdot 8\cdot 5 + 9\cdot 3\cdot 4 - 9\cdot x\cdot 5 - 1\cdot 3\cdot 9 - 8\cdot 8\cdot 4 =$$

$$= 27\cdot x - 135 = 0$$

$$x = 5$$

Задача на вычисление ранга

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 9 \\ 3 & 5 & 8 \\ 5 & 4 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) & 4\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) & 9\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) \\ 8\cdot\left(-\frac{3}{8}\right) & 1\cdot\left(-\frac{3}{8}\right) & 9\cdot\left(-\frac{3}{8}\right) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ -3 & -\frac{12}{5} & -\frac{27}{5} \\ -3 & -\frac{3}{8} & -\frac{27}{8} \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & \frac{13}{5} & \frac{13}{5} \\ 0 & \frac{37}{8} & \frac{37}{8} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & \frac{13}{5} & \frac{13}{5} \\ 0 & \frac{37}{8}\left(-\frac{104}{185}\right) & \frac{37}{8}\left(-\frac{104}{185}\right) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & \frac{13}{5} & \frac{13}{5} \\ 0 & -\frac{13}{5} & -\frac{13}{5} \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & \frac{13}{5} & \frac{13}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank} = 2 \neq 3$$

Задача на вычисление ранга

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{rank}(AB) = ?$$

Задача на вычисление ранга

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{rank}(AB) = ?$$

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 19 & 14 & 17 \\ 11 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank}(AB) = 2$$

$$\operatorname{rank}(AB) \le \min(\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B)$$

Задача на свойства матриц

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det((AB)^{-1}) + \det(BA) + \det(A+B) = ?$$

Задача на свойства матриц

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det((AB)^{-1}) + \det(BA) + \det(A+B) =$$

$$= \det(B^{-1}A^{-1}) + \det(BA) + \det(A+B) =$$

$$= \det(B^{-1}) \cdot \det(A^{-1}) + \det(B) \cdot \det(A) + \det(A+B) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot 9 + 60 = 78\frac{1}{18}$$

Задача на свойства матриц

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$$

$$\det(A + B) \neq \det(A) \cdot \det(B)$$

Задача на свойства матриц

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(AB) + \det(BA) + \det\left((AB)^\top\right) = ?$$

Задача на свойства матриц

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(AB) + \det(BA) + \det\left((AB)^\top\right) =$$

$$= \det(AB) + \det(BA) + \det(B^\top A^\top) =$$

$$= \det(\mathrm{A}) \cdot \det(B) + \det(A) \cdot \det(B) + \det(B^\top) \cdot \det(A^\top) =$$

$$= 2 \cdot \det(\mathrm{A}) \cdot \det(B) \;\; + \det(B^\top) \cdot \det(A^\top)$$

$$= 2 \cdot 6 \cdot 8 + 8 \cdot 6 = 144$$

Задача на свойства матриц

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$

$$\det B = b_{11} \cdot b_{22} \cdot b_{33}$$

$$(\mathrm{AB})^{\top} = B^{\top} A^{\top}$$

Задача на свойства матриц

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 10 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{trace}(A+B) \cdot \mathrm{trace}(AC) - \mathrm{trace}(ABC) \cdot \mathrm{trace}(BCA) = ?$$

Задача на свойства матриц

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 10 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{trace}(A+B) \cdot \mathrm{trace}(AC) - \mathrm{trace}(ABC) \cdot \mathrm{trace}(BCA) =$$

$$= \big(\mathrm{trace}(A) + \mathrm{trace}(B)\big) \cdot \mathrm{trace}(AC) - (\mathrm{trace}(ABC))^2$$

$$= (12 + 6) \cdot 23 - 21^2 = -27$$

Задача на свойства матриц

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{trace} A = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$\operatorname{trace}(A + B) = \operatorname{trace}(A) + \operatorname{trace}(B)$$

$$\operatorname{trace}(AB) \neq \operatorname{trace}(A) \cdot \operatorname{trace}(B)$$

$$\operatorname{trace}(AB) \neq \operatorname{trace}(A) + \operatorname{trace}(B)$$

$$\operatorname{trace}(ABC) = \operatorname{trace}(BCA)$$

$$\operatorname{trace}(ABC) \neq \operatorname{trace}(CBA)$$

Задача на модулярные матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & x & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det A = 4 \pmod 7 \qquad x = ?$$

Задача на модулярные матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & x & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det A = 4 \pmod 7 \qquad x = ?$$

$$\det A = -10 \cdot x - 2$$

$$-10 \cdot x - 2 = 4 \pmod 7$$

$$-10 \cdot x - 2 = 4, 11, 18, 25, 32 \ldots (7n + 4)$$

$$-10 \cdot x - 2 = 18$$

$$x = -2\ (x < 0) \quad \rightarrow \quad x = 5$$

Задача на модулярные матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det A = 4 \pmod 7 \qquad A^{-1} \pmod 7 = ?$$

Задача на модулярные матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det A = 4 \ (\mathrm{mod}\ 7) \qquad A^{-1} (\mathrm{mod}\ 7) = ?$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_{ij}^{\top} \qquad \det A \cdot \frac{1}{\det A} = 1 \ (\mathrm{mod}\ 7)$$

$$4 \cdot \frac{1}{\det A} = 1, 8, 15, 22, 29 \ldots (7\mathrm{n} + 1)$$

$$4 \cdot \frac{1}{\det A} = 8 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\det A} = 2$$

Задача на модулярные матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det A = 4 \pmod 7 \qquad A^{-1} \pmod 7 = ?$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_{ij}^{\top}$$

$$A_{ij}^{\top} = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -14 \\ -2 & -10 & 8 \\ -20 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \pmod 7$$

Задача на модулярные матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det A = 4 \pmod 7 \qquad A^{-1} \pmod 7 = ?$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_{ij}^{\top} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 0 \\ 10 & 8 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \pmod 7$$

Задача на матричные уравнения

$$A = \begin{bmatrix} 2+3i & 1+2i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{Q} = \begin{bmatrix} 9 & 3+6i \\ 6+3i & 3+3i \end{bmatrix} \qquad AX + XA^{\top} = Q$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = ?$$

Задача на матричные уравнения

$$A = \begin{bmatrix} 2+3i & 1+2i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{Q} = \begin{bmatrix} 9 & 3+6i \\ 6+3i & 3+3i \end{bmatrix} \qquad AX + XA^{\top} = Q$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = ?$$

$$\begin{bmatrix} 2+3i & 1+2i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2-3i & 1-i \\ 1-2i & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 3+6i \\ 6+3i & 3+3i \end{bmatrix}$$

Задача на матричные уравнения

$$A = \begin{bmatrix} 2+3i & 1+2i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{Q} = \begin{bmatrix} 9 & 3+6i \\ 6+3i & 3+3i \end{bmatrix} \quad AX + XA^{\top} = Q$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = ?$$

$$\begin{bmatrix} x_1(2+3i) + x_3(1+2i) & x_2(2+3i) + x_4(1+2i) \\ x_1(1+i) + x_3 & x_2(1+i) + x_4 \end{bmatrix} +$$

$$+ \quad \begin{bmatrix} x_1(2-3i) + x_2(1-2i) & x_1(1-i) + x_2 \\ x_3(2-3i) + x_4(1-2i) & x_3(1-i) + x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3+6i \\ 6+3i & 3+3i \end{bmatrix}$$

Задача на матричные уравнения

$$A = \begin{bmatrix} 2+3i & 1+2i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{Q} = \begin{bmatrix} 9 & 3+6i \\ 6+3i & 3+3i \end{bmatrix} \qquad AX + XA^{\top} = Q$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = ?$$

$$\begin{cases} x_1(2+3i) + x_3(1+2i) + x_1(2-3i) + x_2(1-2i) = 9 \\ x_2(2+3i) + x_4(1+2i) + x_1(1-i) + x_2 = 3+6i \\ x_1(1+i) + x_3 + x_3(2-3i) + x_4(1-2i) = 6+3\,i \\ x_2(1+i) + x_4 + x_3(1-i) + x_4 = 3+3i \end{cases}$$

Задача на матричные уравнения

$$A = \begin{bmatrix} 2+3i & 1+2i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{Q} = \begin{bmatrix} 9 & 3+6i \\ 6+3i & 3+3i \end{bmatrix} \qquad AX + XA^{\top} = Q$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = ?$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1+i \\ x_3 = i \\ x_4 = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad X = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

Задача на матричную экспоненту

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1000 & 1993 \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad e^{A} = ?$$

Задача на матричную экспоненту

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1000 & 1993 \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad e^A = ?$$

$$e^x = I + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\ldots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

$$e^A = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots\ldots + \frac{A^n}{n!} + \cdots \quad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

Задача на матричную экспоненту

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1000 & 1993 \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad e^A = ?$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1000 & 1993 \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1000 & 1993 \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20000 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20000 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1000 & 1993 \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Задача на матричную экспоненту

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1000 & 1993 \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad e^{A} = ?$$

$$e^{A} = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1000 & 1993 \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 20000 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1000 & 11993 \\ 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Задача от А.А.

$$A = \begin{bmatrix} n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 & (n+3)^2 \\ (n+2)^2 & (n+3)^2 & (n+4)^2 \end{bmatrix}$$ Доказать: $\det A = -8$

Задача от А.А.

$$A = \begin{bmatrix} n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 & (n+3)^2 \\ (n+2)^2 & (n+3)^2 & (n+4)^2 \end{bmatrix}$$

Доказать: $\det A = -8$

$$A = \begin{bmatrix} n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 \\ 2n+1 & 2n+3 & 2n+5 \\ 4n+4 & 4n+8 & 4n+12 \end{bmatrix}$$

Вычитаем первую строку из второй и третьей.

$$A = \begin{bmatrix} n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 \\ 2n+1 & 2n+3 & 2n+5 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Вычитаем удвоенную вторую строку из третьей.

Задача от А.А.

$$A = \begin{bmatrix} n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 & (n+3)^2 \\ (n+2)^2 & (n+3)^2 & (n+4)^2 \end{bmatrix}$$

Доказать: $\det A = -8$

$$A = \begin{bmatrix} n^2 & 2n+1 & 4n+4 \\ 2n+1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Вычитаем первый столбец из второго и третьего.

$$A = \begin{bmatrix} n^2 & 2n+1 & 2 \\ 2n+1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Вычитаем удвоенный второй столбец из третьего.

Задача от А.А.

$$A = \begin{bmatrix} n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 & (n+3)^2 \\ (n+2)^2 & (n+3)^2 & (n+4)^2 \end{bmatrix}$$ Доказать: $\det A = -8$

$$\det A = \det \begin{bmatrix} n^2 & 2n+1 & 2 \\ 2n+1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 2n+1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-4) = -8$$

Домашнее задание

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = ?$$

Домашнее задание

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\left(A^\top\right)^\top\right) + \operatorname{trace}\left((A+B)^\top\right) + \det\left((AB)^\top\right) = ?$$

Домашнее задание

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & i \\ 2+i & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{Q} = \begin{bmatrix} 8 & 7+4i \\ 9+10i & 4+14i \end{bmatrix} \qquad XA + A^{\top}X = Q$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = ?$$

Домашнее задание

Илья и Ксения играют в игру. У них есть матрица 2024x2024, заполненная нулями. На каждом ходу игрок меняет один из нулей на какое-то другое число. Илья выигрывает, если после того, как все ходы сделаны, определитель не равен нулю. Ксения выигрывает, если определитель будет равен нулю. Илья начинает. Докажите, что Ксения всегда может победить.

Домашнее задание

$$A = \begin{bmatrix} b & b & b-a \\ a-b & -b & a \\ a+b & b & 0 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{rank} A = ?$$

Спасибо за работу!