Chương 1: Sơ lược mệnh đề, tập hợp, ánh xạ và cấu trúc đại số

Chương 1: Sơ lược mệnh đề, tập hợp, ánh xạ và cấu trúc đại số

1.1. SƠ ĐỒ VỀ LOGICH MỆNH ĐỀ

1.1.1. Mệnh đề

- Lôgich mệnh đề là một hệ thống lôgich với đơn vị cơ bản là các mệnh đề.
- Mệnh đề là một câu khẳng định (phán đoán) có giá trị chân lý **đúng** hoặc **sai**
- Để chỉ các mệnh đề chưa xác định ta dùng các chữ cái p, q, r… và gọi chúng là các biến mệnh đề. Nếu mệnh đề p đúng ta cho p nhận giá trị 1 và p sai ta cho p nhận giá trị 0. Giá trị 1 hoặc 0 được gọi là thể hiện của p.

- Mệnh đề phức hợp được xây dựng từ các mệnh đề đơn giản hơn bằng các phép liên kết lôgich mệnh đề.

1.1.2. Các phép liên kết lôgich mệnh đề

1. Phép phủ định (negation): Phủ định của mệnh đề p là mệnh đề được ký hiệu $\bar{p}$ đọc là không p. Mệnh đề $\bar{p}$ đúng khi p sai và $\bar{p}$ sai khi p đúng.

2. Phép hội (conjunction): Hội của hai mệnh đề p, q là mệnh đề được ký hiệu $p \wedge q$ (đọc là p và q). Mệnh đề $p \wedge q$ chỉ đúng khi cả hai mệnh đề p, q cùng đúng và $p \wedge q$ sai khi ít nhất một trong hai mệnh đề p hoặc q sai.

3. Phép tuyển (disjunction): Tuyển của hai mệnh đề p, q là mệnh đề được ký hiệu $p \vee q$ (đọc là p hoặc q). Mệnh đề $p \vee q$ đúng khi ít nhất một trong hai mệnh đề p hoặc q đúng và $p \vee q$ chỉ sai khi cả hai mệnh đề p, q cùng sai.

4. Phép kéo theo (implicaiton): Mệnh đề p kéo theo q, ký hiệu $p \Longrightarrow q$, là mệnh đề chỉ sai khi p đúng q sai.

5. Phép tương đương (equivalence): Mệnh đề $(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)$ được gọi là mệnh đề p tương đương q, ký hiệu $p \Longleftrightarrow q$.

Từ định nghĩa của các phép liên kết mệnh đề ta có các bảng chân trị tương ứng sau

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

1.1.3. Các tính chất

Dùng bảng chân trị ta dễ dàng kiểm chứng các mệnh đề hằng đúng sau:

1) $\overline{\overline{p}} \equiv p$ *luật phủ định*

2) $(p \Rightarrow q) \equiv (\overline{p} \vee q)$

3) $p \wedge q = q \wedge p, p \vee q = q \vee p$ *luật giao hoán*

4) $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r; p \vee (q \vee r) \equiv (\mathrm{p} \vee \mathrm{q}) \vee r$ *luật kết hợp*

5) $[p \wedge (q \vee r)] = [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)];$

$[p \vee (q \wedge r)] = [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ *luật phân phối*

6) Mệnh đề $p \vee \overline{p}$ luôn đúng	*luật bài trung*
$p \wedge \overline{p}$ luôn sai	*luật mâu thuẫn*
7) $\overline{p \vee v} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}; \overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$	*luật De Morgan*
8) $p \Rightarrow q \equiv \overline{q} \Rightarrow \overline{p}$	*luật phản chứng*
9) $p \vee p \equiv p; p \wedge p \equiv p$	*luật lũy đẳng*
10) $p \vee \left(p \wedge q\right) \equiv p; p \wedge \left(p \vee q\right) \equiv p$	*luật hấp thu*

1.2. TẬP HỢP

1.2.1. Khái niệm tập hợp (GV nói nhanh, SV đọc tài liệu)

1.2.3. Các tập hợp số thường gặp

- Tập hợp số tự nhiên $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$
- Tập hợp số nguyên $\mathbb{Z} = \{0,\pm 1, \pm 2,\ldots\}$
- Tập các số hữu tỉ $\mathbb{Q} = \{p/q \backslash q\neq 0, p,q\in Z\}$
- Tập các số thực R (gồm các số hữu tỉ và vô tỉ)
- Tập các số phức $\mathbb{C} = \{z=x+iy|x,y\in R;\ i^2=-1\}$

1.2.4. Tập con

Định nghĩa 1.1: *Tập A được gọi là tập con của B nếu mọi phần tử của A đều là của B, khi đó ta ký hiệu*

$$A \subset B \text{ hoặc } B \supset A$$

Khi A là tập con của B thì còn nói A chứa trong B hay B chứa A hay B bao hàm A.

Ta có: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

ĐN1.2: Hai tập A, B bằng nhau, ký hiệu A = B, được định nghĩa như sau:
A = B khi và chỉ khi A⊂B và B⊂A
Như vậy để chứng minh A = B ta chỉ cần chứng minh x∈A ⟺x∈B
ĐN1.3: Tập rỗng là tập không chứa phần tử nào, ký hiệu ϕ
Một cách hình thức ta có thể xem tập rỗng là tập con của mọi tập hợp.
Ví dụ 1.4. Xét X = $\{x \in R, x^2 + 1 = 0\}$, thì X = ϕ
Tập hợp tất cả các tập con của X được ký hiệu $\mathcal{P}$(X). Vậy A∈ $\mathcal{P}$(X) khi và chỉ khi A⊂X. Tập X là tập con của chính nó, vì vậy X là phần tử lớn nhất và ϕ là phần tử bé nhất của $\mathcal{P}$(X)
A∈ $\mathcal{P}$(X) ⟺ A ∈ X (1.1)

Ví dụ 1.5: X = {a,b,c} có $\mathcal{P}$(X) = {ϕ, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c},X}

Ta thấy X có 3 phần tử thì $\mathcal{P}$(X) có $2^3 = 8$ phần tử

- Ta có thể chứng minh tổng quát rằng nếu X có n phần tử thì $\mathcal{P}$(X) có 2^n phần tử (bài tập 1.19).

1.2.2. Các phép toán trên các tập hợp

Cho A và B là hai tập con của tập U nào đó, ta có thể định nghĩa các phép toán hợp, giao, hiệu của hai tập hợp này như sau.

1. Phép hợp: Hợp của hai tập A và B, ký hiệu A ∪ B, là tập gồm các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập A, B

$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow x \in A \; hoặc \; x \in B$ (1.2)

2. Phép giao: Giao của hai tập A và B, ký hiệu A∩ B, là tập gồm các phần tử thuộc đồng thời cả hai tập A, B.

$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \; và \; x \in B$ (1.3)

3. Hiệu của hai tập hợp: Hiệu của hai tập A và B, ký hiệu A\B hay A-B, là tập gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B.

$(x \in A - B) \Leftrightarrow x \in A \; và \; x \notin B$ (1.4.)

Thông thường giả thiết tất cả các tập hợp được xét là các tập con của một tập cố định gọi là tập phổ dụng U. Tập U\B được gọi là phần bù của B trong U và được ký hiệu là C_U^B hoặc $\bar{B}$.

Các tính chất của hợp và giao

1. $A \cup A = A, A \cap A = A$ *tính lũy đẳng*

2. $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$ *tính giao hoán*

3. $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup C$

$A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap C$ *tính kết hợp*

4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *tính phân bố*

Giả sử A, B là hai tập con của U thì:

5. $\overline{\overline{A}} = A; A \cup \varnothing = A; A \cap U = A$

6. $A \cup \overline{A} = U; A \cap \overline{A} = \varnothing$

7. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *luật De Morgan*

8. $A \setminus B = A \cap \overline{B} = A\left(\overline{A \cap B}\right) = A \setminus \left(A \cap B\right) = C_A^{A \cap B}$

9. $A \cap B \subset A \subset A \cup B; A \cap B \subset B \subset A \cup B$

10. $\begin{cases} A \subset C \\ B \subset C \end{cases} \Rightarrow A \cup B \subset C; \begin{cases} D \subset A \\ D \subset B \end{cases} \Rightarrow D \subset A \cap B$

1.2.7. Phép hợp và giao suy rộng

Giả sử $\left(A_i\right)_{i\in I}$ là một họ các tập hợp. Mở rộng công thức (1.2), (1.3) ta định nghĩa.

$\bigcup\limits_{i\in I} A_i$: là tập hợp gồm các phần tử thuộc ít nhất một tập A_i nào đó.

$\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ là tập gồm các phần tử thuộc đồng thời mọi tập A_i.

$$\left(x \in \bigcup_{i\in I} A_i\right) \Leftrightarrow \left(\exists i_0 \in I; x \in A_{i_0}\right) \quad \textbf{(1.6)}$$

$$\left(x \in \bigcap_{i\in I} A_i\right) \Leftrightarrow \left(\forall i \in I; x \in A_i\right) \quad \textbf{(1.7)}$$

Ví dụ 1.8:

$$A_n = \left\{x \in N \mid 0 \le x \le n/\left(n+1\right)\right\}; B_n = \left\{x \in N \mid -1\left(n+1\right) \le x < 1+1/(1+1)\right\}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \left[0;1\right], \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \left[0;1\right]$$

1.3. TÍCH DESCARTES VÀ QUAN HỆ

1.3.1. Tích Descartes của các tập hợp

Định nghĩa 1.4: *Tích Descartes (Đề các) của hai tập X, Y là tập, ký hiệu $X \times Y$, gồm các phần tử có dạng (x,y) trong đó $x \in X, y \in Y$. Vậy*

$$X \times Y = \left\{ \left(x, y \right) | \, x \in X \text{và y} \in \text{Y} \right\} \qquad \textbf{(1.8)}$$

Ví dụ 1.9: Cho $X = \left\{ a, b, c \right\}, Y = \left\{ 1, 2 \right\}$

$$X \times Y = \left\{ (a,1),(b,1),(c,1),(a,2),(b,2),(c,2) \right\};$$

$$Y \times X = \left\{ (1,a),(2,a),(1,b),(2,b),(1,c),(2,c) \right\}$$

Dễ thấy $X \times Y \neq Y \times X$

Ta có thể chứng minh được rằng nếu X có n phần tử ,

Y có m phần tử thì X × Y có n.m phần tử.

Tích Descartes của n tập hợp X_1, X_2, …, X_n được định nghĩa và ký hiệu như sau:

$$X_1 \times X_2 \times ... \times X_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in X_i, i = 1, 2, ..., n\} \qquad \textbf{(1.9)}$$

Nhận xét 1.1:

1. Khi $X_1 = \ldots = X_n = X$ thì ta ký hiệu X^n thay cho $\underbrace{X \times ... \times X}_{n\,lan}$

Chẳng hạn $R^2 = \{(x, y) \mid x, y \in R\}, R^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in R\}$

$$R^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1, x_2, ..., x_n \in R\}$$

2. Tích Descartes $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ còn được ký hiệu $\prod_{i \in I} X_i$

3. Giả sử $(x_1, ..., x_n) = (x_1^{'}, ..., x_n^{'}) \Leftrightarrow x_i = x_i^{'}, \forall i = 1, ..., n$ **(1.10)**

Nhận xét 1.1:

1. Khi $X_1 = \ldots = X_n = X$ thì ta ký hiệu X^n thay cho $\underbrace{X \times \ldots \times X}_{n\,lan}$

Chẳng hạn $R^2 = \{(x, y) \mid x, y \in R\}, R^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in R\}$

$R^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in R\}$

2. Tích Descartes $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ còn được ký hiệu $\prod_{i \in I} X_i$

3. Giả sử $(x_1, \ldots, x_n) = (x_1^{'}, \ldots, x_n^{'}) \Leftrightarrow x_i = x_i^{'}, \forall i = 1, \ldots, n$ **(1.10)**

Chẳng hạn $(x, y) = (1, -3) \in R^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$

4. Tích Descartes của các tập hợp không có tính giao hoán.

1.3.2. Quan hệ hai ngôi*

Định nghĩa 1.5: Cho tập X$\neq \phi$ $và$ $tính$ $chất$ $\mathcal{R}$ liên quan đến 2 phần tử của X. nếu x và y là hai phần tử của X thỏa mãn tính chất $\mathcal{R}$ thì ta nói x có quan hệ $\mathcal{R}$ với y và viết là x $\mathcal{R}$ y.

$\mathcal{R}$ gọi là quan hệ 2 ngôi trên X

Ví dụ 1.10: Ta xét các quan hệ sau trên tập các số:

$\mathcal{R}_1$: x $\mathcal{R}_1$y ⇔ x ⋮ y (x chia hết cho y), ∀x, y ∈ N

$\mathcal{R}_2$: x $\mathcal{R}_2$y ⇔ (x,y) = 1 (x và y nguyên tố cùng nhau),∀ x, y ∈ Z

$\mathcal{R}_3$: x $\mathcal{R}_3$y ⇔ x≤y (x nhỏ hơn hay bằng y), ∀ x, y ∈ R

$\mathcal{R}_4$:x $\mathcal{R}_4$y ⇔ x-y ⋮ m, ∀ x,y∈ Z . Ta ký hiệu x ≡y (mod m) và đọc là x đồng dư với y môđulô m.

Định nghĩa 1.6: Quan hệ hai ngôi $\mathcal{R}$ trên X được gọi là có tính:

a) Phản xạ, nếu x $\mathcal{R}$ x, ∀ x ∈ X;

b) Đối xứng, nếu ∀ x,y ∈ X mà x $\mathcal{R}$ y thì cũng có y $\mathcal{R}$ x;

c) Bắc cầu, nếu ∀ x,y,z ∈ X mà x $\mathcal{R}$ y và y $\mathcal{R}$ z thì cũng có x $\mathcal{R}$ z.

d)Phản đối xứng, nếu ∀ x,y ∈ X mà x $\mathcal{R}$ y và y $\mathcal{R}$ x thì x = y

1.2.4. Quan hệ tương đương *

Định nghĩa 1.7: Quan hệ hai ngôi $\mathcal{R}$ trên X $\neq \phi$ được gọi là quan hệ tương đương nếu có ba tính chất phản xạ, đối xứng, bắc cầu.

Theo thói quen, với quan hệ tương đương $\mathcal{R}$ ta thường viets x ~y $(\mathcal{R})$ hoặc x~y thay cho x $\mathcal{R}$ y.

Ta định nghĩa và ký hiệu lớp tương đương của phần tử x∈X là tập hợp x~y thay cho x $\mathcal{R}$ y

Ta định nghĩa và ký hiệu lớp tương đương của phần tử xϵX là tập hợp

$$\bar{x} = \{y \in X | y \sim x\} \qquad (1.11)$$

Mỗi phần tử bất kỳ của lớp tương đương $\bar{x}$ được gọi là phần tử đại diện của $\bar{x}$.

1.3. ÁNH XẠ

1.3.1. Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa 1.10: Một ánh xạ f từ tập X vào tập Y là một quy luật cho tương ứng mỗi một phần tử x∈X với một phần tử y = f(x) của Y thỏa mãn hai điều kiện sau:

(i) Mọi x∈X đều có ảnh tương ứng y = f(x) ∈ Y,

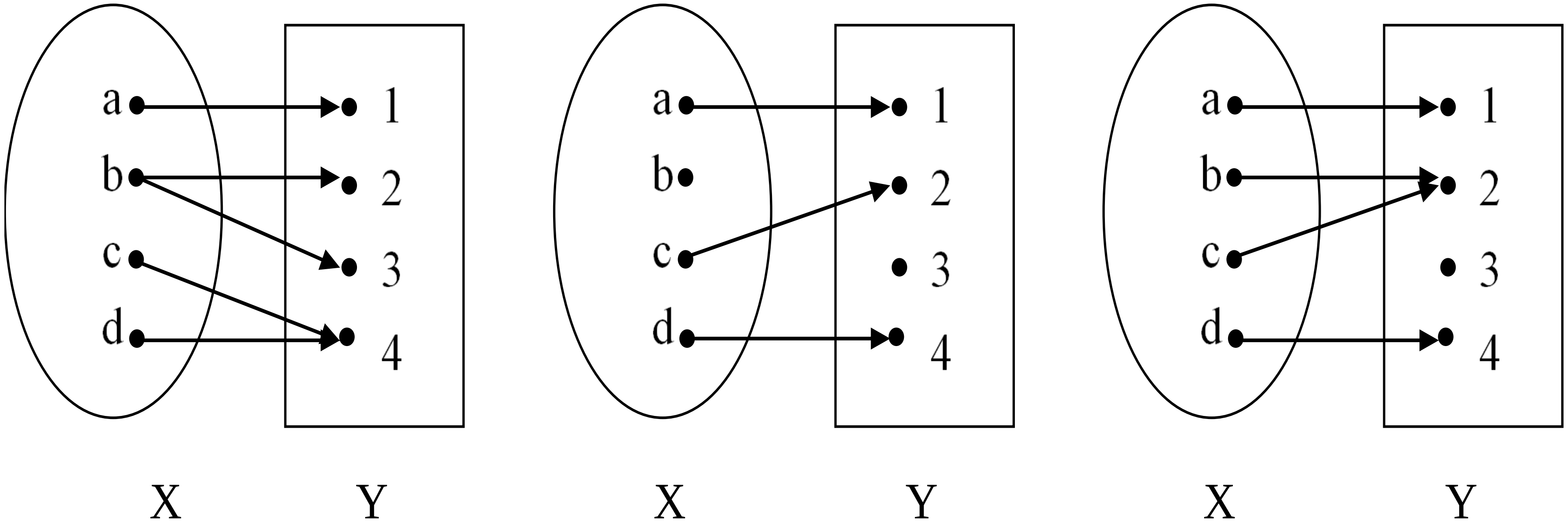
(ii) Với mỗi x ∈ X ảnh f(x) là duy nhất

Ta ký hiệu $f: X \to Y$ hay $X \xrightarrow{f} Y$

$$x \mapsto y = f(x)$$

X được gọi là tập nguồn, Y được gọi là tập đích

Ví dụ 1.19:



Tương ứng a) Tương ứng b) Tương ứng c)

Tương ứng a) không thỏa mãn điều kiện (ii). Tương ứng b) không thỏa mãn điều kiện (i) của định nghĩa. Chỉ có tương ứng c) xác định một ánh xạ X vào Y.

Hai ánh xạ f : X→Y, g:X'→Y' được gọi là bằng nhau, ký hiệu f = g

nếu thỏa mãn $\begin{cases} X = X', Y = Y' \\ f(x) = g(x); \forall x \in X \end{cases}$ (1.22)

Ví dụ 1.20: Mỗi hàm số y=*f*(x) bất kỳ có thể được xem là ánh xạ từ tập xác định D vào R. Chẳng hạn:

Hàm loogarit y = lnx là ánh xạ $\ln : R_+^* \to R$

$$x \mapsto y = \ln x$$

Hàm căn bậc hai $y = \sqrt{x}$ *là ánh xạ* $\sqrt{\ } : R_+ \to R$

$$x \mapsto y = \sqrt{x}$$

Định nghĩa 1.11: (Tập ảnh, tập nghịch ảnh)

Xét ánh xạ *f*:X→Y:

* Cho A⊂X, ta ký hiệu và gọi tập sau là ảnh của A qua ánh xạ *f*

$$f\left(A\right)=\left\{y\in Y,y=f\left(x\right)|\,x\in A\right\}$$

(1.23)

Nói riêng f(X) = Imf được gọi là tập ảnh hay tập giá trị của f.

Khi f là hàm số thì f(X) được gọi là miền giá trị.

** Cho B⊂Y, ta ký hiệu và gọi tập sau là nghịch ảnh của B qua ánh xạ f*

$$f^{-1}\left(B\right)=\left\{x\in X\mid f\left(x\right)\in B\right\} \qquad (1.24)$$

Trường hợp B là tập hợp chỉ có một phần tử {y}thì ta viết f^{-1}(y) thay cho f^{1}({y}).

1.3.2. Phân loại các ánh xạ

1) **Đơn ánh:** Ánh xạ f:X→Y gọi là đơn ánh nếu ảnh của hai phần tử phân biệt là hai phần tử phân biệt.

Nghĩa là: $\forall x_1, x_2 \in X$: $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Hay $\forall x_1, x_2 \in X$: $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$ (1.26)

2) **Toàn ánh:** Ánh xạ f:X → Y gọi là toàn ánh nếu mọi phần tử của Y là ảnh của phần tử nào đó của X.

Vậy f là một toàn ánh khi thỏa mãn một trong 2 ĐK tương đương sau:

f(X) = Y hoặc $\forall y \in Y, \exists x \in X$ sao cho y = f(x) (1.27)

Mọi ánh xạ f: X → Y bất kỳ là toàn ánh lên tập giá trị f(X). Hàm số là toàn ánh từ tập xác định lên tập giá trị.

3) **Song ánh:** Ánh xạ f: X → Y vừa đơn ánh vừa toàn ánh được gọi là song ánh.

Vậy f là một song ánh khi thỏa mãn điều kiện sau:

$\forall y \in Y, \exists!\, x \in X$ sao cho y= f(x) (1.28)

Nhận xét 1.2: *Trường hợp ax $f:X \to Y$ được cho dưới dạng công thức xác định ảnh $y=f(x)$ ta có thể xác định tính chất đơn ánh, toàn ánh của ax f bằng cách xét sự có nghiệm của PT: $f(x) = y$, $\forall y \in Y$ (1.29)*

trong đó ta xem x là biến ẩn và y là tham biến

- *Nếu với mọi $y \in Y$ phương trình (1.29) luôn có nghiệm $x \in X$ thì ánh xạ f là toàn ánh.*
- *Nếu với mỗi $y \in Y$ phương trình (1.29) có không quá 1 nghiệm $x \in X$ thì ánh xạ f là đơn ánh.*
- *Nếu với mọi $y \in Y$ phương trình (1.29) luôn có duy nhất nghiệm $x \in X$ thì f là song ánh*

VD 1: Ánh xạ $f: R \to R$ có công thức xác định ảnh $f(x) = x^2 - 5x + 3$ là đơn ánh, toàn ánh, song ánh?

Giải: $\forall y \in R$, xét PT $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 = y$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 - y = 0$$

Ta có $\Delta = 13 + 4y > 0 \Leftrightarrow y > -\frac{13}{4}$

- Với y > - 13/4 : PT có 2 nghiệm, nên f không đơn ánh
- Với y < - 13/4 : PT vô nghiệm, f không toàn ánh và f cũng không song ánh

Ví dụ 2: Giả sử A là tập con của X thì ánh xạ

$i_A: A \to X$ với $x \mapsto i_A(x) = x$

là một đơn ánh gọi là phép nhúng chính tắc.

Đặc biệt khi A = X ánh xạ i_A là một song ánh, ký hiệu id_xvà gọi là ánh xạ đồng nhất của X.

1.4.3. Ánh xạ ngược một song ánh

Định nghĩa 1.13: Giả sử $f: X \to Y$ là một song ánh, theo (1.28) vói mỗi $y \in Y$ tồn tại duy nhất $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. Như vậy ta có thể xác định một ánh xạ từ Y vào X bằng cách cho ứng mỗi phần tử $y \in Y$ với phần tử duy nhất $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. *Ánh xạ này được gọi là ánh xạ ngược f và được ký hiệu* f^{-1}. Vậy

$$f^{-1}: Y \to X \text{ và } f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x) \qquad (1.30)$$

Có thể chứng minh được f^{-1} cũng là một song ánh.

Ví dụ 1.26: *Hàm mũ cơ số a:y=a^x, a>0, a$\neq$1*

là một song ánh (vì hàm mũ đơn điệu chặt) có hàm ngược

là hàm lôgarit cùng cơ số $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$

Ví dụ 1.27: *Các hàm lượng giác ngược*

Xét hàm $\sin : \left[-\pi/2; \pi/2\right] \to \left[-1;1\right]$

$$x \mapsto \sin x$$

đơn điệu tăng chặt và toàn ánh nên nó là một song ánh. Hàm ngược

được ký hiệu $\text{arcin}: \left[\text{-}1,1\right] \to \left[-\pi/2; \pi/2\right]$ với $y \mapsto \text{arcsiny}$

Vậy ta có: $x = \text{arcsiny} \Leftrightarrow \text{y=sinx}, \forall \text{x} \in \left[\text{-}1;1\right], y \in \left[-\pi/2; \pi/2\right]$

1.3.4. Hợp của hai ánh xạ

Định nghĩa 1.14: Cho hai ánh xạ f:X→Y, g: Y→Z. Tương ứng $x \mapsto g[f(x)]$ xác định một ánh xạ từ X vào Z, gọi là hợp của hai ánh xạ f và g, ký hiệu g·f. Vậy g.f:X → Z có công thức xác định ảnh. (g.f)(x) = g[f(x)] (1.31)

Ví dụ 1.28: Cho f: với công thức xác định f(x) = sinx; g(x) = $2x^2 + 4$. Ta có thể thiết lập hai hàm hợp g.f và f.g từ R vào R

$$f.g(x) = \sin(2x^2 + 4)\,; \quad g.f(x) = 2sin^2x + 4$$

Qua ví dụ trên ta thấy nói chung f.g ≠ g.f , nghĩa là phép hợp xạ không có tính giao hoán.

Nhận xét: (SV về chứng minh)

Giả sử: f: X→Y là một song ánh có ánh xạ ngược f^{-1}: Y→X, khi đó ta dễ dàng kiểm chứng rằng $f^{-1}.f = Id_X$ và $f.f^{-1} = Id_Y$.

1.4. Các cấu trúc đai số (Phần này SV tự đọc thêm)

1.4.1 Luật hợp thành

1.4.2 các cấu trúc: Nhóm, vành, Trường

SV đọc trả lời các câu hỏi sau:

1) Luật hợp thành là gi? Tính chất của luật hợp thành?
2) ĐN Nhóm, chứng minh các cặp (Z,+), (Q,+), (R,+) là các nhóm
3) ĐN vành, chứng minh bộ ba (Z,+, .), là một vành

BÀI TẬP: 1) Bài tập trong giáo trình

Bài 1.12 trang 54

Bài 1.13; 1.16 trang 55

2) Bài tập luyện tập

Bài 1: Cho A,B,C,D là tập con của E. Chứng minh rằng

a) Nếu $A \subset B, C \subset D$ $thì$ $A \cup C \subset B \cup D$ và $A \cap C \subset B \cap D$
b) Nếu $A \cup C = A \cup B, A \cap C = A \cap B$ $thì$ $C = B$

Bài 2: Đặt A = {1,2,3,4,5,6,7,8}, B = {1,3,5,7,9}, C = {4,5,6}
D = {2,5,8} là tập con của X = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

a) Liệt kê các phần tử của $A \cap (B \cup \bar{C})$ và $(\bar{D} \cap B) \cup C$
b) Biểu diễn các tập {5}, {4,6,10}, {2,8} theo A, B, C, D

Bài 3: Ánh xạ $f: R \to R$ có công thức xác định ảnh $f(x) = 15x - 3|x|$ là đơn ánh, toàn ánh, song ánh? Tìm công thức xác định ảnh của ánh xạ ngược nếu tồn tại

Bài 4: Ánh xạ $f: R \to R$ có công thức xác định ảnh $f(x) = 8(x+1)^3+5$ là đơn ánh, toàn ánh, song ánh? Tìm công thức xác định ảnh của ánh xạ ngược nếu tồn tại

Bài 5: Ánh xạ $f: [-1,1] \to [-1,3]$ có công thức xác định ảnh $f(x) = x^2 - 2x$ là đơn ánh, toàn ánh, song ánh? Tìm công thức xác định ảnh của ánh xạ ngược nếu tồn tại

Bài 6: Các ánh xạ $f: X \to Y$ sau đây là đơn ánh, toàn ánh, song ánh? Xác định ánh xạ ngược nếu tồn tại

a) X = Y = R, f(x) = 3x + 7

b) X = Y = R, f(x) = x^3 – 3x

c) X = [1;3], Y = [-1;3], f(x) = x^2 – 2x

Bài 7: Cho $f: R^* \to R$ và $g: R \to R$ xác định bởi: $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \frac{3x}{(x^2+1)}$

a) Ánh xạ nào là đơn ánh, toàn ánh

b) Tìm Imf, Img

c) Xác định các ánh xạ tích g.f . Có đẳng thức g.f = g không?

Bài 8: Ký hiệu h = g.f là hợp của hai ánh xạ $f: X \to Y$ và $g: Y \to Z$
Chứng minh

a) f, g đơn ánh thì h đơn ánh

b) h đơn ánh thì f đơn ánh

c) h đơn ánh và f toàn ánh thì g đơn ánh

d) h toàn ánh và g đơn ánh thì f toàn ánh

Bài 9: Cho hai ánh xạ $f: X \to Y$ và $g: Y \to Z$ Chứng minh

a) Nếu g.f đơn ánh và f toàn ánh thì g đơn ánh

b) Nếu g.f toàn ánh và g đơn ánh thì f toàn ánh

1.5. ĐẠI SỐ BOOBLE

1.7.1. Định nghĩa và các tính chất

Định nghĩa 1.30: Một đại số Boole $(B,\vee,\wedge,')$ là một tập khác trống B với hai phép toán hai ngôi ∨,∧: $B \times B \to B$ và phép toán một ngôi ' : B → B thỏa mãn các tiền đề sau:

* $\boldsymbol{B_1}$:∨,∧ có tính kết hợp, nghĩa là với mọi a,b,c ∈ B

$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c; a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

* $\boldsymbol{B_2}$:∨,∧ có tính giao hoán, nghĩa là với mọi a,b ∈ B

$a \vee b = b \vee a;\ \ a \wedge b = b \wedge a$

* **B3**: Tồn tại các phần tử không và phần tử đơn vị 0,1∈B; 0≠1 sao cho với mọi a∈B: $a \vee 0 = a;\ \ a \wedge 1 = a.$

* **B4**: Với mọi a ∈ B tồn tại a' ∈ B là phần tử đối của a theo nghĩa:

$a \vee a' = 1;\ \ a \wedge a' = 0$

* **B5**: Luật ∨ phân phối đối với luật ∧ và luật ∧ phân phối đối với luật ∨, nghĩa là với mọi a,b,c ∈ B

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$
$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

Ví dụ 1.47: Giả sử $X \neq \emptyset$, xét $P(X)$ là tập con của X. Các luật hợp thành $\vee, \wedge$, là phép hợp, phép giao các tập con của X và phép toán một ngôi ' là phép lấy phần bù của tập con trong X. Khi đó $(P(X), \cup, \cap, ')$ là đại số Boole với phần tử không là ϕ và phần tử đơn vị là chính tập X

(SV kiểm tra 5 tiên đề của đ/n 1.30 cho kết luận trên)

<u>Ví dụ 1.48:</u> Xét B2={**0,1**} tập gồm hai phần tử ký hiệu là **0** và **1**. Ta định nghĩa:

$$a \vee b = \begin{cases} 1 \text{ nếu ít nhất một trong hai phần tử a, b là 1} \\ 0 \text{ nếu ngược lại} \end{cases}$$

$$a \wedge b = \begin{cases} 1 \text{ nếu cả hai phần tử a, b là 1} \\ 0 \text{ nếu ngược lại} \end{cases}, a' = \begin{cases} 1 \; \textit{nếu} \; a = 0 \\ 0 \text{ nếu a} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|cc} \vee & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \wedge & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} a' & a \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}$$

thì (B_2, ∨,∧,') là một đại số Boole.

1.7.2. Công thức Boole, hàm Boole và nguyên lý đối ngẫu

Định nghĩa 1.31:

Một biểu thức chứa các biến được liên kết bởi một số hữu hạn lần các phép toán $\vee, \wedge, '$ và hai phần tử 0;1 của đại số Boole $(B, \vee, \wedge, ')$ được gọi là một công thức Boole.

Ví dụ 1.51:

$(x \vee y') \wedge 1$ và $(x' \wedge y) \vee z$ là hai công thức Boole.

- Mỗi công thức Boole của đại số Boole $(B, \vee, \wedge, ')$ xác định một hàm nhận giá trị thuộc B vì khi thay các biến có mặt trong công thức bởi các phần tử của B thì nhận được giá trị là phần tử của B.
- Mỗi hàm xác định bởi công thức Boole được gọi là hàm Boole.

- Hai công thức Boole xác định cùng một hàm Boole được gọi là hai công thức tương đương. Chẳng hạn $x \wedge (y \vee z)$ và $(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ là hai công thức tương đương, ta kí hiệu $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

Định nghĩa 1.32: Hai công thức Boole trong đại số Boole (B, ∨,∧,') được gọi là đối ngẫu nếu trong một công thức ta thay ∨,∧,0;1 lần lượt bằng ∧,∨,1,0 thì ta được công thức hai.

Ví dụ1.52:-Hai công thức $x \vee (y \wedge 1)$ và $x \wedge (y \vee 0)$ là đối ngẫu.
- Trong mỗi tiên đề của hệ tiên đề B1-B5 của đại số Boole đều chứa từng cặp công thức đối ngẫu nhiên, vì vậy ta có nguyên lý đối ngẫu sau:

Ví dụ 1.52: Hai công thức $x \vee (y \wedge 1)$ và $x \wedge (y \vee 0)$ là đối ngẫu. Trong mỗi tiên đề của hệ tiên đề B1-B5 của đại số Boole đều chứa từng cặp công thức đối ngẫu nhiên, vì vậy ta có nguyên lý đối ngẫu sau:

Nguyên lý đối ngẫu: Nếu hai công thức của đại số Boole được chứng minh là tương đương dựa trên cơ sở hệ tiên đề B1-B5 thì hai công thức đối ngẫu của chúng cũng tương đương.

Chẳng hạn, ta sẽ chứng minh $a \vee 1=1$, do đó theo nguyên lý đỗi ngẫu ta cũng có $a \wedge 0=0$

Tính chất 1.7: Giả sử (B,∨,∧,') là đại số Boole với phần tử không và đơn vị là 0;1. Khi đó với mọi a,b∈B ta có:

1) a∨a=a, a∧a=a; (tính lũy đẳng)

2) 0'=1, 1'=0;

3) a ∨ 1=1, a ∧ 0=0;

4) a ∨(a ∧ b)=a, a ∧(a ∨ b)=a; (tính hấp thu)

5) Nếu tồn tại c∈B sao cho a ∨ c=b ∨ c và a ∧ c=b ∧ c thì a=b;

6) Nếu a ∨ b=1 và a ∧ b=0 thì b=a'; (tính duy nhất của phần bù)

7) (a ∨ b)' =a' ∧ b' và (a ∧ b)' =a' ∨ b' (công thức De Morgan)

8) Từ đ/n ta có: a∨a'=1, a∧a'=0

$$a \vee 0 = a, \quad a \wedge 1 = a$$

VD1: Rút gọn công thức Boole $(x \wedge y) \vee (x \wedge y') \vee (x' \vee y) \quad (1)$

Giải: Ta có (1) tương đương với:

$$x \wedge (y \vee y') \vee (x' \vee y) = (x \wedge 1) \vee (x' \vee y)$$

$$= x \vee (x' \vee y) = (x \vee x') \vee y = 1 \vee y = 1$$

VD2: Rút gọn công thức Boole

$$(x \wedge y') \vee [x \wedge (y \wedge z)'] \vee z$$

Giải: $(x \wedge y') \vee [x \wedge (y \wedge z)'] \vee z = (x \wedge y') \vee [x \wedge (y' \vee z')] \vee z$

$(x \wedge y') \vee [(x \wedge y') \vee (x \wedge z')] \vee z = (x \wedge y') \vee (x \wedge z') \vee z$

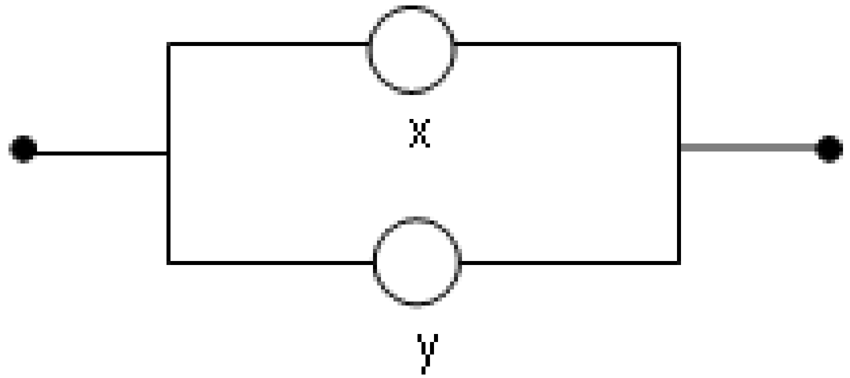
$= (x \wedge y') \vee [(x \vee z) \wedge (z' \vee z)] = (x \wedge y') \vee [(x \vee z) \wedge 1]$

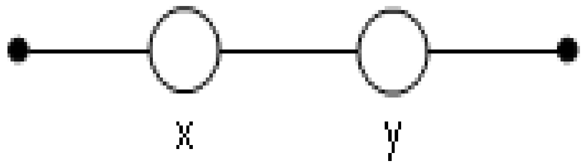
$(x \wedge y') \vee (x \vee z) = [(x \wedge y') \vee x] \vee z = x \vee z$

Vì $(x \wedge y') \vee x = x$ (luật hấp thụ)

1.74. Ứng dụng đại số Boole vào mạng chuyển mạch (switching networks)

Ta chỉ xét các mạng gồm các chuyển mạch có hai trạng thái đóng (dòng điện đi qua được) và mở (dòng điện không qua được). Hai mạng đơn giản nhất là mạng song song cơ bản (basic parallel network) và mạng nối tiếp cơ bản (basic series network) được mô tả trong hình vẽ sau:

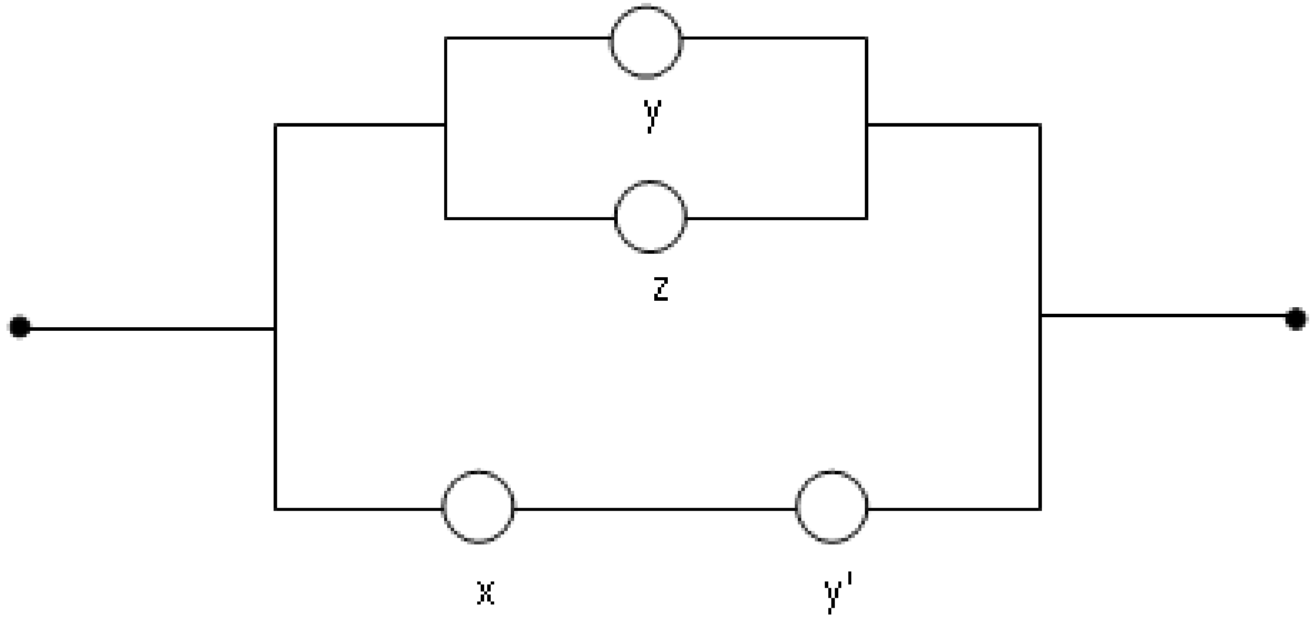




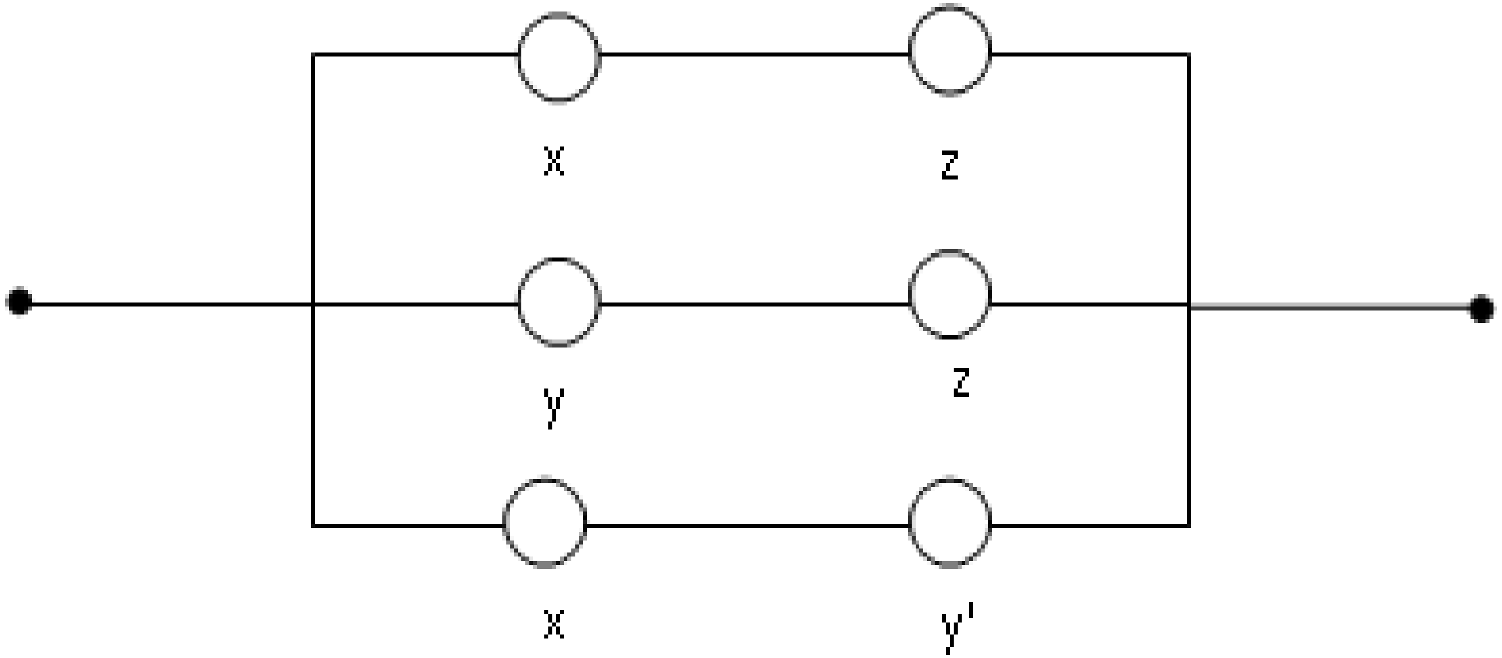
mạng song song cơ bản (hình 1) mạng nối tiếp cơ bản (hình 2)

Một mạng bất kỳ có thể nhận được bằng cách ghép nối tiếp hay song song các mạng cơ bản này.
Ta ký hiệu các chuyển mạch bởi các chữ x,y,z,…. Nếu x ở trạng thái mở ta cho x nhận giá trị 0 và ở trạng thái đóng ta cho x nhận giá trị 1. Trong một mạng nếu hai chuyển mạch luôn cùng trạng thái thì ta ký hiệu cùng một chữ. Hai chuyển mạch có trạng thái luôn ngược nhau, nếu một chuyển mạch được ký hiệu là x thì chuyển mạch kia được ký hiệu là x'.
Mạng song song (hình 1) nhận giá trị 1 khi có ít nhất một trong hai chuyển mạch x,y nhận giá trị 1, ta ký hiệu $x \vee y$. Còn mạng nối tiếp (hình 2) nhận giá trị 1 khi cả hai chuyển mạch x,y nhận giá trị 1, ta ký hiệu $x \wedge y$.

Như vậy x',x∨y,x∧y có thể được xem như các biến nhận giá trị trong đại số Boole B2 = {0,1} (ví dụ 1.48). Bằng phương pháp này ta có thể biểu diễn một mạng bất kỳ bởi một công thức Boole và ngược lại. Chẳng hạn mạng sau tương ứng với công thức $(y \vee z) \vee (x \wedge y')$



Công thức Boole $(x \wedge z) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge y')$
biểu diễn mạng



BÀI TẬP

Bài tập trong giáo trình: bài 1.32, 1.33 trang 58

Bài tập luyện:

Bài 1: Rút gọn sau đó vẽ sơ đồ mạng của CT đại số Boole

$A = (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y' \wedge z) \vee (x' \wedge y' \wedge z)$

Bài 2: Rút gọn các công thức Boole sau:

$a) \, (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y' \wedge z) \vee (y' \vee z')$

$b) \, [(x \wedge y') \vee (y \wedge z')]' \wedge (x \wedge y)$

Bài 3: Chứng minh hai công thức Boole sau

$a) \, (x \wedge y) \vee [x \wedge (x \wedge y)'] = x$

b) $[(x \vee y) \wedge x'] \wedge [y \vee (z \wedge y')] \wedge z = (x \vee y) \wedge z$