

Алгоритмы Маркова

Алгоритмы
и алгоритмические языки

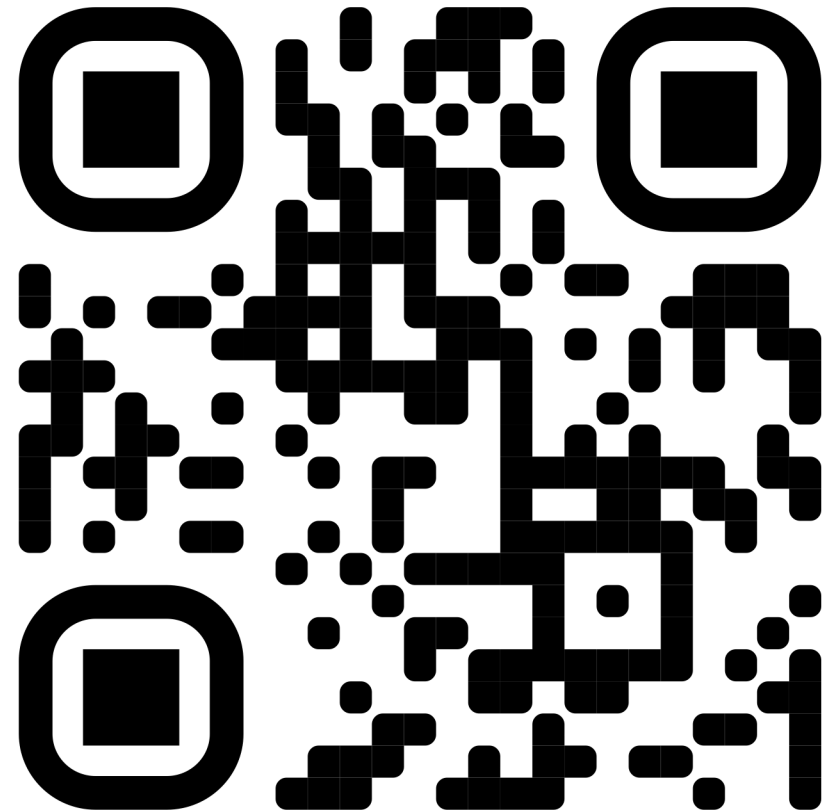
u.to/72D_Gg

Лекция 12, 23 апреля, 2021

Лектор:

Дмитрий Северов, кафедра информатики 608 КПМ

dseverov@mail.mipt.ru



Обратная связь : **u.to/7Wn7Gg**



Нормальные алгорифмы Маркова

1946 г.

Обозначения

Пусть $\sigma, \sigma', \alpha, \beta, \beta', \gamma$ - некоторые, возможно пустые, строки в алфавите V

причем $\sigma = \alpha\beta\gamma$ и $\sigma' = \alpha\beta'\gamma$

Тогда σ' есть результат подстановки β' в строку σ на место строки β .

Пример: $\sigma = \text{аааааа}, \beta = \text{аа}, \beta' = \text{b}, \sigma' = \text{ааbа}$

Нормальная подстановка

Замена самого левого вхождения строки β в строку σ на строку β' .

Пусть $V=\{a,b,\dots\}$ – основной алфавит,
 $V'=\{A, B, \dots\}$ – вспомогательный, причем $V \cap V' = \emptyset$
и $\beta, \beta' \in (V \cup V')^*$

Тогда $\beta \rightarrow \beta'$ – это простое правило,
а $\beta \rightarrow^i \beta'$ – конечное правило подстановки.

Нормальный алгоритм Маркова

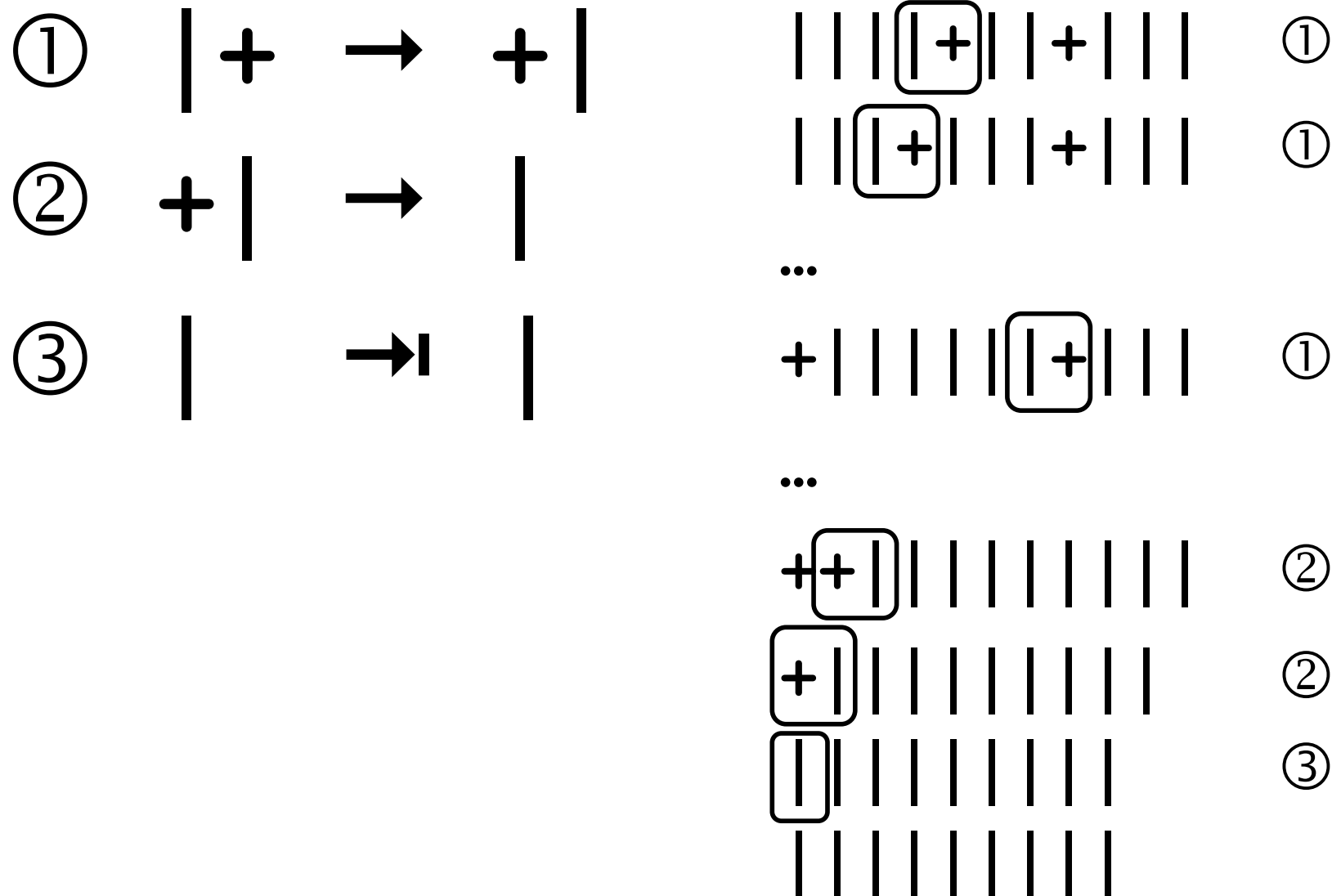
Упорядоченное множество подстановок видов

$$\beta \rightarrow \beta' \text{ и } \beta \rightarrow_i \beta'$$

Исполнитель, просматривая слово σ слева направо, пытается применить к нему правила из множества подстановок по порядку.

1. Если удастся применить правило вида $\beta \rightarrow \beta'$, то процесс повторяется со словом σ' ;
2. Если – вида $\beta \rightarrow_i \beta'$ – происходит результативный останов.
3. Если не удастся применить ни одно из правил – останов не результативный (аварийный).

Пример 1: сложение унарных чисел



Пример 2

Удалить из непустого слова в алфавите {a,b} первый символ. Пустое слово не менять.

a → |

b → |

bbb|abab → bbbbab

→ *

*a → |

*b → |

bbbabab → *|bbbabab → **bbbabab...

Пример 2

Удалить из непустого слова в алфавите {a,b} первый символ. Пустое слово не менять.

→ *

*a →
*b →
bbbabab → *bbbbabab → **bbbabab...

*a →

*b →
bbbabab → *bbbbabab → bbabab

→ *

Пример 2

Удалить из непустого слова в алфавите {a,b} первый символ. Пустое слово не менять.

***a** → **⊥**

b** → **⊥** → ** → ****** ...

→ *****

***a** → **⊥**

***b** → **⊥** **bbbabab** → ***b**bbbabab → **bbabab**

***** → **⊥** → ***** →

→ *****

Композиция алгоритмов Маркова

- Пусть заданы два алгоритма R и S .
- Задача: построить алгоритм, который будет выполнять $S(R(\sigma))$.
- Проблема: как заблокировать подстановки R после того, как завершён R и заработал S

Композиция алгоритмов Маркова

1. Удвоим алфавит, добавив для каждого символа алфавита ξ его близнеца $\underline{\xi}$
2. Добавим еще два символа α и β , которые не входили в исходный алфавит.
3. Преобразуем R в R_α заменой правил вида $\dots \rightarrow^1 \zeta$ на $\dots \rightarrow \alpha \zeta$
4. Преобразуем S в \underline{S}_β заменой
 1. символов ξ на $\underline{\xi}$
 2. правила \rightarrow^1 на $\alpha \rightarrow \alpha \beta$
 3. правил вида $\dots \rightarrow^1 \zeta$ на $\dots \rightarrow \zeta \beta$

Композиция алгоритмов Маркова

1. $\xi\alpha \rightarrow \alpha\xi$ n правил
2. $\alpha\xi \rightarrow \alpha\xi$ n правил
3. $\xi\eta \rightarrow \xi\eta$ n^2 правил
4. $\xi\beta \rightarrow \beta\xi$ n правил
5. $\beta\xi \rightarrow \beta\xi$ n правил
6. $\xi\eta \rightarrow \xi\eta$ n^2 правил
7. $\alpha\beta \rightarrow \epsilon$
8. S_β
9. R_α

Пример композиции

R: перевод двоичного в унарное

$$\textcircled{1} \quad | \quad 0 \quad \rightarrow \quad 0 \quad | \quad |$$
$$\textcircled{2} \quad 1 \rightarrow 0 \mid$$

③ 0 →
→ I

S: суммирование

④ + →

⑤ → I

101+11 ②

$$0 \mid 01+11 \quad \textcircled{2}$$
$$00 \mid \mid 1+11 \quad \textcircled{2}$$
$$00 \mid \mid 0 \mid + 11 \quad \textcircled{1}$$
$$00 \mid 0 \mid \mid \mid +11 \quad \textcircled{1}$$
$$000 \mid \mid \mid \mid +11 \quad \textcircled{2}$$
$$000 \mid \mid \mid \mid +0 \mid 1 \quad \textcircled{2}$$
$$000 \mid \mid \mid \mid +0 \mid 0 \mid \textcircled{1}$$

$$000 \mid \mid \mid \mid +00 \mid \mid \mid \quad \textcircled{3}$$

$$\dots \quad \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \quad \textcircled{4}$$

⑤

Формальная схема

$ \alpha \rightarrow \alpha $	$\underline{\pm} \rightarrow$
$+\alpha \rightarrow \alpha+$	$\alpha \rightarrow \alpha\beta$
$\alpha \rightarrow \alpha\underline{\perp}$	
$\alpha+ \rightarrow \alpha\underline{\pm}$	
$\underline{\perp}+ \rightarrow \underline{\perp}\underline{+}$	
$\underline{\perp} \rightarrow \underline{\perp}\underline{\perp}$	
$\underline{\pm} \rightarrow \underline{\pm}\underline{\perp}$	
$\underline{\pm}+ \rightarrow \underline{\pm}\underline{\pm}$	
$\underline{\perp}\beta \rightarrow \beta\underline{\perp}$	
$\beta\underline{\perp} \rightarrow \beta $	
$ \underline{\perp} \rightarrow $	
$\alpha\beta \rightarrow \lambda$	

11+1

0|1+1

0|0|+1

00|||+1

00|||+0|

0|||+0|

|||+0|

|||+|

$\alpha| | | + |$

$\alpha\underline{\perp} | | + |$

$\alpha\underline{\perp}\underline{\perp} | + |$

$\alpha\underline{\perp}\underline{\perp}\underline{\perp} + |$

$\alpha\underline{\perp}\underline{\perp}\underline{\perp} + |$

$\alpha\underline{\perp}\underline{\perp}\underline{\perp} + |$

$\alpha\underline{\perp}\underline{\perp}\underline{\perp}$

$\alpha\beta\underline{\perp}\underline{\perp}\underline{\perp}$

$\alpha\beta| \underline{\perp}\underline{\perp}\underline{\perp}$

$\alpha\beta| | \underline{\perp}\underline{\perp}$

$\alpha\beta| | | \underline{\perp}$

$\alpha\beta| | | |$

$| | | |$

Вместо
 $\underline{\lambda} \rightarrow \beta$

Алгоритм Маркова сложения двоичных чисел

- ① $\beta \underline{1} \rightarrow 1\beta$
- ② $\beta \underline{0} \rightarrow 0\beta$
- ③ $\beta \rightarrow \epsilon$

Перевод в унарную

$$|0 \rightarrow 0|| \quad \textcircled{1}$$

$$1 \rightarrow 0| \quad \textcircled{2}$$

$$0 \rightarrow \quad \textcircled{3}$$

Сложение

$$+ \rightarrow \quad \textcircled{4}$$

$$| \rightarrow \perp \quad \textcircled{\times}$$

Перевод в двоичную

$$\alpha \underline{\perp} \rightarrow \perp \alpha \quad \textcircled{5}$$

$$\alpha \perp \rightarrow \underline{1} \quad \textcircled{6}$$

$$\alpha \rightarrow \underline{0} \quad \textcircled{7}$$

$$\perp \rightarrow \alpha \perp \quad \textcircled{8}$$

$$\rightarrow \beta \quad \textcircled{9}$$

101+111 ②

Пример

0|01+111 ①

00||1+111 ②

00||0|+111 ①

00|0|||+111 ①

000|||+111 ②

000|||+0|11 ②

000|||+0|0|1 ①

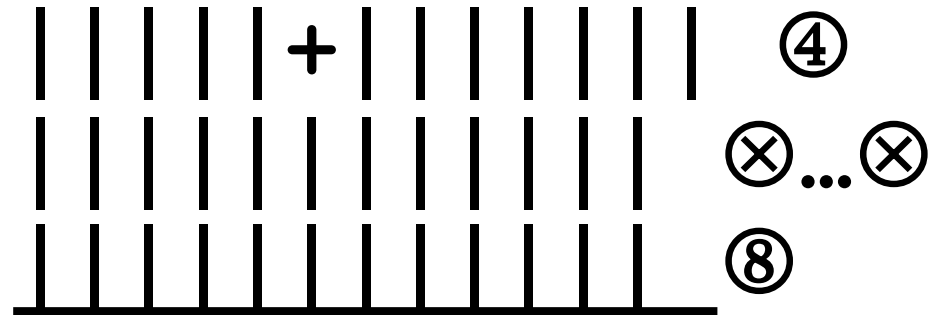
000|||+00||1 ②

000|||+00||0| ②

000|||+00|0||| ②

000|||+00|0||| ②

000|||+000||| ③...③



Пример

Figure 1 shows 12 horizontal bars, each with 10 vertical tick marks. The bars are labeled with Greek letters and numbers in circles. The labels are: Row 1: α (5); Row 2: α (5); Row 3: α (5); Row 4: α (5); Row 5: α (5); Row 6: α (5); Row 7: α (7); Row 8: 0 (8); Row 9: α 0 (5); Row 10: α 0 (5); Row 11: α 0 (5); Row 12: α 0 (7).

$$\begin{array}{lcl}
\underline{\underline{1100}} & \textcircled{8} \\
\alpha \underline{\underline{1100}} & \textcircled{5} \\
\underline{1\alpha00} & \textcircled{6} \\
\underline{1100} & \textcircled{8} \\
\alpha \underline{1100} & \textcircled{6} \\
\underline{1100} & \textcircled{9} \\
\beta \underline{1100} & \textcircled{1} \\
1\beta \underline{100} & \textcircled{1} \\
11\beta \underline{00} & \textcircled{2} \\
110\beta \underline{0} & \textcircled{2} \\
1100\beta & \textcircled{3} \\
1100 &
\end{array}$$

Проблема самоприменимости

Невозможно построить НАМ, который для любого другого НАМ выносил бы решение о том, произойдет или нет останов этого НАМ при его работе над данными, представляющими описание этого НАМ.

Проблема самоприменимости

Самоприменимый

$$\textcircled{1} \ a \rightarrow^I b$$

поскольку

$$a \rightarrow^I b \textcircled{1}$$

$$b \rightarrow^I b$$

Несамоприменимый

$$\textcircled{1} \ a \rightarrow ab$$

поскольку

$$a \rightarrow ab \textcircled{1}$$

$$ab \rightarrow ab \textcircled{1}$$

$$abb \rightarrow ab \textcircled{1}$$

...