

Нейросеть для ценообразования опционов и ее сравнение с классическими методами

Харинаев Артём Эдуардович
научный руководитель - к.ф.-м.н. А.Н. Дойников



Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра математической статистики
Лаборатория статистического анализа

2023 г.

- Опционы - это финансовые инструменты, дающие право, но не обязательство, купить (call option) или продать (put option) базовый актив по заранее установленной цене и в определенное время
- Используются для хеджирования (защиты вложений от рисков), спекуляции и арбитража
- Для такого использования инвесторам необходимо точное определение цены опционов

Предположения модели

- геометрическое броуновское движение цены базового актива
- отсутствие транзакционных издержек
- риск-нейтральность инвесторов

СДУ Блэка-Шоулза

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \quad (1)$$

где

- $S(t)$ - цена базового актива
- μ - средняя доходность актива
- σ - волатильность акции
- $W(t)$ - винеровский процесс

Теоретическая цена на европейские опционы определяется по формулам

$$C_{call} = S_t \mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rt_{ex}} \mathcal{N}(d_2), C_{put} = Ke^{-rt_{ex}} \mathcal{N}(-d_2) - S_t \mathcal{N}(-d_1) \quad (2)$$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)t_{ex}}{\sigma\sqrt{t_{ex}}}, d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t_{ex}} \quad (3)$$

Обозначения:

- C_{call} , C_{put} - цены европейских call и put опционов
- S_t - текущая цена базового актива
- K - цена исполнения опциона (страйк)
- $\mathcal{N}(x)$ - функция распределения стандартного нормального распределения
- r - безрисковая процентная ставка
- t_{ex} - время до даты исполнения (в годах)
- σ - **волатильность** цены базового актива

Рассчитав волатильности, соответствующие рыночным данным, численными методами:

$$BS^{-1}(C_{mrkt}, S_t, K, t_{ex}, r) \xrightarrow{\text{numerical}} \sigma \quad (4)$$

Получаем, что волатильность зависит от соотношения цены базового актива к цене исполнения

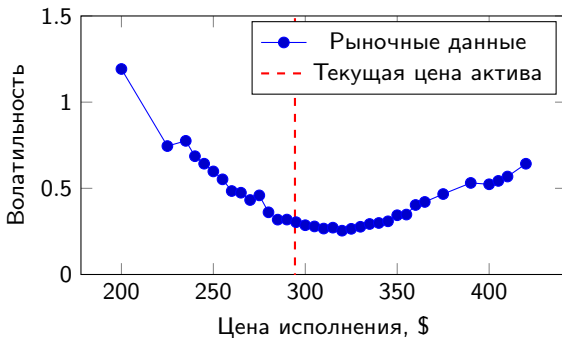


Рис. 1: Улыбка волатильности

SABR - Stochastic Alpha, Beta, Rho

Вводится стохастическая волатильность:

$$dS(t) = \alpha(t)S^{\beta}(t)dW_1(t) \quad (5)$$

$$d\alpha(t) = \nu\alpha(t)dW_2(t) \quad (6)$$

$$dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt \quad (7)$$

где

- α - волатильность цены базового актива
- β - чувствительность волатильности к изменениям цены базового актива
- ρ - коэффициент корреляции винеровских процессов $W_1(t)$, $W_2(t)$
- ν - волатильность волатильности



P. S. Hagan, D. Kumar, A. S. Lesniewski and D. E. Woodward, Managing smile risk, Wilmott Magazine, no. 1 (2002): 84-108.

Ценообразование подчиняется формулам Блэка-Шоулза (2) - (3), где предполагаемая волатильность $\sigma_B(S_t, K)$ вычисляется по формуле

$$\sigma_B(S_t, K) = \frac{\alpha}{(S_t K)^{(1-\beta)/2} \cdot \left(1 + \frac{(1-\beta)^2}{24} \log^2 \frac{S_t}{K} + \frac{(1-\beta)^4}{1920} \log^4 \frac{S_t}{K} + \dots\right)} \cdot \left(\frac{z}{x(z)}\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{(1-\beta)^2 \alpha^2}{24(S_t K)^{1-\beta}} + \frac{\rho \beta \nu \alpha}{4(S_t K)^{(1-\beta)/2}} + \frac{2-3\rho^2}{24} \nu^2\right) t_{ex} + \dots\right) \quad (8)$$

где

$$z = \frac{\nu}{\alpha} (S_t K)^{(1-\beta)/2} \log \frac{S_t}{K} \quad (9)$$

$$x(z) = \log \left(\frac{\sqrt{1 - 2\rho z + z^2} + z - \rho}{1 - \rho} \right) \quad (10)$$

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sqrt{v(t)}S(t)dW_1(t), \quad (11)$$

$$dv(t) = k[\theta - v(t)]dt + \sigma\sqrt{v(t)}dW_2(t) \quad (12)$$

где

- θ - долгосрочная дисперсия цен
- k - скорость возврата к долгосрочной дисперсии цен
- σ - волатильность волатильности
- ρ - коэффициент корреляции винеровских процессов $W_1(t)$, $W_2(t)$
- v_0 - начальная дисперсия цены



Steven L. Heston, (1993), A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options, Review of Financial Studies, 6, issue 2, p. 327-43.

Цена европейского опциона в модели Heston определяется следующей формулой

$$C(S, v, t) = \frac{1}{2}S_t + \frac{e^{-rt_{ex}}}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{K^{-i\phi} f(i\phi + 1)}{i\phi} \right] d\phi - \\ - Ke^{-rt_{ex}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{K^{-i\phi} f(i\phi)}{i\phi} \right] d\phi \right) \quad (13)$$

где $f(i\phi)$ - характеристическая функция модели Хестона, удовлетворяющая условиям

$$f(i\phi) = \exp [A(\tau) + C(\tau)V_t + i\phi X_t] \quad (14)$$

$$A(\tau) = ri\phi\tau + \frac{k\theta}{\sigma^2} \left[-(\rho\sigma i\phi - k - M)\tau - 2 \ln \frac{1 - Ne^{M\tau}}{1 - N} \right] \quad (15)$$

$$C(\tau) = \frac{(e^{M\tau} - 1)(\rho\sigma i\phi - k - M)}{\sigma^2(1 - Ne^{M\tau})} \quad (16)$$

$$M = \sqrt{(\rho\sigma i\phi - k)^2 + \sigma^2(i\phi + \phi^2)} \quad (17)$$

$$N = \frac{\rho\sigma i\phi - k - M}{\rho\sigma i\phi - k + M} \quad (18)$$

В модели Variance-Gamma цена базового актива определяется следующим образом

$$S(t) = S_0 \exp [(\mu + \omega)t + X(t, \sigma, \nu, \theta)] \quad (19)$$

где S_0 - начальная цена актива, $X(t, \sigma, \nu, \theta)$ - variance-gamma процесс с параметром дрейфа θ и коэффициентом отклонения ν , μ - ожидаемый уровень прибыли, σ - волатильность в моменте

$$\omega = -\frac{1}{t} \ln [\phi_X(u, t)|_{u=1/i}] \quad (20)$$

$\phi_X(u, t)$ - характеристическая функция variance-gamma процесса:

$$\phi_X(u, t) = \mathbb{E}\{iuX(t)\} = \left(\frac{1}{1 - i\theta\nu u + \sigma^2 u^2 \nu / 2} \right)^{\frac{t}{\nu}} \quad (21)$$



Madan, Dilip B., and Eugene Seneta. The Variance Gamma (V.G.) Model for Share Market Returns. The Journal of Business 63, no. 4 (1990): 511–24.



Dilip B. Madan, Peter P. Carr, Eric C. Chang. The Variance Gamma Process and Option Pricing (1998), Review of Finance, Volume 2, Issue 1, 1998, Pages 79–105

Цена европейского опциона в модели Variance-Gamma определяется следующим образом

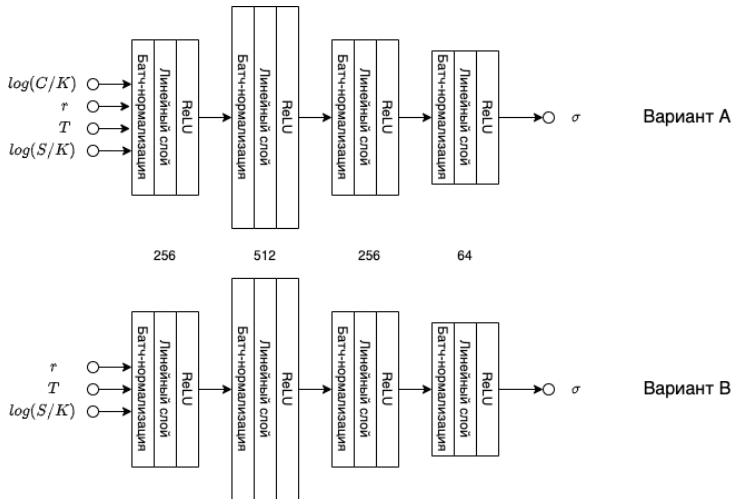
$$C_{VG} = S_t \Psi\left(d \sqrt{\frac{1-c_1}{\nu}}, (\alpha + s) \sqrt{\frac{\nu}{1-c_1}}, \frac{t}{\nu}\right) - Ke^{-rt} \Psi\left(d \sqrt{\frac{1-c_2}{\nu}}, \alpha s \sqrt{\frac{\nu}{1-c_2}}, \frac{t}{\nu}\right) \quad (22)$$

$$d = \frac{1}{d} \left[\ln \frac{S_t}{K} + rt + \frac{t}{\nu} \ln \frac{1-c_1}{1-c_2} \right], \quad (23)$$

$$c_1 = \nu(\alpha + s)^2/2, c_2 = \nu\alpha^2/2, \alpha = -\frac{\theta s}{\sigma^2} \quad (24)$$

$$s = \frac{\sigma}{\sqrt{1 + \left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^2 \frac{\nu}{2}}} \quad (25)$$

Ψ - модифицированная функция Бесселя второго рода



Качество моделей сравнивается на данных по торговле опционами на акции компании Microsoft.

contractSymbol	strike	bid	ask	volume	impliedVolatility
MSFT220318C00282500	282.5	11.6	12.75	737.0	0.4335994140625
MSFT220318C00285000	285.0	9.1	10.35	3017.0	0.3845276391601562
MSFT220318C00287500	287.5	7.35	8.2	4203.0	0.36133451171875
MSFT220318C00290000	290.0	5.7	6.15	10908.0	0.33399103515625
MSFT220318C00292500	292.5	4.0	4.35	7367.0	0.3127510131835937
MSFT220318C00295000	295.0	2.41	2.77	13018.0	0.2876047802734374
MSFT220318C00297500	297.5	1.35	1.52	4267.0	0.26197027099609377
MSFT220318C00300000	300.0	0.73	0.75	17049.0	0.24805439453125
MSFT220318C00302500	302.5	0.32	0.36	1589.0	0.2461012890625
MSFT220318C00305000	305.0	0.15	0.17	2522.0	0.249030947265625

Таблица 1: Пример данных

Модели SABR, Heston и Variance-Gamma обладают параметрами, которые необходимо подобрать, минимизируя сумму квадратов ошибок восстановления поверхности волатильности.

$$RSS(t, K) = \sum_{i=1}^n (\sigma_{mrkt}(t, K) - \sigma_{model_p}(t, K))^2 \rightarrow \min_p \quad (26)$$

Параметры

- SABR - $\alpha \in (0, +\infty), \beta \in [0, 1], \rho \in [-1, 1], \nu \in (0, +\infty)$
- Heston - $\theta \in (0, +\infty), \kappa \in (0, +\infty), \sigma \in (0, +\infty), \rho \in [-1, 1], v_0 \in (0, +\infty)$
- Variance-Gamma - $\theta \in (-\infty, +\infty), \nu \in (0, +\infty), \sigma \in (0, +\infty)$

Минимизация осуществляется с помощью алгоритма L-BFGS-B (Limited-memory Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno algorithm with boundaries)

Для обучения модели используется более широкий набор данных - опционы на акции компаний S&P 500.

Параметры слоев p подбираются итеративно так, чтобы минимизировать функцию потерь (26). Используется модификация стохастического градиентного спуска - алгоритм Adam, использующий адаптивный темп обучения.

$$p_{i+1} := p_i - \eta_{i+1} \nabla_{p_i} RSS, i = 0, 1, 2... \quad (27)$$

η_i - адаптивный (изменяемый) темп обучения.

Обучение ведется на протяжении 100 эпох, где одна эпоха - полный проход всей обучающей выборке.

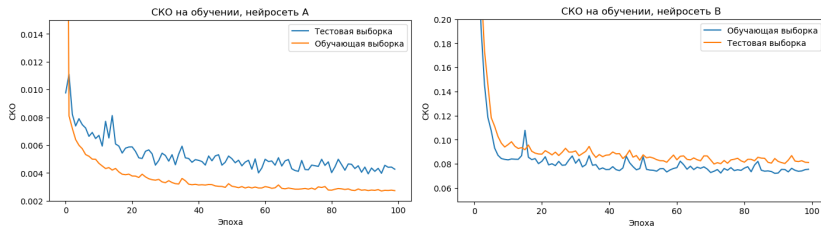
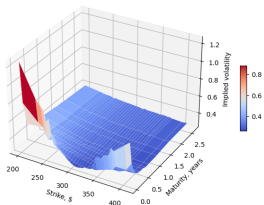


Рис. 3: Динамика функции потерь на обучении нейросетей

Сравнение моделей

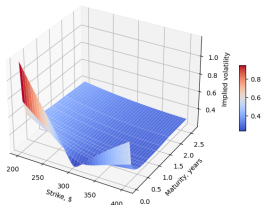
Поверхность волатильности

Market implied volatility, call option



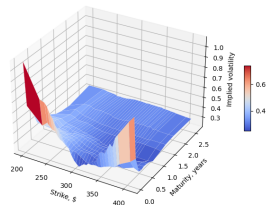
(a) Рыночные данные

Implied volatility by SABR model, call option



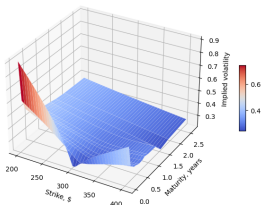
(b) Модель SABR

Implied volatility by Neural Network A, call option



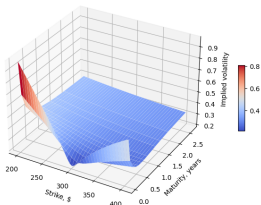
(c) Нейросеть A

Implied volatility by VG model, call option



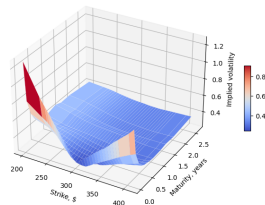
(a) Модель VG

Implied volatility by Heston model, call option



(b) Модель Heston

Implied volatility by Neural Network B, call option

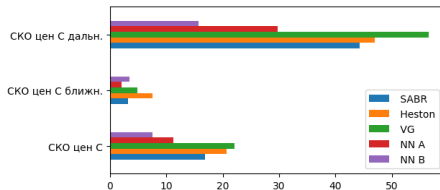
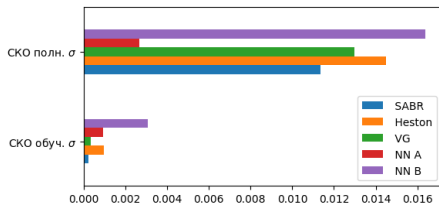


(c) Нейросеть B

Сравнение моделей

Метрики

Model	SABR	Heston	VG	NN A	NN B
СКО обуч. σ	0.000211	0.000975	0.000338	0.000922	0.003077
СКО полн. σ	0.011350	0.014497	0.012986	0.002667	0.016381
СКО цен C	16.87	20.67	22.09	11.28	7.53
СКО цен C ближн.	3.16	7.50	4.88	2.08	3.45
СКО цен C дальн.	44.30	46.99	56.50	29.70	15.70
Время калибр., с	0.09	15.40	16.60	-	-
Время примен., мс	0.37	27.90	144.00	4.52	4.66



В работе:

- реализован и применен на реальных данных программный код моделей SABR, Heston и Variance-Gamma
- предложен и реализован метод моделирования улыбки волатильности с помощью нейросетей
- достигнуто сравнимое качество восстановления поверхности волатильности с классическими методами при следующих преимуществах нейросетей:
 - отсутствие необходимости переобучения нейросетей при изменении параметров опционов
 - возможность быстрых расчетов на графических процессорах (GPU)



F. Black, M. Scholes, The Pricing of Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy 81, no. 3 (1973): 637–54.



P. S. Hagan, D. Kumar, A. S. Lesniewski and D. E. Woodward, Managing smile risk, Wilmott Magazine, no. 1 (2002): 84–108.



Steven L. Heston, (1993), A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options, Review of Financial Studies, 6, issue 2, p. 327–43.



Madan, Dilip B., and Eugene Seneta. The Variance Gamma (V.G.) Model for Share Market Returns. The Journal of Business 63, no. 4 (1990): 511–24.



Dilip B. Madan, Peter P. Carr, Eric C. Chang. The Variance Gamma Process and Option Pricing (1998), Review of Finance, Volume 2, Issue 1, 1998, Pages 79–105



Elton A. Daal, Dilip B. Madan. An Empirical Examination of the Variance-Gamma Model for Foreign Currency Options, The Journal of Business, vol. 78, no. 6, 2005, pp. 2121–52. JSTOR,



Ran Aroussi, yfinance Python package, <https://pypi.org/project/yfinance/>



R. H. Byrd, P. Lu and J. Nocedal. A Limited Memory Algorithm for Bound Constrained Optimization, (1995), SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing , 16, 5, pp. 1190–1208.



Kingma, D. P., Ba, J. 2014. Adam: A Method for Stochastic Optimization. arXiv e-prints. doi:10.48550/arXiv.1412.6980