دانشکده‌ی مهندسی برق

بهینه‌سازی محدب ۱ — مدرس: دکتر یاسایی

تمرین کامپیوتری سری سوم

نام و نام‌خانوادگی : خشایار غفاری — شماره دانشجویی: ۹۸۱۰۰۲۱۵

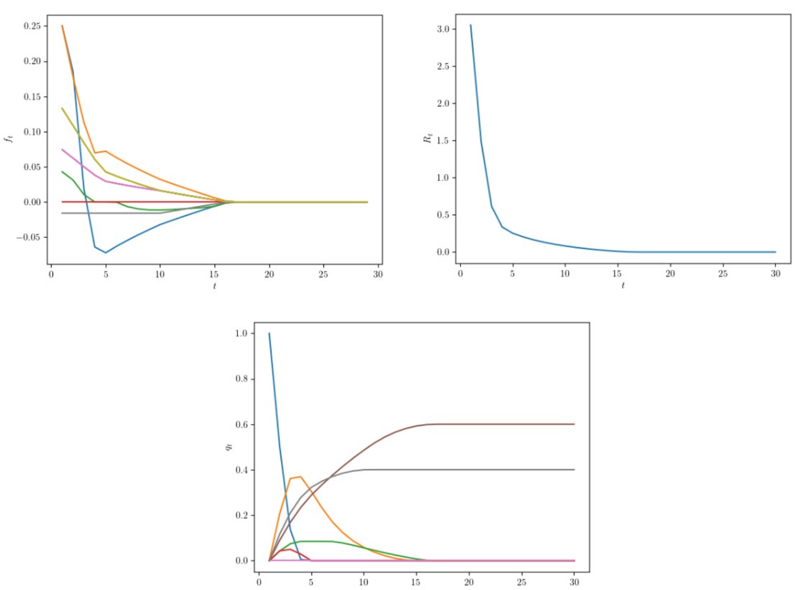
پرسش ۱ برنامه ریزی برای تخلیه ی بهینه

مساله مورد نظر به شکل زیر است:

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{t=1}^{T}(r^T q_t + s^T q_t^2) + \sum_{t=1}^{T-1}(\tilde{r}^T |f_t| + \tilde{s}^T f_t^2) \\
\text{s.t} \quad & q_{t+1} = A f_t + q_t, \quad t = 1, ..., T-1 \\
& 0 \preceq q_t \preceq Q, \ t = 2, ..., T \\
& |f_t| \preceq F, \ t = 1, ..., T-1
\end{aligned}
\tag{۱}
$$

که مساله بالا به وضوح یک مساله محدب است.

با اجرای برنامه به دست می‌آوریم تخلیه کامل به طور تقریبی در زمان ۱۷ انجام می‌شود و مجموع ریسک کل برابر ۵۸.۶ می‌شود.



پرسش ۲ طراحی مدار بهینه

اگر از توابع P, D, A لگاریتم بگیریم آنگاه توابعی محدب بر حسب $x = \log(w)$ خواهند شد. اگر داشته باشیم $x = \sum lambda_i x_i$ طبق نامساوی ینسن داریم:

$$\log P(x) = \log P(\sum \lambda_i x_i) \leq \sum \lambda_i \log P(x_i)$$

بنابراین اگر

$$\sum \lambda_i P(x_i) \leq P_{\text{spec}}$$

در اینصورت

$$\log P(x) \leq P_{\text{spec}}$$

.

پس اگر مساله زیر نقطه ای شدنی داشته باشد، این نقطه برای مساله اصلی نیز شدنی خواهد بود.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & 0 \\ \text{s.t} \quad & \sum \lambda_i \log P(x_i) \leq P_{\text{spec}} \\ & \sum \lambda_i \log D(x_i) \leq D_{\text{spec}} \\ & \sum \lambda_i \log A(x_i) \leq A_{\text{spec}} \\ & \lambda \leq 0, \sum \lambda_i = 0 \end{aligned} \tag{۲}$$

پرسش ۳ پر کردن ماتریس کوواریانس

آ) کافیست ماتریس های S, T را برابر با J_2 قرار دهیم. در اینصورت خواهیم داشت:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

خواهد شد که چون یک ماتریس مثبت معین نیست، نمی تواند ماتریس کوواریانس باشد.

ب)

به وضوح مساله داده شده در سوال معادل است با:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \|C^{(1)} - S\|_F^2 + \|C^{(2)} - T\|_F^2 + \|C_{13}\|_F^2 \\ \text{s.t} \quad & C \succeq 0 \end{aligned}$$

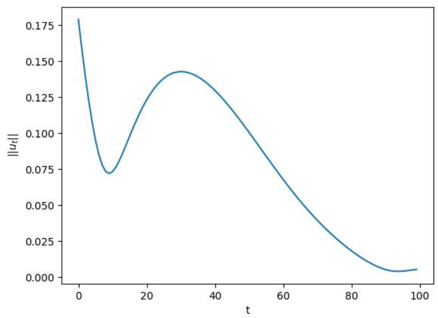
مساله فوق در صورتی که $C_{\min \succeq 0}$ باشد در خود این ماتریس مقدار بهینه صفر اختیار می کند و در صورتی که $C_{\min}$ مثبت معین نباشد، خود این ماتریس نقطه شدنی نیست و در نتیجه جواب بهینه برابر با این ماتریس نخواهد بود.

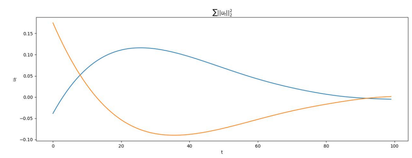
پ) با اجرا برنامه روی مثال نقض قسمت (الف) ، برنامه ماتریس زیر را خروجی می دهد.

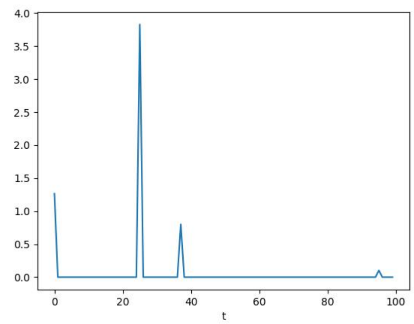
$$C = \begin{bmatrix} 1.09855076 & 0.84973176 & 0.19710124 \\ 0.84973176 & 1.11456302 & 0.84973176 \\ 0.19710124 & 0.84973176 & 1.09855076 \end{bmatrix}$$

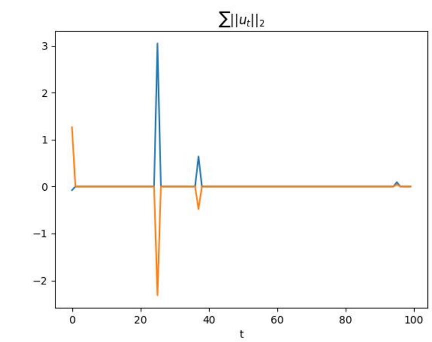
که به راحتی می توان مثبت معین بودن آنرا چک کرد و بنابراین این جواب قابل قبول است.

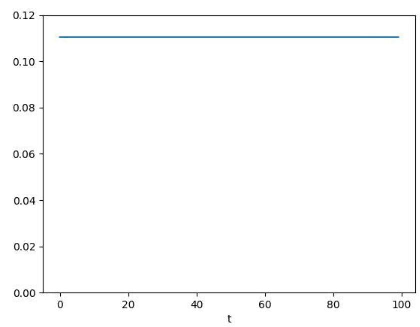
پرسش ۴ کنترل به کمک توابع هدف مختلف

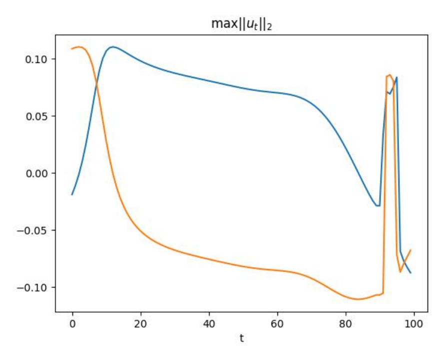


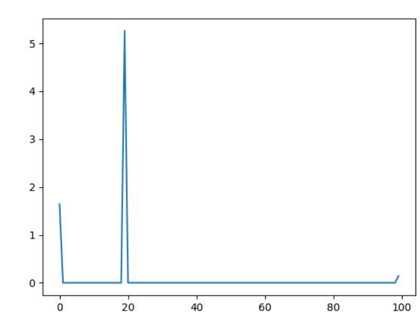


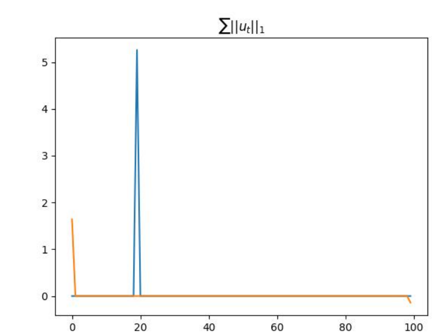












تابع اول مقادیر کوچیکی را اختیار می‌کند اما تنک نیست و همان چیزی است که در روش کمترین مربعات انتظار داشتیم.
مقادیر تابع دوم به شدت تنک هستند و جاهایی که صفر نیست، هر دو مولفه‌اش ناصفر است.
نرم‑۲ این تابع همواره ثابت است اما مولفه های آن در زمان تغییر می کنند.
مقادیر تابع چهارم نیز کاملا تنک هستند اما مولفه‌هایش جاهای متفاوتی ناصفر می‌شوند.

پرسش ۵ بهینه سازی پورتفولیو

آ)

ابتدا یک متغییر اضافی t در نظر می گیریم تا آنرا جایگزین $\max w^T \Sigma w$ کنیم. بدین ترتیب مساله به فرم زیر در می آید:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & -\mu^T w + \gamma t \\ \text{s.t} \quad & w^T \Sigma^{(k)} w \leq t \\ & 1^T w = 1 \end{aligned}$$

حال با نوشتن تابع لاگرانژ و بررسی شرط صفر بودن مشتق خواهیم داشت:

$$\gamma - \sum \lambda_i = 0$$

و از آنجایی که $\lambda_i > 0$ باید باشد، مقادیر λ_i
همان مقادیر خواسته شده سوال هستند.

ب)

gamma values: [0.2968565495913212, 1.5603731707529868e-09, 1.5442470990397043e-09, 0.5165245752063776, 0.1866188726387103]
risk values: [0.12259298831823384, 0.08280173181460558, 0.08195361970871232, 0.12259298822144848, 0.12259298811256869]
worst case risk: 0.12259298817865426 weights: [0.44250383 0.74192778 -0.16287921 1.3888093 1.5086756 -1.54900041 -0.73946211 -0.54107826 -0.15949762 0.0700011]

```
gamma values: [0.2968565495913212, 1.5603731707529868e-09, 1.5442470990397043e-09,
0.5165245752063776, 0.1866188726387103]
risk values: [0.12259298831823384, 0.08280173181460558, 0.08195361970871232,
0.12259298822144848, 0.12259298811256869]
worst case risk: 0.12259298817865426
```