

تمرین کامپیوتری ۳

مدرس : دکتر آرش امینی

در این تمرین قصد داریم که عملیات آنالیز و سنتز گراف به روش هرمی معرفی شده در مقاله‌ی ضمیمه‌شده را انجام دهیم.

توجه کنید که بایستی توابع را به صورت دستی پیاده‌سازی کنید و در صورت استفاده از توابع GSPBOX نمره‌ای به شما تعلق نخواهد گرفت (البته برای رسم گراف و انجام عملیات ساده می‌توانید همچنان از این تولباکس استفاده کنید).

بخش اول : پیاده‌سازی توابع مورد نیاز

۱. روش $\text{polarity of the largest eigenvector}$ برای انتخاب گره مناسب برای downsampling را به صورت خلاصه توضیح دهید. سپس تابعی به نام MyVertexSelection تعریف کنید که با دریافت یک گراف در ورودی، اندیس گره‌هایی را که این الگوریتم انتخاب می‌کند را برگرداند.

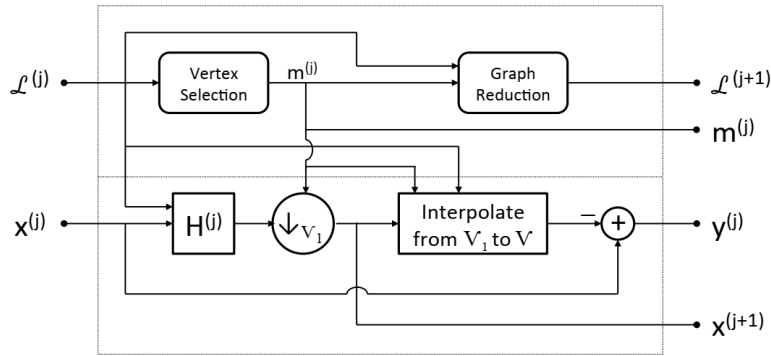
۲. عملیات $\text{sparsified Kron reduction}$ را به صورت خلاصه توضیح دهید. سپس تابعی به نام MySKReduction تعریف کنید که با دریافت گراف در ورودی و شماره اندیس‌های مناسب $v1$ ، گراف را با روش گفته شده کاهش داده و گراف کاهش‌یافته را بازگرداند (می‌توانید یک struct برگردانید یا ماتریس لاپلاسین گراف را).

۳. تابعی به نام MyHfilter تعریف کنید که یک سیگنال گرافی و گراف متناظر را در ورودی دریافت و سیگنال را با فیلتر H فیلتر کرده و سیگنال فیلترشده را بازگرداند. فیلتر H را یک فیلتر lowpass با پاسخ فرکانسی
$$h(\lambda) = \frac{1}{1+\lambda}$$
 در نظر بگیرید.

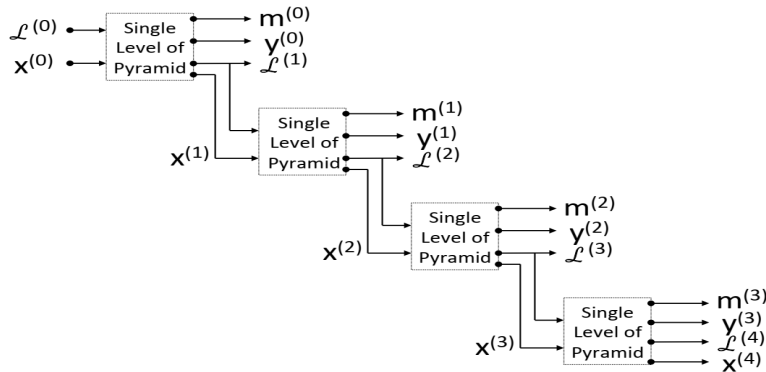
۴. تابعی به نام MyDS تعریف کنید که یک سیگنال گرافی و مجموعه‌ی گره‌های $v1$ مدنظر در downsampling را دریافت کرده و سیگنال downsample شده را بازگرداند.

۵. تابعی به نام MyInterpolate تعریف کنید که یک سیگنال downsample شده، اندیس گره‌های $v1$ و گراف موردنظر را دریافت کند و سپس سیگنال را بر روی کل گراف Interpolate کند. یک flag نیز در ورودی تعریف کنید که در صورت صفر بودن از روش Interpolate توضیح داده شده در بخش V-C مقاله، و در صورت یک بودن از روش بازسازی معرفی شده در جلسه ۱۳ام کلاس استفاده کند.

۶. به کمک توابعی که تعریف کرده‌اید، تابعی با نام MyAnalysis بنویسید که مطابق بلوک دیاگرام زیر، یک گراف و سیگنال گرافی تعریف‌شده بر روی آن را دریافت کرده و در خروجی‌اش گراف کاهش‌یافته، اندیس گره‌های مناسب برای downsampling بدست آمده، سیگنال کاهش‌یافته و خطای Interpolate را بازگرداند.



۷. تابعی با نام MyPyramidAnalysis تعریف کنید که در ورودی خود یک گراف، سیگنال تعریف شده بر روی آن و عدد N را دریافت کرده و سپس بر روی گراف عملیات Multiresolution را مطابق با بلوک دیاگرام زیر اعمال کند. تابع شما بایستی در خروجی خود، برای هریک از مجموعه (ماتریس لاپلاسین) گراف‌های کاهش یافته $(L^{(j)}, y^{(j)})$ ، مجموعه سیگنال‌های خطای Interpolate $(y^{(j)}, x^{(j)})$ ، مجموعه اندیس‌های انتخاب شده از گراف مرحله قبل $(m^{(j)}, x^{(j)})$ و مجموعه سیگنال‌های downsample شده $(x^{(j)}, x^{(j)})$ یک cell array با سایز N بازگرداند.



۸. تابعی با نام MySynthesis تعریف کنید که عملیات سنتز یک مرحله ای را از روی $x^{(j+1)}$ و $L^{(j)}$ و $y^{(j)}$ و $m^{(j)}$ انجام داده و در خروجی، $x^{(j)}$ را بازگرداند.

۹. تابعی با نام MyPyramidSynthesis تعریف کنید که عملیات سنتز N مرحله‌ای را انجام دهد. تابع شما بایستی cell array های گراف‌ها، خطاها، اندیس‌های مناسب را به همراه آخرین سیگنال کاهش یافته $(x^{(N+1)})$ دریافت کرده و گراف اولیه و سیگنال اولیه بر روی آن را بازسازی کند.

بخش دوم: اعمال توابع آنالیز و سنتز بر روی دیتاست

۱۰. فایل Data_city.csv که شامل مختصات جغرافیایی شهرهای ایران است را بخوانید. به کمک تابع getDistance.m که در اختیارتان قرار داده شده است، فاصله ی دو به دوی شهرهای مراکز استان‌ها را (که با 'primary' و 'admin' در ستون هفتم مشخص شده اند) بیابید. با روش مناسب این فواصل را به بازه ی بین صفر و یک برده و گراف متناظر بین این شهرها را تشکیل دهید. توجه کنید که هرچه دو شهر به یکدیگر نزدیک‌تر باشند وزن یال بین آن‌ها بایستی به یک نزدیک‌تر باشد و برعکس. گراف بدست آمده را رسم کنید. برای مختصات گره‌ها در گراف می‌توانید از مختصات گراف sensor استفاده کنید و یا می‌توانید مختصات هر شهر را در صفحه ی X-Y بدست آورده و مطابق با نقشه رسم کنید.

۱۱. سیگنال دمای شهرهای بخش قبل را از ستون Temp دیتاست خوانده و بر روی گراف آن را تعریف کنید. بر روی این سیگنال عملیات MyPyramidAnalysis را با $N = 3$ مرحله اعمال کنید و سیگنال‌های کاهش یافته و خطای آن‌ها را بر روی گراف‌های کاهش یافته نمایش دهید. همچنین مجموع توان دوی خطای هر مرحله را بر روی کل گراف محاسبه کرده و برای هر مرحله از کاهش گزارش کنید. میانگین این سه خطا را در دو حالت

استفاده از دو روش Interpolate (ذکر شده در قسمت ۵ بخش ۱) مقایسه کرده و بیان کنید کدام روش بهتر عمل می‌کند.

۱۲. حال به کمک خروجی‌های بخش قبل و به کمک آخرین سیگنال کاهش یافته، با استفاده از تابع MyPyramidSynthesis، سیگنال اولیه را بازسازی و با سیگنال داده‌شده مقایسه کرده و از صحت عملکرد آنالیز و سنتز توابع خود اطمینان حاصل کنید. همچنین هر دو سیگنال اولیه و بازسازی شده را بر روی گراف نمایش دهید.

۱۳. فرض کنید از سیگنال مرحله‌ی آخر آنالیز به عنوان feature های سیگنال اولیه استفاده کنیم. در صورتی که این feature ها را انتقال دهیم اما در حین انتقال بر روی آن نویز سفید گوسی با $SNR = 5dB$ اضافه شود، سیگنال سنتز شده نسبت به سیگنال اولیه چقدر خطا خواهد داشت؟ خطا را به صورت MSE محاسبه کنید.

بخش سوم : بررسی معادله‌ی انتشار

۱۴. با فرض سیگنال بالا به عنوان دما در روز اول ماه و با فرض ثابت انتشار به صورت $c = 0.01$ ، دمای این شهرها را در ۵ روز متوالی و همچنین در زمان بینهایت بدست آورده و بر روی گراف نمایش دهید. هر روز را معادل با یک واحد زمانی در نظر بگیرید. همچنین ۶ نمودار مستطیلی برای هر روز و نیز [روز] بینهایت رسم کنید که در هر نمودار دمای ۳۱ شهر نمایش داده شده باشد.