

# INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

MARIA CRISTINA RIFF



UNIVERSIDAD TECNICA  
FEDERICO SANTA MARIA

DEPARTAMENTO  
DE INFORMÁTICA

# Índice general

<b>1. Teoría de Decisiones</b>	<b>7</b>
1.1. Introducción . . . . .	7
1.2. Toma de Decisiones . . . . .	8
1.2.1. Certeza . . . . .	8
1.2.2. Incertidumbre . . . . .	8
1.2.3. Riesgo . . . . .	10
1.2.4. Árboles de decisión . . . . .	13
1.3. Ejercicios Propuestos . . . . .	21
<b>2. Decisiones con Múltiples Objetivos</b>	<b>25</b>
2.1. AHP: Analytic Hierarchy Process . . . . .	25
2.2. Ejemplo: Resolución mediante Software Expert Choice . . . . .	29
<b>3. Problemas con Múltiples Objetivos</b>	<b>41</b>
3.1. Optimalidad de Pareto . . . . .	41
<b>4. Teoría de Juegos</b>	<b>43</b>
4.1. Juego de 2 Personas, Suma cero: Puntos de Equilibrio . . . . .	43
4.2. Juego de 2 Personas, Suma constante . . . . .	44
4.3. Juegos de 2 Personas sin Punto de Equilibrio . . . . .	45
4.4. Juegos de 2 Personas con Suma no Constante: Dilema del Prisionero	48
4.4.1. Aplicaciones del Dilema del Prisionero . . . . .	49
<b>5. Teoría de Colas</b>	<b>51</b>
5.1. Estructura de los Sistemas de Colas . . . . .	51
5.2. Clasificación de los Sistemas de Colas . . . . .	53
5.3. Proceso de Entrada . . . . .	53
5.3.1. Llegadas . . . . .	54
5.3.2. Tiempo entre llegadas . . . . .	54
5.3.3. Tiempo Acumulado . . . . .	55
5.4. Proceso de Salida . . . . .	55
5.4.1. Tiempo de Servicio . . . . .	55
5.4.2. Número de Unidades Servidas durante el tiempo $t$ . . . . .	55
5.5. Estado Estacionario . . . . .	55

5.6.	Sistemas con una sola Cola, Población Infinita: Estadísticas en Estado Estacionario . . . . .	56
5.7.	Sistemas con Múltiples Servidores . . . . .	56
5.8.	Colas con Prioridades . . . . .	57
5.8.1.	Fórmulas Matemáticas . . . . .	57
5.9.	Colas con Restricciones . . . . .	60
5.9.1.	Sistemas Poisson Exponencial con pocas llamadas (llegadas)	60
5.9.2.	Propiedades de un sistema con un sólo canal . . . . .	61
5.9.3.	Sistemas Poisson Exponencial con un sólo canal con cola truncada . . . . .	62
5.10.	Ejercicios Propuestos . . . . .	63
<b>6.</b>	<b>Modelos de Redes de Colas</b>	<b>65</b>
6.1.	Tipos de Redes de Colas . . . . .	65
6.1.1.	Redes Abiertas . . . . .	65
6.1.2.	Redes Cerradas . . . . .	67
6.1.3.	Redes Multiclases . . . . .	67
6.1.4.	Redes de colas con capacidad limitada . . . . .	69
6.1.5.	Redes Abiertas con restricciones de Población . . . . .	69
6.1.6.	Ejemplos de Modelos de Colas . . . . .	71
<b>7.</b>	<b>Arboles de Clasificación</b>	<b>77</b>
7.1.	Introducción . . . . .	77
7.1.1.	Algoritmo Crear-Arbol-de-Clasificación . . . . .	78
7.1.2.	Partición de los nodos . . . . .	78
7.1.3.	Función de impureza $f$ . . . . .	78
7.1.4.	Declaración de un nodo terminal . . . . .	78
7.1.5.	¿Cómo saber qué tan bueno es este árbol? . . . . .	79
7.2.	Ejemplo: Resolución mediante CART y C4.5 . . . . .	79
7.2.1.	CART . . . . .	79
7.2.2.	See5 . . . . .	80
7.2.3.	Caso de Prueba: Nacionalidad . . . . .	81
<b>8.</b>	<b>Teoría de Inventario Probabilista</b>	<b>89</b>
8.1.	Repaso . . . . .	89
8.1.1.	Modelos de Inventario . . . . .	89
8.1.2.	Modelo con Ordenes Pendientes. . . . .	91
8.2.	EOQ con demanda incierta . . . . .	93
8.2.1.	Propiedades: . . . . .	95
<b>9.</b>	<b>Modelos de Regresión</b>	<b>97</b>
9.1.	Repaso . . . . .	97
9.1.1.	Estimación de Parámetros . . . . .	97
9.1.2.	Distribuciones Importantes . . . . .	99
9.1.3.	Ejemplos: . . . . .	99
9.1.4.	Décimas de Hipótesis . . . . .	100

9.2. Regresión Lineal Simple . . . . .	101
9.2.1. Conceptos Básicos . . . . .	101
9.2.2. Modelo de Regresión . . . . .	102



# Capítulo 1

## Teoría de Decisiones

### 1.1. Introducción

Teoría de Decisión trata de decisiones (Cursos de Acción) con respecto a la naturaleza (Estados de la Naturaleza). Esto se refiere a una situación donde el resultado (ganancia, pérdida) de una decisión depende de la acción de otro jugador (la naturaleza). Por ejemplo, si la decisión es de llevar o no paraguas, la ganancia (llueve o no llueve) depende de lo que ocurre en la naturaleza. Es importante darse cuenta que en este modelo la ganancia (pérdida) concierne sólo al tomador de la decisión. Esta condición distingue la teoría de decisión de la teoría de juegos. En la teoría de juegos ambos jugadores están interesados en el resultado.

La información fundamental para los problemas en teoría de decisión se encuentra representada en una *matriz de ganancias (pérdidas)* (Tabla 1.1).

Decisión	Estado de la Naturaleza			
	1	2	...	m
$d_1$	$r_{11}$	$r_{12}$	...	$r_{1m}$
$d_2$	$r_{21}$	$r_{22}$	...	$r_{2m}$
...	...	...	...	...
$d_n$	$r_{n1}$	$r_{n2}$	...	$r_{nm}$

Cuadro 1.1: Matriz de Ganancias

Los valores  $r_{ij}$  son las ganancias (o pérdidas) para cada posible combinación de decisión con respecto al estado de la naturaleza. El proceso de decisión es el siguiente:

- El tomador de decisiones selecciona una de las posibles decisiones  $d_1, d_2, \dots, d_n$ . Digamos  $d_i$ .

- Después de tomar la decisión, ocurre un estado de la naturaleza. Digamos el estado  $j$ .
- La ganancia recibida por el tomador de decisiones es  $r_{ij}$ .

El problema del tomador de decisiones consiste en determinar ¿que decisión tomar?. La decisión dependerá del comportamiento del tomador de decisiones con respecto a la naturaleza, es decir al estado de la naturaleza que sucede. Si creemos que ocurrirá el estado de la naturaleza  $j$  seleccionaremos, naturalmente la decisión  $d_i$  que está asociada al mayor valor de  $r_{ij}$  en la columna  $j$  de la matriz de ganancias.

Diferentes suposiciones acerca del comportamiento de la naturaleza conducirán a diferentes formas de seleccionar la *mejor* decisión.

Si supieramos cuál estado de la naturaleza ocurrirá, simplemente seleccionaríamos la decisión que nos lleva a obtener una mayor ganancia para ese conocido estado de la naturaleza. En la práctica, pueden haber infinitas posibles decisiones. Si esas posibles decisiones se representan mediante un vector  $d$  y la ganancia por la función con valores reales  $r(d)$ , el problema de decisión puede ser formulado como:

$\max r(d)$  sujeto a la factibilidad de las restricciones sobre  $d$ .

## 1.2. Toma de Decisiones

### 1.2.1. Certeza

Se da cuando se conoce con un 100 % de certeza los Estados de la Naturaleza.

### 1.2.2. Incertidumbre

Se da cuando los Estados de la Naturaleza son desconocidos  
Existen cuatro métodos:

- **Maximin (Pesimista):**

Considera siempre disminuir las pérdidas. Luego, el criterio se puede resumir como:

*Mejor (Peor)*

Para cada Curso de Acción busco la *peor* ganancia (costo) que puedo conseguir y de entre éstos valores elijo la / el *mejor*.

■ **Maximax (Optimista):**

Considera siempre aumentar las ganancias. Luego, el criterio se puede resumir como:

$$Mejor (Mejor)$$

Para cada Curso de Acción busco la *mejor* ganancia (costo) que puedo conseguir y de entre éstos valores elijo la / el *mejor*.

■ **Laplace:**

Considera todos los Estados de la Naturaleza como equiprobables. Dada la Matriz de ganancias (costos) se calcula la Esperanza de cada Curso de Acción con respecto a los Estados de la Naturaleza posibles y se elige la que provee mayor ganancia.

■ **Costo de Oportunidad:**

En este caso es necesario construir la Matriz Costo de Oportunidad, la cual representa para cada Estado de la Naturaleza lo que dejo de ganar por no elegir otro Curso de Acción.

Se elige aquel Curso de Acción que presente en total menor costo de oportunidad.

**Ejemplo:**

Considere la siguiente Matriz de Ganancias:

	$S_1$	$S_2$
$A_1$	200000	-20000
$A_2$	150000	20000
$A_3$	100000	60000

Cuadro 1.2: Matriz de Ganancias

Donde

$A_i$  = Cursos de Acción

$S_i$  = Estados de la Naturaleza

Suponiendo que debemos tomar una decisión bajo incertidumbre, tenemos:



■ **Maximin:**

$$\text{Mejor}((A_1, -20000), (A_2, 20000), (A_3, 60000))$$

$$\Rightarrow A_3$$

■ **Maximax:**

$$\text{Mejor}((A_1, 200000), (A_2, 150000), (A_3, 100000))$$

$$\Rightarrow A_1$$

■ **Laplace:**

$$E[A_1] = \frac{200000 - 20000}{2} = 90000$$

$$E[A_2] = \frac{150000 + 20000}{2} = 85000$$

$$E[A_3] = \frac{100000 + 60000}{2} = 80000$$

$$\Rightarrow A_1$$

■ **Costo de Oportunidad:**

**Matriz de Costo de Oportunidad:**

	$S_1$	$S_2$
$A_1$	0	80000
$A_2$	50000	40000
$A_3$	100000	0

Cuadro 1.3: Matriz de Costo de Oportunidad

$$\Rightarrow A_1$$

### 1.2.3. Riesgo

Se supone que hay más que un estado de la naturaleza y que el tomador de decisiones conoce la probabilidad de ocurrencia de cada estado. Sea  $p_j$  la probabilidad de que ocurra el estado  $j$ . Si el tomador de decisiones toma la decisión  $d_i$ ,  $ER_i$  viene dado por:

$$ER_i = r_{i1} \cdot p_1 + r_{i2} \cdot p_2 + \dots + r_{im} \cdot p_m$$

Se debe tomar la decisión  $d_i$  que maximiza  $ER_i$

### Ejemplo

#### ■ Problema

Consideremos como ejemplo el problema del vendedor de periódicos: un vendedor de periódicos compra éstos al camión de entrega al inicio de cada día. Durante el día, vende estos periódicos. Los periódicos sobrantes al final del día constituyen pérdidas. Asuma que cada periódico le cuesta 15 centavos y los vende a 50 centavos cada uno, y que la siguiente distribución de probabilidades es conocida

$$\begin{aligned} p_0 &= \text{Prob}\{\text{demanda} = 0\} = \frac{2}{10} \\ p_1 &= \text{Prob}\{\text{demanda} = 1\} = \frac{4}{10} \\ p_2 &= \text{Prob}\{\text{demanda} = 2\} = \frac{3}{10} \\ p_3 &= \text{Prob}\{\text{demanda} = 3\} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

¿Cuántos periódicos debería comprar el vendedor cada día al camión de entrega?

#### ■ Solución

Para resolver este ejercicio, primero se construye la matriz de ganancias (Tabla 4.2). Donde  $r_{ij}$  es la ganancia cuando se compran  $i$  periódicos y ocurre una demanda  $j$ .

		Estado de la Naturaleza			
		0	1	2	3
Cursos de Acción	0	0	0	0	0
	1	-15	35	35	35
	2	-30	20	70	70
	3	-45	5	55	105

Cuadro 1.4: Matriz de Ganancias Problema del Vendedor de Periódicos

Ahora se deben calcular los valores esperados para cada posible decisión.

$$ER_0 = 0 \cdot \left(\frac{2}{10}\right) + 0 \cdot \left(\frac{4}{10}\right) + 0 \cdot \left(\frac{3}{10}\right) + 0 \cdot \left(\frac{1}{10}\right) = 0$$

$$ER_1 = -15 \cdot \left(\frac{2}{10}\right) + 35 \cdot \left(\frac{4}{10}\right) + 35 \cdot \left(\frac{3}{10}\right) + 35 \cdot \left(\frac{1}{10}\right) = 25$$

$$ER_2 = -30 \cdot \left(\frac{2}{10}\right) + 20 \cdot \left(\frac{4}{10}\right) + 70 \cdot \left(\frac{3}{10}\right) + 70 \cdot \left(\frac{1}{10}\right) = 30$$

$$ER_3 = -45 \cdot \left(\frac{2}{10}\right) + 5 \cdot \left(\frac{4}{10}\right) + 55 \cdot \left(\frac{3}{10}\right) + 105 \cdot \left(\frac{1}{10}\right) = 20$$

El máximo sucede cuando el vendedor de diarios compra 2 periódicos al camión de entrega. Su valor esperado es de 30. El hecho que el vendedor de periódicos deba tomar la decisión *antes* que la demanda ocurra tiene un impacto considerable en sus ganancias. Si pudiera conocer la demanda anticipadamente cada día y entonces comprar el número correspondiente de diarios para ese día, su ganancia esperada aumentaría en una cantidad conocida en términos técnicos como el *valor esperado de la información perfecta* (expected value of perfect information (*EVPI*)).

Millones de dólares se gastan en proyectos de investigación de mercados, para determinar qué estado de la naturaleza ocurrirá en una amplia gama de aplicaciones. El valor esperado de la información perfecta indica la ganancia esperada de cualquiera de esos intentos y así representa una cota superior sobre la cantidad que deberían gastar en obtener esa información. Así, calculamos el valor esperado de la información perfecta *EVPI* para nuestro problema. Si la demanda fuese conocida con anticipación antes que la decisión de compra se tome, el valor esperado de la ganancia sería:

$$0 \cdot \left(\frac{2}{10}\right) + 35 \cdot \left(\frac{4}{10}\right) + 70 \cdot \left(\frac{3}{10}\right) + 105 \cdot \left(\frac{1}{10}\right) = 45,5$$

$$EVPI = 45,5 - 30 = 15,5$$

Debe notarse que el criterio de maximizar la ganancia esperada puede, algunas veces, producir resultados inaceptables. Esto se debe a que hay riesgos que no se han tomado en cuenta. La mayoría de las personas son reticentes al riesgo, lo que significa que sienten que perder  $x$  dólares es más valioso que el beneficio de ganar la misma cantidad. La teoría de decisión enfrenta este problema construyendo una función de *atracción* del dinero (o de utilidad del dinero).

Esta función se denomina *función de utilidad*. Así, en lugar de trabajar con una matriz de pago medidas en dólares (pesos, dinero),  $r_{ij}$ , se trabaja con una matriz de ganancias que contiene valores de utilidades, digamos  $u_{ij}$ . La decisión óptima  $d_i$  será la que maximice la utilidad esperada

$$EU_i = u_{i1} \cdot p_1 + u_{i2} \cdot p_2 + \dots + u_{im} \cdot p_m$$

sobre todos los  $i$ .

### 1.2.4. Árboles de decisión

#### Ejemplo: Compañía ABC

##### ■ Problema

La Compañía ABC ha desarrollado una nueva línea de productos. La Administración debe decidir una estrategia de marketing y producción adecuada. Se consideran tres estrategias, las cuales denominaremos:  $A$  (agresiva),  $B$  (básica) y  $C$  (precavida). Las condiciones del mercado bajo estudio se denotan mediante  $S$  (fuerte) o  $W$  (débil). Las mejores estimaciones de la Administración para cada caso se muestran en la tabla 4.3.

Decisión	Estado de la Naturaleza	
	S	W
A	30	-8
B	20	7
C	5	15

Cuadro 1.5: Estimaciones de Estrategias de Marketing de ABC

Además, la Administración también estima que las probabilidades de que el Mercado sea fuerte o débil son 0.45 y 0.55 respectivamente. ¿Cuál estrategia debería ser escogida?

##### ■ Solución

Se puede calcular el valor esperado para cada decisión y seleccionar la mejor:

$$ER_A = 30 \cdot (0,45) - 8 \cdot (0,55) = 9,10$$

$$ER_B = 20 \cdot (0,45) + 7 \cdot (0,55) = 12,85$$

$$ER_C = 5 \cdot (0,45) + 15 \cdot (0,55) = 10,5$$

La decisión óptima es seleccionar  $B$ .

Una manera más conveniente de representar este problema es usando *árboles de decisión*, como en la figura 1.1.

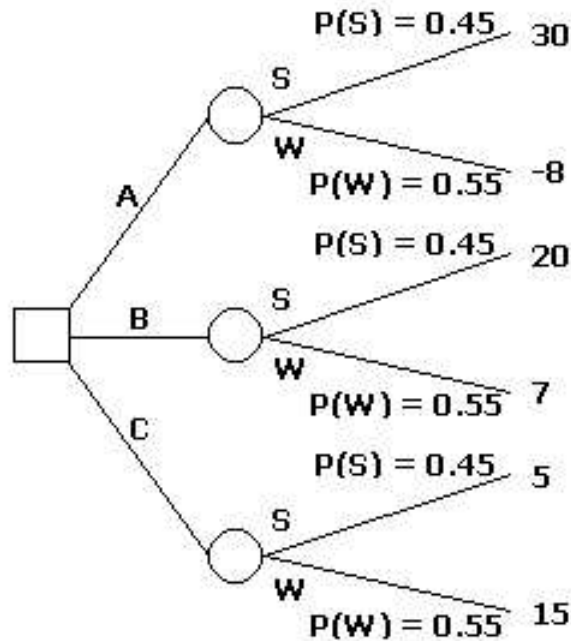


Figura 1.1: Árbol de decisión para la Compañía ABC

### Nomenclatura

Un *nodo cuadrado* representará un punto en el cual se debe tomar una decisión, y cada línea abandonando el cuadrado representará una posible decisión. Un *nodo círculo* representará situaciones cuyas ocurrencias son inciertas, y cada línea abandonando el círculo representará un posible acontecimiento.

El proceso de usar un árbol de decisión para encontrar la decisión óptima se denomina *resolver el árbol*. Para resolver el árbol se trabaja desde atrás hacia adelante. Esto se llama *retornando el árbol*. Primero, las ramas terminales se llevan hacia atrás calculando un valor esperado para cada nodo terminal. Ver la figura 1.2.

La Administración debe resolver un problema más simple que es el de elegir la alternativa que lleva al valor esperado más alto del nodo terminal. De esta forma un árbol de decisión provee una forma mas gráfica de ver el problema. Se utiliza la misma información que antes y se realizan los mismos cálculos.

### ■ Análisis de Sensibilidad

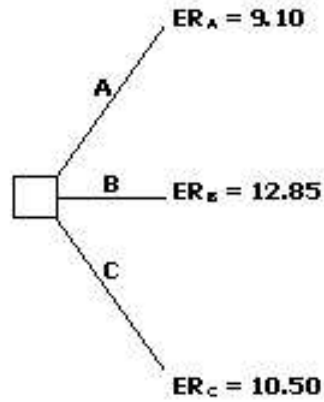


Figura 1.2: Arbol de decisión reducido para la Compañía ABC

El valor esperado de la estrategia  $A$  es:

$$ER_A = 30 \cdot P(S) - 8 \cdot P(W)$$

o lo que es lo mismo,

$$ER_A = 30 \cdot P(S) - 8 \cdot (1 - P(S)) = -8 + 38 \cdot P(S)$$

Así, el valor esperado es una función lineal de la probabilidad que las condiciones del mercado sean fuertes. Análogamente:

$$ER_B = 20 \cdot P(S) + 7 \cdot (1 - P(S)) = 7 + 13 \cdot P(S)$$

$$ER_C = 5 \cdot P(S) + 15 \cdot (1 - P(S)) = 15 - 10 \cdot P(S)$$

Se pueden dibujar esas tres funciones lineales sobre el mismo conjunto de coordenadas (ver figura 1.3).

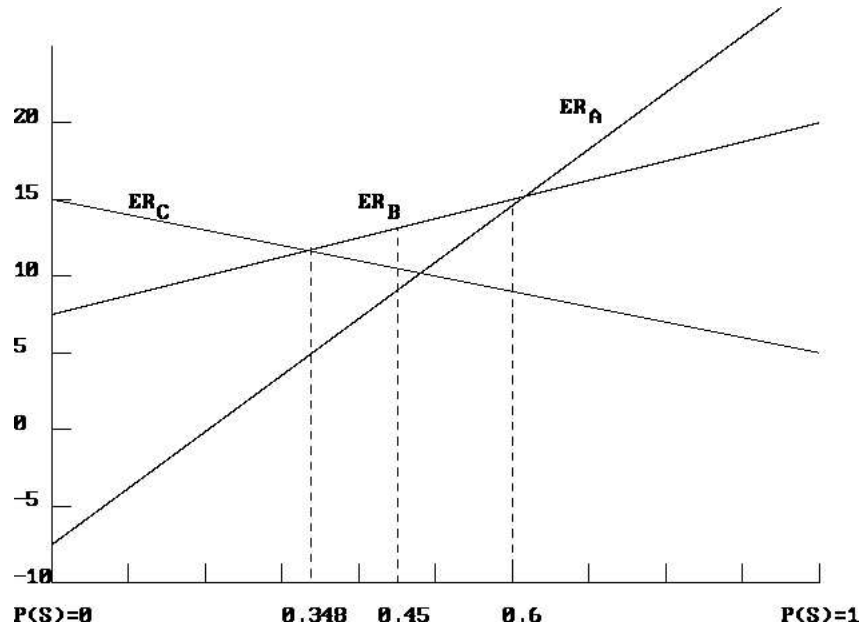


Figura 1.3: Valor esperado en función de  $P(S)$

Este diagrama muestra que la Compañía ABC debe seleccionar la estrategia básica (estrategia  $B$ ) cuando la probabilidad de una demanda fuerte esta entre  $P(S) = 0,348$  y  $P(S) = 0,6$ . Sin embargo, si  $P(S)$  cae bajo 0,348, lo óptimo es elegir la estrategia  $C$ , por otro lado si  $P(S)$  está sobre 0,6, la estrategia agresiva  $A$  sería la óptima.

### Decisiones Secuenciales

#### ■ Problema

A pesar de lo atrayente de la estrategia básica  $B$ , la Administración de ABC tiene la opción de pedir al grupo de investigación de marketing un estudio de mercado. Dentro de un mes, este grupo puede informar si el estudio fue alentador ( $E$ ) o desalentador ( $D$ ). En el pasado, dichos estudios han tendido a señalar la dirección correcta: Cuando el mercado tiende a ser fuerte, dichos estudios resultan alentadores el 60 % de las veces y fueron desalentadores el 40 % de las veces. Por otro lado, cuando el mercado resultó débil, los estudios fueron alentadores el 30 % de las veces y desalentadores el 70 % de las veces. Dicho estudio costaría \$500,000. ¿Convendrá que la administración decida ordenar el estudio de mercado o no?

### ■ Solución

Construyamos el árbol de decisión para este problema de decisión secuencial. Ver figura 1.4. Es importante darse cuenta que el árbol se crea en el orden cronológico en el cual la información está disponible. La secuencia de eventos es:

- Test decisión
- Resultado del Test (si hubo)
- Tomar decisión
- Condición del mercado.

El nodo de más a la izquierda corresponde a la decisión de hacer test o no hacer el test. Moviéndose a través de la rama *Test*, el siguiente nodo a la derecha es un círculo, ya que este corresponde a un evento incierto. Hay dos resultados posibles. El test puede ser alentador (*E*) o desalentador (*D*). Las probabilidades de estos dos eventos son  $P(E)$  y  $P(D)$  respectivamente. ¿Cómo calcular esas probabilidades?

Aquí son importantes las nociones de probabilidades. La información dada es *condicional*.

Dado *S*, la probabilidad de *E* es 60 % y la probabilidad de *D* es 40 %. Análogamente, se sabe que dado *W*, la probabilidad de *E* es de 30 % y la probabilidad de *D* es de 70 %. Esas probabilidades condicionales pueden escribirse como:

$$P(E/S) = 0,6 \quad P(E/W) = 0,3$$

$$P(D/S) = 0,4 \quad P(D/W) = 0,7$$

Además se sabe que  $P(S) = 0,45$  y  $P(W) = 0,55$ . Esa es toda la información que se requiere para calcular  $P(E)$  y  $P(D)$ . Para los eventos  $S_1, S_2, \dots, S_n$  que comparten el espacio posible de acontecimientos y un evento *T*, se tiene

$$P(T) = P(T/S_1) \cdot P(S_1) + P(T/S_2) \cdot P(S_2) + \dots + P(T/S_n) \cdot P(S_n)$$

que para el problema viene a ser:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E/S) \cdot P(S) + P(E/W) \cdot P(W) \\ &= (0,6) \cdot (0,45) + (0,3) \cdot (0,55) \\ &= 0,435 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D/S) \cdot P(S) + P(D/W) \cdot P(W) \\ &= (0,4) \cdot (0,45) + (0,7) \cdot (0,55) \\ &= 0,565 \end{aligned}$$



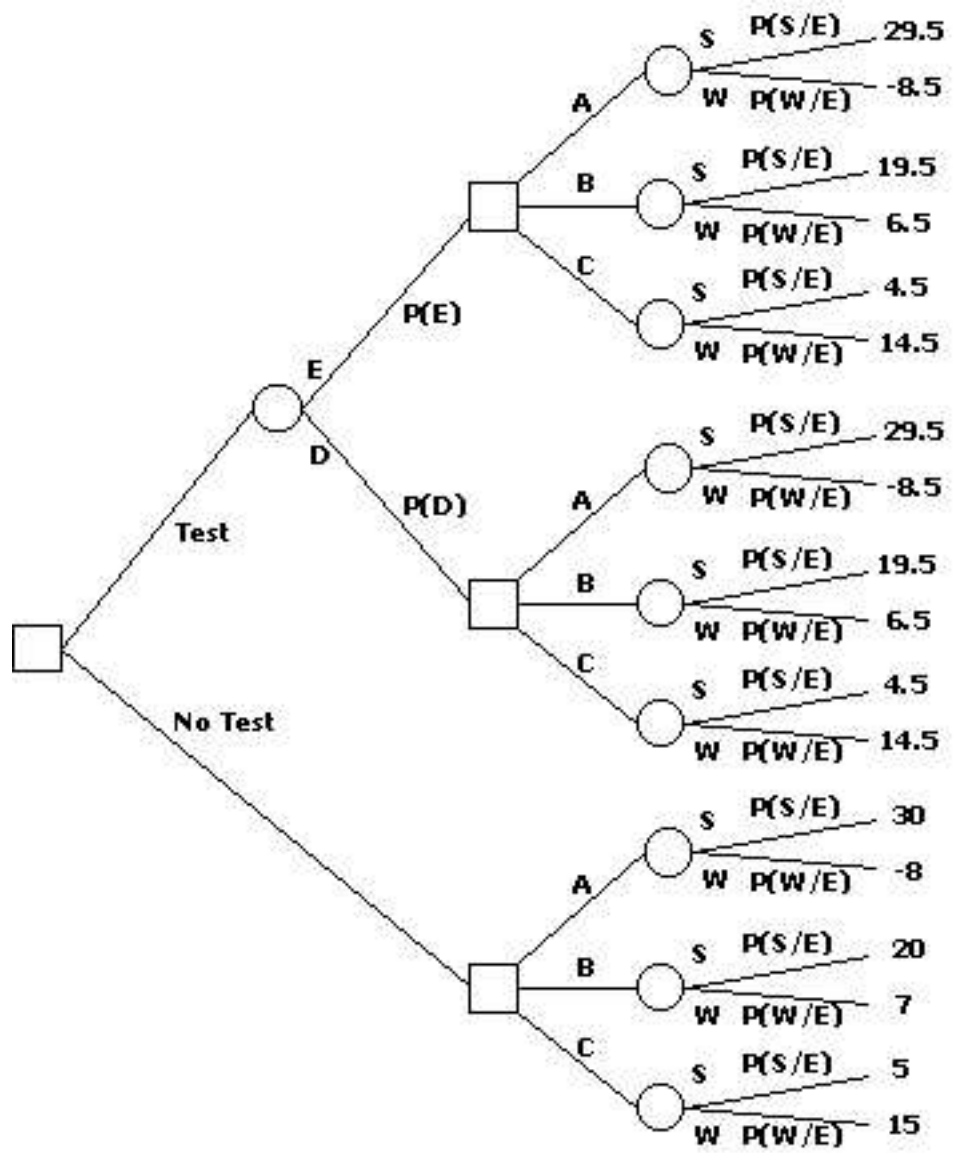


Figura 1.4: Arbol de Decisión para Test versus No-Test

En la medida que nos movemos a la derecha del árbol de decisión, los siguientes nodos son cuadrados, correspondiendo a tres estrategias de marketing y producción.

Más a la derecha los nodos circulares corresponden a condiciones inciertas del mercado: débil o fuerte. La probabilidad de esos dos eventos ahora es *condicional* a los eventos inciertos que ocurrieron previamente, digamos a los resultados del estudio de mercado, cuando ese estudio se llevo a cabo. Esto significa que se necesita calcular las siguientes probabilidades condicionales:  $P(S/E)$ ,  $P(W/E)$ ,  $P(S/D)$  y  $P(W/D)$ . Para ello se utiliza la siguiente fórmula:

$$P(R/T) = \frac{P(T/R) \cdot P(R)}{P(T)},$$

la que es válida para los dos eventos R y T. Para el ejemplo se tiene

$$P(S/E) = \frac{P(E/S) \cdot P(S)}{P(E)} = \frac{(0,6) \cdot (0,45)}{(0,435)} = 0,621$$

Análogamente  $P(W/E) = 0,379$ ,  $P(S/D) = 0,318$  y  $P(W/D) = 0,682$

Ahora, estamos listos para resolver el árbol de decisión. Como antes, esto se hace de atrás hacia adelante. Ver las figuras 1.5, 1.6 y 1.7. Se vuelve hacia atrás desde un nodo circular calculando los valores esperados. Se vuelve hacia atrás de un nodo cuadrado seleccionando la decisión que tiene el mejor valor esperado. El valor esperado cuando se realiza un estudio de mercado es de 12,96 millones de dólares, lo que es mayor que cuando no se realiza el estudio. Así el estudio debe ser llevado a cabo.

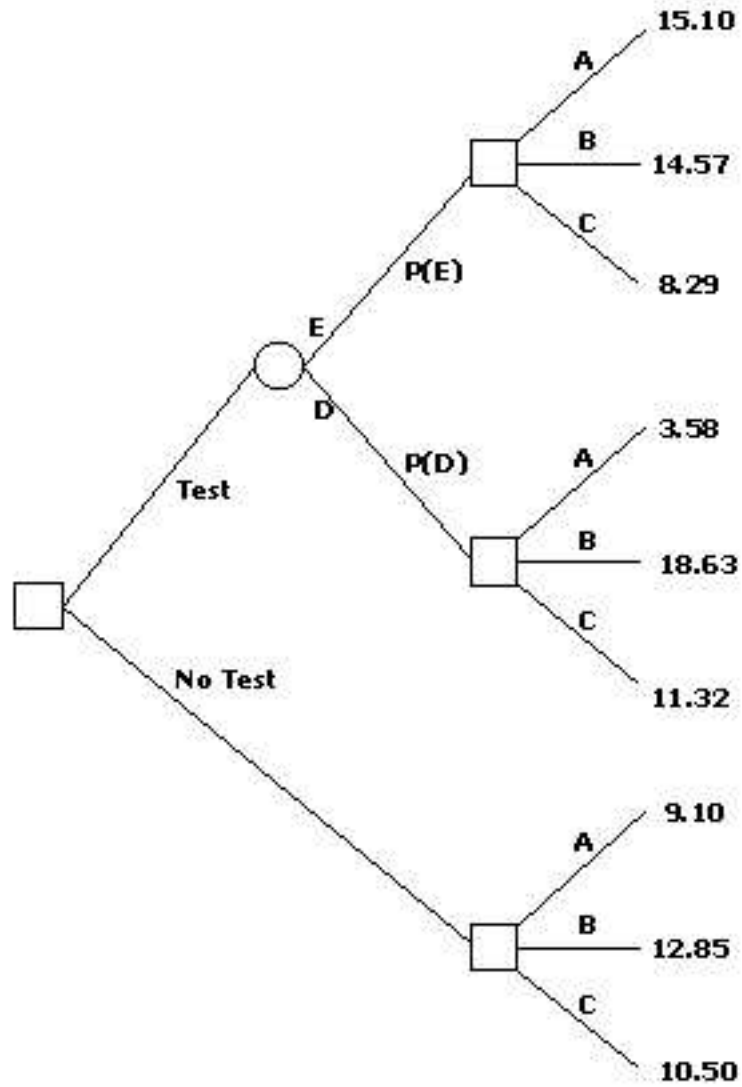


Figura 1.5: Resolviendo el Arbol

Finalmente, comparemos el valor esperado del estudio (denotado por  $EVSI$ ), lo cual corresponde al *valor esperado de la información muestral* (en inglés *expected value of sample information*) al *valor esperado de la información perfecta* (en inglés *expected value of perfect information*)  $EVPI$ .  $EVSI$  se calcula sin calcular el costo del estudio, así

$$EVSI = (12,96 + 0,5) - 12,85 = 0,61$$

y

$$EVPI = (30) \cdot (0,45) + (15) \cdot (0,55) - 12,85 = 8,90$$

Se puede ver que el estudio de mercado no es muy efectivo. Si lo fuera el valor de  $EVSI$  debería ser mucho más cercano al valor de  $EVPI$ . Pero su  $EVSI$  es mayor que su costo, así es que conviene realizarlo.

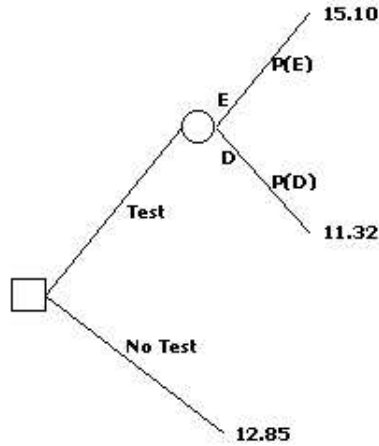


Figura 1.6: Resolviendo el Arbol

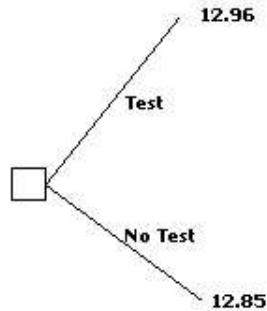


Figura 1.7: Resolviendo el Arbol

### 1.3. Ejercicios Propuestos

1. Ana María es una dueña de casa muy profesional. Esto significa que ella planifica sus actividades hogareñas de una forma racional y coherente. Ella sabe que su marido generalmente es una persona fácil de tratar, pero en ocasiones está un poco gruñón y en otras con una alegría extraordinaria.

Ana María con mucho tacto, prefiere preparar exquisiteces en aquellos días en que él está gruñón, aunque requieran más tiempo y sean mas caras. En los días que su marido está fácil de tratar, con una hamburguesa basta y cuando está alegre él le ayuda a preparar los biftecs. La tabla 4.4 muestra su matriz de utilidad de la comida:

Genio/Menú	Exquisitez	Bistec	Hamburguesa
Alegre	30	80	60
Fácil de Tratar	65	50	90
Gruñón	100	70	0

Cuadro 1.6: Utilidad de la comida según estado de ánimo

Ellos llevan casados 12 años, tiempo suficiente para saber que su esposo el 60 % de las veces es una persona fácil de tratar y que el 15 % de las veces está gruñón. Hoy Ana María ha decidido hacer el siguiente experimento. Ella llamará a su esposo a las 16h00 horas y le contará una historia comenzando con “Adivina qué pasó cuando me paró un carabinero en el semáforo...”, ella piensa que probablemente él le responderá de una de las siguientes formas:

- **Resp 1:** ¿Llamaste al abogado y al agente de seguros?
- **Resp 2:** ¡¡Te lo dije!!
- **Resp 3:** ¿Recordaste sonreír, puede ser la cámara indiscreta?

Ella cree que si su marido está gruñón su respuesta será **Resp 1**, con probabilidad 0,3, si está fácil de tratar su respuesta será **Resp 1** con probabilidad 0,5 y si está alegre su respuesta será **Resp 1** con probabilidad 0,3. Si está alegre la probabilidad de **Resp 2** es 0,2 y si está gruñón la probabilidad de **Resp2** es 0,6 y si está fácil de tratar la probabilidad de **Resp 2** es 0,2. Ella llamó a su marido y respondió **Resp 2**:

- ¿Cuál podría ser su menú para hoy?
  - ¿En cuánto aumentó ella la utilidad esperada para hoy?
  - ¿Cuál sería el menú usando el criterio Maximin?
2. Un gerente de planta tiene la opción de tener un proceso en su planta instalado por su operador de proceso o por un instalador. Si el operador de proceso realiza su propia instalación, la fracción de artículos defectuosos será de 0,10; 0,20; 0,40. Si el proceso es colocado por el instalador, el gerente de planta puede tener seguridad que el proceso producirá artículos con una fracción defectuosa de 0,10. Cuesta US \$12,00 adicionales hacer que el instalador realice la instalación. Los artículos se producen en lotes de 100 (total de artículos buenos y malos). Cada artículo defectuoso se repara a mano a un costo de US \$1 por artículo.

Seleccione y exprese dos principios de elección que sean adecuados para resolver el problema del gerente de planta, como un problema de incertidumbre. Para cada principio de elección, recomiende si el proceso debería ser instalado por el operador de proceso o por el instalador. Suponga que con base en informes de comportamiento pasado, el gerente de planta encuentra que las instalaciones realizadas por el operador de proceso han conducido a diversas fracciones defectuosas con las frecuencias relativas mostradas en la tabla 4.4.1.

Fracción Defectuosa de artículos producidos	Frecuencia relativa de la fracción defectuosa
0.1	0.4
0.2	0.5
0.4	0.1

Cuadro 1.7: Fracciones defectuosas y frecuencias relativas

Determine la mejor elección.

Suponga que el proceso ha sido instalado por el operador de proceso. Dos artículos han sido producidos e inspeccionados. Si uno de los dos artículos está defectuoso, ¿debe el gerente de planta dejar que el operador complete el resto del lote o debe hacer que el proceso sea establecido por el instalador?

- Para enfrentar el problema de contaminación en Santiago se está proponiendo utilizar nuevas estaciones de monitoreo para medir el crecimiento de la capa de smog. Se piensa que si esta capa alcanza cierto nivel crítico de partículas, en los días que siguen se llegaría a un *estado de emergencia*. Por lo tanto, en el caso en que las estaciones de monitoreo detecten ese nivel crítico se tomaría la decisión de aplicar un plan ALFA (de alerta ambiental), con el objetivo de que no se produzca el *estado de emergencia*. El costo de operación de las estaciones es de US \$500 / día. El *estado de emergencia* significa un costo en la salud, el cual se ha estimado en US \$1000 / día. Hasta ahora, el *estado de emergencia* se ha producido con una frecuencia de 0,2.

Por otra parte, el plan ALFA es eficaz el 90 % de la veces. Si se produce *emergencia*, la probabilidad que las estaciones NO hallan detectado el nivel crítico es de 0,2. Si NO se produce *emergencia* la probabilidad que las estaciones NO hallan detectado el nivel crítico es de 0,85.

¿Conviene o no instalar las nuevas estaciones?



## Capítulo 2

# Decisiones con Múltiples Objetivos

### 2.1. AHP: Analytic Hierarchy Process

Hasta ahora nos hemos concentrado en la Toma de Decisiones bajo riesgo considerando un único objetivo. Sin embargo, en la mayoría de los problemas de decisión de la vida real surgen varios objetivos que se desean lograr al tomar una decisión.

AHP permite visualizar en forma ordenada y jerárquica las preferencias de cada uno de los objetivos involucrados.

Para utilizar AHP se requiere:

- **Paso 1:** Identificar el conjunto de objetivos que se desean alcanzar, las diversas alternativas de cursos de acción que se tienen.
- **Paso 2:** Establecer la importancia relativa entre los objetivos, es decir, una cuantificación que permita identificar qué objetivo es más importante y respecto a cuál otro objetivo. Para ello se construye una tabla de preferencias relativas  $A$  entre los distintos objetivos:

	O1	O2	O3	O4	O5	...	On
O1							
O2							
O3							
O4							
O5							
...							
On							

Cuadro 2.1: Matriz  $A$



De acuerdo a la escala de la siguiente tabla (Tabla 2.2):

Valor	Significado
1	igual
3	$O_i > O_j$
5	$O_i \gg O_j$
7	$O_i \ggg O_j$
9	$O_i \gggg O_j$
2,4,6,8	intermedios

Cuadro 2.2: Escala de Ponderaciones

- **Paso 3:** Normalizar  $A$ : Sea  $S_i$  la suma de la columna  $O_i$  en  $A$ , luego la columna correspondiente a la columna  $O_i$  normalizada se obtiene de dividir la columna  $O_i$  por  $S_i$ .
- **Paso 4:** Cálculo del vector  $W$  de los pesos o grados de importancia relativos: Sumar cada fila  $O_i$  de la matriz  $A$  normalizada, dividir el resultado por  $n$  (el número de objetivos).
- **Paso 5:** Para cada objetivo  $O_j$  construir una matriz  $B_j$  de preferencias relativas entre los cursos de acción con respecto a  $O_j$ . Normalizar  $B_j$  (análogamente que el **Paso 3**). Calcular los pesos relativos usando la matriz  $B_j$  normalizada, dividiendo el resultado por  $m$  (el número de cursos de acción).
- **Paso 6:** Construir la tabla que relaciona los  $n$  objetivos con los  $m$  cursos de acción, usando los datos obtenidos en el **Paso 5**.
- **Paso 7:** Identificar la mejor decisión: Calcular para cada curso de acción el grado de satisfacción con respecto a los objetivos, multiplicando cada fila de la matriz del **Paso 6** por el vector de pesos relativo de los objetivos obtenido en el **Paso 4**.
- **Paso 8:** Calcular el índice de consistencia relativo
  - **Paso 8.1** Obtener el vector  $V$  por la multiplicación de  $A$  por el vector de pesos relativos  $W$ .
  - **Paso 8.2** Dividir cada valor en  $V$  por su correspondiente valor en  $W$ .
  - **Paso 8.3** Dividir la suma de los valores obtenidos en el **Paso 8.2** por  $n$ .
  - **Paso 8.4** Calcular el Índice de Consistencia por:

$$CI = \frac{\text{Paso 8.3} - n}{n - 1}$$

- **Paso 8.5** Comparar CI con el valor de la tabla de índices de consistencia (Tabla 2.3).

n	Indice
2	0
3	0.58
4	0.9
5	1.12
6	1.24
7	1.32
8	1.41
9	1.45
10	1.51

Cuadro 2.3: Tabla de Índices de Consistencia

**Ejemplo**

■ **Problema: Elección de Trabajo**

Usted desea elegir un trabajo y desea cumplir básicamente con 4 objetivos:

- Objetivo 1: Buen sueldo al comienzo
- Objetivo 2: Calidad de vida en la ciudad de su trabajo
- Objetivo 3: Interés del trabajo
- Objetivo 4: Cercanía familiar y amistades

Tiene en vista tres trabajos, los cuales cumplen en diferente medida los objetivos que usted se planteó.

¿Que trabajo satisface en mejor forma sus requerimientos?

■ **Solución**

1. Suponga la siguiente tabla de importancias relativas de los objetivos (Tabla 2.4):

	O1	O2	O3	O4
O1	1	5	2	4
O2	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
O3	$\frac{1}{2}$	2	1	2
O4	$\frac{1}{4}$	2	$\frac{1}{2}$	1

Cuadro 2.4: Importancias relativas de los Objetivos

$$\text{Luego } W = [ 0.5115 \quad 0.0986 \quad 0.2433 \quad 0.1466 ]$$

2. Suponga las siguientes tablas de importancias relativas de los cursos de acción por cada objetivo:

a) Objetivo 1

**B1=**

	T1	T2	T3
T1	1	2	4
T2	$\frac{1}{2}$	1	2
T3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

$$W1 = [0.571 \quad 0.286 \quad 0.143]$$

b) Objetivo 2

**B2=**

	T1	T2	T3
T1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
T2	2	1	$\frac{1}{3}$
T3	3	3	1

$$W2 = [0.159 \quad 0.252 \quad 0.589]$$

c) Objetivo 3

**B3=**

	T1	T2	T3
T1	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{3}$
T2	7	1	3
T3	3	$\frac{1}{3}$	1

$$W3 = [0.088 \quad 0.669 \quad 0.243]$$

d) Objetivo 4

**B4=**

	T1	T2	T3
T1	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{7}$
T2	4	1	2
T3	7	2	1

$$W4 = [0.069 \quad 0.426 \quad 0.506]$$

3. Elección de Curso de Acción  
Cursos de Acción:

$$T1 = 0,5115 \cdot 0,571 + 0,159 \cdot 0,0986 + 0,088 \cdot 0,2433 + 0,1466 \cdot 0,069 = 0,339$$

$$T2 = 0,396$$

$$T3 = 0,265$$

Luego, lo mejor es el Curso de Acción 2.

4. Grado de Inconsistencia

a)

$$A \cdot W^T = [2,0775 \quad 0,3959 \quad 0,9894 \quad 0,5933]$$

b)

$$\frac{1}{4} \cdot \left( \frac{2,0775}{0,5115} + \frac{0,3959}{0,986} + \frac{0,9894}{0,2433} + \frac{0,5933}{0,1466} \right) = 4,05$$

c)

$$CI = \frac{4,05 - 4}{3} = 0,017$$

d) De la tabla se tiene

$$\frac{0,017}{0,9} = 0,019$$

## 2.2. Ejemplo: Resolución mediante Software Expert Choice

### Problema: Elección Práctica

Considere el problema de elegir la mejor práctica, que le entregue la mayor satisfacción con respecto a múltiples criterios. Algunos de los criterios a considerar pueden ser prestigio, experiencia del supervisor, experiencia del grupo de trabajo, incentivo monetario, lugar, perspectivas, flexibilidad horaria, contactos y cualquier otro criterio que usted estime útil para su caso particular.

Se propone efectuar la selección entre, al menos, 10 empresas considerando al menos 7 objetivos estructurados jerárquicamente.

### Acerca de Expert Choice:

Muchos negocios y agencias de gobierno en todo el mundo utilizan Expert Choice para estructurar, justificar y optimizar decisiones grupales críticas.

Expert Choice se utiliza en muchos tipos de aplicaciones, entre las que se incluyen las siguientes:

- Asignación de Recursos
- Gestión de Recursos Humanos
- Planificación Estratégica Gestión de Portafolio Tecnológico
- Gestión de Producción y Operaciones Análisis Costo / Beneficio
- Toma de Decisiones Médicas

**Solución:****Cursos de Acción:**

Para la resolución del problema se consideran las siguientes Empresas:

- Valparaíso
  - Congreso
  - Marss
  - SSVS
  - Armada
- Santiago
  - BCI
  - IBM
  - Mantos Blancos
  - CitiBank
  - Lan Chile
- Curicó
  - Cementos Bío-Bío

**Objetivos:**

Para el problema se considera el siguiente conjunto de objetivos jerárquicamente estructurados como se indica:

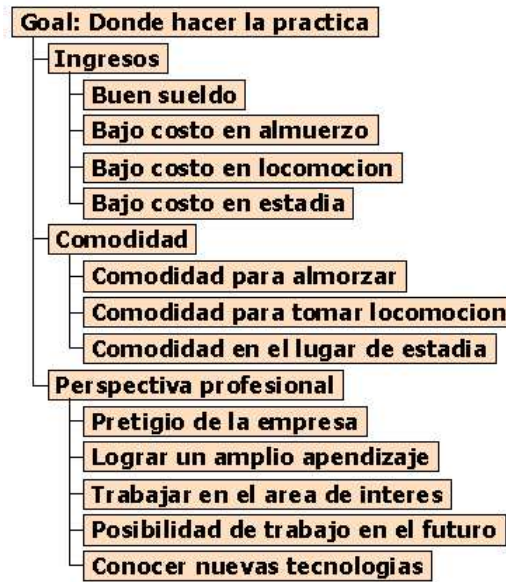


Figura 2.1: Estructura jerárquica de objetivos

Matrices relacionales:

	Ingres:	Comoc:	Perspe:
Ingresos		4,0	3,0
Comodidad			2,0
Perspectiva profesional	Incon:		

Figura 2.2: Matriz relacional de los objetivos generales

	Buen sueldo	Bajo costo en al:	Bajo costo en lo	Bajo costo en es
Buen sueldo		4,0	4,0	5,0
Bajo costo en almuerzo			2,0	3,0
Bajo costo en locomocion				3,0
Bajo costo en estadia	Incon: 0,00			

Figura 2.3: Matriz relacional de sub-objetivos del objetivo Ingreso

	Comodidad	Comodidad para	Comodidad en e
Comodidad para almorzar		4,0	3,0
Comodidad para tomar locomoción			2,0
Comodidad en el lugar de estadía			

Figura 2.4: Matriz relacional de sub-objetivos del objetivo Comodidad

	Pretigio de	Lograr un ampli	Trabajar en el ar	Posibil	Conoc
Pretigio de la empresa		4,0	5,0	2,0	3,0
Lograr un amplio aprendizaje			4,0	3,0	2,0
Trabajar en el área de interés				4,0	3,0
Posibilidad de trabajo en el futuro					3,0
Conocer nuevas tecnologías	Incon: 0,00				

Figura 2.5: Matriz relacional de sub-objetivos del objetivo Perspectiva Profesional

Matrices de los cursos de acción para los sub-objetivo del objetivo Ingreso:

	Congre	Mars	SSVS	Armada	BCI	BM	Mantos	Citibank	Lan Chi	Cementos F
Congreso (Valp)		6,0	3,0	1,0	4,0	4,0	8,0	7,0	3,0	2,0
Mars (Valpara)			6,0	4,0	2,0	2,0	2,0	2,0	3,0	4,0
SSVS (Valpara)				2,0	5,0	5,0	8,0	7,0	4,0	2,0
Armada (Valpa)					4,0	5,0	8,0	6,0	3,0	2,0
BCI (Santiago)						2,0	4,0	3,0	3,0	4,0
IBM (Santiago)							3,0	3,0	4,0	6,0
Mantos Blanco								3,0	5,0	6,0
Citibank (Santi)									4,0	5,0
Lan Chile (Sant)										2,0
Cementos BIO-	Incon: 1									

Figura 2.6: Sub-objetivo Buen sueldo

## 2.2. EJEMPLO: RESOLUCIÓN MEDIANTE SOFTWARE EXPERT CHOICE33

	Congre	Mars	SSVS	Armada	BCI	BM	Mantos	Citibank	Lan Chi	Cementos E
Congreso (Valp)		1,0	1,0	1,0	1,0	5,0	5,0	5,0	1,0	1,0
Mars (Valpara			1,0	1,0	1,0	5,0	5,0	5,0	1,0	1,0
SSVS (Valparai				1,0	1,0	5,0	5,0	5,0	1,0	1,0
Armada (Valpa					1,0	5,0	5,0	5,0	1,0	1,0
BCI (Santiago)						5,0	5,0	5,0	1,0	1,0
IBM (Santiago)							1,0	1,0	5,0	5,0
Mantos Blanco								1,0	5,0	5,0
Citibank (Santi									5,0	5,0
Lan Chile (Sant										1,0
Cementos BIO-	Incon: I									

Figura 2.7: Sub-objetivo Bajo costo de almuerzo

	Congre	Mars	SSVS	Armada	BCI	BM	Mantos	Citibank	Lan Chi	Cementos E
Congreso (Valp)		1,0	1,0	1,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	5,0
Mars (Valpara			1,0	1,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	5,0
SSVS (Valparai				1,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	5,0
Armada (Valpa					4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	5,0
BCI (Santiago)						1,0	1,0	1,0	1,0	7,0
IBM (Santiago)							1,0	1,0	1,0	7,0
Mantos Blanco								1,0	1,0	7,0
Citibank (Santi									1,0	7,0
Lan Chile (Sant										7,0
Cementos BIO-	Incon: I									

Figura 2.8: Sub-objetivo Bajo costo de locomoción

	Congre	Mars	SSVS	Armada	BCI	BM	Mantos	Citibank	Lan Chi	Cementos E
Congreso (Valp)		1,0	1,0	1,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	6,0
Mars (Valpara			1,0	1,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	6,0
SSVS (Valparai				1,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	6,0
Armada (Valpa					3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	6,0
BCI (Santiago)						1,0	1,0	1,0	1,0	7,0
IBM (Santiago)							1,0	1,0	1,0	7,0
Mantos Blanco								1,0	1,0	7,0
Citibank (Santi									1,0	7,0
Lan Chile (Sant										7,0
Cementos BIO-	Incon: I									

Figura 2.9: Sub-objetivo Bajo costo de estadía



Matrices de los cursos de acción para los sub-objetivo del objetivo Comodidad:

	Congre	Mars	SSVS	Armada	BCI	IBM	Mantos	Citibank	Lan Chi	Cementos E
Congreso (Valp)		4,0	4,0	4,0	4,0	3,0	3,0	3,0	4,0	4,0
Mars (Valpara			1,0	1,0	1,0	5,0	5,0	5,0	1,0	1,0
SSVS (Valparai				1,0	1,0	5,0	5,0	5,0	1,0	1,0
Armada (Valpa					1,0	5,0	5,0	5,0	1,0	1,0
BCI (Santiago)						5,0	5,0	5,0	1,0	1,0
IBM (Santiago)							1,0	1,0	5,0	5,0
Mantos Blanco								1,0	5,0	5,0
Citibank (Santi									5,0	5,0
Lan Chile (Sant										1,0
Cementos BIO-	Incon: 1									

Figura 2.10: Sub-objetivo Comodidad para almorzar

	Congre	Mars	SSVS	Armada	BCI	IBM	Mantos	Citibank	Lan Chi	Cementos E
Congreso (Valp		1,0	1,0	1,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	5,0
Mars (Valpara			1,0	1,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	5,0
SSVS (Valparai				1,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	5,0
Armada (Valpa					3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	5,0
BCI (Santiago)						1,0	1,0	1,0	1,0	7,0
IBM (Santiago)							1,0	1,0	1,0	7,0
Mantos Blanco								1,0	1,0	7,0
Citibank (Santi									1,0	7,0
Lan Chile (Sant										7,0
Cementos BIO-	Incon: 1									

Figura 2.11: Sub-objetivo Comodidad para tomar locomoción

2.2. EJEMPLO: RESOLUCIÓN MEDIANTE SOFTWARE EXPERT CHOICE35

	Congre	Mars	SSVS	Armada	BCI	BM	Mantos	Citibank	Lan Chi	Cementos E
Congreso (Valp		1,0	1,0	1,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	4,0
Mars (Valpara			1,0	1,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	4,0
SSVS (Valparai				1,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	4,0
Armada (Valpar					2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	4,0
BCI (Santiago)						1,0	1,0	1,0	1,0	7,0
IBM (Santiago)							1,0	1,0	1,0	7,0
Mantos Blanco								1,0	1,0	7,0
Citibank (Santi									1,0	7,0
Lan Chile (Sant										7,0
Cementos BIO-	Incon: I									

Figura 2.12: Sub-objetivo Comodidad en el lugar de estadía

Matrices de los cursos de acción para los sub-objetivo del objetivo  
Perspectiva Profesional:

	Congre	Mars	SSVS	Armada	BCI	IBM	Mantos	Citibank	Lan Chi	Cementos E
Congreso (Valc		2,0	3,0	3,0	5,0	6,0	2,0	2,0	3,0	2,0
Mars (Valpara			2,0	2,0	4,0	5,0	3,0	2,0	3,0	2,0
SSVS (Valparai				3,0	5,0	6,0	3,0	3,0	4,0	2,0
Armada (Valpar					3,0	4,0	2,0	2,0	3,0	2,0
BCI (Santiago)						2,0	4,0	3,0	4,0	5,0
IBM (Santiago)							5,0	4,0	5,0	6,0
Mantos Blanco								2,0	2,0	2,0
Citibank (Santi									3,0	2,0
Lan Chile (Sant										4,0
Cementos BIO-	Incon: I									

Figura 2.13: Sub-objetivo Prestigio de la empresa

	Congre	Mars	SSVS	Armada	BCI	IBM	Mantos	Citibank	Lan Chi	Cementos E
Congreso (Valp		2,0	3,0	3,0	5,0	6,0	2,0	2,0	3,0	2,0
Mars (Valpara			2,0	2,0	4,0	5,0	3,0	2,0	3,0	2,0
SSVS (Valparai				3,0	5,0	6,0	3,0	3,0	4,0	2,0
Armada (Valpai					3,0	4,0	2,0	2,0	3,0	2,0
BCI (Santiago)						2,0	4,0	3,0	4,0	5,0
IBM (Santiago)							5,0	4,0	5,0	6,0
Mantos Blanco								2,0	2,0	2,0
Citibank (Santi									3,0	2,0
Lan Chile (Sant										4,0
Cementos BIO-	Incon: I									

Figura 2.14: Sub-objetivo Lograr un amplio aprendizaje

	Congre	Mars	SSVS	Armada	BCI	IBM	Mantos	Citibank	Lan Chi	Cementos E
Congreso (Valp		1,0	2,0	1,0	5,0	4,0	1,0	2,0	1,0	1,0
Mars (Valpara			2,0	1,0	6,0	5,0	1,0	2,0	1,0	1,0
SSVS (Valparai				2,0	4,0	3,0	2,0	2,0	2,0	2,0
Armada (Valpai					5,0	4,0	2,0	2,0	1,0	1,0
BCI (Santiago)						2,0	4,0	3,0	4,0	5,0
IBM (Santiago)							5,0	4,0	5,0	6,0
Mantos Blanco								2,0	1,0	1,0
Citibank (Santi									2,0	2,0
Lan Chile (Sant										1,0
Cementos BIO-	Incon: I									

Figura 2.15: Sub-objetivo Trabajar en el área de interés

	Congre	Mars	SSVS	Armada	BCI	IBM	Mantos	Citibank	Lan Chi	Cementos E
Congreso (Valp		2,0	1,0	2,0	5,0	3,0	1,0	1,0	1,0	4,0
Mars (Valpara			1,0	1,0	4,0	3,0	1,0	1,0	1,0	3,0
SSVS (Valparai				1,0	3,0	2,0	1,0	1,0	1,0	2,0
Armada (Valpai					4,0	3,0	1,0	1,0	1,0	2,0
BCI (Santiago)						2,0	4,0	5,0	4,0	5,0
IBM (Santiago)							2,0	3,0	2,0	3,0
Mantos Blanco								1,0	1,0	2,0
Citibank (Santi									1,0	2,0
Lan Chile (Sant										1,0
Cementos BIO-	Incon: I									

Figura 2.16: Sub-objetivo Posibilidad de trabajo en el futuro

## 2.2. EJEMPLO: RESOLUCIÓN MEDIANTE SOFTWARE EXPERT CHOICE37

	Congre	Mars	SSVS	Armada	BCI	IBM	Mantos	Citibank	Lan Chi	Cementos E
Congreso (Valparaíso)		1,0	1,0	2,0	4,0	6,0	1,0	1,0	2,0	1,0
Mars (Valparaíso)			1,0	1,0	4,0	5,0	1,0	1,0	1,0	1,0
SSVS (Valparaíso)				2,0	5,0	6,0	2,0	2,0	2,0	1,0
Armada (Valparaíso)					3,0	4,0	2,0	2,0	2,0	2,0
BCI (Santiago)						2,0	3,0	4,0	3,0	4,0
IBM (Santiago)							4,0	5,0	4,0	5,0
Mantos Blancos (Santiago)								2,0	2,0	1,0
Citibank (Santiago)									2,0	2,0
Lan Chile (Santiago)										1,0
Cementos B10-B1	Incon:									

Figura 2.17: Sub-objetivo: Conocer nuevas tecnologías

### Resultados:

Después de llenar la información correspondiente a las matrices relacionales y de cursos de acción, los resultados obtenidos son los siguientes:

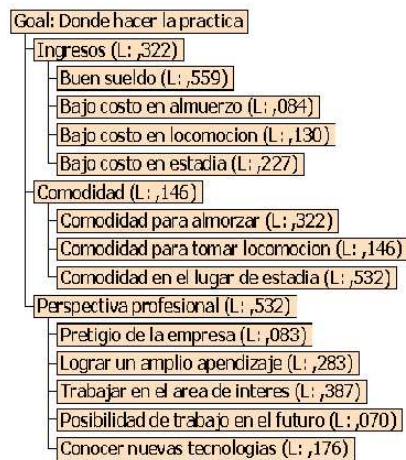


Figura 2.18: Resumen General de Resultados(1)

Estos resultados se aprecian más claramente en el siguiente cuadro:

Congreso (Valparaiso)	.053
Marss (Valparaiso)	.094
SSVS (Valparaiso)	.059
Armada (Valparaiso)	.074
BCI (Santiago)	.175
IBM (Santiago)	.166
Mantos Blancos (Santiago)	.091
Citibank (Santiago)	.090
Lan Chile (Santiago)	.081
Cementos BIO-BIO (Curico)	.111

Figura 2.19: Resumen General de Resultados(2)

### Análisis de Sensibilidad:

Expert Choice provee los siguientes tipos de gráficos mediante los cuales es posible realizar de forma visual y sencilla el análisis de sensibilidad de los resultados obtenidos.

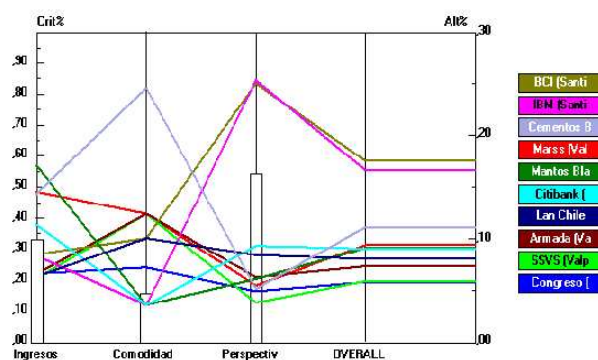


Figura 2.20: Gráfico de Análisis de Sensibilidad(1)

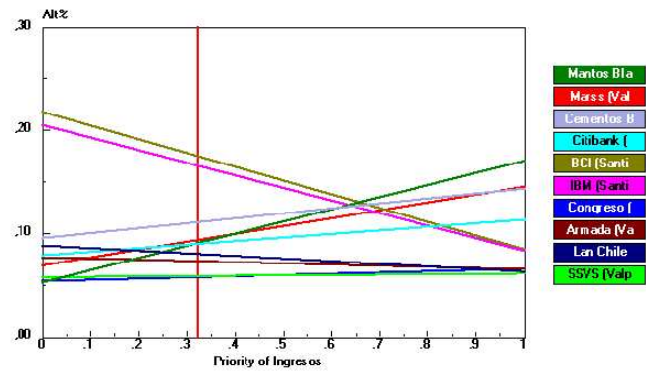


Figura 2.21: Gráfico de Análisis de Sensibilidad(2)

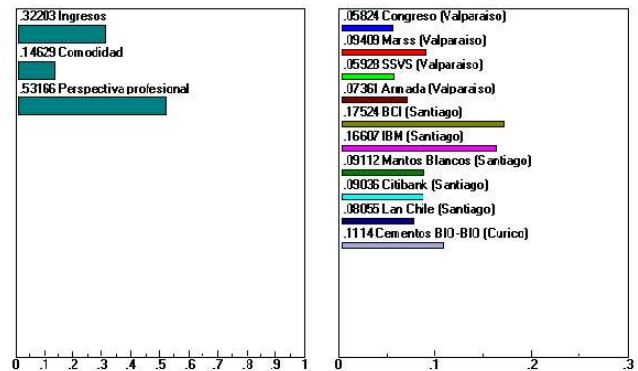


Figura 2.22: Gráfico de Análisis de Sensibilidad(3)



## Capítulo 3

# Problemas con Múltiples Objetivos

### 3.1. Optimalidad de Pareto

En problemas con múltiples objetivos se buscan soluciones óptimas de Pareto.

**Definición: Solución Dominada**

Sea  $B$  solución factible,  $B$  domina a una solución factible  $A$  para un problema con múltiples objetivos si  $B$  es al menos tan bueno como  $A$  con respecto a cada objetivo y estrictamente mejor que  $A$  con respecto al menos a un objetivo.

Luego las soluciones **No** dominadas formarán el conjunto de Pareto.

**Ejemplo**

■ **Problema**

Se tiene un problema con dos objetivos: Maximizar Ganancia ( $f1$ ) y Minimizar Contaminación ( $f2$ ).

$$f1(x) = 10 \cdot X1 + 9 \cdot X2 + 8 \cdot X3$$

$$f2(x) = 10 \cdot X1 + 6 \cdot X2 + 3 \cdot X3$$

Restricciones:

$$4 \cdot X1 + 3 \cdot X2 + 2 \cdot X3 \leq 1300 \quad (\text{horashombre})$$

$$3 \cdot X1 + 2 \cdot X2 + 2 \cdot X3 \leq 1000 \quad (\text{unidades})$$

$$Xi \geq 0$$



■ **Solución**

Para encontrar el conjunto de soluciones de Pareto se debe:

- **Paso 1:** Resolver el problema considerando un sólo objetivo (ej  $f_1$ ). Esta solución es la cota superior para el objetivo 2.
- **Paso 2:** Resolver el problema anterior incorporando una restricción  $f_2(x) \leq$  cota superior encontrada en el **Paso 1**.
- **Paso 3:** Disminuir el valor de la cota superior y resolver nuevamente el problema.
- **Paso 4:** Dibujar la curva resultante.

## Capítulo 4

# Teoría de Juegos

### 4.1. Juego de 2 Personas, Suma cero: Puntos de Equilibrio

**Idea:** La decisión de Un jugador afecta la ganancia del Otro.

**Supuestos:**

1. Dos jugadores (1 fila, 1 columna).
2. Jugador-fila debe elegir entre  $1, 2, \dots, m$  cursos de acción. Jugador-columna debe elegir entre  $1, 2, 3, \dots, n$  cursos de acción.
3. Si el Jugador-fila elige la  $i$ -ésima estrategia y el Jugador-columna elige la  $j$ -ésima estrategia, el Jugador-fila recibe un retorno de  $A_{ij}$  y el jugador columna pierde una cantidad  $A_{ij}$ . Es decir, la ganancia del Jugador-fila viene de la pérdida del Jugador-columna.
4. Hay Conflicto de Intereses.
5. No hay Cooperación entre Jugadores.

**Ejemplo**

■ **Problema**

fila/columna	e1	e2	e3	
E1	4	4	10	4
E2	2	3	1	1
E3	6	5	7	5
	6	5	10	

¿Cómo debería jugar el Jugador-fila?

### ■ Solución

Idea: Elegir el  $Max(4, 1, 5)$ , luego elegir  $E3$ . Con esto se asegura de ganar al menor 5 unidades.

Desde el punto de vista del Jugador-columna buscará el  $Min(6, 5, 10)$ , luego  $e2$ .

El valor del juego para ambos jugadores es de 5, ya que la condición es suma cero será igual al punto de equilibrio.

### Condición de Punto de Equilibrio:

$$Max(Min \text{ fila}) = Min(Max \text{ columna})$$

## 4.2. Juego de 2 Personas, Suma constante

**Idea:** La decisión de Un jugador afecta la ganancia del Otro.

### Supuestos:

1. Dos jugadores (1 fila, 1 columna).
2. Jugador-fila debe elegir entre  $1, 2, \dots, m$  cursos de acción. Jugador-columna debe elegir entre  $1, 2, 3, \dots, n$  cursos de acción.
3. Si el Jugador-fila elige la  $i$ -ésima estrategia y el Jugador-columna elige la  $j$ -ésima estrategia, el Jugador-fila recibe un retorno de  $A_{ij}$  y el jugador columna pierde una cantidad  $c - A_{ij}$ , donde  $c$  es un valor constante. Es decir, la ganancia del Jugador-fila viene de la pérdida del Jugador-columna.
4. Hay Conflicto de Intereses.
5. No hay Cooperación entre Jugadores.
6. Suma Constante  $c$ .

### Ejemplo

#### ■ Problema

Dos cadenas de TV están tratando de captar una audiencia de 100,000,000 telespectadores en el horario 20h00-22h00. Para ello publicitarán sus emisiones. Las posibles opciones y el número de espectadores esperado está indicado en la tabla 4.2

	e1	e2	e3	
E1	35	15	60	15
E2	45	58	50	45
E3	38	14	70	14
	45	58	70	

donde

$$\begin{aligned} e1 &= E1 = \text{Película de Acción} \\ e2 &= E2 = \text{Opera} \\ e3 &= E3 = \text{Conversación} \end{aligned}$$

¿Tiene Punto de Equilibrio? ¿Cuál es el valor del juego?

#### ■ Solución

Elegir el  $Max(15, 45, 14)$ , luego elegir  $E2$ . Con esto se asegura de ganar al menos 45,000,000 telespectadores. Desde el punto de vista del Jugador-columna buscará el  $Min(45, 58, 70)$ , luego  $e1$ .

El valor del juego para el Jugador-fila es 45 y para el Jugador-columna es  $100 - 45 = 55$ . Tiene un punto de equilibrio de 45.

### 4.3. Juegos de 2 Personas sin Punto de Equilibrio

#### Ejemplo

#### ■ Problema

2 Jugadores tienen dos banderas cada uno. El juego consiste en sacar una o dos banderas en un instante dado. Si la suma de las banderas es impar el jugador  $J1$  gana, si la suma es par el jugador  $J2$  gana.

#### ■ Solución

Veamos la matriz de retorno (Tabla 4.3)

J1 / J2	Mostrar 1	Mostrar 2	
Mostrar 1	-1	+1	-1
Mostrar 2	+1	-1	-1
	+1	+1	

captionMatriz de retorno

$$\begin{aligned}\text{Max}(\text{Min fila}) &= -1 \\ \text{Min}(\text{Max columna}) &= +1\end{aligned}$$

Luego no hay punto de equilibrio. En estos casos se recurre a *Estrategias Aleatorias*:  
Sea

$$\begin{aligned}X1 &= \text{probabilidad que } J1 \text{ saque 1 bandera} \\ X2 &= \text{probabilidad que } J1 \text{ saque 2 banderas} \\ Y1 &= \text{probabilidad que } J2 \text{ saque 1 bandera} \\ Y2 &= \text{probabilidad que } J2 \text{ saque 2 banderas}\end{aligned}$$

Obviamente  $X1 + X2 = 1$ , análogamente  $Y1 + Y2 = 1$ .

Estrategia Mixta: Si  $X1 + X2 = 1$

Estrategia Pura: Si existe  $X1 = 1$

Ganancia esperada del jugador  $J1$  si el jugador  $J2$  saca 1 bandera:

$$(-1) \cdot X1 + (+1) \cdot X2$$

$$-X1 + (1 - X1) = 1 - 2 \cdot X1$$

Ganancia esperada del jugador  $J1$  si el jugador  $J2$  saca 2 banderas:

$$(+1) \cdot X1 + (-1) \cdot X2$$

$$X1 - (1 - X1) = 2 \cdot X1 - 1$$

La figura 4.1 muestra un gráfico de ambas rectas, donde se aprecia que con una estrategia  $X1 = \frac{1}{2}$ ,  $X2 = \frac{1}{2}$ , el jugador  $J1$  se asegura un *piso*, es decir, ganará siempre al menos *cero*.

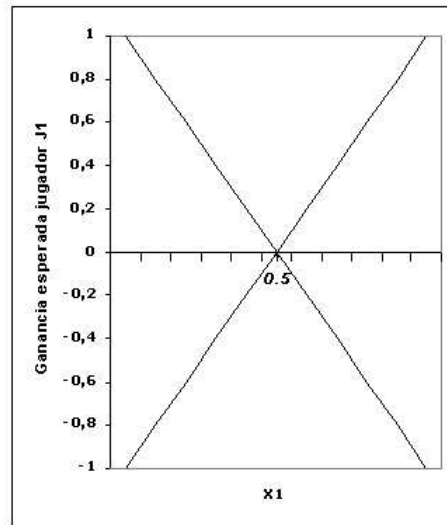


Figura 4.1: Ganancia esperada jugador J1

Siguiendo el mismo procedimiento para  $J2$ , observamos que con una estrategia  $Y_1 = \frac{1}{2}$ ,  $Y_2 = \frac{1}{2}$ , el jugador  $J2$  se asegura un *techo*, es decir, su pérdida esperada no excederá *cero*. Vea figura 4.2.

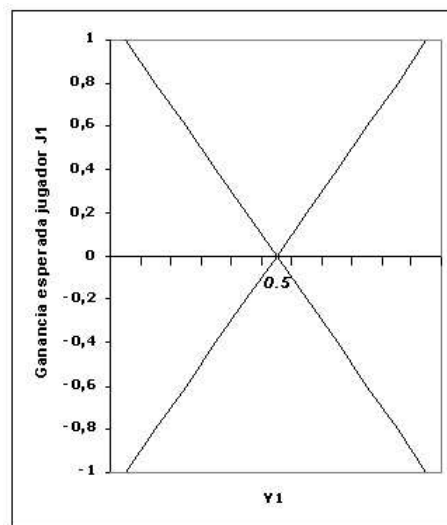


Figura 4.2: Ganancia esperada jugador J1

**Observación:** Si  $J1$  parte con su estrategia óptima, el jugador  $J2$  puede tener una estrategia que reduce el retorno esperado de  $J1$ , y si el jugador  $J2$  parte con su estrategia óptima el jugador  $J1$  puede tener una estrategia que aumente su retorno esperado sobre el valor del juego.

#### 4.4. Juegos de 2 Personas con Suma no Constante: Dilema del Prisionero

##### ■ Problema

Dos prisioneros quienes escaparon y participaron de un robo han sido recapturados. Aunque ambos son culpables la policía de ciudad Gótica no tiene suficiente evidencia. Para esclarecer se les va a someter a un interrogatorio más exhaustivo. El detective le cuenta a cada prisionero lo siguiente: “Si sólo uno de Uds. confiesa y acusa a su compañero, la persona que confiese saldrá libre, mientras que la persona que no confiesa será condenada a 20 años de cárcel. Si ambos confiesan ambos serán condenados a prisión por 5 años. Finalmente, si ninguno confiesa yo puedo hacerlos condenar por 1 año con las evidencias disponibles actualmente”. ¿Qué debería hacer cada prisionero?

##### ■ Solución

Si se asume que los prisioneros no se pueden comunicar entre ellos, las estrategias y los retornos para cada uno serían:

P1/P2	Confiesa	No Confiesa
Confiesa	(-5, -5)	(0, -20)
No Confiesa	(-20, 0)	(-1, -1)

Este no es un juego con suma constante.

Suponga que cada prisionero busca eliminar las estrategias dominantes. Para cada prisionero, la estrategia *confesar* domina la estrategia *no confesar*. Si cada prisionero sigue su estrategia no-dominante, cada uno pasará 5 años en la cárcel. Por otro lado, si cada prisionero escoge la estrategia dominada *no confesar* cada uno pasará sólo 1 año en prisión. Así, si cada prisionero elige su estrategia dominada, ambos estarían mejor que si ambos eligen la estrategia no dominada.

**Punto de Equilibrio:** Una elección de estrategia de cada jugador (prisionero) se llama punto de equilibrio si ninguno de los jugadores puede beneficiarse de un cambio unilateral de estrategia.

Así,  $(-5, -5)$  es un punto de equilibrio porque si algún prisionero cambia

su estrategia su retorno disminuye de -5 a -20. Sin embargo, les conviene el punto  $(-1, -1)$ . Para ver que  $(-1, -1)$  puede no ocurrir observemos que  $(-1, -1)$  no es punto de equilibrio porque al cambiar su estrategia cada prisionero puede aumentar su retorno desde -1 a 0. Luego, hay un aspecto importante a considerar en este tipo de juego: Si los jugadores están cooperando (si cada uno elige no confesar) cada jugador puede ganar por delatar a su oponente (suponiendo que el otro no cambia su estrategia). Si ambos se delatan ambos perderán mucho más que si eligen una estrategia cooperadora. Esta anomalía no se produce en el juego con suma constante, ¿por qué?

Formalmente el juego del prisionero se puede reescribir por:

$NC$  = acción no cooperativa

$C$  = acción cooperativa

$P$  = castigo por no cooperar

$S$  = ganancia de una persona que hace doble juego

$R$  = ganancia por cooperar si ambos cooperan

$T$  = castigo por traición del oponente.

En el problema  $(P, P)$  es un punto de equilibrio, para ello se requiere que  $P > S$ . Para que  $(R, R)$  no sea un punto de equilibrio se requiere que  $T > R$  (esto da a cada jugador la tentación de traicionar al oponente). El juego es razonable sólo si  $R > P$ . Luego se requiere que  $T > R > P > S$ .

El Juego del Dilema del Prisionero es interesante porque explica por qué dos adversarios llegan finalmente a cooperar.

#### 4.4.1. Aplicaciones del Dilema del Prisionero

##### Competencia de Mercado

Dos restaurants de ventas de completos **HotDog King** y **Hot Dog Chef** están estimando sus estrategias publicitarias para el próximo año. Los dos restaurant tienen ventas conjuntas de US \$ 240 millones y pueden gastar US \$ 6 ó US \$ 10 millones en publicidad. Si un restaurant gasta más que el otro, el restaurant que gasta más tendrá ventas de US \$ 190 millones. Si ambas compañías gastan la misma cantidad en publicidad tendrán ventas iguales. Cada dólar de venta da una ganancia de 10 centavos de dólar. Suponga que cada restaurant está interesado en maximizar (contribución de las ventas a las ganancias) - (costos de publicidad). Encuentre un punto de equilibrio para este juego.

La Matriz de Retorno nos queda:

HDK/HDC	Gasta 10	Gasta 6
Gasta 10	(2, 2)	(9, -1)
Gasta 6	(-1, 9)	(6, 6)



Identificando como acciones no cooperadoras el gastar 10, luego  $(2, 2)$  es un punto de equilibrio. Sin embargo ambos restaurants estarán mejor con  $(6, 6)$ . El problema es que  $(6, 6)$  es inestable porque cualquier restaurant puede ganar al cambiar su estrategia. Así para proteger su mercado compartido, cada restaurant debe invertir fuerte en publicidad.

### Carrera Armamental

Suponga dos países que están evaluando sus estrategias militares: desarrollar un nuevo misil o mantener el *status quo*. Se supone que si sólo una nación desarrolla un nuevo misil, la nación con el nuevo misil conquistará a la otra nación. En este caso, conquistar una nación trae una ganancia de 20 unidades y la nación conquistada pierde 100 unidades. Se asume también que el costo de desarrollar un nuevo misil es de 10 unidades. Identifique un punto de equilibrio para este juego.

Matriz de Retorno

País 1 / País 2	Nuevo	Status Quo
Nuevo	$(-10, -10)$	$(10, -100)$
Status Quo	$(-100, 10)$	$(0, 0)$

Identificando *desarrollar* como la acción no cooperadora y *mantenerse* como cooperadora encontramos que  $(-10, -10)$  es un punto de equilibrio. Sin embargo, aún cuando  $(0, 0)$  es mejor para ambas, es un punto inestable. Esto muestra como el balance de poder puede llevar a un desarrollo armamental.

### Swerve Game

Suponga que está en el Raid de Paris-Dakar. Dos competidores NN1 y NN2 decidieron jugar al Swerve Game. Ahora, están sobre una carretera desértica conduciendo en sentidos opuestos. Cada persona tiene dos estrategias: Virar o No Virar. Encontrar el punto de equilibrio para este juego.

Matriz de Retorno

NN1 / NN2	Vira	No Vira
Vira	$(0, 0)$	$(-5, 5)$
No Vira	$(5, -5)$	$(-100, -100)$

## Capítulo 5

# Teoría de Colas

### 5.1. Estructura de los Sistemas de Colas

En un sistema de colas se distinguen básicamente los siguientes componentes:

- Población
- Patrón de Llegada
- Largo de la Cola
- Disciplina de la Cola
- Patrón de Servicio
- Salida

Las estructuras de clases más comunes son las siguientes:

1. Un Canal / Una Fase

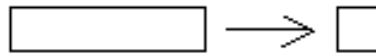


Figura 5.1: Un Canal / Una Fase

## 2. Un Canal / Múltiples Fases

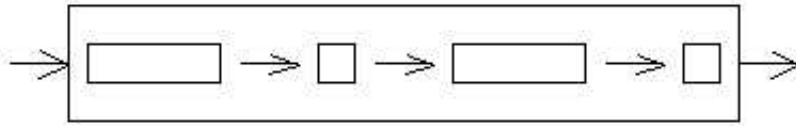


Figura 5.2: Un Canal / Múltiples Fases

## 3. Multicanal / Una Fase

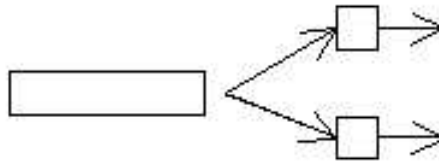


Figura 5.3: Multicanal / Una Fase

## 4. Multicanal / Múltiples Fases

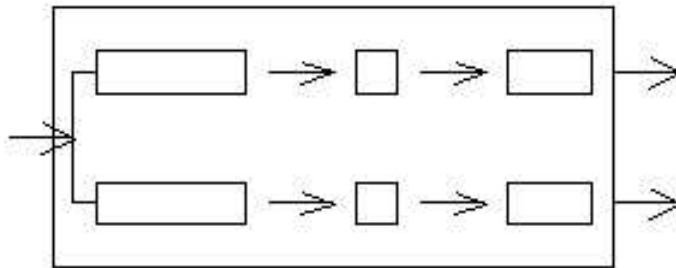


Figura 5.4: Multicanal / Múltiples Fases

## 5.2. Clasificación de los Sistemas de Colas

La nomenclatura de un sistema de colas tiene la siguiente forma:

*(Tasa de Llegada / Tasa de Servicio / Número de Servidores / Tamaño de la Población / Largo de la Cola)*

Por ejemplo, el caso más común es el siguiente:

$(M/M/1/I/I)$

que indica una Tasa de Llegada Poisson, una Tasa de Servicio exponencial, 1 Servidor y Tamaño de la Población y Largo de Cola infinitos.

Abreviaciones con supuesto FIFO:

$M$	Llegada Poisson, Servicio Exponencial
$D$	Determinística constante, llegada o servicio
$K$	Distribución <i>Erlang</i> del tiempo entre llegadas o servicio
$GI$	Cualquier distribución con tiempos entre llegadas independientes
$G$	Cualquier distribución del tiempo de servicio
$S$	Cualquier número de servidores
$I$	Infinito largo cola / población
$F$	Finito largo cola / población

Los casos utilizados más comúnmente son:

1.  $(M/M/1/I/I)$
2.  $(M/M/S/I/I)$
3.  $(M/M/1/I/F)$
4.  $(M/M/S/F/I)$

## 5.3. Proceso de Entrada

Supuestos:

- Proceso de Nacimiento Puro: Los clientes llegan y no abandonan
- Si las llegadas siguen un proceso de Poisson, esto implica que:

1. La probabilidad de una ocurrencia entre  $t$ , y  $t + h$  sólo depende del ancho del intervalo  $h$ .
  2. Con  $h$  muy pequeño a lo más puede ocurrir una llegada en el intervalo  $(t, t + h)$ .
- Disciplina FIFO
  - Número de Ocurrencias se distribuye Poisson parámetro  $\lambda t$ , con  $\lambda$  igual a la tasa de llegada por unidad de tiempo.
  - Tiempo entre llegadas se distribuye exponencial con parámetro  $\lambda$ .
  - Tiempo hasta la  $n$ -ésima llegada se distribuye  $\Gamma$  con parámetros  $(n, \frac{1}{\lambda})$ .

### 5.3.1. Llegadas

La teoría de colas se sustenta en el supuesto de que las llegadas de clientes al sistema siguen un *Proceso Poisson*, esto significa que:

Si  $X_t$  = número de llegadas en un intervalo  $t$ ,  $X_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ , luego se trata de una variable aleatoria discreta con la siguiente probabilidad:

$$P(X_t = x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}$$

luego,

$$E[X_t] = \lambda t$$

que representa el número promedio de ocurrencias en el intervalo  $t$  y  $\lambda = \frac{E[X_t]}{t}$  es el número promedio de ocurrencias por unidad de tiempo.

### 5.3.2. Tiempo entre llegadas

Considerando que las llegadas siguen un proceso de Poisson, vamos a determinar cuál es la distribución del tiempo entre llegadas.

Sea  $T_1$  el instante de tiempo de la primera llegada, y sea  $t$  un instante de tiempo menor.  $T_1$  se puede interpretar como el tiempo necesario para que suceda una ocurrencia, luego

$$P(T_1 > t) = P(\text{Número de ocurrencias hasta } t \text{ sea } 0)$$

$$P(T_1 > t) = P(X_t = 0) = e^{-\lambda t}$$

luego,

$$P(T_1 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

La que corresponde a la función acumulada de una distribución exponencial, luego  $T_1$  se distribuye  $\exp(\lambda)$

Analizando ahora el tiempo necesario hasta la segunda ocurrencia. Sea  $Y_t$  el

número de ocurrencias en el intervalo  $[T_1, T_2]$ , con  $T$  un instante de tiempo dentro de ese intervalo. Luego,

$P(T > t) = P(\text{no hay ocurrencias entre } T_1 \text{ y } T_1 + t, \text{ es decir, durante el intervalo } t)$

$$p(T > t) = P(X_t = 0) = e^{-\lambda t}$$

Así  $T \sim \exp(\lambda)$ .

### 5.3.3. Tiempo Acumulado

Idea: Si el Tiempo hasta la  $n$ -ésima ocurrencia es mayor que un tiempo  $t$  dado, implica que hasta  $t$  han ocurrido sólo  $n - 1$  ocurrencias.

$$P(T_n > t) = P(X_t \leq n - 1)$$

$$P(T_n > t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i e^{-\lambda t}}{i!}$$

Aproximando la sumatoria por la integral se obtiene que  $T_n \sim \Gamma(n, \lambda^{-1})$ . Recordemos que una distribución exponencial con parámetro  $\lambda$  es equivalente a una distribución  $\Gamma$  con parámetros  $(1, \lambda^{-1})$

## 5.4. Proceso de Salida

Supuestos:

- Fallecimiento Puro: No pueden reingresar al sistema
- Tasa de salida =  $\mu$  = Número de clientes servidos por unidad de tiempo

### 5.4.1. Tiempo de Servicio

Si  $Z$  es el tiempo de servicio,  $Z \sim \exp(\mu)$

### 5.4.2. Número de Unidades Servidas durante el tiempo $t$

Sea  $Y_t$  el número de unidades servidas durante  $t$ , luego  $Y_t \sim \text{Poisson}(\mu t)$ .

## 5.5. Estado Estacionario

En estado estacionario las medidas de interés de desempeño del sistema a calcular son:

- Utilización del servidor
- Probabilidad de cero clientes en el sistema

- Probabilidad de  $n$  clientes en el sistema
- Número promedio en el sistema
- Número promedio en la cola
- Tiempo promedio de espera en la cola
- Tiempo promedio en el sistema
- Probabilidad de que una unidad tenga que esperar por servicio

### 5.6. Sistemas con una sola Cola, Población Infinita: Estadísticas en Estado Estacionario

Restricción:  $\rho \leq 1$

- $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$
- $P(0) = 1 - \rho$
- $P(n) = \rho^n \cdot (1 - \rho)$
- $L_q = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$
- $L_s = \frac{\rho}{1 - \rho} = L_q + \rho$
- $W_q = \frac{L_q}{\lambda}$
- $W_s = \frac{1}{\mu - \lambda}$

### 5.7. Sistemas con Múltiples Servidores

Restricción:  $\mu_i = \mu, \forall i$

- $\rho = \frac{\lambda}{k \cdot \mu}$
- $\frac{1}{P(0)} = \sum_{n=0}^{k-2} \frac{(p \cdot k)^n}{n!} + \frac{(p \cdot k)^{k-1}}{(k-1)! \cdot (1-\rho)}$
- $$P(n) = \begin{cases} (\rho \cdot k)^{\frac{n}{k}} \cdot P(0) & , \text{ si } n \leq k \\ \rho^n \cdot k^{\frac{k}{k!}} \cdot P(0) & , \text{ si } n \geq k, \end{cases}$$
- $L_q = \frac{\rho^{k+1} \cdot k^{k-1}}{(k-1)! \cdot (1-\rho)^2} \cdot P(0)$
- $L_s = L_q + \rho \cdot k$
- $W_q = \frac{L_q}{\lambda}$
- $W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L_s}{\lambda}$

## 5.8. Colas con Prioridades

Idea:

- Entre clases existen prioridades
- Dentro de cada clase se rige mediante FIFO

Los supuestos son los mismos que en el modelo anterior excepto que las unidades que llegan no son tratadas como iguales. Se dividirán las unidades en  $m$  clases de acuerdo a una regla de prioridad. Cualquier unidad que llegue y que pertenece a una clase con mayor prioridad precederá a la clase de menor prioridad. Las unidades que forman cada clase se rigen por orden de llegada (FIFO).

Un ejemplo de este tipo de colas se presenta en aquellos programas procesados por facilidades de procesamiento de datos o la clasificación de correspondencia en el correo.

### 5.8.1. Fórmulas Matemáticas

Sea

- $m$  = número de clases con prioridad.
- $\lambda_i, \mu_i, \sigma_i, \rho_i, L_q(i), W_q(i), L_s(i)$  y  $W_s(i)$  son las características de la cola para las clases  $i = 1 \dots m$ .
- $\lambda$  = número total de unidades que llegan por hora, día o semana.
- $W_q$  = tiempo esperado de espera de un cliente *típico*.

$$S_j = \sum_{i=1}^j \rho_i, \text{ con } S_0 = 0$$

- $W_s$  = tiempo esperado que permanece un cliente *típico* en el sistema.

Por lo tanto, en estado estacionario, las clases  $i$  tienen las siguientes prioridades:

1.  $\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$

- 2.

$$W_q(i) = \frac{\sum_{j=1}^m (\rho_j^2) \cdot (1 + \mu_j^2 \cdot \sigma_j^2) / \lambda_j}{2 \cdot (1 - S_{i-1}) \cdot (1 - S_i)}$$

3.  $W_s(i) = W_q(i) + \frac{1}{\mu_i}$

4.  $L_q(i) = \lambda_i \cdot W_q(i)$

5.  $L_s(i) = \lambda_i \cdot W_s(i)$



Las características del sistema completo se obtienen a partir de las clases individuales:

1.  $\lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i$
2.  $L_q = \sum_{i=1}^m L_q(i)$
3.  $L_s = \sum_{i=1}^m L_s(i)$
4.  $W_q = \frac{L_q}{\lambda}$
5.  $W_s = \frac{L_s}{\lambda}$

### Ejemplo

#### ■ Problema:

Suponga que para tomar un tren se venden boletos de dos clases. Se ha observado que para la primera clase  $\lambda_1 = 20$  y  $\lambda_2 = 60$  para los pasajeros de segunda clase cada hora.

La ventanilla opera con  $\mu_1 = 60$  para primera clase y  $\mu_2 = 120$  para la segunda clase cada hora. En otras palabras, el tiempo promedio de servicio es  $\frac{1}{60}$  [horas], es decir, 1 [min] para procesar a un pasajero de primera clase y sólo  $\frac{1}{2}$  [min] para los pasajeros de segunda clase (esto es porque los pasajeros de segunda clase pagan con sencillo y generalmente el valor justo del pasaje).

Se tiene además que:

$$\sigma_1 = 0,85[\text{min}] = 0,141[\text{horas}]$$

$$\sigma_2 = 0,38[\text{min}] = 0,0063[\text{horas}]$$

#### ■ Solución:

Veamos las características de operación de la ventanilla:

$$\rho_1 = \frac{20}{60} = 0,33$$

$$S_1 = \rho_1 = 0,33$$

$$\frac{(\rho_1)^2 \cdot (1 + (\mu_1^2) \cdot (\sigma_1^2))}{\lambda_1} = 0,0959$$

$$\begin{aligned} W_q(1) &= \frac{0,0956 + 0,0657}{2 \cdot (1 - 0,33)} \\ &= 0,121[\text{horas}] \\ &= 0,73[\text{min}] \end{aligned}$$

$$W_s(1) = 0,0121 + \frac{1}{60} = 0,0288[\text{horas}] = 1,73[\text{min}]$$

$$L_q(1) = 20 \cdot (0,0121) = 0,24[\text{pasajeros}]$$

$$L_s(1) = 20 \cdot (0,0288) = 0,58[\text{pasajeros}]$$

$$\rho_2 = \frac{60}{120} = 0,5$$

$$S_2 = \rho_1 + \rho_2 = 0.833$$

$$\frac{(\rho_2)^2 * (1 + (\mu_2^2) * (\sigma_2^2))}{\lambda_2} = 0,0657$$

$$\begin{aligned} W_q(2) &= \frac{0,00956}{2 \cdot (0,6667) \cdot (0,1667)} \\ &= 0,0725[\text{horas}] \\ &= 4,35[\text{min}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_s(2) &= 0,0725 + \frac{1}{120} = 0,0808[\text{horas}] = 4,85[\text{min}] \\ L_q(2) &= 60 \cdot (0,0725) = 4,35[\text{pasajeros}] \\ L_s(2) &= 60 \cdot (0,0808) = 4,85[\text{pasajeros}] \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} L_q &= 0,24 + 4,35 \\ &= 4,59 \quad (\text{pasajeros en espera}) \\ L_s &= 5,43 \quad (\text{pasajeros en el sistema}) \\ \lambda &= 20 + 60 \\ &= 80 \quad (\text{pasajeros llegan por hora}) \end{aligned}$$

Un pasajero típico espera

$$\begin{aligned} W_q &= \frac{L_q}{\lambda} = \frac{4,59}{80} \\ &= 0,0574[\text{horas}] \\ &= 3,44[\text{min}] \\ W_s &= \frac{L_s}{\lambda} = \frac{5,43}{80} \\ &= 0,0679[\text{horas}] \\ &= 4,07[\text{min}] \end{aligned}$$

## 5.9. Colas con Restricciones

Vamos a analizar dos modelos que utilizan los siguientes supuestos:

1. El proceso de llegada es Poisson
2. Tiempos de Servicios son Exponencial
3. Disciplina FIFO

El primer modelo asume que el largo de la cola es  $\infty$ .

### 5.9.1. Sistemas Poisson Exponencial con pocas llamadas (llegadas)

En algunos casos los clientes que llegan al sistema son pocos, con lo cual el sistema básico Poisson-exponencial no se puede aplicar. Específicamente, la probabilidad de que una unidad necesitará servicio no es constante, ésta ahora depende del número de unidades en el sistema. En otras palabras se cuenta con una población finita.

#### Ejemplo

■ **Problema:** Comportamiento de los pacientes de un Hospital.

■ **Solución:**

Sea

$M$  = número de clientes en la población

$\lambda$  = tasa media de llegada de cada unidad individual

$k$  = número de canales.

Luego

$$\frac{1}{P(0)} = \sum_{n=0}^{k-1} \binom{M}{n} \cdot R^n + \frac{M!}{k!} \cdot \sum_{n=k}^M \frac{R^n}{(M-n)! \cdot k^{n-k}}$$

, donde  $R = \frac{\lambda}{\mu}$ , y  $\binom{M}{n}$  corresponde al número de combinaciones posibles en que se pueden tener  $n$  clientes provenientes de un población de tamaño  $M$ .

Como  $P(0)$  es conocido

$$P(n) = \begin{cases} \binom{M}{n} \cdot R^n \cdot P(0) & , \text{cuando } 0 \leq n \leq k \\ \frac{M! \cdot R^n \cdot P(0)}{(M-n)! \cdot k! \cdot k^{n-k}} & , \text{cuando } k \leq n \leq M, \end{cases}$$

$$L_s = \sum_{n=1}^M n \cdot P(n)$$

Las unidades  $L_s$  que están en el sistema en ese momento no están en la población.

La tasa efectiva de llegada es  $\lambda_e = \lambda \cdot (M - L_s)$ .

Además

- $W_s = \frac{L_s}{\lambda_e}$
- $W_q = W_s - \frac{1}{\mu}$
- $L_q = \lambda_e \cdot W_q$

### 5.9.2. Propiedades de un sistema con un sólo canal

$k = 1$

1.

$$\frac{1}{P(0)} = M! \cdot \sum_{n=0}^M M \frac{R^n}{(M-n)!}$$

2.  $P(n) = \frac{M!}{(M-n)!} \cdot R^n \cdot P(0)$

3.  $L_q = M - \frac{\lambda + \mu}{\lambda} \cdot (1 - P(0))$

4.  $L_s = L_q + 1 - P(0)$

5.  $\lambda_e = \lambda \cdot (M - L_s) = \mu \cdot (1 - P(0))$

6.  $W_q = \frac{L_q}{\lambda_e}$

7.  $W_s = \frac{L_s}{\lambda_e}$

#### ■ Problema:

Pedro utiliza en su planta maquinaria anticuada. Cuando las 5 máquinas operan correctamente los resultados son únicos y hermosos. Sin embargo, él sabe que en promedio cada máquina necesita ser reacondicionada por cada hora de su operación, y que el proceso de ajuste requiere en promedio 20[*min*]. Quizás él necesite un ayudante para repararlas ¿Cuáles con las características de operación para el grupo de 2 personas?

#### ■ Solución:

$M = 5$  máquinas

$k = 2$  reparadores

$\lambda = 1$  máquinas paradas por hora de operación

$\mu = 3$  reparaciones cada hora  $\Rightarrow R = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{P(0)} &= 1 + \binom{5}{1} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5!}{2!} \cdot \left\{ \frac{(\frac{1}{3})^2}{3! \cdot 2^0} + \frac{(\frac{1}{3})^3}{2! \cdot 2^1} + \frac{(\frac{1}{3})^4}{1! \cdot 2^2} + \frac{(\frac{1}{3})^5}{0! \cdot 2^3} \right\} \\ &= 4,5489 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(0) &= 0,2198 \\
P(1) &= \binom{5}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,2198 = 0,3664 \\
P(2) &= \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 0,2198 = 0,2443 \\
P(3) &= 0,1212 \\
P(4) &= 0,0407 \\
P(5) &= 0,0068
\end{aligned}$$

$$L_s = 1 \cdot 0,3664 + 2 \cdot 0,2443 + 3 \cdot 0,1212 + 4 \cdot 0,0407 + 5 \cdot 0,0068 = 1,42$$

$$\begin{aligned}
\lambda_e &= \frac{1}{5-1,42} = 3,58 \\
W_s &= \frac{1,42}{3,58} = 0,40 \\
W_q &= 0,40 - \frac{1}{3} = 0,06 \\
L_q &= 0,06 \cdot 3,58 = 0,21
\end{aligned}$$

Como  $P(0) = 0,2198$  implica que existe un 21.98 % de probabilidad que Pedro y su ayudante esten sin trabajo que reparar. En una hora típica 1,42 máquinas están en el taller de reparación y cada máquina permanece en promedio 1.4 [horas]  $\cong 24$  [min].

Cuando una máquina necesita un ajuste, ésta debe esperar (antes de ser atendida) 0.06 [horas] = 3.6 [min]. La línea de espera tiene un promedio de 0.21 máquinas.

### 5.9.3. Sistemas Poisson Exponencial con un sólo canal con cola truncada

Pueden existir 2 razones para limitar el largo de la cola.

1. La cola se limita sola, llega un momento en que ninguna persona desea ponerse a una cola con un largo excesivo.
2. Los sistemas de servicio limitados físicamente, por ejemplo, la sala de espera en un centro médico.

#### Propiedades en Estado Estacionario

Sea

$M$  = número máximo de unidades llegando al sistema, por lo tanto, el largo máximo de la cola será  $M - 1$

$$R = \frac{\lambda}{\mu}$$

1.  $P(0) = \frac{1-R}{1-R^{M+1}}$
2.  $P(n) = R^n \cdot P(0)$

$$3. \quad L_s = \frac{R}{1-R} - \frac{(M+1) \cdot (R^{M+1})}{1-R^{M+1}}$$

$$4. \quad L_q = L_s + P(0) - 1$$

$$5. \quad \lambda_e = \lambda \cdot (1 - P(M))$$

$$6. \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda_e}$$

$$7. \quad W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

donde  $\lambda_e$  corresponde a la tasa de llegada efectiva.

Ya que a lo más pueden haber  $M$  unidades en el sistema,  $P(M)$  es la probabilidad que el sistema esté lleno, es decir, una unidad llegando en ese estado no podrá ingresar al sistema.

Por lo tanto,  $1 - P(M)$  = probabilidad de que una unidad pueda entrar al sistema.

Y como los clientes varían entre 0 y  $M$ , entonces

$$\sum_{n=0}^M P(n) = 1$$

$$\Rightarrow P(0) = \frac{1-R}{1-R^{M+1}}$$

En el caso en que  $\lambda = \mu$  todos los estados son igualmente probables, en este caso:

$$P(0) = \frac{1}{M+1}$$

$$L_s = \frac{M}{2}$$

Ahora si  $\lambda$  excede a  $\mu$  se tendrá que el sistema llegará a saturarse con  $L_s \cong M$  y  $P(M) \cong 1$ .

## 5.10. Ejercicios Propuestos

### 1. El Problema de Rafael

- I Parte Los clientes llegan al negocio de Rafael según una distribución Poisson. El almacén abre a las 8h00 y los Martes en la mañana entre las 8h00 y las 9h00 llegan en promedio 6 clientes al almacén. Rafael se juntó a ver un partido con unos amigos el día Lunes en la noche, por eso le gustaría dormir una media hora más el Martes en la mañana. El sabe que si abre muy tarde puede perder muchos clientes por dejar de ganar por la venta perdida. Para tomar una buen decisión quiere ver una forma de estimar el número de clientes que llegarán entre las 8h00 y las 8h30 el martes y así estimar la eventual pérdida.

- II Parte Rafael estimó que se demora 4 minutos en servir a un cliente en su negocio y los tiempos de servicio siguen una distribución exponencial. Rafael tiene una cita importante así es que desea encontrar la probabilidad que se tomará menos de tres minutos en servir al siguiente cliente.
2. Problema de una Zapatería El dueño de una zapatería recibió un reclamo de un cliente por el servicio recibido. Se sabe que los clientes llegan en promedio uno cada 12 minutos según un proceso de Poisson. El vendedor estima que puede servir un cliente en un promedio de 8 minutos y que su tiempo de servicio sigue una distribución exponencial. El vendedor siempre termina de atender un cliente antes del siguiente. El dueño desea determinar las medidas de desempeño del sistema actual, para evaluar la veracidad de lo que dice su cliente.
  3. Consultas al Ayudante Un curso de investigación de mercado tiene una sesión de laboratorio donde los estudiantes diseñan cuestionarios. Los alumnos tienen un ayudante para sus dudas. Un estudiante con una pregunta *volverá después* si hay 3 antes en la cola de espera. Hay un promedio de cuatro estudiantes por hora que acuden a hacer alguna pregunta en un promedio de 12 [min]. Suponga que es un número ilimitado de estudiantes.
    - a) ¿Cuántos estudiantes en promedio estará en la cola de espera?
    - b) ¿Cuál es la tasa efectiva de llegada?
    - c) ¿Cuánto tiempo está con la duda un típico estudiante?

## Capítulo 6

# Modelos de Redes de Colas

### 6.1. Tipos de Redes de Colas

#### 6.1.1. Redes Abiertas

En una red de colas abierta, los clientes llegan desde el exterior, circulan en la red pasando por diferentes estaciones y luego abandonan la red. El número de clientes que se puede encontrar en un momento dado en una red abierta es ilimitado. Con el fin de especificar completamente una red abierta, se requiere caracterizar cada estación, así como el proceso de llegada de los clientes y la ruta de los clientes en la red.

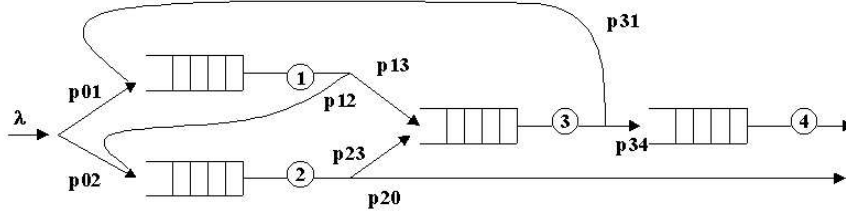


Figura 6.1: Red de Colas Abierta

1. **Procesos de Llegada** El proceso de llegada de los clientes a la red se describirá (igual que en el caso de una cola simple) con la ayuda de un proceso de renovación, y estará caracterizado por la distribución del tiempo entre llegadas. Si la llegada de los clientes sigue un proceso de Poisson, los tiempos entre llegadas son exponenciales y están caracterizados por un único parámetro: la tasa de llegada  $\lambda$ . Se requiere además precisar, una vez que un cliente llega a la red, en cuál fila se ubicará. Normalmente se



caracteriza la ruta de entrada de una forma probabilista, sea  $p_{0i}$  la probabilidad de que un cliente que ingresa a la red vaya a la estación  $i$ . Así el proceso de llegada a la estación  $i$  será poisson con tasa  $p_{0i}$  veces  $\lambda$ .

2. **Ruteo de los clientes** Una vez que un cliente termina su servicio en una estación, se requiere saber a dónde se dirigirá a continuación: puede ir a otra estación o al exterior (abandona la red). Nuevamente el ruteo de clientes se caracteriza de una forma probabilista: sea  $p_{ij}$  la probabilidad de un cliente de abandonar la estación  $i$  y dirigirse a la estación  $j$ , y sea  $p_{i0}$  la probabilidad de que un cliente quien abandona la estación  $i$  se vaya del sistema. Existen, sin embargo, otros tipos de ruteos:
  - Ruteo hacia la cola más corta (ruteo dinámico): un cliente que abandona una estación elegirá entre todas las destinos posibles, la estación que tiene el menor número de clientes.

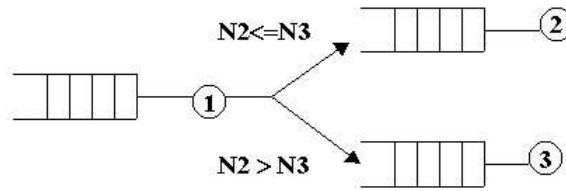


Figura 6.2: Ruteo de Cola más Corta

- Ruteo Cíclico (determinista): Los clientes que abandonan una estación elegirán por turno una estación entre todas las destinos posibles.

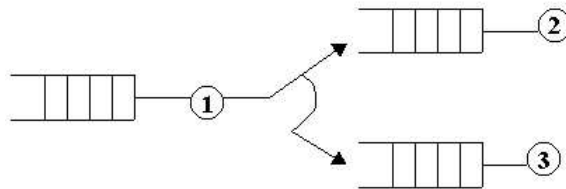


Figura 6.3: Ruteo Cíclico

Estos dos tipos de mecanismos de ruteo tienen un funcionamiento completamente diferente del ruteo probabilista. El primero se hace en forma dinámica, en función del estado del sistema en el momento del ruteo. El

segundo se hace de una forma determinista, en función del ruteo del cliente que lo precedió. Aunque el ruteo cíclico se puede aproximar por un mecanismo probabilista respetando las mismas proporciones, es decir con probabilidades 0.5 en el caso de dos estaciones receptoras, se debe hacer notar que enviar clientes en forma alternada entre una estación y otra no es equivalente a enviarlos en promedio tantas veces a una estación como a la otra. En este caso se pierde la noción de periodicidad.

### 6.1.2. Redes Cerradas

En una red de colas cerrada el número de clientes es contante. Sea  $N$  el número total de clientes del sistema. No hay llegada ni partida de clientes. La especificación de una red cerrada se reduce a modelar diferentes estaciones y el ruteo de clientes. Usando un mecanismo de ruteo probabilista, se define  $p_{ij}$  como la probabilidad de que un cliente quien abandona la estación  $i$  vaya a la estación  $j$ .

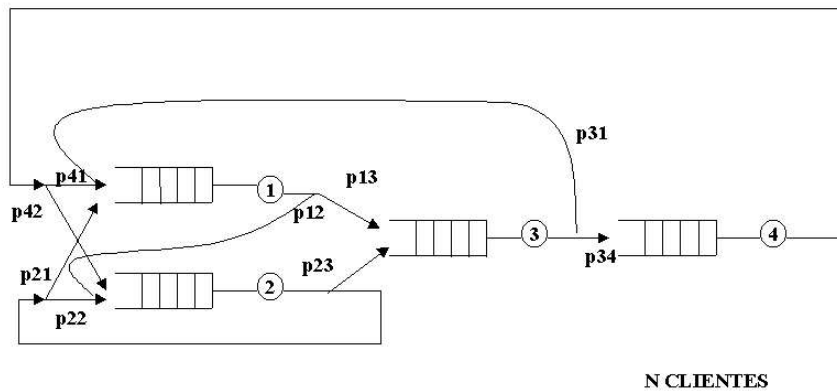


Figura 6.4: Red de Colas Cerrada

### 6.1.3. Redes Multiclases

Al igual que para las colas simples, las redes de colas pueden ser recorridas por diferentes clases de clientes. Sea  $R$  el número de clases de clientes. Estas clases de clientes se distinguirán por:

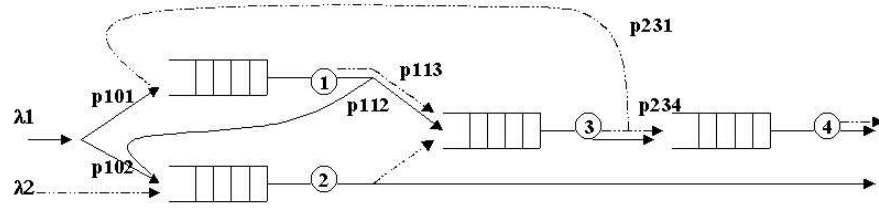


Figura 6.5: Red de Colas Multiclase

- Procesos de llegadas diferentes (si la red es abierta).
- Comportamientos diferentes en cada estación (servicio y disciplina de servicio).
- Ruteos diferentes en la red.

Luego se requiere caracterizar para cada clase  $r$ :

- Para una red abierta, el proceso de llegada (para un proceso de llegada poisson, basta con dar la tasa de llegada de los clientes de la clase  $r$ ).
- Para una red cerrada, el número total  $Nr$  de clientes de la clase  $r$ .
- El ruteo de los clientes. Si nos concentramos en los ruteos probabilistas, se define  $pr_{ij}$  la probabilidad para un cliente de clase  $r$  quien sale de la estación  $i$  vaya a la estación  $j$  (Si  $i$  ó  $j$  es igual a 0, esto hará referencia al exterior de una red abierta).

La noción de red multiclase nos permite introducir la noción de red mixta que es una red abierta del punto de vista de ciertas clases y cerrada desde el punto de vista de otras clases.

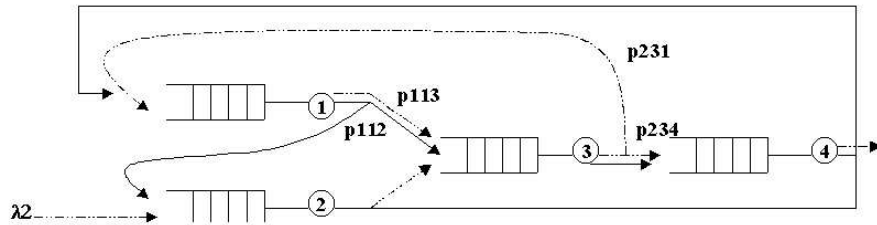


Figura 6.6: Red de Colas Multiclase Mixta

Se puede igualmente autorizar ciertos clientes a cambiar de una clase durante su ruteo en la red. Se define entonces  $pr_{isj}$  como la probabilidad para un cliente de clase  $r$  que abandona la estación  $i$  de ir a la estación  $j$  y se transfiere en un cliente de clase  $s$ .

#### 6.1.4. Redes de colas con capacidad limitada

Las distintas estaciones de la red pueden tener capacidades limitadas. Cuando una cola está llena, no puede ingresar nadie más a la cola. Esto puede producir bloqueos o una pérdida eventual de clientes en la entrada del sistema (si esta es abierta).

Se distinguen principalmente dos tipos de bloqueos: el bloqueo antes del servicio y el bloqueo después del servicio. En un mecanismo de bloqueo antes del servicio (tipo red de comunicación), un cliente deseado comenzar su servicio en una estación dada debe primero asegurarse que hay un puesto disponible en la estación de destino. Si es el caso, su servicio comienza. En caso contrario, el servidor de la estación está bloqueado y el cliente debe esperar la liberación de un lugar antes de comenzar su servicio. Se puede entonces distinguir dos sub-casos. Ya sea el cliente está *cargado* en el servidor (bloqueado) y libera así un lugar en el buffer, se llamará un bloqueo antes del servicio *con ocupación del servidor*, o el cliente no está cargado y debe esperar en el buffer (se habla de bloqueo antes del servicio *sin ocupación del servidor*).

En un mecanismo de bloqueo después del servicio (bloqueo tipo sistema de producción) un cliente comienza su servicio en el mismo instante en que el servidor está disponible. Sólo al final de su servicio se puede producir un bloqueo. Si la estación de destino está llena, el cliente queda en el nivel del servidor que está bloqueado, hasta que un lugar se libere.

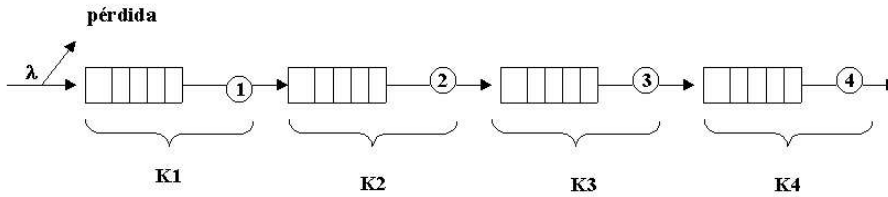


Figura 6.7: Red con Capacidad Limitada

#### 6.1.5. Redes Abiertas con restricciones de Población

Ciertas redes de colas aún siendo abiertas pueden tener asociadas una cota superior con respecto al número total de clientes que pueden encontrarse simultáneamente. Esta restricción de población implica que la red no es realmente un modelo abierto ni tampoco una red cerrada. Una vez que un cliente llega a la red y está llena (restricción del tamaño de la población) se pueden

producir dos situaciones: El cliente puede ser rechazado, lo que lleva al modelo anterior, o el cliente es *memorizado* y se localiza en una cola de espera externa con disciplina FIFO (generalmente). Nos interesaremos particularmente en el caso de clientes memorizados en colas externas.

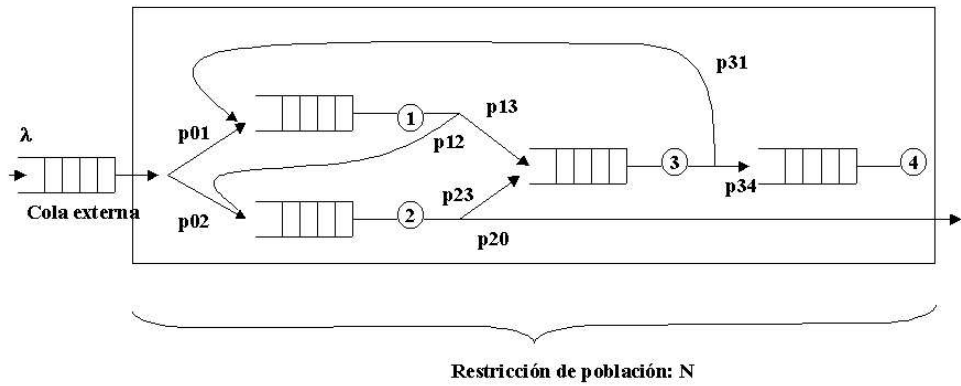


Figura 6.8: Red Abierta con Restricción de Población

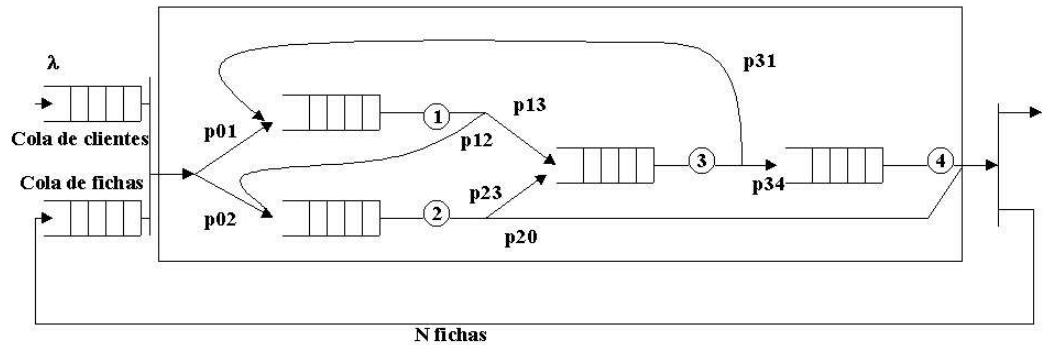


Figura 6.9: Red Abierta con Restricción de Población: Modelo Semáforo

Un sistema abierto con restricción de población se modela frecuentemente con la ayuda de un formalismo tipo semáforo. Una cola de *fichas* o *números* conteniendo inicialmente  $N$  fichas se asocia a la cola externa de clientes. Cuando un cliente llega y queda alguna ficha libre toma la ficha y entra instantáneamente en el sistema. Conserva la ficha durante toda la estadía en el sistema y lo libera cuando sale del sistema. La ficha se devuelve instantáneamente a la cola de las

fichas y queda disponible para otro cliente. Si llega un cliente y no quedan fichas el cliente se ubica en una cola externa en espera de la liberación de una ficha. El número máximo de fichas  $N$  disponible impone el límite superior del número total de clientes que se pueden encontrar simultáneamente en el sistema.

### 6.1.6. Ejemplos de Modelos de Colas

#### ■ Modelo Simple de Computador

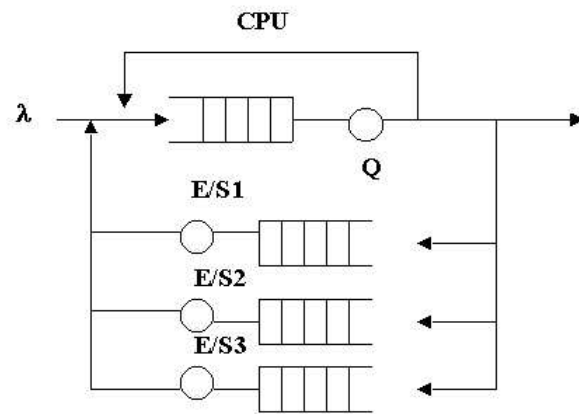


Figura 6.10: Modelo Simple de Computador

#### ■ Modelo Servidor Central

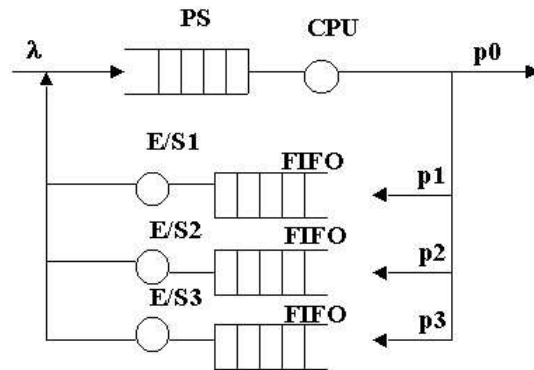


Figura 6.11: Modelo Servidor Central

■ Sistema Multiprogramación

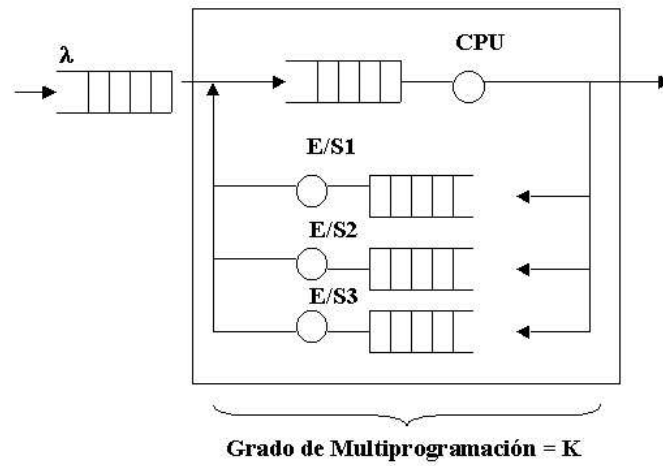


Figura 6.12: Sistema Multiprogramación

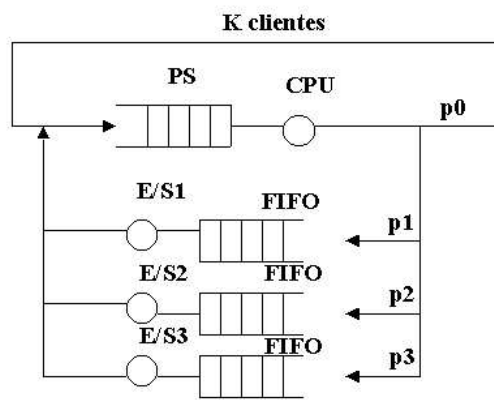


Figura 6.13: Sistema Multiprogramación con Saturación

■ Modelo de un Calculador Central con Terminales

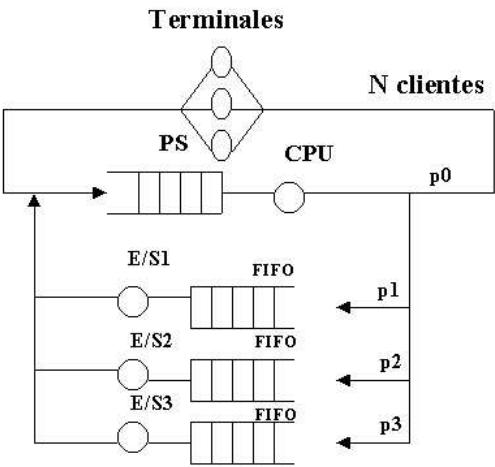


Figura 6.14: Modelo de un Calculador Central con Terminales

■ Red de Comunicación

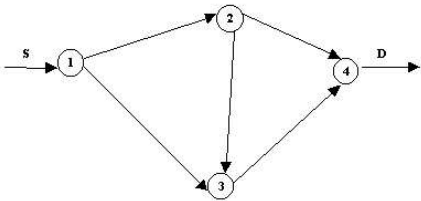


Figura 6.15: Red de Comunicación



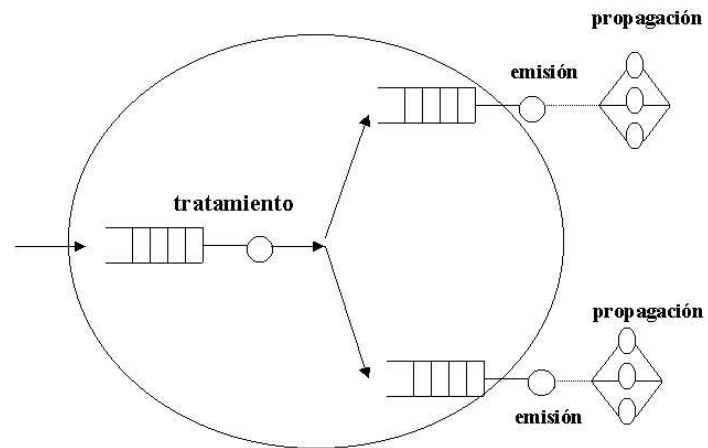


Figura 6.16: Modelo de un Nodo de Conmutación

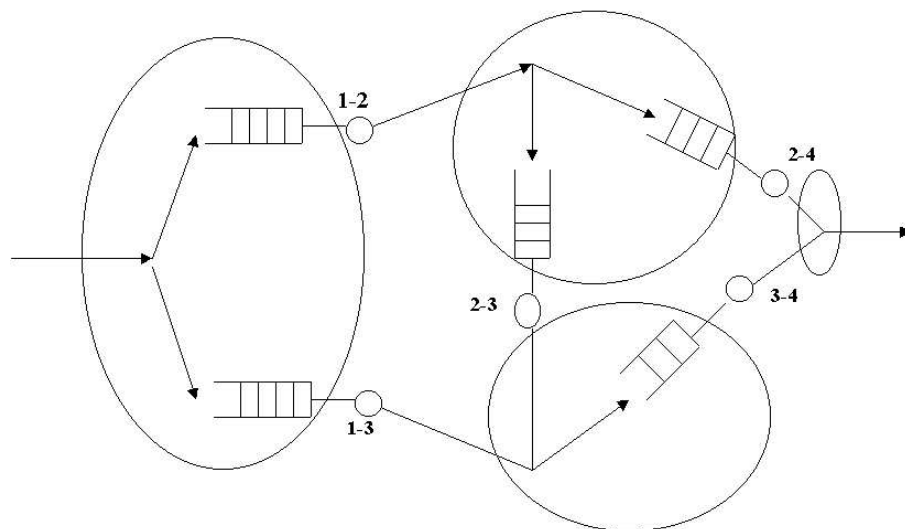


Figura 6.17: Modelo de una Red de Comunicación

■ Líneas de Producción

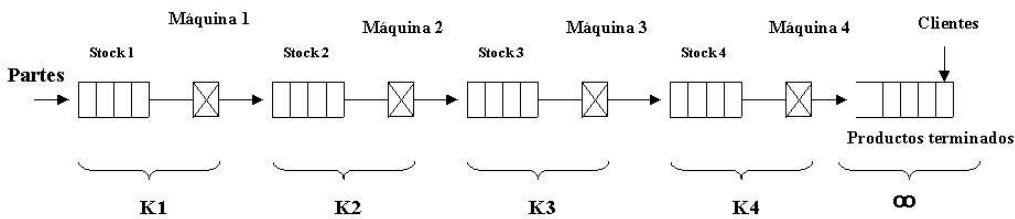


Figura 6.18: Líneas de Producción



## Capítulo 7

# Arboles de Clasificación

### 7.1. Introducción

Los árboles de clasificación se usan para predecir membresía de casos u objetos en las clases de una variable categórica dependiente de los valores de una o más variables predictoras. Los árboles de clasificación constituyen una de las técnicas principales para realizar Data Mining (Minería de Datos).

¿Qué son?

Imagine que Ud. desea dividir un sistema ordenando (un conjunto de monedas de diferentes clases (monedas de a \$ 1, \$ 10, \$ 100, \$ 500)). Suponga que hay una medida que hace una distinción entre las monedas, por ejemplo su diámetro, lo cual se puede usar para realizar un ordenamiento jerárquico de las monedas. Esto puede producir un árbol de clasificación donde usted fácilmente podrá clasificar una nueva moneda en algunas de las existentes conociendo su diámetro. El estudio de árboles de clasificación se ha realizado desde varias áreas de interés como por ejemplo: reconocimiento de patrones, diagnóstico en medicina, estructuras de datos en informática, botánica, sicología.

Uno de los ejemplos de aplicación presentado por Breiman et al. pertenece al área médica. Cuando un paciente con ataque al corazón llega a un centro asistencial, es sometido a varios tests para determinar pulso, presión, entre otros. Se puede obtener una gran cantidad de información adicional como edad y su historia clínica. Luego los pacientes pueden ser clasificados como sobrevivientes a un ataque cardiaco, y poder identificar rápidamente los pacientes de alto riesgo.

El árbol clasificador presentado por Breiman necesita sólo tres respuestas, “Si el paciente tiene una presión mínima superior a 91 durante las primeras 24 horas, luego si el paciente tiene más de 62,5 años, y si el paciente presenta taquicardia, luego el paciente no sobrevivirá”.

### 7.1.1. Algoritmo Crear-Arbol-de-Clasificación

1. Comience con el nodo raíz que contiene toda la muestra de aprendizaje.
2. Repita hasta que el nodo tenga pocos elementos de diferentes clases o que sean todos de la misma.
  - a) Buscar una pregunta o partición óptima  $S_{opt}$ .
  - b) Divida el nodo en dos nodos agregando los elementos de acuerdo a la partición.

### 7.1.2. Partición de los nodos

1. Un atributo  $A$  se divide por  $A \leq r$  donde  $r$  es numérico, y si  $A$  es categórico sobre la pregunta de posible valores categóricos.
2. Con  $C$  clases,  $p(j/t)$  es la proporción de casos en el nodo  $t$ , y  $f$  la función de impureza, luego la impureza del nodo  $t$  es

$$i(t) = f(p(1/t), \dots, p(C/t))$$

3. El cambio en impureza por una partición  $s$  que envía  $pr$  casos a la derecha y  $pl$  a la izquierda es

$$Di(s, t) = i(t) - pr \cdot i(tr) - pl \cdot i(tl)$$

4. Índice de Gini de diversidad es

$$\sum_{j=1}^c \sum_{k=1}^c p(k/t) \cdot p(j/t)$$

### 7.1.3. Función de impureza $f$

Se usa la medida de entropía o de Shannon:

$$- \sum_j p(j/t) \cdot \log(j/t) = i(t)$$

que es una función monotónicamente decreciente.

### 7.1.4. Declaración de un nodo terminal

1. El proceso termina cuando todos los elementos pertenecen a la misma clase ó
2. Cuando no existe una partición que permita reducir más la impureza.
3. La clase del nodo terminal corresponde al mayor número de elementos de la misma clase que pertenecen a ese nodo.

### 7.1.5. ¿Cómo saber qué tan bueno es este árbol?

Si dispone de suficiente datos de entrada (elementos de la muestra de aprendizaje) saque una parte de ellos y úsela para evaluar la bondad de la clasificación de ellos  $R * (T)$ .

## 7.2. Ejemplo: Resolución mediante CART y C4.5

*CART* y *See5* (versión para S.O. Windows de C4.5) son dos herramientas que permiten realizar clasificaciones de muestras de datos. La principal diferencia entre éstas radica en que *CART* trabaja sólo generando árboles de clasificación binarios, mientras que *See5* admite trabajar con árboles de nodos con diferente cantidad de hijos.

### 7.2.1. CART

La Metodología utilizada por CART es conocida como partición recursiva binaria. El proceso se denomina binario porque los nodos padres siempre se dividen en únicamente dos nodos hijos y recursivo ya que el proceso puede repetirse tomando cada nodo hijo como un nuevo nodo padre. Los elementos claves que utiliza el análisis de CART son un conjunto de reglas para:

- Dividir cada nodo del árbol
- Decidir cuando un árbol es completo
- Asignar cada nodo terminal a alguna clase de salida.

#### Reglas de División

Para dividir cada nodo en dos hijos, CART siempre realiza preguntas que tienen un “sí” o “no” como respuesta. Por ejemplo: ¿Peso > 60 (kgs)?. El método CART mira todas las posibles reglas de división incluidas en el análisis. Por ejemplo, considerando un conjunto de datos con 215 casos y 19 variables, CART considera sobre 215 veces 19 reglas para un total de 4085 posibles divisiones. Cualquier problema tendrá un número finito de reglas de división candidatas y CART conducirá una búsqueda a bruta-force sobre ellas.

#### Elección de la División

La siguiente actividad que realiza CART es ordenar en un ranking cada regla de división en base a algún criterio de calidad de la división. El criterio usado por defecto en CART es la regla GINI, una medida de cuan bien la regla de división separa las clases contenidas en el nodo padre (aunque también existen otros criterios disponibles).

#### Asignación de Clases

Una vez que se ha encontrado la mejor división, CART repite el proceso de búsqueda para cada nodo hijo, continuando recursivamente mientras es posible

dividir o hasta que se detiene. La división se hace imposible si queda sólo un caso en un nodo particular o si todos los casos de esa clase son idénticos. CART permite detener la división por varias otras razones, incluyendo que un nodo tenga muy pocos casos (por defecto, en estos casos considera un límite de 10 casos, pero este valor puede cambiar dependiendo de especificaciones particulares). Cuando se ha encontrado un nodo terminal se debe decidir como clasificar todos los casos que han caído en él. Un criterio simple es la regla de pluralidad: El grupo con la mayor representación determina la asignación de la clase. CART realiza un paso más adelante: como cada nodo puede, potencialmente, convertirse en un nodo terminal, la asignación de clase es hecha para cada nodo, sea éste terminal o no. Las reglas de asignación de clases pueden ser modificadas desde una simple regla de pluralidad simple a una cuenta de los costos de cometer un error en la clasificación y ajuste para algunos ejemplos de ciertas clases.

### Árboles reducidos

Para decidir si un nodo es terminal o no, CART procede extendiendo árboles hasta que no es posible extenderlos más. Una vez que se ha generado el árbol maximal, examina árboles más pequeños obtenidos mediante la reducción de algunas ramas del árbol maximal. CART no detiene el proceso de extensión de árboles porque puede aparecer información importante al examinar los niveles más bajos.

### Pruebas

Una vez que se ha construido el árbol maximal y se han derivado un conjunto de sub-árboles a partir de él, CART determina el mejor árbol probando y midiendo tasas de error o costos. Con información suficiente, el método más simple es dividir la muestra en sub-muestras de aprendizaje y prueba. La muestra de aprendizaje es usada para extender un árbol. La muestra de prueba es usada para estimar la tasa a la cual los casos son clasificados incorrectamente (posiblemente ajustados por clasificación errónea de costos). La tasa de clasificación errónea es calculada para el árbol más grande y también para cada sub-árbol. El mejor sub-árbol es aquel con el menor o más cercano menor costo, que puede ser un árbol relativamente pequeño. Algunos estudios no tendrán suficientes datos para permitir una muestra de prueba de buen tamaño. La metodología de extensión de árboles utiliza intensivamente los datos, requiriendo muchos casos que la regresión clásica. Cuando los datos son pocos, CART utiliza técnicas intensivas de computación de validación híbrida.

### 7.2.2. See5

See5 analiza datos para producir árboles de decisión, que a diferencia de CART no sólo son binarios, y/o conjuntos de reglas que relacionen los casos de una clase con los valores de sus atributos. Una aplicación consiste, en este caso, en una colección de archivos de texto. Esos archivos definen clases y atributos, describen los casos que serán analizados, proveen nuevos casos para probar

las clasificaciones producidas por See5 y especifican costos o penalizaciones por clasificaciones erróneas. Para ejecutar el programa es necesario contar con un archivo de nombres con la extensión *.names*, el cual contiene una serie de clases, atributos y sus valores. Cada nombre es un string arbitrario de caracteres con algunas restricciones: Un nombre puede contener tabs y espacios, pero cualquier secuencia de tabs y espacios es tratado como un espacio simple. Cualquier carácter especial como coma (,), punto y coma(;), punto (.) o pipe (|) que formen parte de un nombre deben estar precedidos por el carácter de escape backslash (\).

La primera entrada en el archivo *.names* especifica la clase, y se deben establecer un atributo de valores discretos que contenga los valores de las clases o definiendo la clase directamente como una lista de nombres separados por comas. El resto del archivo *.names* consiste en una entrada por cada atributo. Los atributos son de dos tipos: explícitamente definidos (especificados por tipo, valores, etc.) e implícitamente definidos (especificados por fórmulas).

Además, es necesario contar con un archivo de datos con la extensión *.data*, este archivo contiene los casos que serán analizados para producir la clasificación. Cada caso está representado por una entrada en el archivo. Un caso de entrada consiste en los valores de los atributos (en el mismo orden en que aparecen en el archivo *.names*). En estos casos no es necesario dar valores para aquellos atributos definidos implícitamente, ya que estos deben estar definidos a partir de los otros atributos y, por lo tanto, son calculados automáticamente por el programa.

El primer paso en la construcción de un clasificador es localizar los archivos de la aplicación. Todos ellos deben estar juntos en un mismo directorio. Luego que la aplicación ha sido identificada, See5 puede ser usado para construir un clasificador. See5 presenta diversas opciones que permiten un mejor desempeño cuando se trabaja con una gran cantidad de datos con muchos atributos, algunos de los cuales pueden no ser importantes en la tarea de clasificación.

### 7.2.3. Caso de Prueba: Nacionalidad

La tabla 7.1 muestra los datos a utilizar, estos datos clasifican por nacionalidad (chino, norteamericano, español y africano) a un conjunto de individuos, para los cuales se presentan los siguientes atributos: **estatura** (en centímetros, valor continuo entre 150 y 200 aproximadamente), **peso** (en kilogramos, valor continuo entre 50 y 100 aproximadamente), **color de pelo** (negro, castaño y rubio) y **color de tez** (negra o blanca).

#### Pruebas en CART

Para realizar las pruebas en CART es necesario considerar todos los datos como numéricos, para esto se considera la siguiente notación:

**Color de Pelo**



Estatura	Peso	Color de Pelo	Color de Tez	Nacionalidad
167	70	negro	blanca	chino
180	82	rubio	blanca	norteamericano
185	86	negro	negra	norteamericano
179	76	negro	blanca	español
177	73	rubio	blanca	español
176	84	castaño	blanca	español
187	80	rubio	blanca	norteamericano
164	63	negro	blanca	chino
168	72	negro	blanca	chino
168	70	negro	blanca	español
183	88	castaño	negra	norteamericano
186	90	negro	negra	norteamericano
188	94	rubio	blanca	norteamericano
185	92	negro	blanca	español
172	80	negro	blanca	español
172	72	negro	blanca	chino
158	64	negro	blanca	chino
179	86	rubio	blanca	norteamericano
159	68	negro	blanca	chino
186	90	negro	blanca	español
190	70	negro	negra	africano
188	75	negro	negra	africano
196	73	negro	negra	africano
191	71	negro	negra	africano

Cuadro 7.1: Datos de la muestra

1	negro
2	castaño
3	rubio

Cuadro 7.2: Color de Pelo

**Color de Tez**

1	negra
2	blanca

Cuadro 7.3: Color de Tez

**Nacionalidad (Clase)**

1	chino
2	norteamericano
3	español
4	africano

Cuadro 7.4: Nacionalidad (Clase)

Al introducir la información en CART los resultados que arroja se muestran en la figura 7.1. La tabla esta figura muestra un resumen de valores como *complejidad* de cada uno de los nodos terminales y costos relacionados a ciertas características que son analizadas por CART al momento de generar los árboles de decisión como se mencionó anteriormente. El Arbol óptimo, con 4 nodos terminales entregado por CART se muestra en la figura 7.2.

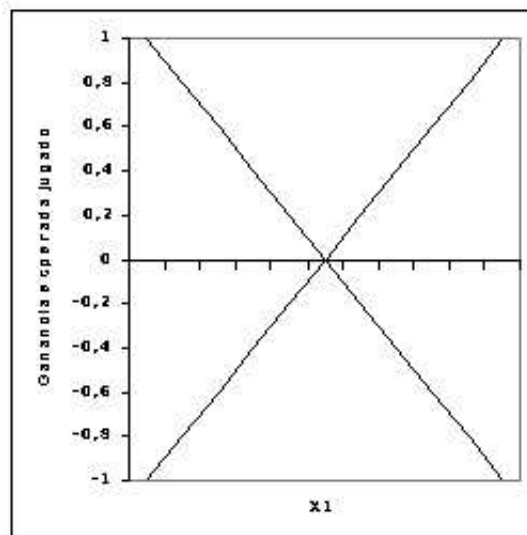


Figura 7.1: Resultados de CART

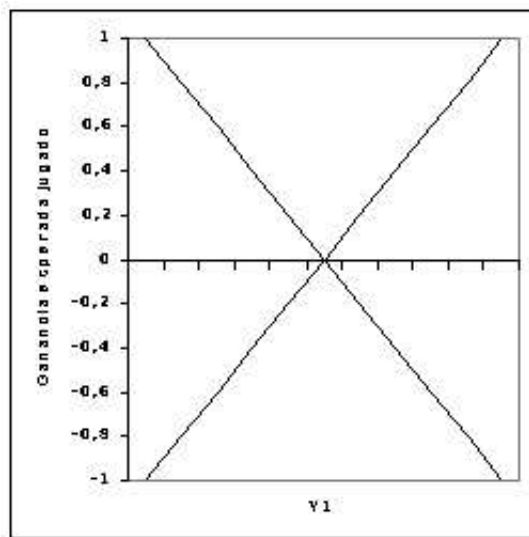


Figura 7.2: Arbol Optimo de Clasificación entregado por CART

Notamos que para realizar una clasificación solamente resultan relevantes los atributos **estatura** y **peso**. Es importante presetar atención a las características de pureza de los nodos terminales.

### Pruebas en See5

Al realizar las pruebas en See5, se obtienen los siguientes resultados:

See5 [Release 1.16]

Read 24 cases (4 attributes) from nacionalidad.data

Decision tree:

color de tez = negra:

:...peso <= 80: africano (4)

: peso > 80:norteamericano (3)

color de tez = blanca:

:...color de pelo = castaño: español (1)

```

color de pelo = rubio: norteamericano (5/1)

color de pelo = negro:

:...peso <= 73: chino (7/1)

peso > 73: español (4)

```

Evaluation on training data (24 cases):

Decision Tree				
-----				
Size	Errors			
6	2( 8.3%) <<			
(a)	(b)	(c)	(d)	<-classified as
----	----	----	----	
6				(a): class chino
	7			(b): class norteamericano
1	1	5		(c): class español
			4	(d): class africano

A partir de los resultados entregados por See5 podemos construir el árbol de decisión que muestra la figura 7.3:

### Comparación y Conclusiones

En este caso notamos, para una misma muestra, que ambas herramientas generan árboles de clasificación completamente distintos, desde los atributos de interés en cada uno de los casos (el árbol generado por CART se preocupa solamente de preguntar por los atributos **estatura** y **peso**, mientras que el árbol generado por See5 pregunta por **color de tez**, **color de pelo** y **peso**). Concluimos lo importante del atributo **peso**. Ahora, podemos calcular el promedio de impureza de los nodos terminales, de modo que nos entreguen algún índice observable de diferenciación. Para el árbol generado por CART este valor es:

$$\frac{14,3 + 0 + 33,3 + 20}{4} = 20,475 \%$$

Para el árbol generado por See5 este valor asciende a:

$$\frac{0 + 0 + 0 + 20 + 14,3 + 0}{6} = 5,72 \%$$

Este es un primer punto a favor para See5, aunque una mejor forma de probar sus bondades es observando que tan bien trabajan clasificando individuos nuevos

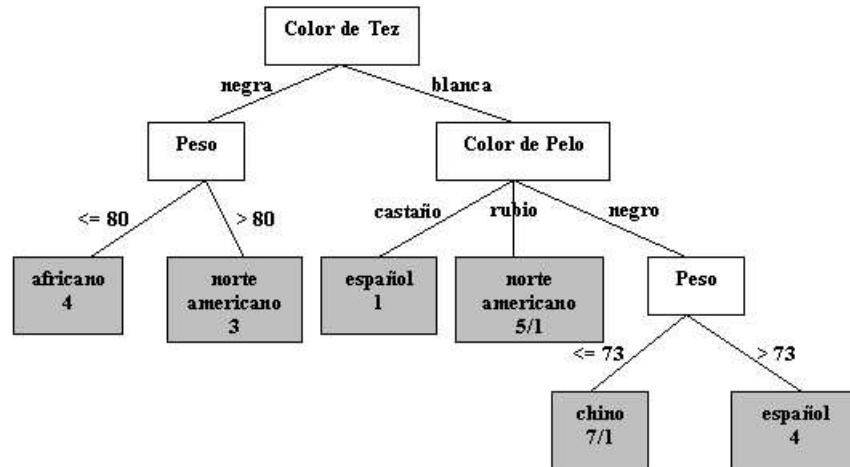


Figura 7.3: Arbol Optimo de Clasificación entregado por See5

en la población. Para esto consideremos los nuevos individuos que aparecen en la tabla 7.5.

Caso	Estatura	Peso	Color de Pelo	Color de Tez	Nacionalidad
1	183	85	negro	blanca	español
2	185	79	negro	negra	africano
3	177	86	rubio	blanca	norteamericano
4	167	68	negro	blanca	chino

Cuadro 7.5: Casos de Prueba

**Caso 1:**

**CART:** con un 66.7% de seguridad podría tratarse de un norteamericano y con 33.3% de seguridad podría tratarse de un español. (nodo terminal 3)

**See5:** español (nodo terminal 6)

Para este caso, era bastante fácil cometer un error, por lo tanto, no se concluye mucho al respecto.

**Caso 2:**

**CART:** con un 66.7% de seguridad podría tratarse de un norteamericano y con 33.3% de seguridad podría tratarse de un español. (nodo terminal 3)

**See5:** africano (nodo terminal 1)

En este caso, el error surge básicamente en el momento de fijar los límites de los valores de **peso** y **estatura** en el caso de CART.

**Caso 3:**

**CART:** español con 100 % seguro (nodo terminal 2)

**See5:** norteamericano con un 80 % de seguridad (nodo terminal 4)

En este caso cabe mencionar el error cometido por CART al generar este árbol, dado que no considera una atributo fundamental para distinguir a un norteamericano, observando la tabla, podemos ver que cada vez que el **color de pelo** es rubio la nacionalidad es norteamericano.

**Caso 4:**

**CART:** chino con un 85.7 % de seguridad (nodo terminal 1)

**See5:** chino con un 85.7 % de seguridad (nodo terminal 5)

Para este caso los resultados son casi los mismos, no existe mayor conclusión.



## Capítulo 8

# Teoría de Inventario Probabilista

### 8.1. Repaso

#### 8.1.1. Modelos de Inventario

Cuando se tienen demasiados items en bodega los costos pueden llegar a ser muy elevados y el no disponer de una cantidad cuando lo están demandando también genera un costo adicional cuantificado en general como prestigio y el costo de haber perdido esa oportunidad de vender.

Si hay costos, entonces ¿por qué mantener productos en bodega?

1. para responder a demandas poco frecuentes
2. para una mejor planificación de la producción
3. para enfrentar en mejor forma huelgas y problemas laborales
4. como protección de las irregularidades de abastecimiento
5. para obtener precios con descuentos
6. para minimizar el costo de ordenar

las preguntas que se van a responder usando un modelo de inventario son:

- ¿Qué cantidad ordenar?
- ¿Cuándo emitir una orden de compra?
- ¿Cuál es el nivel razonable del stock de seguridad?

Para ello vamos a definir un grupo de parámetros:

- Nivel de la demanda del producto



- Costo de almacenar una unidad del producto
- Precio de compra por una unidad
- Costo de poner una orden

Variables en un modelo de inventario:

1. Número de productos
2. Nivel de Inventario
3. Tasa de disminución (relacionado con la demanda)
4. Punto de reorden: ¿Cuándo emitir una nueva orden?
5. Tiempo entre la orden y la llegada del producto (*lead-time*)
6. Cantidad ordenada y tamaño del lote
7. Costos de Ordenar o de puesta en marcha
8. Costo de mantener unidades en inventario: costo asociado con: costo de capital, almacenamiento, deterioro, pérdidas, impuestos, seguros.

### Modelo de Lote Económico (EOQ)

Supuestos:

1. Cantidad ordenada llega en el instante que el stock llegó a cero
2. La demanda es constante

Se desea responder a:

1. ¿Cuándo ordenar? =  $R$
2. ¿Cuánto ordenar? =  $Q$

El costo de inventario se divide en dos tipos de costos: el costo de mantener las unidades en inventario y el costo de ordenar.

Costo de inventario =

$$CT = Ch \cdot \frac{Q}{2} + Co \cdot \frac{D}{Q}$$

donde

$Ch$  = costo unitario de mantener en inventario

$Co$  = costo unitario de ordenar

$D$  = demanda anual

$Q$  = cantidad a ordenar determinando  $Q^*$  utilizando la relación

$$\frac{d(CT)}{d(Q)} = 0$$

$$Q^* = \left( \frac{2 \cdot D \cdot Co}{Ch} \right)^{1/2}$$

Ahora la pregunta que falta responder es ¿cuándo ordenar?.

Se define el punto de reorden como el nivel de inventario en el cual emitir una orden, luego:

$$R = d \cdot m$$

con

$R$  = punto de reorden

$d$  = demanda diaria

$m$  = *lead time* en días

esto indica que hay que emitir una orden en el nivel de inventario en que la demanda a satisfacer sea igual al stock remanente hasta completar el *lead time*.

### 8.1.2. Modelo con Ordenes Pendientes.

En muchas situaciones de la vida real se produce una insatisfacción de la demanda. Cuando esto ocurre se producen costos adicionales (debido a pérdidas de oportunidades, costo de emitir órdenes *especiales*, problemas de imagen, etc). Aquí modificaremos el modelo EOQ para permitir la posibilidad de falta de stock. Sea  $Cs$  el costo de mantener una orden pendiente, luego el costo total se ve modificado en:

$$CT = \text{Costo de mantener en inventario} + \text{Costo de Ordenar} + \text{Costo de mantener órdenes pendientes}$$

esto calculado al año.

Luego se tiene con el gráfico dibujado en clases que:

$$CT = \frac{(Q - S)^2}{2 \cdot Q} \cdot Ch + \frac{D}{Q} \cdot Co + \frac{S^2}{2 \cdot Q} \cdot Cs$$

En base a esta relación se pueden determinar los valores correspondientes de  $Q$  y  $S$ .

$$Q^* = \left( \frac{2 \cdot D \cdot Co}{Ch} \right)^{1/2} \cdot \left( \frac{Ch + Cs}{Cs} \right)^{1/2}$$

$$S^* = Q^* \cdot \frac{Ch}{Ch + Cs}$$

### Descuentos por cantidades para el modelo EOQ

Descuentos por cantidades ocurren en muchas empresas e industrias donde los abastecedores entregan un incentivo para compras en grandes cantidades ofreciendo precios más bajos.

Supongamos que se tiene un producto donde el modelo básico EOQ se puede aplicar, sin embargo en lugar de tener un precio fijo unitario, este precio dependerá del tamaño del lote que se compre, por ejemplo teniendo la tabla por categoría de descuentos (Tabla 8.1):

Categoría de Descuento	Tamaño de la orden	Descuento	Costo Unitario
1	0 - 999	0 %	5.0
2	1000 - 2499	3 %	4.85
3	superior a 2500	5 %	4.75

Cuadro 8.1: Categorías de descuentos

El 5 % de descuento en la categoría aparece como tentador, sin embargo se debe considerar que el mantener más unidades en inventario incurriría además en un aumento del costo del inventario. Luego, hay que tratar de lograr un equilibrio entre la reducción de precios y la consecuencia de incorporar más unidades en inventario. Para ello el procedimiento de calculo es el siguiente:

1. Calcular  $Q^*$  usando la fórmula del modelo EOQ para cada categoría de descuentos.
2. Para todos los  $Q^*$  calculados en el paso anterior elija los valores de  $Q^*$  que correspondan a la categoría de descuentos señalada.  
En nuestros modelos de inventario previos se ha ignorado el costo anual de la compra del item, debido a que fue constante y no afectaba la selección de la política de inventario. Si embargo, en los descuentos por cantidades el costo de la compra varía con el tamaño del lote ordenado  $Q$ , por lo tanto se debe incluir el costo de comprar en el costo total:  
Costo de inventario =

$$CT = Ch \cdot \frac{Q}{2} + Co \cdot \frac{D}{Q} + D \cdot C$$

donde  $C$  es el costo unitario del item.

3. El último paso a seguir es: para cada una de los valores de los  $Q^*$  determinados en los pasos 1 y 2 calcule el costo de inventario anual tomando el costo unitario respectivo a la categoría de descuentos. La cantidad óptima  $Q^*$  será aquella que entregue un menor costo de inventario anual.

### Modelo del Lote de Producción Económica

Este es similar al modelo EOQ en que hay que determinar cuánto producir y cuando poner una orden. La suposición fundamental es que la demanda tiene una tasa constante, y la tasa de producción es mayor que la tasa de la demanda. Sin embargo en vez de que los items lleguen externamente a la empresa se trata ahora de una producción interna. En general, sea  $Q$  la cantidad del lote a producir. Al igual que en el modelo EOQ tendremos dos costos a considerar en el inventario: costo de mantener en inventario y el costo de ordenar. Sin embargo, la interpretación difiere. En situaciones de producción el costo de ordenar se refiere más exactamente al costo de puesta en marcha de la producción. Este costo involucra horas de trabajo, material, costos por pérdidas de producción

todo esto para preparar la corrida de producción.

El Costo total en inventario será:

Costo de inventario

$$CT = Ch \cdot \frac{Q}{2} \cdot \left(1 - \frac{D}{P}\right) + Co \cdot \frac{D}{Q}$$

donde

P = producción anual

D = demanda anual

Luego se puede determinar  $Q^*$  = cantidad a producir por la siguiente relación:

$$Q^* = \left(\frac{2 \cdot D \cdot Co}{Ch}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{D}{P}\right)}^{1/2}$$

## 8.2. EOQ con demanda incierta

Sea:

1.  $SLM_1$  = fracción esperada de toda la demanda que llega a tiempo
2.  $SLM_2$  = número esperado de ciclos al año en los que ocurre *stock-out*

**Ejemplo:**

■ **Problema:**

Considere

$D = 1000$

$Q^* = 100$

$R = 30[u]$

Además,  $d_t$  aleatoria como lo muestra la tabla 8.2.

cantidad	Probabilidad
0	$\frac{1}{5}$
0	$\frac{1}{5}$
40	$\frac{1}{5}$
50	$\frac{1}{5}$
60	$\frac{1}{5}$

Cuadro 8.2: Distribución aleatoria de la demanda

■ **Solución:**

Podemos calcular:

$$E[d_t] = \frac{1}{5} \cdot (200) = 40[u]$$

considerando  $R = 30[u]$

Número esperado de unidades no satisfechas sería  $12[u]$  por ciclo.

$$\frac{1}{5} \cdot (0 + 0 + 10 + 20 + 30) = 12[u]$$

Cantidad Sobrante	Probabilidad
0	$\frac{1}{5}$
0	$\frac{1}{5}$
10	$\frac{1}{5}$
20	$\frac{1}{5}$
30	$\frac{1}{5}$

Cuadro 8.3:

$$\begin{aligned} \text{Número de Ordenes} &= \frac{D}{Q} = 10 \\ \Rightarrow & 120 [u] \text{ no satisfechas a la año} \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} SLM_1 &= 1000 - 120 \\ &= 880[u] \\ \Rightarrow & 88 \% \end{aligned}$$

Sea  $\mathcal{S}$  v.a. de la escasez del producto y sea  $\xi$  v.a. de la demanda durante el *lead-time*  $\sim N(\mu, \sigma^2)$ .

Sea  $R$  punto de reorden y  $SLM_1$  porcentaje de unidades satisfechas al año.

$$\mathcal{S} = \begin{cases} 0 & , x < R \\ x - R & , x \geq R, \end{cases}$$

Luego, el número promedio de unidades insatisfechas al año  $= E[\mathcal{S}] \cdot \frac{D}{Q^*} = D \cdot (1 - SLM_1)$

$$E[\mathcal{S}] = \int_R^{\infty} (x - R) \cdot f_x(x) dx = (1 - SML_1) \cdot Q^*$$

**8.2.1. Propiedades:**

Si  $x \sim N(\mu, \sigma)$

Sea

$$L(z) = \int_z^\infty z \cdot f_z(z) dz, \quad \text{con } z = \frac{R-\mu}{\sigma}$$

$$\Rightarrow E[S] = \sigma \cdot L(Z) = (1 - SLM_1) \cdot Q^*$$

$$\mu + \sigma \cdot Z = R$$

**Ejemplo:  $SLM_1$**

■ **Problema**

Se desea conseguir un porcentaje de unidades satisfechas al año de 99 %  
( $SLM_1 = 99\%$ ).

Se cuenta con:

$$\mu = 192$$

$$\sigma = 11,55$$

$$Q = 327$$

■ **Solución**

$$L(z) = \frac{0,01 \cdot 327}{11,55} = 0,283$$

$$\Rightarrow z = 0,26$$

$$\Rightarrow R = 192 + 11,55 \cdot 0,26 = 195$$

**Ejemplo:  $SLM_2$**

■ **Problema**

Se desea conseguir 2 stock-outs al año. Se cuenta con:

$$Q^* = 100$$

$$D = 1000$$

$$\text{Número de Ciclos} = 10$$

■ **Solución**

$$P(d_L > r) = \frac{2}{10} = 0,2$$

$$\phi\left(\frac{R - 83,3}{\sqrt{400}}\right) = 0,84$$

$$R = 20 \cdot 0,84 + 83,33 = 100,13$$



## Capítulo 9

# Modelos de Regresión

### 9.1. Repaso

#### 9.1.1. Estimación de Parámetros

La estimación de parámetros puede ser puntual o por intervalo. Supongamos una muestra aleatoria  $X_1, X_2, \dots, X_n$  con valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , se desea estimar sobre esta muestra el valor de algún parámetro desconocido, por ejemplo.

$$\tau = \frac{\sigma}{\mu}$$

- Estimación Puntual:

$$T_1(x_1, \dots, x_n) = \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{n}, \text{ se puede usar para estimar } \mu$$

$$\text{y } T_2(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \text{ para estimar } \sigma^2$$

- Estimación por intervalo:

Idea: No hay un único estadístico, sino que se definen 2 estadísticos:

$$T_1(x_1, \dots, x_n), T_2(x_1, \dots, x_n) \text{ con } T_1(x_1, \dots, x_n) < T_2(x_1, \dots, x_n),$$

luego  $\tau \in \{T_1(x_1, \dots, x_n); T_2(x_1, \dots, x_n)\}$  con probabilidad  $1 - \alpha$  de contener el verdadero valor del parámetro.

#### Estimación puntual

Existen 2 problemas:

1. Encontrar métodos que nos proporcionen estimadores
2. Seleccionar criterios que nos permitan decidir cuan bueno es un estimador

Métodos de Estimación Puntual:



1. Métodos de los momentos: Igualar los momentos muestrales a los poblacionales

Ej: Sea  $X_1, \dots, X_n$  m.a(n) con distribución  $N(\mu, \sigma^2)$  con parámetros desconocidos, luego

$$\begin{aligned} \blacksquare \hat{\mu} &= \bar{x}, \\ \blacksquare \hat{\sigma}^2 &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \end{aligned}$$

2. Métodos de Máxima Verosimilitud.

Función de Verosimilitud es la función de densidad conjunta de la distribución de las variables:

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = L(\vec{x}, \theta)$$

$$L(\vec{x}, \theta) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i, \theta)$$

Se define el estimador de máxima verosimilitud como el valor del espacio paramétrico que maximiza la función verosimilitud luego, EMV de  $\theta$

$$\frac{\delta L^*}{\delta \theta_i} = 0, i = 1, \dots, k, \text{ con } L^* = \text{Log}_e L$$

Ejemplo: Si  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$\hat{\lambda} = \bar{x}$$

### Estimación por intervalo

Si  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,

$$\mu \in \left( \bar{x} \pm \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma}{\sqrt{n}} \right) \text{ con } 100(1 - \alpha) \% \text{ confianza y } \sigma \text{ conocido}$$

$$\mu \in \left( \bar{x} \pm \frac{t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right) \text{ con } 100(1 - \alpha) \% \text{ confianza y } \sigma \text{ desconocido}$$

$$\sigma^2 \in \left( \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\chi_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}^2}, \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\chi_{n-1, \frac{\alpha}{2}}^2} \right)$$

**Intervalo de confianza para diferencias de medias**, suponiendo

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$$

$$\mu_x - \mu_y \in \left( (\bar{x} - \bar{y}) \pm t_{n+m-2, 1-\frac{\alpha}{2}} S_p \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \text{ con}$$

$$S_p^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n+m-2} + \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n+m-2}$$

**Intervalo de confianza para comparar 2 poblaciones normales independientes:**

m.a (n)  $\sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  independiente de m.a (m)  $\sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

Homocedasticidad si  $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ , sino heterocedasticidad

$$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \in \{F_{n-1, m-1, \frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}_2^2}{\hat{\sigma}_1^2}; F_{n-1, m-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}_2^2}{\hat{\sigma}_1^2}\}$$

### 9.1.2. Distribuciones Importantes

1.  $\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$
2.  $\frac{\sim N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi_{n-1}^2}{n-1}}} \sim t_{n-1}$

### 9.1.3. Ejemplos:

1. Estimación del intervalo para una predicción:

Sea una m.a  $\sim N(\mu, \sigma^2)$ . Supongamos que se desea estimar el valor de una nueva observación  $Y$  independiente de las  $X_i$  generada de una  $\sim N(\mu, \sigma^2)$ .

Como estimador puntual lo natural seria usar  $\hat{y} = \bar{x}$ .

El Estimador por intervalo:

- Caso a: Con  $\sigma^2$  conocido

$$y \in (\hat{y} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma \sqrt{1 + \frac{1}{n}})$$

- Caso b: Con  $\sigma^2$  desconocido

$$y \in (\hat{y} \pm t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} S_x \sqrt{1 + \frac{1}{n}})$$

2. Sea una m.a.  $\sim N(\mu, \sigma^2)$  con  $\sigma^2 = 16$ . Determine el tamaño de la muestra para que la longitud del intervalo sea 1 con confianza del 95 %.
3. Se desea encontrar el intervalo de confianza con 95 % para la varianza de la cantidad de cierto anestésico que se necesita para producir anestesia apropiada para cirugía. Suponga normalidad con una muestra de 50 valores y con su varianza de  $100mg^2$ .

## 9.1.4. Dócinas de Hipótesis

Decisión	$H_0$ cierta	$H_0$ falsa
Rechazar $H_0$	Error Tipo I	ok
Aceptar $H_0$	ok	Error Tipo II

$$P(\text{error Tipo I}) = \alpha, P(\text{error Tipo II}) = \beta.$$

Potencia = P(hacer lo correcto en el sentido del rechazo)

$$\text{Potencia} = P(\text{Rechazar } H_0 / H_0 \text{ falsa}) = 1 - \beta$$

Ejemplos:

1. Sea  $m.a(n) \sim N(\theta, 25)$ , con  $n = 100$ , se está en la duda si  $\theta = 17$  o  $\theta = 20$ . Suponga  $H_0 = \theta = 17$  v/s  $H_1 = \theta = 20$ . Calcular las probabilidades de los errores Tipo I y Tipo II, si la región crítica es:

$$RC = \{\bar{x} > 17 + \frac{5}{\sqrt{n}}\}$$

a) P(error Tipo I)

$$P(\text{error Tipo I}) = P(\text{Rechazar } H_0 / H_0 \text{ cierta})$$

$$P(\text{error Tipo I}) = P(\bar{x} > 17 + \frac{5}{\sqrt{n}} / \theta = 17)$$

$$\text{Si } \theta = 17, m.a(100) \sim N(17, 25) \text{ y}$$

$$\bar{x} \sim N(17, \frac{25}{100})$$

Luego,

$$P(\text{error Tipo I}) = P(\frac{(\bar{x}-17)\sqrt{n}}{5} > 1) = 0,158866$$

b) P(error Tipo II)

$$P(\text{error Tipo II}) = P(\text{Aceptar } H_0 / H_0 \text{ falsa})$$

$$P(\text{error Tipo II}) = P(\bar{x} < 17 + \frac{5}{\sqrt{n}} / \theta = 20)$$

$$\text{Si } \theta = 20, m.a(100) \sim N(20, 25) \text{ y}$$

$$\bar{x} \sim N(20, \frac{25}{100})$$

Luego,

$$P(\text{error Tipo II}) = P(\frac{(\bar{x}-20)\sqrt{n}}{5} < -\frac{3\sqrt{n}}{5} + 1) = 0$$

2. Sea  $m.a(n) \sim N(\mu, 64)$ . Se desea determinar el tamaño de la muestra para que el error tipo I sea igual al error tipo II e igual al 5%. Determine la RC.
3. Un agente de compras de un supermercado compra a un determinado proveedor pollos asados en lotes. El especifica que el peso promedio de los pollos en un embarque debe ser al menos de 32 onzas. De su experiencia pasada sabe que la desviación standard del peso de los pollos de este proveedor es de 1,5 oz. Se le ha sugerido al agente que adopte el siguiente procedimiento para tomar la decisión: Seleccionar una muestra aleatoria de 196 pollos por cada embarque: Si el peso promedio de la muestra es de 31.7 oz aceptar, y rechazar en caso que sea menor.
  - a) Suponga que el está eligiendo entre dos posibles reglas de decisión:  
 $RC_1 = \bar{x} < 31,6$  v/s  $RC_2 = \bar{x} < 31,4$ , determine la mejor de ellas.

NOTA: La región crítica es mejor mientras cumpla con  $\alpha$  al menor  $\beta$  (mayor potencia).

## 9.2. Regresión Lineal Simple

Análisis de regresión es una herramienta estadística que utiliza la relación entre 2 o más variables cuantitativas, de tal forma que una variable se puede predecir desde las otras.

### 9.2.1. Conceptos Básicos

Un modelo de regresión es un medio formal de expresar los ingredientes esenciales de una relación estadística:

- Una tendencia de la variable dependiente Y varía con la variable o variables independientes en una forma sistemática
- Un conjunto de observaciones rodean la curva de la relación estadística.

Estas dos observaciones responden a los siguientes supuestos en un modelo de regresión:

- En la población de observaciones asociadas con el proceso muestreado existe una distribución de probabilidad de Y para cada nivel de X
- El sentido de estas distribuciones de probabilidad varían en alguna forma sistemática con X

Ejemplo: Cantidad demandada v/s (precio, renta, ..)

Peso v/s (estatura, presión arterial, edad,.. )

$Y$  es dependiente,  $X_i$  variables independientes

El uso del análisis de regresión puede ser para:

- descripción
- control
- predicción

### 9.2.2. Modelo de Regresión

Formalmente un modelo de regresión se denota como:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i$$

donde  $Y_i$  es el valor de la variable respuesta en el ensayo  $i$ -ésimo  
 $\beta_0, \beta_1$  son parámetros  
 $X_i$  constante, el valor de la variable independiente en el  $i$ -ésimo ensayo  
 $\epsilon_i$ : error aleatorio con las siguientes propiedades:

$$E(\epsilon_i) = 0, \sigma^2(\epsilon_i) = \sigma^2$$

$\epsilon_i$  y  $\epsilon_j$  no correlacionados,  $COV(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0, \forall i, j, i \neq j$

#### Consecuencias del Modelo

1.  $E(Y_i) = E(\beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i$
2.  $V(Y_i) = V(\epsilon_i) = \sigma^2$
3.  $COV(Y_i, Y_j) = 0, \forall i \neq j$

Ejemplo: Dado el siguiente modelo  $Y_i = 9,5 + 2,1X_i + \epsilon_i$ , suponga que en el  $i$ -ésimo ensayo se produjo un lote de  $X_i = 45$  unidades y el número de horas hombre es 108 ( $Y_i$ )

#### Significado de los Parámetros

Estimación de los parámetros por mínimos cuadrados, es decir, estimar  $\beta_0, \beta_1$  tal que se minimice la suma de los errores al cuadrado, más exactamente, se desea minimizar:

$$\sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2$$

Los parámetros estimados son:

- $\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$
- $\hat{\beta}_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{X}) Y_i}{\sum (x_i - \bar{X})^2}$

Observación:

$$R_{xy} = \frac{\sum (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{X})^2 \sum (y_i - \bar{Y})^2}}$$

**Teorema de Gauss-Markov:** Ambos estimadores lineales son insesgados y dentro de todos los estimadores lineales insesgados son los de varianza mínima

### Respecto a los Residuos

Propiedades:

1. La suma de los residuos es cero  

$$\sum e_i = 0$$
2. La suma de los residuos al cuadrado es mínima
3. La suma de los valores observados  $y_i$  es igual a la suma de los valores ajustados
4.  $\sum_{i=1}^n x_i e_i = 0$
5.  $\sum_{i=1}^n \hat{y}_i e_i = 0$

### Varianzas

1.  $V(\hat{\beta}_0) = \frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{n \sum (x_i - \bar{x})^2}$
2.  $V(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$
3.  $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2}$
4.  $SCT = \sum (y_i - \bar{y})^2$
5.  $SCR = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2$
6.  $SCE = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2$
7. Coeficiente de Determinación  $= R^2 = \frac{SCR}{SCT}$

**Inferencias en Análisis de Regresión****Intervalos de Confianza**

1.  $\beta_1 \in \{\hat{\beta}_1 \pm t_{n-2, 1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{V(\hat{\beta}_1)}\}$
2.  $\beta_0 \in \{\hat{\beta}_0 \pm t_{n-2, 1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{V(\hat{\beta}_0)}\}$
3.  $E(Y_h) \in \{\hat{Y}_h \pm t_{n-2, 1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{V(\hat{Y}_h)}\}$
4.  $Y_{h_{nuevo}} \in \{E(Y_h) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma\}$  con parámetros conocidos
5.  $Y_{h_{nuevo}} \in \{\hat{Y}_h \pm t_{n-2, 1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{CME(1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_h - \bar{X})^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2})}\}$
6.  $\bar{Y}_{h_{nuevo}} \in \{\hat{Y}_h \pm t_{n-2, 1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{CME(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{(X_h - \bar{X})^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2})}\}$

**Dóclimas de Hipótesis en Regresión**

1. Si  $H_0 : \beta_1 = 0$  v/s  $H_1 : \beta_1 \neq 0$   
 $RC : \left| \frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{V(\hat{\beta}_1)}} \right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2}$
2. Si  $H_0 : \beta_1 \leq 0$  v/s  $H_1 : \beta_1 > 0$   
 $RC : \frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{V(\hat{\beta}_1)}} > t_{1-\alpha, n-2}$
3. Si  $H_0 : \beta_1 = \beta_{10}$  v/s  $H_1 : \beta_1 \neq \beta_{10}$   
 $RC : \left| \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{10}}{\sqrt{V(\hat{\beta}_1)}} \right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2}$

**Tabla de Análisis de Varianza (ANOVA)**

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrados Medios	$F^*$
Regresión	$SCR$	1	$\frac{SCR}{1}$	$\frac{CM_{reg}}{CM_{error}}$
Error	$SCE$	$(n-2)$	$\frac{SCE}{(n-2)}$	
Total	$SCT$	$(n-1)$		

$F^*$  sigue una distribución Fisher  $(1, n-2)$

- Si  $H_0 : \beta_1 = 0$  v/s  $H_1 : \beta_1 \neq 0$   
 $RC : \{F^* > F_{(1-\alpha; 1; n-2)}\}$

**Ejemplos**

1. Se realizó un estudio sobre los efectos de la temperatura (X) sobre la producción Y de un proceso químico. Se recopilaron los siguientes datos:

X	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
Y	1	5	4	7	10	8	9	13	14	13	18

- Asumiendo un modelo  $Y_i = \alpha + \beta X_i + \epsilon_i$ , estime  $\alpha$  y  $\beta$
  - Construya la ANOVA
  - Probar con  $\alpha = 0,05$  la hipótesis  $H_0 : \beta_1 = 0$  v/s  $H_1 : \beta_1 \neq 0$
  - Calcular un Intervalo de Confianza para  $\beta$  con  $\alpha = 0,05$
  - Calcular un Intervalo de Confianza para el verdadero valor medio de Y cuando  $X = 3$  con  $\alpha = 0,05$
  - Probar que el rendimiento en el proceso químico no depende de la temperatura.
2. La Hi-Ace Company fabrica toda una variedad de válvulas, incluyendo un tipo particular que se usa en las refinerías. En los años 2000-2001, la empresa consiguió contratos para producir esta válvula. Se desea predecir exactamente el costo de mano de obra directa para un determinado contrato, es decir, el problema es el predecir el número de horas de mano de obra directa que debe emplear la empresa en la producción. La empresa dispone de los siguientes datos:

Hrs.	Tamaño	Hrs.	Tamaño	Hrs.	Tamaño
145	5000	141	6000	134	8000
145	4800	149	3000	137	8000
135	9000	131	9300	128	11500
146	3000	126	11500	144	4000

- Obtenga estimaciones para el modelo lineal
- Construya la ANOVA
- Docime  $H_0 = \beta_0$
- ¿Es adecuado el modelo planteado?
- Al final del año 2001 a la Hi-Ace Company le fue propuesto un contrato de 10000 válvulas:
  - Obtenga un Intervalo de Confianza del 95 % para la estimación del tiempo
  - Obtenga un Intervalo de Confianza del 95 % para el promedio de 5 nuevas estimaciones del tiempo

**Análisis de los Supuestos**

Problemas:

- La función de regresión no es lineal
- Los términos de error no tienen varianza constante



- Los errores no son independientes
- El modelo no se ajusta para algunos outliers
- Los errores no se distribuyen normal

Gráficamente:

- Un gráfico de los errores  $e_i$  v/s  $X$  permite ver si es apropiado el modelo y si la varianza de los errores se puede suponer constante.
- Un gráfico de  $\frac{e_i}{\sqrt{CME}}$  permite ver outliers

Tests a Efectuar:

- Para Aleatoriedad: Durbin-Watson
- Varianza Constante: Fisher  $H_0 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = 1$
- Para Normalidad: Kolmogorov-Smirnov

### Durbin-Watson

$$H_0 : \rho = 0 \text{ v/s } H_1 : \rho > 0$$

Sea:

$$D = \frac{\sum_{i=2}^n (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2}$$

$$\begin{array}{lll} D > d_u & \text{acepta } H_0 & \text{no están correlacionados} \\ D < d_l & \text{rechaza } H_0 & \end{array}$$

$$d_l \leq D \leq d_u \quad \text{el test no concluye}$$

Nota: Tabla número de variables = (p-1)

### Kolmogorov-Smirnov

Sea  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$  m.a  $\sim F(x)$

y sea  $x_1, x_2, \dots, x_n$  muestra ordenada. Se define:

$$S_n(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ \frac{k}{n} & x_k \leq x \leq x_{k+1} \\ 1 & x \geq x_n \end{cases}$$

Se supone  $F(x)$  conocido

$$\text{Máx}_x |F(x) - S_n(x)| = D_n$$

$$H_0 = F = F_0 \text{ v/s } H_1 : F \neq F_0$$

Rechazar  $H_0$  si  $D_n > D_n^\alpha$

Para  $\alpha = 0,05$

$n$	$D_n^\alpha$
$> 50$	$\frac{1,36}{\sqrt{n}}$
20	0,29
15	0,34
10	0,41

**Ejemplo:**

0.621	0.503	0.203	0.710	0.710	0.581	0.329	0.480	0.554	0.32
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	------

$H_0 =$  es una distribución uniforme  $\sim U(0, 1)$