Aprendizaje Automático y Minería de Datos

Regresión lineal

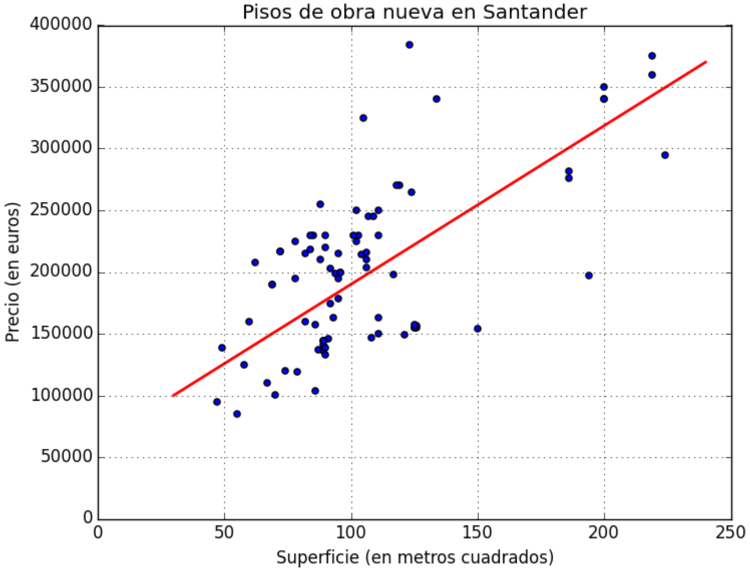
Cristina Tîrnăucă

Dept. Matesco, Universidad de Cantabria

Fac. Ciencias – Grado en Ing. Informática

Regresión lineal univariante

Estimación por mínimos cuadrados ordinarios



Datos de entrada y notación

Datos de entrenamiento:

Superficie en m^2 (x)	Precio en euros (y)
88	210000
90	230000
47	95000
111	230000
...	...

Tabla: Precio (en euros) según superficie (en metros cuadrados)

Notación:

m = número de ejemplos

x = variable de entrada (superficie), $x^{(i)}$

y = variable de salida (precio), $y^{(i)}$

Objetivo: hallar una recta que mejor se aproxime a los datos.

Método iterativo

Algorítmo del gradiente descendente, I

Objetivo: hallar $h(x) = \theta_0 + \theta_1 * x$

Bajo condición: el coste $J(\theta_0, \theta_1) =$ mínimo, donde

$$J(\theta_0, \theta_1) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} (h(x^{(i)}) - y^{(i)})^2$$

Método iterativo

Algorítmo del gradiente descendente, I

Objetivo: hallar $h(x) = \theta_0 + \theta_1 * x$

Bajo condición: el coste $J(\theta_0, \theta_1) =$ mínimo, donde

$$J(\theta_0, \theta_1) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} (h(x^{(i)}) - y^{(i)})^2$$

Idea:

- Empezar con θ_0 y θ_1 al azar
- Modificar θ_0 y θ_1 para reducir $J(\theta_0, \theta_1)$ hasta que (eventualmente) lleguemos a un mínimo.

Método iterativo

Algorítmo del gradiente descendente, II

Idea:

- Empezar con θ_0 y θ_1 al azar
- Modificar θ_0 y θ_1 para reducir $J(\theta_0, \theta_1)$ hasta que (eventualmente) lleguemos a un mínimo.

repetir hasta convergencia {
$\theta_j = \theta_j - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_j} J(\theta_0, \theta_1)$
(para $j = 0$ y $j = 1$)
}
$\alpha =$ ratio de aprendizaje

Modelo de regresión lineal:
$h(x) = \theta_0 + \theta_1 * x$
$J(\theta_0, \theta_1) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} (h(x^{(i)}) - y^{(i)})^2$

Método iterativo

Algorítmo del gradiente descendente, III

repetir hasta convergencia $\{$

$\theta_0 = \theta_0 - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_0} J(\theta_0, \theta_1)$

$\theta_1 = \theta_1 - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_1} J(\theta_0, \theta_1)$

$\}$

$\alpha =$ ratio de aprendizaje

Método iterativo

Algorítmo del gradiente descendente, III

repetir hasta convergencia $\{$

$\theta_0 = \theta_0 - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_0} (\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} (h(x^{(i)}) - y^{(i)})^2)$

$\theta_1 = \theta_1 - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_1} J(\theta_0, \theta_1)$

$\}$

$\alpha =$ ratio de aprendizaje

Método iterativo

Algorítmo del gradiente descendente, III

repetir hasta convergencia $\{$

$$\theta_0 = \theta_0 - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_0} \left(\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} (h(x^{(i)}) - y^{(i)})^2 \right)$$

$$\theta_1 = \theta_1 - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} (h(x^{(i)}) - y^{(i)})^2 \right)$$

$\}$

$\alpha =$ ratio de aprendizaje

Método iterativo

Algorítmo del gradiente descendente, III

repetir hasta convergencia $\{$

$$\theta_0 = \theta_0 - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_0} \left(\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} (\theta_0 + \theta_1 * x^{(i)} - y^{(i)})^2 \right)$$

$$\theta_1 = \theta_1 - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} (h(x^{(i)}) - y^{(i)})^2 \right)$$

$\}$

$\alpha =$ ratio de aprendizaje

Método iterativo

Algorítmo del gradiente descendente, III

repetir hasta convergencia {

$\theta_0 = \theta_0 - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_0} (\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} (\theta_0 + \theta_1 * x^{(i)} - y^{(i)})^2)$

$\theta_1 = \theta_1 - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_1} (\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} (\theta_0 + \theta_1 * x^{(i)} - y^{(i)})^2)$

}

$\alpha =$ ratio de aprendizaje

Método iterativo

Algorítmo del gradiente descendente, III

repetir hasta convergencia $\{$

$\theta_0 = \theta_0 - \alpha(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\theta_0 + \theta_1 * x^{(i)} - y^{(i)}) * 1)$

$\theta_1 = \theta_1 - \alpha\frac{\partial}{\partial\theta_1}(\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}(\theta_0 + \theta_1 * x^{(i)} - y^{(i)})^2)$

$\}$

$\alpha =$ ratio de aprendizaje

Método iterativo

Algorítmo del gradiente descendente, III

repetir hasta convergencia $\{$

$$\theta_0 = \theta_0 - \alpha(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\theta_0 + \theta_1 * x^{(i)} - y^{(i)}) * 1)$$

$$\theta_1 = \theta_1 - \alpha(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\theta_0 + \theta_1 * x^{(i)} - y^{(i)}) * x^{(i)})$$

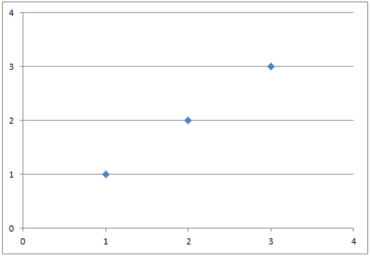
$\}$

$\alpha =$ ratio de aprendizaje

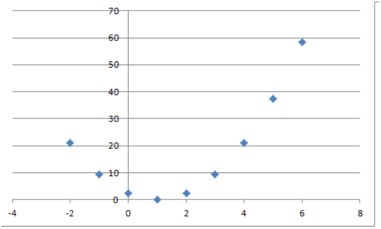
Función de coste - intuiciones, I

Modelo simplificado: $\theta_0 = 0$

$h(x)$



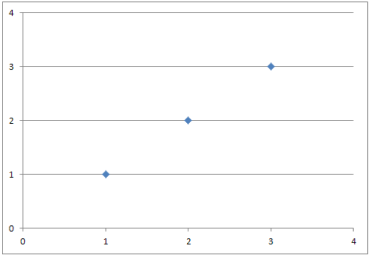
$J(\theta_1)$



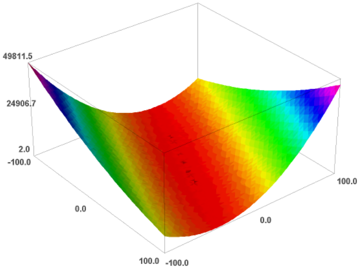
Función de coste - intuiciones, II

Modelo general: θ_0 arbitrario

$h(x)$



$J(\theta_0, \theta_1)$



Función de coste - intuiciones, II

El ratio de aprendizaje α

$$\theta_1 = \theta_1 - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_1} J(\theta_1)$$

α muy pequeño: el algoritmo tarda mucho en converger

α muy grande: el algoritmo no converge

Función de coste - intuiciones, II

El ratio de aprendizaje α

$$\theta_1 = \theta_1 - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_1} J(\theta_1)$$

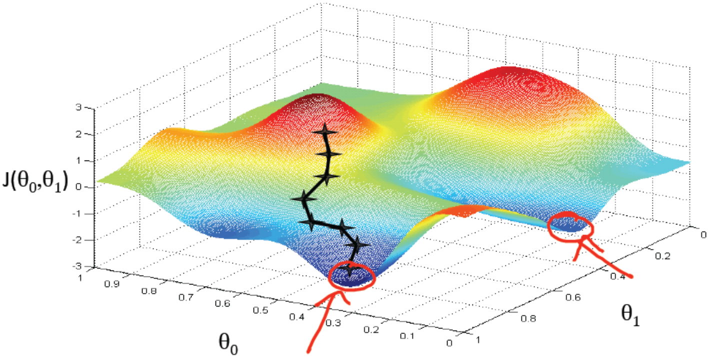
α muy pequeño: el algoritmo tarda mucho en converger

α muy grande: el algoritmo no converge

El algorítmo puede converger a un mínimo local incluso cuando α es fijo.

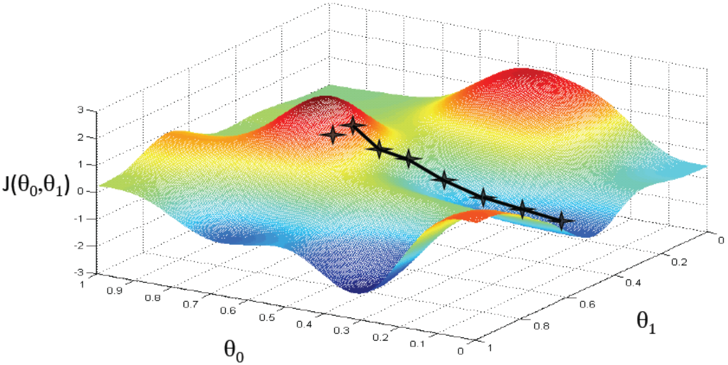
Función de coste - intuiciones, III

Mínimo local / global



Función de coste - intuiciones, IV

Mínimo local / global



Método analítico

Objetivo: hallar $h(x) = \theta_0 + \theta_1 * x$

Bajo condición: el coste $J(\theta_0, \theta_1)$ = mínimo, donde

$$J(\theta_0, \theta_1) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} (h(x^{(i)}) - y^{(i)})^2$$

Método analítico

Objetivo: hallar $h(x) = \theta_0 + \theta_1 * x$

Bajo condición: el coste $J(\theta_0, \theta_1)$ = mínimo, donde

$$J(\theta_0, \theta_1) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} (h(x^{(i)}) - y^{(i)})^2$$

Solución analítica:

$$\theta_0 = \frac{\sum_{i=1}^{m} x^{(i)} * \sum_{i=1}^{m} x^{(i)} y^{(i)} - \sum_{i=1}^{m} x^{(i)} x^{(i)} * \sum_{i=1}^{m} y^{(i)}}{\sum_{i=1}^{m} x^{(i)} * \sum_{i=1}^{m} x^{(i)} - m \sum_{i=1}^{m} x^{(i)} x^{(i)}}$$

$$\theta_1 = \frac{\sum_{i=1}^{m} x^{(i)} * \sum_{i=1}^{m} y^{(i)} - m \sum_{i=1}^{m} x^{(i)} y^{(i)}}{\sum_{i=1}^{m} x^{(i)} * \sum_{i=1}^{m} x^{(i)} - m \sum_{i=1}^{m} x^{(i)} x^{(i)}}$$