Contoh Solusi PR-4

SOAL

1. Pada suatu toko diketahui bahwa jumlah transaksi pembelian yang terjadi ke toko tersebut setiap hari secara rata-rata adalah 360 transaksi. Toko ini beroperasi selama 12 jam setiap harinya dari jam 10.00 s.d. 22.00. Selanjutnya, waktu dimana transaksi selesai diproses oleh kasir (ditandai dengan dikeluarkannya struk belanja) disebut sebagai waktu transaksi. Diketahui bahwa jumlah transaksi di toko ini pada jangka waktu tertentu terdistribusi secara Poisson. Asumsikan bahwa pada suatu waktu tidak ada lebih dari 1 transaksi yang diproses.
   a. Berapa peluang bahwa jarak waktu antara 2 transaksi adalah lebih dari 3 menit? [5]

      Solusi
      X adalah jarak waktu antara dua transaksi. [1]
      λ = 360 transaksi / 12 jam = 30 transaksi / jam = 0.5 transaksi / menit
      $X \sim Exp(0.5)$ [1]

      $P(X > 3)$
      $= 1 - P(X \leq 3)$
      $= 1 - (1 - e^{-\lambda x})$
      $= e^{-(0.5)(3)}$
      $= e^{-(1.5)} = 0.22$ [3]

   b. Berapa peluang bahwa terdapat lebih dari 1 transaksi dalam waktu 3 menit? [5]

      Solusi
      Y adalah jumlah transaksi pada selang waktu tertentu. [1]
      $Y \sim Poi(0.5)$ [1]
      $\lambda t = (0.5)(3) = 1.5$ [1]

      $P(Y > 1)$
      $= 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1)$
      $= 1 - e^{-(1.5)}\frac{1.5^0}{0!} - e^{-(1.5)}\frac{1.5^1}{1!}$
      $= 1 - e^{-(1.5)} - (1.5)e^{-(1.5)}$
      $= 1 - (2.5)e^{-(1.5)}$
      $= 1 - (2.5)(0.22)$
      $= 0.45$ [2]

   c. Diketahui bahwa antara jam 14.00 dan 14.03 tidak ada transaksi yang terjadi, berapa peluangnya bahwa pada jam 14.05 masih belum ada transaksi baru? [5]

      Solusi

$P(X > 5 \mid X > 3)$ [2]
$= P(X > 2)$ Sifat Memoryless
$= 1 - P(X \leq 2)$
$= 1 - (1 - e^{-\lambda x})$
$= e^{-(0.5)(2)}$
$= e^{-(1)}$
$= 0.37$ [3]

2. Diketahui bahwa pada suatu ATM, lama antrian satu orang terdistribusi secara uniform dalam rentang 5 - 20 menit.
   a. Hitunglah peluang seseorang akan mendapatkan gilirannya antara 8 menit sampai 15 menit. [5]

   Solusi
   Misalkan X adalah lama waktu antrian satu orang di ATM [1]

   $X \sim Uni(5, 20)$ [1]

   $P(8 < X < 15)$
   $= \frac{15-8}{20-5}$
   $= \frac{7}{15}$ [3]

   b. Hitunglah rata-rata dan standar deviasi dari lama antrian. [6]

   Solusi
   $X \sim Uni(5, 20)$

   $E[X] = \frac{20+5}{2} = 12.5$ menit [2]
   $Var[X] = \frac{(20-5)^2}{12} = \frac{225}{12}$ [2]
   $S.d.[X] = \sqrt{\frac{225}{12}} = 4.33$ [2]

3. Seorang mahasiswa bernama Wann berjalan setiap hari dari rumahnya ke kampus. Waktu rata-rata untuk perjalanan satu arah adalah 24 menit, dengan standar deviasi 3.8 menit. Asumsikan distribusi waktu perjalanan terdistribusi secara normal.
   a. Berapa probabilitas perjalanan akan memakan waktu setidaknya 1/2 jam? [5]

   Solusi
   X adalah waktu perjalanan dalam menit. [1]
   $X \sim N(24, 3.8^2)$ [1]
   $Z = (30 - 24) / 3.8 = 1.58$ [1]

$P(X > 30)$ $= P(Z > 1.58)$ $= 1 - P(Z \leq 1.58)$ $= 1 - 0.9429$ $= 0.0571$ [2]

b. Jika kelas Statistika & Probabilitas mulai jam 09:00 pagi dan Wann meninggalkan rumahnya jam 08:45 pagi setiap hari, berapa persen dia terlambat kuliah? [5]

Solusi $Z = (15 - 24) / 3.8 = -2.37$ [2] $P(X > 15)$ $= P(Z > -2.37)$ $= 1 - P(Z \leq - 2.37)$ $= P(Z > 2.37)$ $= 0.9911$ $= 99.11\%$ [3]

c. Tentukan waktu perjalanan (dalam menit) sehingga "mencakup" 15% dari perjalanan paling lama. [10]

Solusi $P(X > x) = 0.15$ [2] $1 - P(X \leq x) = 0.15$ $P(X \leq x) = 1 - 0.15$ $P(X \leq x) = 0.85$ $P(Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}) = 0.85$ $P(Z \leq 1.04) = 0.85$ [2] $\frac{x - \mu}{\sigma} = 1.04$ $x = 1.04\sigma + \mu$ [2] $x = 1.04(3.8) + 24$ $x = 3.952 + 24$ $x = 27.952$ [4]

4. Misalkan pada suatu semester, jumlah warga Fasilkom UI (dosen, staf, dan mahasiswa) adalah 1000 orang. Sebagian besar warga Fasilkom suka memesan sate di kantin Fasilkom. Suatu survei menemukan bahwa frekuensi memesan sate setiap warga Fasilkom secara rata-rata adalah 2 kali dalam seminggu dengan standar deviasi

1. Dengan asumsi bahwa keputusan seorang warga Fasilkom memesan sate bersifat independen terhadap warga lainnya dan satu piring sate harganya Rp.10.000.

a. Seorang memberi tahu Anda bahwa omzet (nilai penjualan) tukang sate Fasilkom lebih kecil dari Rp5.000.000 dalam seminggu. Bagaimana penilaian Anda terhadap informasi ini? [5]

Solusi
Untuk 1 orang, distribusi frekuensi pesan sate: $\mu = 2$, $\sigma = 1$
Untuk 1000 orang:
rata-rata $n\mu = (1000)(2) = 2000$ [1]
s.d. $\sigma\sqrt{n} = (1)(\sqrt{1000}) = \sqrt{1000}$ [1]

5.000.000 setara dengan penjualan 5.000.000/10.000 = 500 piring sate
$P(X_1 + X_2 + \ldots + X_{1000} < 500)$ [1]
$= P(Z < \frac{500 - 2000}{\sqrt{1000}})$
$= P(Z < -47.43)$ [1]
$= 0$

Dari perhitungan di atas dapat disimpulkan bahwa informasi di atas tidak bisa dipercaya karena peluangnya mendekati nol. [1]

b. Berapakah peluang omzet tukang sate berada pada kisaran Rp.19.000.000 s.d. Rp.23.000.000 setiap minggunya? [5]

Solusi
19.000.000 → 1900 piring sate
23.000.000 → 2300 piring sate
$P(1900 < X_1 + X_2 + \ldots + X_{1000} < 2300)$ [1]
$= P(\frac{1900 - 2000}{\sqrt{1000}} < Z < \frac{2300 - 2000}{\sqrt{1000}})$
$= P(\frac{1900 - 2000}{\sqrt{1000}} < Z < \frac{2300 - 2000}{\sqrt{1000}})$
$= P(-3.16 < Z < 9.49)$ [1]
$= P(Z < 9.49) - P(Z < -3.16)$
$= 1 - (1 - 0.9992)$
$= 0.9992$ [3]

5. Nilai ujian mahasiswa dari suatu mata kuliah terdistribusi normal dengan rerata 70 dan standar deviasi 5.

a. Jika diambil satu mahasiswa secara acak, berapa probabilitas bahwa nilai ujiannya 72 atau lebih tinggi? [5]

Solusi
X adalah nilai ujian mahasiswa. [1]
$X \sim N(70, 25)$ [1]

P(X $\geq$ 72) [1]
= 1 - $\Phi(\frac{72-70}{5})$
= 1 - Φ(0.4)
= 1 - 0.6554 [1]
= 0.3446 [1]

b. Jika diambil 16 mahasiswa secara acak, berapa probabilitas bahwa rerata nilai ujiannya antara 68 sampai 75 (inklusif)? [5]

Solusi
Y adalah nilai ujian 49 mahasiswa yang diambil secara acak. [1]

Y ~ N(70, 25/16) [1]
maka σ = 5/4

P(68 $\leq$ Y $\leq$ 75) [1]
= P(Y $\leq$ 75) - P(Y $\leq$ 68)
= $\Phi(\frac{75-70}{5/4})$ - $\Phi(\frac{68-70}{5/4})$
= Φ(4) - Φ(-1.6)
= 1 - (1 - 0.9452) [1]
= 0.9452 [1]

6. Tabel berikut memberikan persentase individu, yang dikategorikan berdasarkan kelamin, yang mengikuti praktik kesehatan negatif tertentu.

	Tidur 6 jam atau kurang semalam	**Perokok**	**Jarang makan sarapan**	**Kelebihan berat badan hingga 20 persen atau lebih**
Pria	24.7	28.4	45.4	29.6
Wanita	21.4	22.8	42.0	25.6

a. Misalkan sampel acak 450 pria dipilih. Aproksimasi probabilitas
i. Setidaknya 225 dari mereka jarang makan sarapan [6]

Solusi
Jumlah sampel pria, n = 450
Probabilitas jarang makan, Pm = 0.454

np = 204.3

np(1-p) = 111.5478

Misalkan X adalah RV pria yang jarang makan [1]

X ~ N(204.3, 111.5478) [1]

P(X ≥ 225) = P(X ≥ 224.5) [1]
= P ($\frac{X-204.3}{\sqrt{111.5478}} \geq \frac{224.5-204.3}{\sqrt{111.5478}}$)
= P (Z ≥ 1.91) [1]
= 1 - P(Z < 1.91)
= 1 - 0.9719
= 0.0281 [2]

ii. Kurang dari 150 dari mereka yang merokok. [6]

Solusi
Jumlah sampel pria, n = 450
Probabilitas merokok, Pm = 0.284

np = 127.8
np(1 - p) = 91.5048

Misalkan Y adalah RV pria yang merokok [1]

Y ~ N(127.8, 91.5048) [1]

P(Y < 150) = P(X ≤ 149.5) [1]
= P ($\frac{X-127.8}{\sqrt{91.5048}} \leq \frac{149.5-127.8}{\sqrt{91.5048}}$)
= P (Z ≤ 2.27) [1]
= 0.9884 [2]

b. Misalkan sampel acak 450 wanita dipilih. Aproksimasi probabilitas
   i. Setidaknya 90 dari mereka kelebihan berat badan hingga 20 persen atau lebih [6]

Solusi
Jumlah sampel wanita, n = 450
Probabilitas overweight, Po = 0.256

np = 115.2
np(1 - p) = 85.7088

Misalkan Y adalah RV wanita yang overweight [1]

Y ~ N(115.2, 85.7088) [1]

P(X $\geq$ 90) = P(X $\geq$ 89.5) [1]
= P ($\frac{X - 115.2}{\sqrt{85.7088}} \geq \frac{89.5 - 115.2}{\sqrt{85.7088}}$)
= P (Z $\geq$ -2.78) [1]
= P(Z $\leq$ 2.78)
= 0.9973 [2]

ii. Terdapat diantara 70 sampai 100 (inklusif) dari mereka yang tidur 6 jam atau kurang setiap malam [6]

Solusi
Jumlah sampel wanita, n = 450
Probabilitas tidur 6 jam atau kurang, Pt = 0.214

np = 96.3
np(1 - p) = 75.6918

Misalkan Y adalah RV wanita yang overweight [1]

Y ~ N(96.3, 75.6918) [1]

P(70 $\leq$ X $\leq$ 100) = P(X $\leq$ 100.5) - P(X $\leq$ 69.5) [1]
= P ($\frac{X - 96.3}{\sqrt{75.6918}} \leq \frac{100.5 - 96.3}{\sqrt{75.6918}}$) - P ($\frac{X - 96.3}{\sqrt{75.6918}} \leq \frac{69.5 - 96.3}{\sqrt{75.6918}}$)
= P (Z $\leq$ 0.48) - P (Z $\leq$ -3.08) [1]
= P (Z $\leq$ 0.48) - P(Z $\geq$ 3.08)
= 0.6844 - (1 - P (Z $\leq$ 3.08))
= 0.6844 - (1 - 0.9990)
= 0.6844 - 0.0010
= 0.6834 [2]

c. Misalkan sampel acak 450 wanita dan 450 pria dipilih. Aproksimasi probabilitas lebih banyak wanita dibanding pria yang jarang makan sarapan. [10]

Solusi
Biarkan X dan Y mendefinisikan jumlah pria dan wanita dalam sampel adalah yang jarang makan sarapan. [1]

X ~ N(204.3, 111.5478) [1]
-X ~ N(-204.3, 111.5478) [1]

Y ~ N(189, 109.62) [1]
Y - X ~ N(-15.3, 221.1678) [1]

P (Y > X) = P(Y - X > 0.5) [1]

$= P\left(\frac{Y-X+15.3}{\sqrt{221.1678}} > \frac{0.5+15.3}{\sqrt{221.1678}}\right)$

= P (Z > 1.06) [2]

= 1 - 0.8554

= 0.1446 [2]