

## Lab5: พีชคณิตบูลีน (Boolean algebra) คาโนแม็พ (Karnaugh Map) และการออกแบบวงจรประสม

Logic 0, 1, Z, X, U      Z = High Impedance, X = Don't Care, U = Unknown/Unassigned

พีชคณิตบูลีนจากตารางค่าความจริง

**Keyword:** Canonical Form, Minterms, Maxterms, Decimal Notation, Minimal Form

$$\begin{aligned}
 \text{SOP (AND-OR)} \rightarrow \quad z(X) &= m_a(X) + m_b(X) + \dots + m_k(X) \\
 z(X) &= \sum(a, b, \dots, k) \\
 m_i(X) &= x_1 x_2 \dots x_n \\
 z(a, b, c, d) &= \sum(3, 5, 7, 15) \\
 \text{Minimal SOP (AND-OR)} &= \bar{a}\bar{b}cd + \bar{a}b\bar{c}d + \bar{a}bcd + abcd
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{POS (OR-AND)} \rightarrow \quad z(X) &= M_p(X)M_q(X) \dots M_t(X) \\
 z(X) &= \prod(p, q, \dots, t) \\
 M_i(x) &= x_1 + x_2 + \dots + x_n \\
 z(a, b, c, d) &= \prod(0, 1, 2) \\
 \text{Minimal POS (OR-AND)} &= (a + b + c + d)(a + b + c + \bar{d})(a + b + \bar{c} + d)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum(3, 5, 7, 15) &= \prod(0, 1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14) \\
 \sum(0, 1, 2, 3, 4, 5) &= \prod(6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15) \\
 \sum(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) &= \prod(8, 9, 10, 11, 12, 13, 14)
 \end{aligned}$$

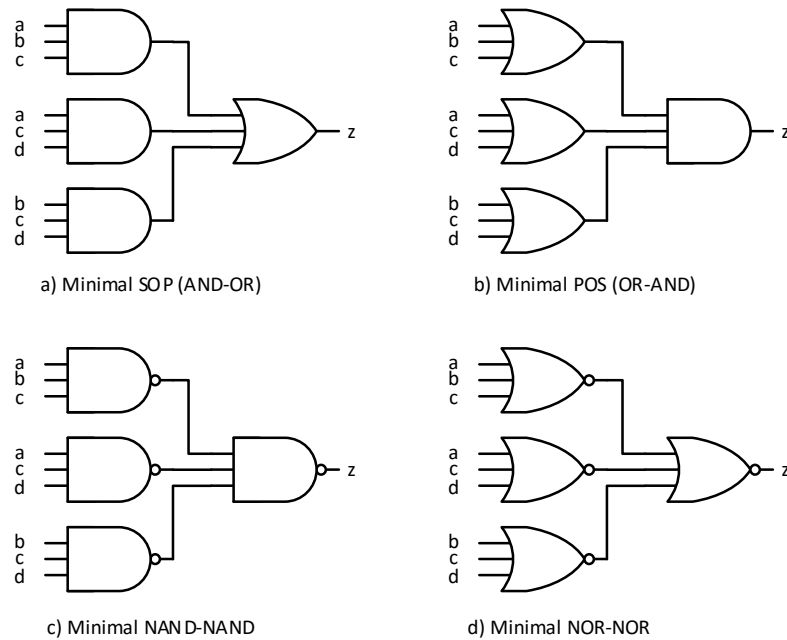
De Morgan's Law

$$a + b = \overline{(\bar{a})(\bar{b})} \qquad a \cdot b = \overline{\bar{a} + \bar{b}}$$

$$\text{SOP} \quad abc + acd + bcd = \overline{(\bar{a}\bar{b}\bar{c})(\bar{a}\bar{c}\bar{d})(\bar{b}\bar{c}\bar{d})} \quad (\text{NAND-NAND})$$

$$\text{POS} \quad (a + b + c)(a + c + d)(b + c + d) = \overline{\overline{(a + b + c)} + \overline{(a + c + d)} + \overline{(b + c + d)}} \quad (\text{NOR-NOR})$$

ภาพวงจรของวงจรแบบ SOP (AND-OR), POS (OR-AND), NAND-NAND และ NOR-NOR จะเป็นดังภาพที่ 5-1 โดยที่ค่า z ของวงจร SOP (a) จะเท่ากับค่า z ของวงจร NAND-NAND (c) และ ค่า z ของวงจร POS (b) จะเท่ากับค่า z ของวงจร NOR-NOR (d)



ภาพที่ 5-1 วงจร Minimal ในรูปแบบต่าง ๆ

### Algebra Minimization

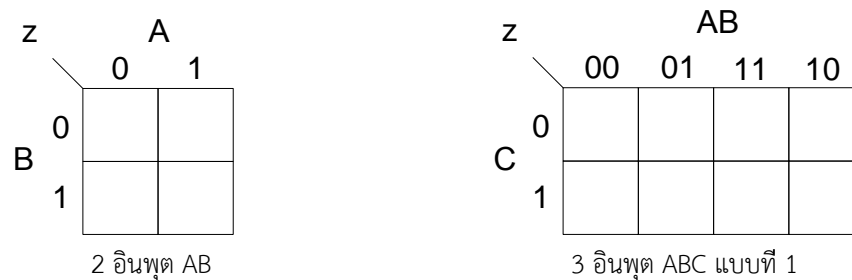
$$Px + P\bar{x} = P(x + \bar{x}) = P(1) = P$$

$$Ex + E\bar{x} = E$$

$$(E + x)(E + \bar{x}) = E$$

### การลดรูปด้วยคาโนแม็พ (Karnaugh Map, K-Map, KM)

ตารางคาโนแม็พจะเขียนตามจำนวนตัวแปรอินพุต จำนวนช่องของตารางจะเท่ากับ 2 ยกกำลังด้วย จำนวนอินพุต เช่น มีจำนวน 2 อินพุต ก็จะมี 4 ช่อง จำนวน 3 อินพุตก็จะมี 8 ช่อง และ จำนวน 4 อินพุตก็จะมี 16 ช่อง เป็นต้น การสร้างตารางจะเป็นตามตัวอย่างภาพที่ 5-2 และภาพที่ 5-3 โดยที่จะมีการแยกเขียนตัวแปรอินพุตไปเป็นตามแนวนอนและแนวตั้งดังภาพ และจะมีการเขียนกำกับค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของตัวแปรลงในแต่ละแถวช่อง โดยที่การเขียนค่าที่เป็นไปได้จะเขียนเรียงกันไปแบบให้มีความเปลี่ยนแปลงช่องละ 1 บิต หรือพูดง่าย ๆ ก็คือช่องที่ติดกันต้องมีค่าที่เป็นไปได้เปลี่ยนแปลงเพียงแค่ 1 บิตเท่านั้น ดังตัวอย่างในภาพ



ภาพที่ 5-2 การเขียนคาโนแม็พจากตารางค่าความจริง ที่มีขนาด 2 และ 3 อินพุต

		C	
		0	1
AB	00		
	01		
	11		
	10		

3 อินพุต ABC แบบที่ 2

		AB			
		00	01	11	10
CD	00				
	01				
	11				
	10				

4 อินพุต ABCD

ภาพที่ 5-3 การเขียนคาโนแม็พจากตารางค่าความจริง ที่มีขนาด 3 และ 4 อินพุต

จากนั้นจะนำค่าที่ได้จากตารางค่าความจริง มาเขียนลงบนตารางคาโนแม็พ โดยในแต่ละช่องให้เขียนค่าคำตอบ 0 หรือ 1 ลงไป หรือถ้าไม่สนใจ (don't care) ให้เขียนตัว X ลงไป จากนั้นก็เริ่มลดรูปวงจรรูปร่างค่าความสัมพันธ์ของค่าที่สนใจ ซึ่งจะเป็น 0 หรือ 1 ก็ได้ ถ้าสนใจค่า 1 ผลที่ได้ต้องเขียนออกมาในรูปแบบ SOP แต่ถ้าสนใจค่า 0 จะต้องเขียนออกมาในรูปแบบ POS โดยที่สามารถใช้ X ช่วยแทนเป็นได้ทั้ง 1 และ 0 การลดรูปจะใช้ดู หรือช่วยวงกลม จำนวน 0 หรือ 1 ที่อยู่ติดกัน ให้ครบ โดยจะเลือกเป็นขนาด 2 ยกกำลัง n นั่นก็คือ สามารถลดรูปได้โดยการเลือกลดได้ตั้งแต่ 2, 4, 8, 16, ... ช่อง โดยที่ค่าที่เป็นไปได้ที่ต่าง ๆ กันจะถูกลดรูปหายไป เช่นเดียวกับการลดรูปแบบบูลีน  $Ex + E\bar{x} = E$  หรือ  $(E + x)(E + \bar{x}) = E$  และสามารถเลือกค่าที่จะลดรูปซ้ำ หรือ วงซ้ำกับค่าที่สนใจได้เพื่อช่วยเพิ่มการลดของจำนวนตัวแปร ซึ่งก็จะคล้ายกับการเลือกพจน์ซ้ำเพื่อช่วยในการลดรูปแบบใช้พีชคณิตบูลีนนั่นเอง

#### ตัวอย่างการลดรูปด้วยพีชคณิตบูลีนและคาโนแม็พ

ตารางค่าความจริง z

a	b	c	z
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

#### ใช้ Karnaugh-Map

		bc			
		00	01	11	10
a	0	1	1	1	1
	1	0	0	1	0

$$z = \bar{a} + bc$$

		bc			
		00	01	11	10
a	0	1	1	1	1
	1	0	0	1	0

$$z = (\bar{a} + b)(\bar{a} + c)$$

#### ใช้พีชคณิตบูลีน

$$\begin{aligned} z &= \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}bc + abc \\ &= \bar{a}\bar{b} + \bar{a}b + bc \\ &= \bar{a} + bc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= (\bar{a} + b + c)(\bar{a} + b + \bar{c})(\bar{a} + \bar{b} + c) \\ &= (\bar{a} + b)(\bar{a} + c) \end{aligned}$$

## การออกแบบวงจรประสม (Combination Design)

ขั้นตอนการออกแบบวงจร

- เขียนตารางค่าความจริง (truth table) พฤติกรรมของวงจร ทั้งในส่วนของอินพุต และเอาต์พุต
- เขียนสมการแทนคุณสมบัติวงจร โดยดูจากตารางค่าความจริง
- ลดรูปสมการเพื่อให้ง่ายต่อสร้าง
  - ใช้พีชคณิตตรรกะช่วยลดเทอม (Boolean Algebra Minimization)
  - ใช้คาโนแม็พ (อาจจะข้ามข้อ 2. มาใช้คาโนแม็พเพื่อเขียนสมการแทนวงจรเลย)
- เขียนวงจรตามสมการที่ได้จากข้อที่ 3.
- สร้างวงจรตามข้อ 4.

ตัวอย่าง ให้ออกแบบวงจรที่มีการทำงานดังตารางค่าความจริงที่ 1

ตารางค่าความจริง ที่ 1 ตารางค่าความจริงในการแปลงเลขฐาน 2 ให้แสดงผลออก 7-segment โดยสนใจเฉพาะเลข 0,1,2,3

A	B	C	D	a	b	c	d	e	f	g
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	X	X	X	X	X	X	X
0	1	0	1	X	X	X	X	X	X	X
0	1	1	0	X	X	X	X	X	X	X
0	1	1	1	X	X	X	X	X	X	X
1	0	0	0	X	X	X	X	X	X	X
1	0	0	1	X	X	X	X	X	X	X
1	0	1	0	X	X	X	X	X	X	X
1	0	1	1	X	X	X	X	X	X	X
1	1	0	0	X	X	X	X	X	X	X
1	1	0	1	X	X	X	X	X	X	X
1	1	1	0	X	X	X	X	X	X	X
1	1	1	1	X	X	X	X	X	X	X

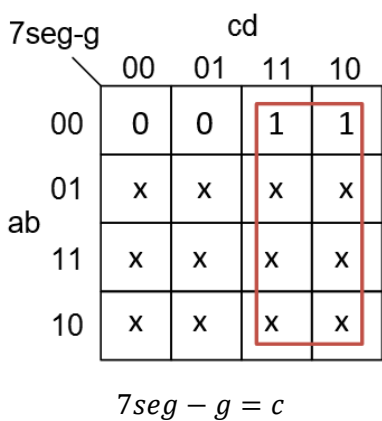
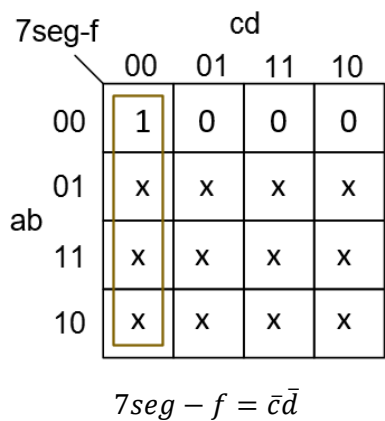
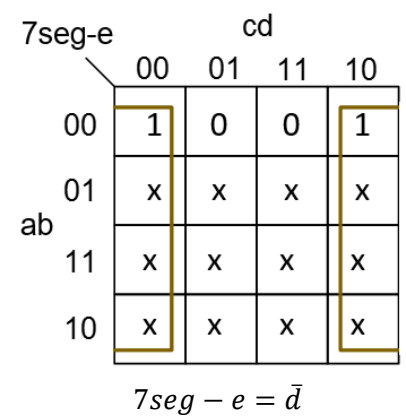
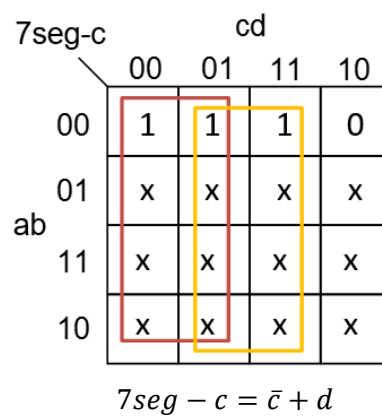
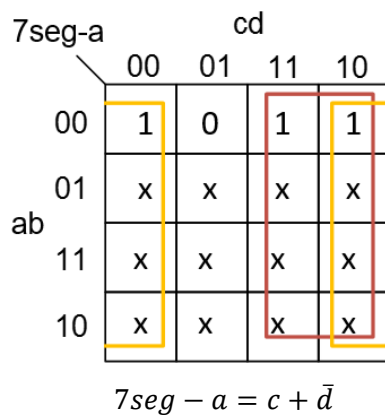
(Decoder)



เขียนสมการแทนวงจรโดยใช้ค่าโนแม็พ

A	B	C	D	a	b	c	d	e	f	g
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1

จากตาราง เขียนค่าโนแม็พและสมการได้ดังนี้



สมการวงจร

$$\begin{aligned}
 7seg - a &= c + \bar{d} \\
 7seg - b &= 1 \\
 7seg - c &= \bar{c} + d \\
 7seg - d &= a \\
 7seg - e &= \bar{d} \\
 7seg - f &= \bar{c}\bar{d} \\
 7seg - g &= c
 \end{aligned}$$

เขียนวงจรตามสมการ

