DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Trabajo práctico - Programación Lineal

19 de mayo de 2025 | Intro a IO y Optimización

Integrante	LU	Correo electrónico
Lamonica, Ivo	66/22	`ivolamonicam@gmail.com`
Masetto, Lautaro	1052/22	`lemasetto@gmail.com`
Vanotti, Franco	464/23	`fvanotti15@gmail.com`

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300
http://www.exactas.uba.ar

0. Introducción

Una refinería produce tres productos, combustible para aviones, combustible para vehículos y kerosene. Gracias a los buenos precios de venta que mantiene, la refinería vende todos los productos que produce.

El proceso de producción se compone de refinado, fraccionado y embalaje. Para realizar estas tareas, la empresa cuenta con 4 sectores:

- refinado: capacidad mensual de 38.000 horas, gasto fijo de $5.000.000.
- fraccionado: capacidad mensual de 80.000 horas, gasto fijo de $5.000.000.
- embalaje de combustible para aviones: capacidad mensual de 4.000 horas, gasto fijo de $2.000.000.
- embalaje de combustible para vehículos: capacidad mensual de 6.000 horas, gasto fijo de $1.000.000.
- embalaje de kerosene: capacidad mensual de 7.000 horas, gasto fijo de $500.000.

El tiempo requerido para refinar 1000 litros de combustible para aviones es de 10 horas, mientras que para fraccionarlos son necesarias 20 horas y 4 para su embalaje. Para el combustible para vehículos los tiempos son de 5, 10 y 2 horas respectivamente, y para los 1000 litros de kerosene de 3, 6 y 1 hora.

El precio de venta es de $16000 para los mil litros de combustible para aviones, de $8000 para los mil litros de combustible para vehículos y de $4000 los mil litros de kerosene. El costo de la materia prima para mil litros de combustible para aviones es de $4000, el de refinado de $4100, el de fraccionado de $1000, y el de embalaje de $1000. Para 1000 litros de combustible para vehículos, los costos son de $1000, $3000, $600 y $500, respectivamente. Y para 1000 litros de kerosene de $500, $1500, $400 y $400.

En el último mes, la refinería produjo 500.000 litros de combustible para aviones, 3.000.000 litros de combustible para vehículos y 6.000.000 litros de kerosene, lo que implicí una pérdida en el combustible para aviones al considerar prorrateados los gastos fijos.

El gerente de ventas señaló que estudios de mercado indican que no es posible aumentar el precio de venta del combustible para aviones y, por lo tanto, para aumentar las ganancias de la empresa se debe discontinuar su producción.

Sin embargo, la conclusión del jefe del departamento de embalaje de combustible para aviones es distinta. Según él, los gastos fijos de su sector inciden tanto en el costo de cada litro de combustible para aviones porque se produce poco de este producto, y para aumentar las ganancias de la empresa propone que se produzca más.

En vista de las distintas propuestas, el director de la empresa necesita ayuda para evaluarlas y tomar las decisiones apropiadas. Para esto, analizar los siguientes ítems, **evitando reoptimizar en todos los casos que sea posible:**

1. Ejercicios

1. Calcular la ganancia o pérdida (prorrateando los gastos fijos) de cada producto que se obtuvo en el mes anterior (cuando se produjeron 500.000 litros de combustible para aviones, 3.000.000 de combustible para vehículos y 6.000.000 litros de kerosene) y la ganancia (o pérdida) total de la compañía

Calcular Costos Variables: Usamos los costos por cada 1.000 litros y multiplicamos por la producción total para cada producto.

- Combustible para aviones (500.000 L / 1.000 = 500 unidades):

- Materia prima: $500 \times 4.000 = \$2.000.000$
- Refinado: $500 \times 4.100 = \$2.050.000$
- Fraccionado: $500 \times 1.000 = \$500.000$
- Embalaje: $500 \times 1.000 = \$500.000$

- Total: $5.050.000

- Combustible para vehículos (3.000.000 L / 1.000 = 3.000 unidades):

- Materia prima: $3.000 \times 1.000 = \$3.000.000$
- Refinado: $3.000 \times 3.000 = \$9.000.000$
- Fraccionado: $3.000 \times 600 = \$1.800.000$
- Embalaje: $3.000 \times 500 = \$1.500.000$

- Total: $15.300.000

- Kerosene (6.000.000 L / 1.000 = 6.000 unidades):

- Materia prima: $6.000 \times 500 = \$3.000.000$
- Refinado: $6.000 \times 1.500 = \$9.000.000$
- Fraccionado: $6.000 \times 400 = \$2.400.000$
- Embalaje: $6.000 \times 400 = \$2.400.000$

- Total: $16.800.000

Calcular Ingresos por Ventas:

- Aviones: $500 \times 16.000 = \$8.000.000$
- Vehículos: $3.000 \times 8.000 = \$24.000.000$
- Kerosene: $6.000 \times 4.000 = \$24.000.000$

Ganancia Bruta por Producto:

Producto	Ingreso	Costo	Ganancia bruta
Combustible Aviones	8.000.000	5.050.000	2.950.000
Combustible Vehículos	24.000.000	15.300.000	8.700.000
Kerosene	24.000.000	16.800.000	7.200.000

Prorratear Gastos Fijos:

Gasto Fijo Total:

- Refinado: \$5.000.000
- Fraccionado: \$5.000.000
- Embalaje aviones: \$2.000.000
- Embalaje vehículos: \$1.000.000
- Embalaje kerosene: \$500.000

- Total: \$13.500.000

Prorrateamos los gastos según uso de horas:

Primero, calculamos las horas usadas por cada producto en cada etapa (por cada 1000 litros)

Producto	Unidades	Refinado (h)	Fraccionado (h)	Embalaje (h)
Combustible Aviones	500	$10 \times 500 = 5.000$	$20 \times 500 = 10.000$	$4 \times 500 = 2.000$
Combustible Vehículos	3.000	$5 \times 3.000 = 15.000$	$10 \times 3.000 = 30.000$	$2 \times 3.000 = 6.000$
Kerosene	6.000	$3 \times 6.000 = 18.000$	$6 \times 6.000 = 36.000$	$1 \times 6.000 = 6.000$

a) Refinado (38.000 horas totales):
   - Aviones: $(5.000/38.000) \times 5.000.000 = \$657.895$
   - Vehículos: $(15.000/38.000) \times 5.000.000 = \$1.973.684$
   - Kerosene: $(18.000/38.000) \times 5.000.000 = \$2.368.421$

b) Fraccionado (76.000 horas totales):
   - Aviones: $(10.000/76.000) \times 5.000.000 = \$657.895$
   - Vehículos: $(30.000/76.000) \times 5.000.000 = \$1.973.684$
   - Kerosene: $(36.000/76.000) \times 5.000.000 = \$2.368.421$

c) Embalaje (por sector):
   - Aviones: \$2.000.000
   - Vehículos: \$1.000.000
   - Kerosene: \$500.000

Gasto Fijo Total por Producto:

Producto	Refinado	Fraccionado	Embalaje	Gasto Fijo Total
Combustible Aviones	657.895	657.895	2.000.000	3.315.790
Combustible Vehículos	1.973.684	1.973.684	1.000.000	4.947.368
Kerosene	2.368.421	2.368.421	500.000	5.236.842

Ganancia Neta por Producto:

Producto	Ganancia bruta	Gasto fijo	Ganancia neta
Combustible Aviones	2.950.000	3.315.790	-365.790
Combustible Vehículos	8.700.000	4.947.368	3.752.632
Kerosene	7.200.000	5.236.842	1.963.158

Ganancia Total de la Empresa: $-\$365.790 + \$3.752.632 + \$1.963.158 = \$5.350.000$

2. Si la empresa no hubiese producido combustible para aviones manteniendo en los mismos valores los otros productos, ¿la ganancia de la compañía habría sido mejor? Suponer que se cierra el sector de embalaje de combustibles para aviones.

Datos Relevantes:

- Se elimina completamente el combustible para aviones.
- Se mantiene igual la producción de:
  - Combustible para vehículos: 3.000.000 L
  - Kerosene: 6.000.000 L
- El sector de embalaje para aviones se cierra, así que se eliminan sus gastos fijos ($2.000.000).
- Los demás sectores siguen funcionando con los productos restantes.

Entonces, la ganacia bruta del combustible para vehículos y del kerosene siguen siendo:

Producto	Ingreso	Costo	Ganancia bruta
Combustible Vehículos	24.000.000	15.300.000	8.700.000
Kerosene	24.000.000	16.800.000	7.200.000

Lo que cambian son los gastos fijos:

Capacidad Liberada:

Al eliminar la producción de combustiblede aviones:

- Refinado: Se liberan 5.000 h
- Fraccionado: Se liberan 10.000 h
- Embalaje Combustible Aviones: se cierra

Prorratear Gastos Fijos:

Gasto Fijo Total:

- Refinado: $5.000.000
- Fraccionado: $5.000.000
- Embalaje vehículos: $1.000.000
- Embalaje kerosene: $500.000

- Total: $11.500.000

Prorrateamos los gastos según uso de horas:

Primero, calculamos las horas usadas por cada producto en cada etapa (por cada 1000 litros)

Producto	Unidades	Refinado (h)	Fraccionado (h)	Embalaje (h)
Combustible Vehículos	3.000	$5 \times 3.000 = 15.000$	$10 \times 3.000 = 30.000$	$2 \times 3.000 = 6.000$
Kerosene	6.000	$3 \times 6.000 = 18.000$	$6 \times 6.000 = 36.000$	$1 \times 6.000 = 6.000$

a) Refinado (33.000 horas totales):

- Vehículos: (15.000/33.000) × 5.000.000 = \$2.272.727
- Kerosene: (18.000/33.000) × 5.000.000 = \$2.727.273

b) Fraccionado (66.000 horas totales):

- Vehículos: (30.000/66.000) × 5.000.000 = \$2.272.727
- Kerosene: (36.000/6.000) × 5.000.000 = \$2.727.273

c) Embalaje (por sector):

- Vehículos: \$1.000.000
- Kerosene: \$500.000

Gasto Fijo Total por Producto:

Producto	Refinado	Fraccionado	Embalaje	Gasto Fijo Total
Combustible Vehículos	2.272.727	2.272.727	1.000.000	5.545.454
Kerosene	2.727.273	2.727.273	500.000	5.954.546

Ganancia Neta por Producto:

Producto	Ganancia bruta	Gasto fijo	Ganancia neta
Combustible Vehículos	8.700.000	5.545.454	3.154.546
Kerosene	7.200.000	5.954.546	1.245.454

Ganancia Total de la Empresa: \$3.154.546 + \$1.245.454 = \$4.400.000

Conclusión :

La ganancia habría sido menor si no se producía combustible para aviones. Aunque al cerrar el sector de embalaje de ese producto se eliminan sus gastos fijos de \$2.000.000, la empresa igual termina perdiendo alrededor de \$950.000 en ganancias totales.

El combustible para aviones, como vimos, tenía una ganancia bruta (ingresos menos costos variables) positiva de \$2.950.000, pero después de prorratearle los costos fijos, queda con una pérdida neta de \$365.790.

Al dejar de producirlo, se pierde ese aporte, y los costos fijos pasan a dividirse entre dos productos en vez de tres, lo cual reduce su ganancia neta.

Esto a priori refuerza el argumento del jefe del área de embalaje, quien propone aumentar la producción de combustible para aviones, ya que diluye el impacto de los costos fijos sobre cada litro y mejora la ganancia total.

3. ¿Y si hubiese aumentado lo máximo posible la producción de los otros productos? Suponer que se cierra el sector de embalaje de combustibles para aviones.

Esto implica resolver un problema de programación lineal para maximizar la **ganancia**, teniendo en cuenta:

- Restricciones de horas por sector
- Ganancias por producto.
- No se puede producir combustible para aviones.

Variables

- x_1: miles de litros de combustible para aviones (no se produce, así que se elimina)
- x_2: miles de litros de combustible para vehículos.
- x_3: miles de litros de kerosene.

Función objetivo: Maximizar la ganancia total

Ganancia por 1.000 litros:

- Combustible para vehículos:
  - Precio de Venta: \$8.000.
  - Costos variables: \$1.000 + \$3.000 + \$600 + \$500 = \$5.100.
  - Ganancia por 1.000 litros: \$2.900.

- Kerosene:
  - Precio de Venta: \$4.000.
  - Costos variables: \$500 + \$1.500 + \$400 + \$400 = \$2.800.
  - Ganancia por 1.000 litros: \$1.200.

Función objetivo:

$$\text{Maximizar } 2.900\ x_2 + 1.200\ x_3$$

Restricciones:

- Refinado (máximo 38.000 h): $5\ x_2 + 3\ x_3 \leq 38.000$
- Fraccionado (máximo 80.000 h): $10\ x_2 + 6\ x_3 \leq 80.000$
- Embalaje Combustible Vehículos (máximo 6.000 h): $2\ x_2 \leq 6.000 \rightarrow x_2 \leq 3.000$.
- Embalaje K (máximo 7.000 h): $x_3 \leq 7.000$
- Condiciones de no negatividad: $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

Solucion del Modelo:

- $x_2 = 3.000$
- $x_3 = 7.000$
- $Z = \$17.100.000$

Verificamos si cumple las restricciones:

- Refinado (máximo 38.000 h): $5 \text{ x } 3.000 + 3 \text{ x } 7.000 = 36.000 \leq 38.000$
- Fraccionado (máximo 80.000 h): $10 \text{ x } 3.000 + 6 \text{ x } 7.000 = 72.000 \leq 80.000$
- Embalaje Combustible Vehículos (máximo 6.000 h): $3.000 \leq 3.000$.
- Embalaje K (máximo 7.000 h): $7.000 \leq 7.000$
- Condiciones de no negatividad: $3.000 \geq 0$, $7.000 \geq 0$

Ahora que verificamos que es una solucion factible, tenemos que restarle los gastos fijos a z para determinar la ganancia total de la compañía.

Gastos Fijos:

- Refinado: \$5.000.000.
- Fraccionado: \$5.000.000
- Embalaje Combustible Vehículos: \$1.000.000.
- Embalaje Kerosene: \$500.000.
- Total: \$11.500.000.

Luego, la ganancia total de la compañía es: \$17.100.000 - \$11.500.000 = \$5.600.000.

Conclusión :

La ganancia habría sido mayor si no se producía combustible para aviones pero se aumentaba al máximo posible la producción de los otros productos.

Esto a priori refuerza el argumento del gerente de ventas, quien propone discontinuar la producción de combustible para aviones, ya que no es posible aumentar el precio de venta del mismo y de esta forma evitar perdidas.

Sin embargo, no se sabe si la cantidad producida el mes pasado de cada producto fue la óptima, por lo que quizas no es que no convenga no producir combustible para avion sino que quizas conviene producir distintas cantidades de los porductos para poder generar mas ganancias.

4. Determinar la cantidad óptima de producción mensual de cada producto para maximizar la ganancia de la compañía.

Para determinar la cantidad óptima de producción se puede plantear un modelo de programación lineal asumiendo que todos los sectores producen algo.

Variables

- x_1: miles de litros de combustible para aviones.
- x_2: miles de litros de combustible para vehículos.
- x_3: miles de litros de kerosene.

Función objetivo: Maximizar la ganancia total

Ganancia por 1.000 litros:

- Combustible para aviones:
  - Precio de Venta: \$16.000.
  - Costos variables: \$4.000 + \$4.100 + \$1.000 + \$1.000 = \$10.100.
  - Ganancia por 1000 litros: \$5.900.

- Combustible para vehículos:
  - Precio de Venta: \$8.000.
  - Costos variables: \$1.000 + \$3.000 + \$600 + \$500 = \$5.100.
  - Ganancia por 1.000 litros: \$2.900.

- Kerosene:
  - Precio de Venta: \$4.000.
  - Costos variables: \$500 + \$1.500 + \$400 + \$400 = \$2.800.
  - Ganancia por 1.000 litros: \$1.200.

Función objetivo:

$$\text{Maximizar } 5.900\ x_1 + 2.900\ x_2 + 1.200\ x_3$$

Restricciones:

- Refinado (máximo 38.000 h): $10\ x_1 + 5\ x_2 + 3\ x_3 \leq 38.000$
- Fraccionado (máximo 80.000 h): $20\ x_1 + 10\ x_2 + 6\ x_3 \leq 80.000$
- Embalaje Combustible Aviones (máximo 4.000 h): $4\ x_1 \leq 4.000 \rightarrow x_1 \leq 1.000$.
- Embalaje Combustible Vehículos (máximo 6.000 h): $2\ x_2 \leq 6.000 \rightarrow x_2 \leq 3.000$.
- Embalaje K (máximo 7.000 h): $x_3 \leq 7.000$
- Condiciones de no negatividad: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

Solucion del Modelo:

- $x_1 = 1.000$
- $x_2 = 3.000$
- $x_3 = 4.333{,}333333333333$
- $Z = \$19.800.000$

Verificamos si cumple las restricciones:

- Refinado (máximo 38.000 h): 10 x 1.000 + 5 x 3.000 + 3 x 4.333,333333333333 = 38.000 $\leq$ 38.000
- Fraccionado (máximo 80.000 h): 20 x 1.000 + 10 x 3.000 + 6 x 4.333,333333333333 = 76.000 $\leq$ 80.000
- Embalaje Combustible Aviones (máximo 4.000 h): 1.000 $\leq$ 1.000.
- Embalaje Combustible Vehículos (máximo 6.000 h): 3.000 $\leq$ 3.000.
- Embalaje K (máximo 7.000 h): 4.333,333333333333 $\leq$ 7.000
- Condiciones de no negatividad: 1.000 $\geq$ 0, 3.000 $\geq$ 0, 4.333,333333333333 $\geq$ 0

Calculamos los gastos fijos:

Gastos Fijos:

- Refinado: \$5.000.000.
- Fraccionado: \$5.000.000
- Embalaje Combustible Aviones: \$2.000.000.
- Embalaje Combustible Vehículos: \$1.000.000.
- Embalaje K: \$500.000.
- Total: \$13.500.000.

Luego, la ganancia total de la compañía es: \$19.800.000 - \$13.500.000 = \$6.300.000.

Conclusión :
Como se puede observar, la cantidad óptima de producción mensual de combustible para aviones es mayor a cero, es decir, la conclusión del jefe del área de embalaje, parece ser la acertada.
Esto debido a que al aumentar la producción de combustible para aviones, se diluye el impacto de los costos fijos sobre cada litro y mejora la ganancia total.

5. Indicar al director estas cantidades, el costo por 1000 litros de cada producto (prorrateando los costos fijos) y la ganancia total de la empresa.

La producción óptima queda de la siguiente manera:

- $x_1 = 1.000$
- $x_2 = 3.000$
- $x_3 = 4.333{,}333333333333$

Calcular Costos Variables:

- Combustible para aviones (1.000 unidades):

- Materia prima: 1.000 $\times$ 4.000 = \$4.000.000
- Refinado: 1.000 $\times$ 4.100 = \$4.100.000
- Fraccionado: 1.000 $\times$ 1.000 = \$1.000.000
- Embalaje: 1.000 $\times$ 1.000 = \$1.000.000

- Total: \$10.100.000

- Combustible para vehículos (3.000 unidades):

- Materia prima: 3.000 × 1.000 = $3.000.000
- Refinado: 3.000 × 3.000 = $9.000.000
- Fraccionado: 3.000 × 600 = $1.800.000
- Embalaje: 3.000 × 500 = $1.500.000

- Total: $15.300.000

- Kerosene (4.333,333333333333 unidades):

- Materia prima: 4.333,333333333333 × 500 = $2.166.667
- Refinado: 4.333,333333333333 × 1.500 = $6.500.000
- Fraccionado: 4.333,333333333333 × 400 = $1.733.333
- Embalaje: 4.333,333333333333 × 400 = $1.733.333

- Total: $12.133.333

Calcular Ingresos por Ventas:

- Aviones: 1.000 × 16.000 = $16.000.000
- Vehículos: 3.000 × 8.000 = $24.000.000
- Kerosene: 4.333,333333333333 × 4.000 = $17.333.333

Ganancia Bruta por Producto:

Producto	Ingreso	Costo	Ganancia bruta
Combustible Aviones	16.000.000	10.100.000	5.900.000
Combustible Vehículos	24.000.000	15.300.000	8.700.000
Kerosene	17.333.333	12.133.333	5.200.000

Prorratear Gastos Fijos:

Gasto Fijo Total:

- Refinado: $5.000.000
- Fraccionado: $5.000.000
- Embalaje aviones: $2.000.000
- Embalaje vehículos: $1.000.000
- Embalaje kerosene: $500.000

- Total: $13.500.000

Prorrateamos los gastos según uso de horas:

Primero, calculamos las horas usadas por cada producto en cada etapa (por cada 1000 litros)

Producto	Unidades	Refinado (h)	Fraccionado (h)	Embalaje (h)
Combustible Aviones	1.000	10 × 1.000 = 10.000	20 × 1.000 = 20.000	4 × 1.000 = 4.000
Combustible Vehículos	3.000	5 × 3.000 = 15.000	10 × 3.000 = 30.000	2 × = 6.000
Kerosene	4.333,33	3 × 4.333,33 = 13.000	6 × 4.333,33 = 26.000	1 × 4.333,33 = 4.333,33

a) Refinado (38.000 horas totales):

- Aviones: 10.000/38.000 × 5.000.000 = $1.315.790
- Vehículos: 15.000/38.000 × 5.000.000 = $1.973.684
- Kerosene: 13.000/38.000 × 5.000.000 = $1.710.526

b) Fraccionado (76.000 horas totales):

- Aviones: 20.000/76.000 × 5.000.000 = $1.315.790
- Vehículos: 30.000/76.000 × 5.000.000 = $1.973.684
- Kerosene: 26.000/76.000 × 5.000.000 = $1.710.526

c) Embalaje (por sector):

- Aviones: $2.000.000
- Vehículos: $1.000.000
- Kerosene: $500.000

Gasto Fijo Total por Producto:

Producto	**Refinado**	**Fraccionado**	**Embalaje**	**Gasto Fijo Total**
Combustible Aviones	1.315.790	1.315.790	2.000.000	4.631.580
Combustible Vehículos	1.973.684	1.973.684	1.000.000	4.947.368
Kerosene	1.710.526	1.710.526	500.000	3.921.052

Ganancia Neta por Producto:

Producto	**Ganancia bruta**	**Gasto fijo**	**Ganancia neta**
Combustible Aviones	5.900.000	4.631.580	1.268.420
Combustible Vehículos	8.700.000	4.947.368	3.752.632
Kerosene	5.200.000	3.921.052	1.278.948

Ganancia Total de la Empresa: $1.268.420 + $3.752.632 + $1.278.948 = $6.300.000

6. Al escuchar esto, el gerente de producción propuso aumentar la producción contratando 500 horas extras al mes del personal del sector de fraccionado. Asesorar al director sobre esta propuesta.

Como se puede observar en el inciso anterior, claramente no es rentable esta propuesta. Esto debido a que para producir la cantidad óptima para maximizar las ganancias de la compañía, no se utilizan las 80.000 horas de capacidad mensual de fraccionado pero sí se utilizan las 38.000 horas de capacidad mensual de refinado.

Por lo tanto, aunque se agreguen 500 horas extras al sector de fraccionado, no se va a poder producir mas debido a que ya se llego a la capacidad máxima de horas del personal del refinado.

7. Otra propuesta del gerente es contratar 1000 horas extras al mes del personal del sector de refinado. Indicar al director si es conveniente aceptar esta nueva propuesta y hasta cuánto debería pagar por cada hora extra de este sector

Para poder asesorar al director sobre esta propuesta, haciendo un análisis de sensibilidad, primero debemos plantear el problema dual del modelo anterior.

Si nosotros tenemos el modelo:

Función objetivo:

$$\text{Maximizar } 5.900\ x_1 + 2.900\ x_2 + 1.200\ x_3$$

Restricciones:

- Refinado (máximo 38.000 h): $10\ x_1 + 5\ x_2 + 3\ x_3 \leq 38.000$
- Fraccionado (máximo 80.000 h): $20\ x_1 + 10\ x_2 + 6\ x_3 \leq 80.000$
- Embalaje Combustible Aviones (máximo 4.000 h): $4\ x_1 \leq 4.000 \rightarrow x_1 \leq 1.000$.
- Embalaje Combustible Vehículos (máximo 6.000 h): $2\ x_2 \leq 6.000 \rightarrow x_2 \leq 3.000$.
- Embalaje K (máximo 7.000 h): $x_3 \leq 7.000$
- Condiciones de no negatividad: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

Solucion del Modelo:

- $x_1 = 1.000$
- $x_2 = 3.000$
- $x_3 = 4.333{,}333333333333$
- $Z = \$19.800.000$

Entonces el **Dual** queda de la siguiente manera:

Función objetivo:

$$\text{Minimizar } 38.000\ y_1 + 80.000\ y_2 + 1.000\ y_3 + 3.000\ y_4 + 7.000\ y_5$$

Restricciones:

- $10\ y_1 + 20\ y_2 + y_3 \geq 5.900$
- $5\ y_1 + 10\ y_2 + y_4 \geq 2.900$
- $3\ y_1 + 6\ y_2 + y_5 \geq 1.200$
- Condiciones de no negatividad: $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, $y_3 \geq 0$, $y_4 \geq 0$, $y_5 \geq 0$

Solucion del Modelo:

- $y_1 = 400$
- $y_2 = 0$
- $y_3 = 1.900$
- $y_4 = 900$
- $y_5 = 0$
- $Z = \$19.800.000$

Verificamos si cumple las restricciones:

- 10 x 400 + 20 x 0 + 1 x 1.900 = 5.900 $\geq$ 5.900
- 5 x 400 + 10 x 0 + 1 x 900 = 2.900 $\geq$ 2.900
- 3 x 400 + 6 x 0 + 1 x 0 = 1.200 $\geq$ 1.200
- Condiciones de no negatividad: 400 $\geq$ 0, 0 $\geq$ 0, 1.900 $\geq$ 0, 900 $\geq$ 0, 0 $\geq$ 0

Entonces es solución factible dual.

Ahora, para hallar la base del diccionario óptimo del problema sabemos que:

- Si una **variable primal** $x_j > 0 \rightarrow$ **esta** en la base.
- Si una **variable primal** $x_j = 0 \rightarrow$ **no esta** en la base.
- Si una **variable dual** $y_i > 0 \rightarrow$ entonces la **restricción primal** i está **activa**, por lo que la **variable de holgura asociada** está **fuera de la base**.
- Si una **variable dual** $y_i = 0 \rightarrow$ la restricción primal **no está activa**, por lo tanto su **variable de holgura esta** en la base.

Por lo que las variables quedan de la siguiente forma:

- Variables Basicas:
  - x_1
  - x_2
  - x_3
  - x_5
  - x_8
- Variables No Basicas:
  - x_4
  - x_6
  - x_7

Entonces tenemos los siguientes datos:

$$X_B = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_8\} \qquad X_N = \{x_4, x_6, x_7\} \qquad C_B = \{5.900,\ 2.900,\ 1.200,\ 0,\ 0\} \qquad C_N = \{0, 0, 0\}$$

$$B = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 20 & 10 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{5}{3} & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{10}{3} & \frac{5}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 38.000 \\ 80.000 \\ 1.000 \\ 3.000 \\ 7.000 \end{bmatrix}$$

Llamamos b_1 a la cantidad de horas disponibles de refinado.

Primero hallamos el rango de valores de b_1 para los cuales la base es factible y optima.

$$B^{-1} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ 80.000 \\ 1.000 \\ 3.000 \\ 7.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 3.000 \\ \frac{1}{3}b_1 - \frac{10}{3} \cdot 1.000 - \frac{5}{3} \cdot 3.000 \\ -2b_1 + 80.000 \\ -\frac{1}{3}b_1 + \frac{10}{3} \cdot 1.000 + \frac{5}{3} \cdot 3.000 + 7.000 \end{bmatrix}$$

Cada uno de estos términos debe ser ≥ 0. Entonces, resolviendo las inecuaciones nos queda que:

- $b_1 \geq 25.000$
- $b_1 \leq 40.000$
- $b_1 \leq 46.000$

Finalmente, tenemos que el rango de valores es el siguiente: $25.000 \leq b_1 \leq 40.000$

La propuesta del gerente es contratar 1000 horas extras al mes del personal del sector de refinado. Ya contamos con 38.000 horas de refinado. Si le sumamos las 1000 horas que sugiere el gerente, tendríamos un total de 39.000 horas. Como 39.000 es menor o igual a 40.000, la base sigue siendo factible y optima.

Además, en el dual tenemos que $y_1 = 400$, con y_1 siendo la variable que representa el monto que ganaríamos por cada hora extra de refinado. Por lo tanto, si agregamos 1000 horas de refinado, la empresa ganaría un extra (bruto) de 1000 x 400 = \$400.000. Pero esas horas extra tienen un costo, y dicho costo no puede exceder de los \$400 ya que sino dejaría de ser conveniente.

Luego, el nuevo valor de la funcion objetivo es: 19.800.000 + 400.000 - (1000 x Y)

donde:

- 19.800.000 es el valor que teníamos de z
- 400.000 es la ganancia por las mil horas extra
- Y es el costo de cada hora extra.

8. Si el director decide pagar por hora extra la mitad del valor máximo indicado en el punto anterior, ¿en cuánto aumentará la ganacia mensual de la compañía?

Como se puede observar en el inciso anterior, el valor dual $y_1 = 400$ indica que cada hora adicional de refinado incrementa la ganancia en \$400 (si se obtiene gratis).

Ahora bien, en este caso, el director decide pagar solo la mitad de ese valor dual, es decir, \$200.
Por lo tanto, el **benefico neto** por cada hora extra sera: \$400 - \$200 = \$200.
Luego, como se compran 1.000 horas extras, el incremento de las ganancia sera: \$200.000.

Es decir, la ganancia mensual de la compañía aumentará en \$200.000 al pagar 1.000 horas extras de refinado a \$200 cada una.

9. Por otro lado, el gerente de compras propone cambiar algunos proveedores, lo que permitiría bajar el costo de la materia prima del aceite para vehículos de \$1000 a \$800 por cada 1000 litros procesados. ¿Cambiaría el plan de producción óptimo? Si es así, dar la nueva planificación óptima.

Con este cambio de proveedores, los costos variables asociados al combustible bajan.

Ganancia por 1.000 litros:

- Combustible para vehículos:
  - Precio de Venta: \$8.000.
  - Costos variables: \$800 + \$3.000 + \$600 + \$500 = \$4.900.
  - Ganancia por 1.000 litros: \$3.100.

Esto modifica la función objetivo, ya que cambia la ganacia generada a partir de la venta de 1.000 litros de combustible de vehículos.
La nueva función objetivo es: Maximizar 5.900 x_1 + 3.100 x_2 + 1.200 x_3

Función objetivo:

$$\text{Maximizar } 5.900\, x_1 + 3.100\, x_2 + 1.200\, x_3$$

Ahora, para determinar si el plan de producción óptimo cambia o no, hacemos un ánalisis de sensibilidad para hallar el rango de valores de C_2 para los cuales la base actual sigue siendo factible y óptima. Además, como x_2 es una variable basica, el analisis de sensibilidad queda de la sigueinte manera:

$$C_N - C_B B^{-1} A_N \leq (0, 0, 0)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5900 & C_2 & 1200 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{5}{3} & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{10}{3} & \frac{5}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leq (0, 0, 0)$$

$$\begin{bmatrix} -5900 & -C_2 & -1200 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{10}{3} & -\frac{5}{3} \\ -2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{10}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \leq (0, 0, 0)$$

$$\begin{bmatrix} -400 & -1900 & 2000 - C_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, para que la base siga siendo factible y óptima, debe ocurrir que $C_2 \geq 2.000$. Entonces con $C_2 = 3.100$, la base sigue siendo factible y óptima, y por lo tanto, el plan de producción óptimo permanece igual.

Conclusión : Se tiene que producir la misma cantidad de litros de cada tipo de combustible, pero como la ganancia de el combustible para vehiculos aumentó en \$200, el valor de la funcion objetivo aumentó un total de \$600.000

10. Y si se modificara el proceso de refinado de kerosene para bajar de \$1500 a \$900 por cada 1000 litros procesado, ¿cambiaría el plan óptimo? Si es así, dar la nueva planificación óptima.

Aclaración: Entendemos que los puntos son independientes entre sí, entonces el cambio propuesto en el punto anterior no se tomará en cuenta en este punto.

Con este cambio de costos asociados al kerosene, las ganancias por cada 1.000 litros producidos quedan de la siguiente manera:

Ganancia por 1.000 litros:

- Kerosene:
  - Precio de Venta: \$4.000.
  - Costos variables: \$500 + \$900 + \$400 + \$400 = \$2.200.
  - Ganancia por 1.000 litros: \$1.800.

Esto modifica la función objetivo, ya que cambia la ganacia generada a partir de la venta de 1.000 litros de kerosene. La nueva función objetivo es:
Maximizar 5.900 x_1 + 2.900 x_2 + 1.800 x_3

Función objetivo:

$$\text{Maximizar } 5.900\ x_1 + 2.900\ x_2 + 1.800\ x_3$$

Ahora, para determinar si el plan de producción óptimo cambia o no, hacemos un ánalisis de sensibilidad para hallar el rango de valores de C_3 para los cuales la base actual sigue siendo factible y óptima. Además, como x_3 es una variable basica, el analisis de sensibilidad queda de la sigueinte manera:

$$C_N - C_B B^{-1} A_N \leq (0,0,0)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5900 & 2900 & C_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{5}{3} & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{10}{3} & \frac{5}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leq (0,0,0)$$

$$\begin{bmatrix} -5900 & -2900 & -C_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{10}{3} & -\frac{5}{3} \\ -2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{10}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \leq (0,0,0)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-C_3}{3} & \frac{10C_3 - 17700}{3} & \frac{5C_3 - 8700}{3} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Es decir:

- $C_3 \geq 0$
- $C_3 \leq 1.770$
- $C_3 \leq 1.740$

Luego, para que la base siga siendo factible y óptima, debe ocurrir que $0 \leq C_3 \leq 1.740$. Entonces con $C_3 = 1.800$, la base ya no es factible ni óptima, y por lo tanto, hace falta reoptimizar para obtener el nuevo plan de producción.

Reoptimisación :

Función objetivo:

$$\text{Maximizar } 5.900\ x_1 + 2.900\ x_2 + 1.800\ x_3$$

Restricciones:

- Refinado (máximo 38.000 h): $10\ x_1 + 5\ x_2 + 3\ x_3 \leq 38.000$
- Fraccionado (máximo 80.000 h): $20\ x_1 + 10\ x_2 + 6\ x_3 \leq 80.000$
- Embalaje Combustible Aviones (máximo 4.000 h): $4\ x_1 \leq 4.000 \rightarrow x_1 \leq 1.000$.
- Embalaje Combustible Vehículos (máximo 6.000 h): $2\ x_2 \leq 6.000 \rightarrow x_2 \leq 3.000$.
- Embalaje K (máximo 7.000 h): $x_3 \leq 7.000$
- Condiciones de no negatividad: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

Solucion del Modelo:

- $x_1 = 1.000$
- $x_2 = 1.400$
- $x_3 = 7.000$
- $Z = \$22.560.000$

Los gastos fijos se mantienen. Luego, la ganancia total de la compañía es: \$22.560.000 - \$13.500.000 = \$9.060.000.

Conclusión :

En este caso, se produjeron cambios en la producción. En lugar de producir 3.000 litros de combustible para vehículos, se producen 1.400, y en lugar de producir 4.333,333 litros de kerosene, se producen 7.000.
Es decir, disminuyó la producción de combustible para vehículos, hubo un incremento en la producción de kerosene y la producción de combustible para aviones se mantuvo igual. Gracias a estos cambios, el valor de la función objetivo aumentó considerablemente, pasando de \$19.800.000 a \$22.560.000.

11. La empresa está evaluando comenzar a procesar gasoil. El tiempo requerido para refinar 1000 litros de gasoil es de 4 horas, mientras que para fraccionarlos son necesarias 8 horas y para su embalaje 1.5 horas. El costo de la materia prima para mil litros de gasoil es de $4000, el de refinado de $4100, el de fraccionado de $1000. El embalaje de gasoil lo realizaría el sector de embalaje de kerosene. ¿Cuál debería ser el menor precio de venta de los 1000 litros de gasoil para que su producción sea conveniente para la empresa?

Aclaración: "El embalaje de gasoil lo realizaría el sector de embalaje de kerosene". Con esto entendemos que si lo realiza el sector de embalaje de kerosene, entonces el precio por embalar mil litros de gasoil, será el mismo que el precio de embalar mil litros de kerosene.

- Gasoil:
  - Precio de Venta: X.
  - Costos variables: $4.000 (materia prima) + $4.100 (refinado) + $1.000 (fraccionado) + $400 (embalaje) = $9.500
  - x_4: miles de litros de gasoil.
  - C_4: coeficiente de x_4.

Calculamos el costo reducido para ver a partir de qué precio es conveniente producirlo.

$$\text{Costo Reducido} \quad = C_4 - \begin{bmatrix} 400 & 0 & 1900 & 900 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{bmatrix}$$

Costo Reducido = C_4 - (400 x 4 + 0 x 8 + 1900 x 0 + 900 x 0 + 0 x 1,5) = C_4 - 1600

Ahora, C_4 se expresa como X menos los costos variables, ambos de 1000 litros, para así obtener el precio mínimo de venta para que la producción sea conveniente para la empresa

Quedando: X - 1600 - 9500 = X - 11.100.

Luego, $X - 11{,}100 \geq 0 \;\Rightarrow\; X \geq 11{,}100$

Así, el precio de venta debe ser mayor o igual a 11.100.

12. La empresa va a agregar un control de calidad a todos sus productos. Controlar los 1000 litros de combustible para aviones requiere 5 horas, los de combustible para vehículos 3 horas y 2 horas los 1000 litros de kerosene. Si el sector de control de calidad dispone de 20000 horas mensuales, ¿cambiaría el plan óptimo? Si es así, dar la nueva planificación óptima.

Al agregar el control de calidad se agrega una nueva restricción:
Control de calidad (máximo 20.000 h): $5\ x_1 + 3\ x_2 + 2\ x_3 \leq 20.000$

Si producimos la misma cantidad de litros de combustible que en el plan original, entonces la restricción no se cumpliría:
$5 \times 1.000 + 3 \times 3.000 + 2 \times 4.333{,}33 = 22.666{,}66 \nleq 20.000$

Por lo tanto, hay que cambiar el plan óptimo. Damos la nueva planificación óptima.

Función objetivo:

$$\text{Maximizar } 5.900\ x_1 + 2.900\ x_2 + 1.200\ x_3$$

Restricciones:

- Refinado (máximo 38.000 h): $10\ x_1 + 5\ x_2 + 3\ x_3 \leq 38.000$
- Fraccionado (máximo 80.000 h): $20\ x_1 + 10\ x_2 + 6\ x_3 \leq 80.000$
- Embalaje Combustible Aviones (máximo 4.000 h): $4\ x_1 \leq 4.000 \rightarrow x_1 \leq 1.000$.
- Embalaje Combustible Vehículos (máximo 6.000 h): $2\ x_2 \leq 6.000 \rightarrow x_2 \leq 3.000$.
- Embalaje K (máximo 7.000 h): $x_3 \leq 7.000$
- Control de calidad (máximo 20.000 h): $5\ x_1 + 3\ x_2 + 2\ x_3 \leq 20.000$
- Condiciones de no negatividad: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

Solucion del Modelo:

- $x_1 = 1.000$
- $x_2 = 3.000$
- $x_3 = 3.000$
- $Z = \$18.200.000$

Los gastos fijos se mantienen. Luego, la ganancia total de la compañía es: \$18.200.000 - \$13.500.000 = \$4.700.000.