DEPARTAMENTO
DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Introducción a la Investigación Operativa y Optimización

Primer cuatrimestre 2025

Optimización no lineal monovariable

Programación No Lineal

Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, queremos resolver el problema:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ sujeto a } x \in S$$

- Si $S = \mathbb{R}^n$, optimización sin restricciones.
- Si $S \subset \mathbb{R}^n$, optimización con restricciones.

Ejemplos

Producción

Queremos maximizar la ganancia por producir cierto producto a partir de ciertos insumos. Hay una función conocida $f(x_1, \ldots, x_n)$ (no necesariamente lineal) que representa la cantidad producida de ese producto en función de la cantidad utilizada de cada insumo $x_1, \ldots, x_n$.

Si el precio por unidad del producto es q y el costo por unidad del insumo i es p_i, queremos maximizar:

$$\text{máx}\, qf(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

Aproximación de una función

Dado un conjunto de n mediciones (x_i, y_i), se quiere ajustar a un modelo $y = ae^{bx}$. La función a optimizar podría ser la suma de los cuadrados de los errores:

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (ae^{bx_i} - y_i)^2.$$

Ejemplos

Diseño de cajas

Se desea diseñar una caja de volumen máximo tal que cada una de sus dimensiones sean menores o iguales a $60cm$, con superficie total a lo sumo $80cm^2$.
Si x_1 (largo), x_2 (ancho) y x_3 (alto) son las dimensiones a determinar, el problema a resolver puede ser formulado como:

Maximizar $Vol(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$
Sujeto a
$2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) \leq 80$
$0 \leq x_1 \leq 60$
$0 \leq x_2 \leq 60$
$0 \leq x_3 \leq 60$

Optimización sin restricciones: mínimo global vs local

Mínimo global

Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

- $x^* \in \mathbb{R}^n$ es un mínimo global de f si $f(x^*) \leq f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
- Si $f(x^*) < f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x^*\}$, x^* es un mínimo global estricto de f.

Optimización sin restricciones: mínimo global vs local

Mínimo global

Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

- $x^* \in \mathbb{R}^n$ es un mínimo global de f si $f(x^*) \leq f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
- Si $f(x^*) < f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x^*\}$, x^* es un mínimo global estricto de f.

Mínimo local

Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

- $x^* \in \mathbb{R}^n$ es un mínimo local de f si existe un entorno $\mathcal{N}$ de x^* tal que $f(x^*) \leq f(x)$, $\forall x \in \mathcal{N}$.
- Si $f(x^*) < f(x)$, $\forall x \in \mathcal{N} \setminus \{x^*\}$, x^* es un mínimo local estricto de f.

Optimización sin restricciones: mínimo global vs local

Mínimo global

Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

- $x^* \in \mathbb{R}^n$ es un mínimo global de f si $f(x^*) \leq f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
- Si $f(x^*) < f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x^*\}$, x^* es un mínimo global estricto de f.

Mínimo local

Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

- $x^* \in \mathbb{R}^n$ es un mínimo local de f si existe un entorno $\mathcal{N}$ de x^* tal que $f(x^*) \leq f(x)$, $\forall x \in \mathcal{N}$.
- Si $f(x^*) < f(x)$, $\forall x \in \mathcal{N} \setminus \{x^*\}$, x^* es un mínimo local estricto de f.

- Encontrar mínimos globales suele ser difícil si la función no cumple ciertas propiedades.
- Vamos a buscar mínimos locales.

Métodos iterativos

- Inicialización: Se decide un punto como aproximación inicial (o más según el método)
- Iteración: Se mejora la aproximación generando un nuevo punto
- Finalización: Termina cuando se cumple algún criterio de parada

Métodos iterativos

- Inicialización: Se decide un punto como aproximación inicial (o más según el método)
- Iteración: Se mejora la aproximación generando un nuevo punto
- Finalización: Termina cuando se cumple algún criterio de parada

1. x_0 inicial, $k = 0$
2. Mientras no se cumpla el criterio de parada:
   1. Encontrar x_{k+1} tal que x_{k+1} sea **mejor** que x_k
   2. $k \longleftarrow k + 1$

Métodos iterativos

Ventajas

- Pueden manejar problemas grandes y complejos donde otros métodos son impracticables.
- Pueden ser más eficientes en términos de memoria y tiempo para ciertos problemas.
- Son flexibles para adaptarse a diferentes tipos de problemas.

Métodos iterativos

Ventajas

- Pueden manejar problemas grandes y complejos donde otros métodos son impracticables.
- Pueden ser más eficientes en términos de memoria y tiempo para ciertos problemas.
- Son flexibles para adaptarse a diferentes tipos de problemas.

Desventajas

- Convergencia no garantizada: algunos métodos iterativos pueden no converger si las condiciones iniciales no son adecuadas.
- Sensibilidad a las aproximaciones iniciales: la elección de las aproximaciones iniciales puede influir en la rapidez y éxito de la convergencia.
- Requieren criterios de parada adecuados para asegurar que las soluciones sean suficientemente precisas.

Orden de convergencia

Sea x_n una sucesión que converge a x^*. Esta sucesión tiene orden de convergencia p si es el mayor valor tal que existe una constante $C > 0$ con:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^p} = C$$

Orden de convergencia

Sea x_n una sucesión que converge a x^*. Esta sucesión tiene orden de convergencia p si es el mayor valor tal que existe una constante $C > 0$ con:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^p} = C$$

- Mide la **rapidez** con la que la sucesión se acerca al valor límite.
- En el caso de sucesiones generadas por un método, proporciona información sobre la eficiencia del mismo.
- $|x_{n+1} - x^*| \approx C|x_n - x^*|^p$

Orden de convergencia

- Convergencia lineal: $p = 1$ y $0 < C < 1$. Cada iteración reduce el error en una proporción constante.
  Ejemplo: $x_n = (\frac{1}{2})^n$ tiene límite 0

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{(\frac{1}{2})^n} = \frac{1}{2}$$

- Convergencia cuadrática: $p = 2$. El error se reduce aproximadamente al cuadrado en cada iteración.
  Ejemplo: $x_n = \frac{1}{2}^{2^n}$ tiene límite 0

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{1}{2})^{2^{n+1}}}{((\frac{1}{2})^{2^n})^2} = 1$$

- Convergencia superlineal: $1 < p < 2$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Métodos directos para encontrar mínimos locales

Unimodal

Una función real f es unimodal en el intervalo $[a, b]$ si existe un punto $x^* \in [a, b]$ tal que f es decreciente en $[a, x^*]$ y es creciente en $[x^*, b]$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Métodos directos para encontrar mínimos locales

Unimodal

Una función real f es unimodal en el intervalo $[a, b]$ si existe un punto $x^* \in [a, b]$ tal que f es decreciente en $[a, x^*]$ y es creciente en $[x^*, b]$.

- Si la función es multimodal en el intervalo, los métodos localizarán uno de los óptimos locales.
- El objetivo es determinar un intervalo de incertidumbre donde se encuentre un mínimo local de la función.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Búsqueda dicotómica

- Simple y efectivo para encontrar el mínimo de una función unimodal en un intervalo cerrado.
- Se divide el intervalo en dos subintervalos más pequeños y se selecciona el subintervalo que contiene el mínimo.
- Se repite este proceso iterativamente hasta alcanzar la precisión deseada.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Búsqueda dicotómica

Algoritmo:

1. Inicializar $L = [a, b]$ donde la función es unimodal.
2. Mientras no se cumpla el criterio de parada:
   1. Calcular los puntos

      $$x_1 = \frac{a + b - \epsilon}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{a + b + \epsilon}{2}.$$

   2. Actualizar el intervalo:
      - Si $f(x_1) \leq f(x_2)$: $b \longleftarrow x_2$ (el nuevo intervalo es $L = [a, x_2]$)
      - Sino $(f(x_1) > f(x_2))$: $a \longleftarrow x_1$ (el nuevo intervalo es $L = [x_1, b]$)
   3. Ir al paso 1

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Búsqueda dicotómica

- Garantiza la convergencia hacia el mínimo local de una función unimodal en un intervalo cerrado.
- La convergencia es lineal.
- En cada iteración la longitud del intervalo, L, se reduce en un factor constante, aproximadamente en la mitad.
- $L_k \approx 1/2 L_{k-1}$.
- La longitud del intervalo en la iteración k es aproxidamente $\frac{b-a}{2^k}$.
- El número de iteraciones k necesarias para alcanzar una precisión de δ es $k \approx log_2(\frac{b-a}{\delta})$.
- En cada paso se realizan dos evaluaciones de f.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Búsqueda de la sección áurea

- El objetivo es aprovechar el cálculo de f realizado en la iteración anterior en el punto descartado como extremo del nuevo intervalo.

- Se generan los puntos x_1^k y x_2^k en la iteración k como:

$$x_1^k = b^k - \frac{b^k - a^k}{\alpha} \quad \text{y} \quad x_2^k = a^k + \frac{b^k - a^k}{\alpha},$$

para algún α conveniente.

- Se selecciona α para que $x_1^k = x_2^{k-1}$ o $x_2^k = x_1^{k-1}$, según sea el caso.

- Con esto se obtiene que:

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618033$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Búsqueda de la sección áurea

Algoritmo:

1. Inicializar el intervalo inicial $[a, b]$
2. $\alpha \longleftarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
3. $c = b - \frac{b-a}{\alpha}$, $d = a + \frac{b-a}{\alpha}$
4. $fc = f(c)$, $fd = f(d)$
5. Mientras no se cumpla el criterio de parada:
    - Si $fc \leq fd$:
        - $b \longleftarrow d$
        - $d \longleftarrow c$
        - $fd \longleftarrow fc$
        - $c \longleftarrow b - (b-a)/\alpha$
        - $fc \longleftarrow f(c)$
    - Sino:
        - $a \longleftarrow c$
        - $c \longleftarrow d$
        - $fc \longleftarrow fd$
        - $d \longleftarrow a + (b-a)/\alpha$
        - $fd \longleftarrow f(d)$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Búsqueda de la sección áurea

- Garantiza la convergencia hacia el mínimo de una función unimodal en un intervalo cerrado.
- La convergencia es lineal.
- En cada iteración la longitud del intervalo, L, se reduce en un factor constante, $1/\alpha$.
- $L_k = \frac{1}{\alpha} L_{k-1} \approx 0.618033 L_{k-1}$.
- En cada paso se realizan una evaluación de f.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Métodos indirectos para encontrar mínimos locales

- Las funciones tienen que cumplir ciertas propiedades.
- Buscan puntos que cumplan condiciones necesarias para ser mínimo local de la función.
- Pueden fallar: el punto encontrado no es un mínimo local de la función.
- Si se exige que el punto cumpla condiciones suficientes, se pueden perder minimizadores de la función.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Derivada de una función

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto que contiene a x_0:

- f es derivable en x_0 si existe

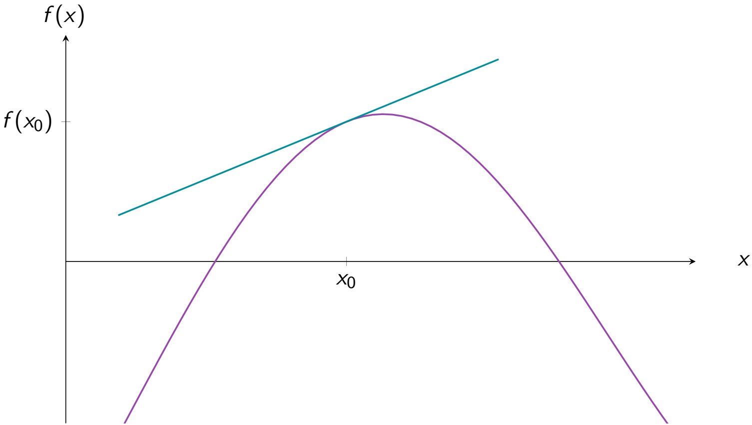
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- La derivada de f en x_0 es $f'(x_0)$.

- f es derivable en un conjunto X si tiene derivada en todo punto de X.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Derivada de una función

La derivada de f en x_0 es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $(x_0, f(x_0))$.



Condiciones necesarias vs suficientes

- Condición necesaria de optimalidad: si x^* es minimizador se verifica necesariamente esta condición. Si no se cumple la condición, entonces x^* no es minimizador.

Condiciones necesarias vs suficientes

- Condición necesaria de optimalidad: si x^* es minimizador se verifica necesariamente esta condición. Si no se cumple la condición, entonces x^* no es minimizador.

- Condición suficiente de optimalidad: si x^* verifica esta condición entonces es minimizador. Podríamos ignorar minimizadores, ya que un minimizador no necesaiamente cumple esta condición.

Condiciones necesarias - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f \in C^2$

Condición necesaria de 1er orden (punto crítico o estacionario)

Si x^* es mínimo local de f, entonces

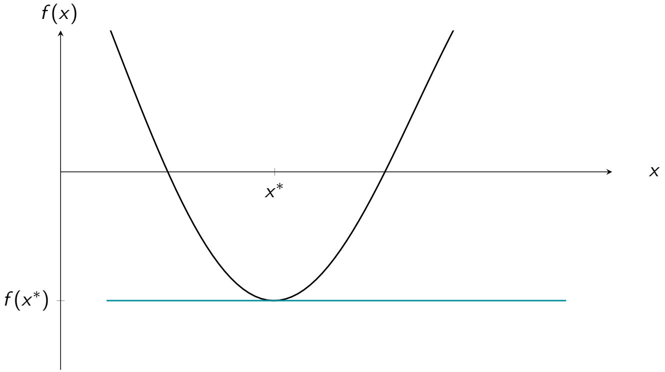
$$f'(x^*) = 0$$

Condiciones necesarias - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f \in C^2$

Condición necesaria de 1er orden (punto crítico o estacionario)

Si x^* es mínimo local de f, entonces

$$f'(x^*) = 0$$



Condiciones necesarias - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f \in C^2$

Demostración:

Por el absurdo. Supongo que x^* es mínimo local pero $f'(x^*) \neq 0$.
Como f es suave, su serie de Taylor de grado 2 en x^* es:

$$f(x^* + \epsilon) = f(x^*) + \epsilon f'(x^*) + \frac{1}{2}\epsilon^2 f''(x^* + \theta\epsilon)$$

para algún θ, $0 \leq \theta \leq 1$.

- Si $f'(x^*) < 0$, $\exists\bar{\epsilon} > 0$ tal que

$$\epsilon f'(x^*) + \frac{1}{2}\epsilon^2 f''(x^* + \theta\epsilon) < 0, \ \forall 0 < \epsilon \leq \bar{\epsilon}$$

  Esto implica que $f(x^* + \epsilon) < f(x^*)$, $\forall\epsilon$, $0 < \epsilon \leq \bar{\epsilon}$.
- Si $f'(x^*) > 0$, de forma similar, $\exists\bar{\epsilon} < 0$.

Esto es absurdo porque x^* es mínimo local de f.

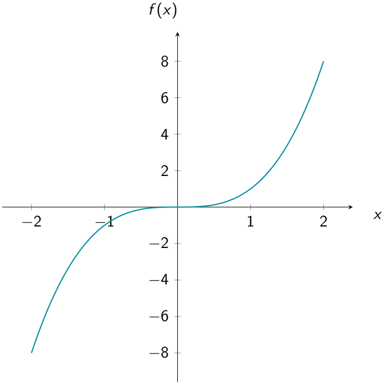
Condiciones necesarias - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f \in C^2$

- Si $f'(x) = 0$, x se llama punto crítico o estacionario.
- Vimos que cualquier mínimo local de una función suave es un punto estacionario.
- Pero la 1er derivada también se anula en todo máximo local.
- Más aún, la 1er derivada puede anularse en puntos que no son ni mínimos ni máximos locales.
- Estos puntos se llaman puntos de inflexión.

Condiciones necesarias - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f \in C^2$

Ejemplo de punto de inflexión

Para $f(x) = x^3$, con $\bar{x} = 0$ se cumplen la condición necesaria de 1er orden, ya que $f'(\bar{x}) = 0$, pero sin embargo 0 no es mínimo (ni máximo) local de f.



$$f(x) = x^3$$

Condiciones necesarias - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f \in C^2$

Condición necesaria de 2do orden

Si x^* es mínimo local de f, entonces

$$f'(x^*) = 0 \text{ y } f''(x^*) \geq 0$$

Condiciones necesarias - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f \in C^2$

Condición necesaria de 2do orden

Si x^* es mínimo local de f, entonces

$$f'(x^*) = 0 \text{ y } f''(x^*) \geq 0$$

No es condición suficiente

$$f(x) = x^3$$

- Para $\bar{x} = 0$ cumple la condición necesaria de 2do orden, ya que $f'(\bar{x}) = 0$ y $f''(\bar{x}) \geq 0$
- Pero sin embargo 0 no es un mínimo (ni máximo) local de f.

Condición suficiente - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f \in C^2$

Condición suficiente de 2do orden

Si

$$f'(x^*) = 0 \text{ y } f''(x^*) > 0,$$

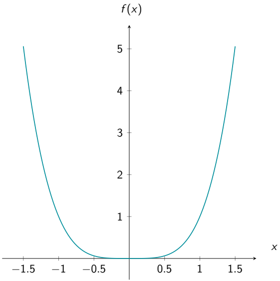
entonces x^* es un mínimo local de f.

Condición suficiente - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f \in C^2$

Se pueden perder mínimos

$$f(x) = x^4$$

- $\bar{x} = 0$ es un mínimo local (y global) de esta función.
- Cumple la condición necesaria: $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 0$
- Pero no cumple la condición suficiente: $f'(0) = 0$ y $f''(0) \not> 0$



$$f(x) = x^4$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Métodos indirectos para encontrar mínimos locales

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$, buscar puntos $\bar{x}$ donde se cumpla la condición necesaria de 1er orden, es decir $f'(\bar{x}) = h(\bar{x}) = 0$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Métodos indirectos para encontrar mínimos locales

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$, buscar puntos $\bar{x}$ donde se cumpla la condición necesaria de 1er orden, es decir $f'(\bar{x}) = h(\bar{x}) = 0$.

- Para muchas funciones, como los polinomios de grado 5 o mayor, no hay fórmulas para encontrar sus raíces.
- O la hay pero es complicado evaluarla.
- Se utilizan métodos iterativos para encontrar una aproximación a la raíz de la función: generan una sucesión de puntos, $x_0, x_1, \ldots$ que se espera que converja a la raíz.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Método de bisección

- Es un método para encontrar raíces de funciones continuas.
- Se basa en el teorema de Bolzano: si h es continua en $[a, b]$ y $h(a)h(b) < 0$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $h(c) = 0$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Método de bisección

- Es un método para encontrar raíces de funciones continuas.
- Se basa en el teorema de Bolzano: si h es continua en $[a, b]$ y $h(a)h(b) < 0$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $h(c) = 0$.

Idea del algoritmo

- Dado un intervalo $[a, b]$ con $h(a)h(b) < 0$, se subdivide el intervalo repetidamente.
- En cada paso, se calcula el punto medio $c = \frac{a+b}{2}$.
- Se evalúa la función en el punto medio $g(c)$.
- Dependiendo del signo de $h(c)$, se elige el subintervalo $[a, c]$ o $[c, b]$ para el siguiente paso.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Método de bisección

Algoritmo

1. Inicializar a y b de forma que $h(a)h(b) < 0$
2. $k \longleftarrow 0$
3. Mientras no se cumpla el criterio de parada:
    1. $x_k \longleftarrow \frac{a+b}{2}$
    2. Si $|h(x_k)| < \epsilon$, retornar x_k
    3. Si $h(a)h(x_k) < 0$, entonces $b \longleftarrow x_k$, sino $a \longleftarrow x_k$
    4. $k \longleftarrow k + 1$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Método de bisección

Criterios de parada:

- Longitud del intervalo: $\frac{b-a}{2} \leq \delta$.
- Valor absoluto de la función: $|h(x_k)| \leq \epsilon$.
- Cantidad máxima de iteraciones: $k \leq MAXITER$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Método de bisección

Ventajas

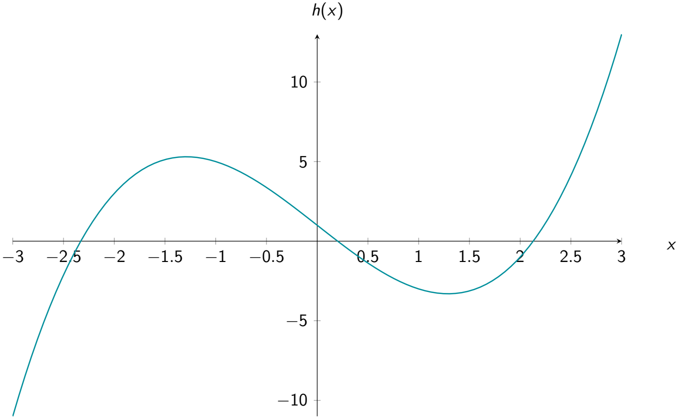
- Es un método simple y robusto.
- Si se cumplen las condiciones iniciales el método converge y garantiza encontrar una raíz en el intervalo.
- Es útil para funciones continuas donde se conoce un intervalo con signos opuestos en los extremos.

Desventajas

- Tiene convergencia lineal (lento):

$$|x_k - x^*| \leq \frac{b_k - a_k}{2} \leq \frac{b - a}{2^k}.$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Método de bisección - Ejemplo



$$f(x) = 0.25x^4 - 2.5x^2 + x \qquad h(x) = f'(x) = x^3 - 5x + 1$$

$$a = -2 \text{ y } b = 2$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Método de bisección - Ejemplo

Si queremos determinar la raíz de $h(x) = x^3 - 5x + 1$ con una exactitud de 10^{-4} con $a = -2$ y $b = 2$ debemos realizar K iteraciones del algoritmo de bisección, con K satisfaciendo:

$$|x_K - x^*| \leq 2^{-K}(b-a) = 4 * 2^{-K} = 2^{2-K} < 10^{-4}.$$

Esto es:

$$\log_{10} 2^{2-K} < -4 \iff (2-K)\log_{10} 2 < -4 \iff$$

$$2 - K < \frac{-4}{\log_{10} 2} \iff K > \frac{4}{\log_{10} 2} + 2 \approx 15.28.$$

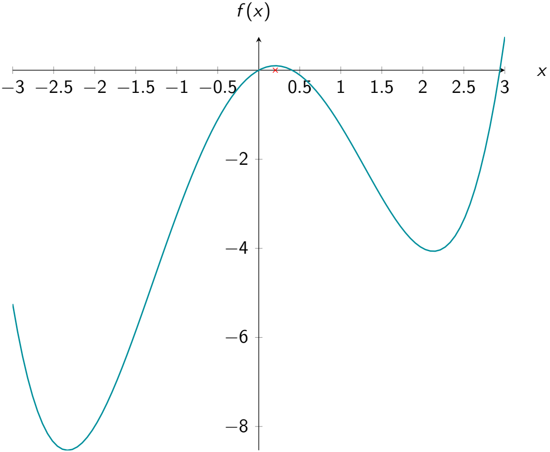
Es necesario realizar $K = 16$ iteraciones para estar seguros de obtener una aproximación con una exactitud de al menos 10^{-4}.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Método de bisección - Ejemplo

$f(x) = 0.25x^4 - 2.5x^2 + x$ $\qquad$ $h(x) = f'(x) = x^3 - 5x + 1$

k	a_k	b_k	x_k	$g(x_k)$
1	-2	2	0.0	1.0
2	0.0	2	1.0	-3.0
3	0.0	1.0	0.5	-1.375
4	0.0	0.5	0.25	-0.234375
5	0.0	0.25	0.125	0.376953125
6	0.125	0.25	0.1875	0.069091796875
7	0.1875	0.25	0.21875	-0.083282470703125
8	0.1875	0.21875	0.203125	-0.007244110107421875
9	0.1875	0.203125	0.1953125	0.030888080596923828
10	0.1953125	0.203125	0.19921875	0.011812865734100342
11	0.19921875	0.203125	0.201171875	0.002282075583934784
12	0.201171875	0.203125	0.2021484375	-0.0024815956130623817
13	0.201171875	0.2021484375	0.20166015625	-9.990425314754248e-05
14	0.201171875	0.20166015625	0.201416015625	0.0010910496494034305
15	0.201416015625	0.20166015625	0.2015380859375	0.0004955636886734283
16	0.2015380859375	0.20166015625	0.20159912109375	0.00019782746471719292
17	0.20159912109375	0.20166015625	0.201629638671875	4.8961042438122604e-05
18	0.201629638671875	0.20166015625	0.2016448974609375	-2.5471746202043732e-05
19	0.201629638671875	0.2016448974609375	0.20163726806640625	1.1744612907538254e-05
20	0.20163726806640625	0.2016448974609375	0.20164108276367188	-6.863575449989057e-06
21	0.20163726806640625	0.20164108276367188	0.20163917541503906	2.4405165280905194e-06

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Método de bisección - Ejemplo



$$f(x) = 0.25x^4 - 2.5x^2 + x$$

$x^* = 0.20163726806640625$, $f''(x^*) < 0 \implies$ no se cumple la condición necesaria de segundo orden $\implies x^*$ no es mínimo local.

Cero de funciones

Punto fijo vs Cero de funciones

Sean $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $h(x) = g(x) - x$.

x^* es punto fijo de g sii x^* es raíz de h.

Cero de funciones

Punto fijo vs Cero de funciones

Sean $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $h(x) = g(x) - x$.

x^* es punto fijo de g sii x^* es raíz de h.

Punto fijo

Sea $g(x) : [a, b] \to [a, b]$ función continua. Entonces g tiene punto fijo en $[a, b]$. Si además g es derivable en (a, b) y $|g'(x)| \leq M < 1$ para todo $x \in (a, b)$, entonces el punto fijo es único.

Cero de funciones

Punto fijo vs Cero de funciones

Sean $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $h(x) = g(x) - x$.

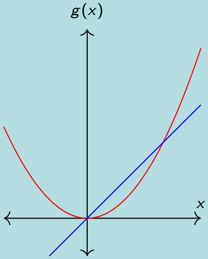
x^* es punto fijo de g sii x^* es raíz de h.

Punto fijo

Sea $g(x) : [a, b] \to [a, b]$ función continua. Entonces g tiene punto fijo en $[a, b]$. Si además g es derivable en (a, b) y $|g'(x)| \leq M < 1$ para todo $x \in (a, b)$, entonces el punto fijo es único.

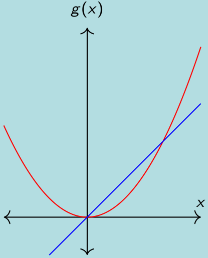
Son condiciones suficientes, pero no necesarias!

Punto fijo



$g(x) = x^2$ tiene dos puntos fijos $x^* = 0$ y $x^* = 1$.
El intervalo $[a, b] = [-0.25, 0.25]$ verifica que $g(x) = x^2 : [a, b] \to [a, b]$. Además $|g'(x)| = |2x| \leq \frac{1}{2} < 1$. Por lo tanto existe punto fijo en $[a, b]$ y es único. Corresponde a $x^* = 0$.

Punto fijo



$g(x) = x^2$ tiene dos puntos fijos $x^* = 0$ y $x^* = 1$.
El intervalo $[a, b] = [-0.25, 0.25]$ verifica que $g(x) = x^2 : [a, b] \to [a, b]$. Además $|g'(x)| = |2x| \leq \frac{1}{2} < 1$. Por lo tanto existe punto fijo en $[a, b]$ y es único. Corresponde a $x^* = 0$.
Para el caso de $x^* = 1$ tenemos que $|g'(x^*)| = 2$ por lo cual no va a existir un intervalo que contenga al punto fijo donde podamos acotar la derivada por una constante menor a 1. Sin embargo en un intervalo que contenga a $x^* = 1$ y no contenga a $x^* = 0$, el punto fijo existe y es único.

Cero de funciones

Algoritmo de Punto fijo

Sea $g(x) : [a, b] \to [a, b]$ función derivable en (a, b) y $|g'(x)| \leq M < 1$ para todo $x \in (a, b)$. Dado $x_0 \in [a, b]$ la sucesión definida por $x_{k+1} = g(x_k)$ converge a x^*, el punto fijo de g.

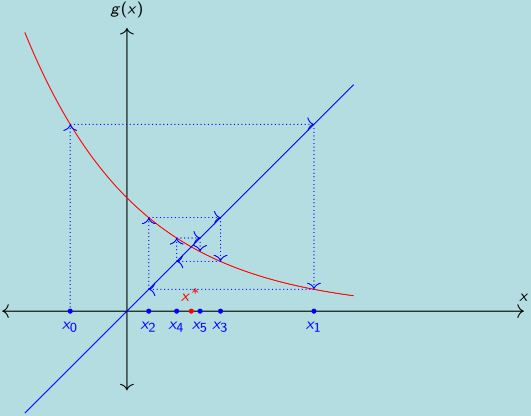
Algoritmo de Punto fijo

Sea $g(x) : [a, b] \to [a, b]$ función derivable en (a, b) y $|g'(x)| \leq M < 1$ para todo $x \in (a, b)$. Dado $x_0 \in [a, b]$ la sucesión definida por $x_{k+1} = g(x_k)$ converge a x^*, el punto fijo de g.

Error

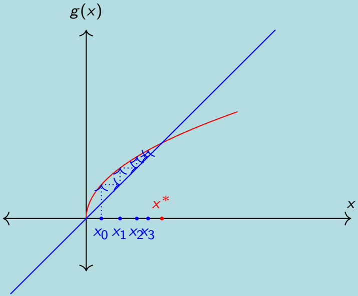
- $|x_k - x^*| \leq M^k \max\{x_0 - a, b - x_0\}$
- $|x_k - x^*| \leq \frac{M^k}{1-M}|x_1 - x_0|$

Algoritmo de Punto fijo



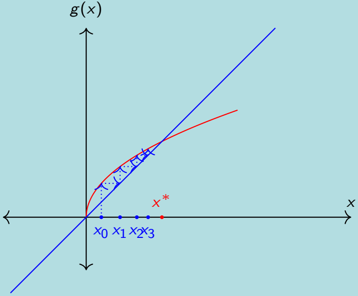
Convergencia alternante

Algoritmo de Punto fijo

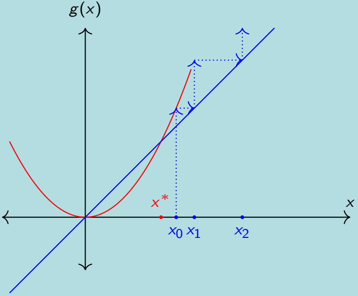


Convergencia monótona

Algoritmo de Punto fijo



Convergencia monótona



Divergencia

Punto fijo-Orden de convergencia

Sea $g(x) \in C^n[a, b]$, x^* punto fijo de g tal que
$g'(x^*) = g''(x^*) = \ldots = g^{r-1}(x^*) = 0$, $g^r(x^*) \neq 0$.
Dado $x_0 \in [a, b]$ si la sucesión definida por $x_{k+1} = g(x_k)$ converge a x^* entonces el orden de convergencia es r.

Punto fijo

Sea $h(x)$ y x^* una raíz. Definimos $g(x) = x - r(x)h(x)$ donde $r(x^*) \neq 0$. Entonces x^* es punto fijo de g sii x^* es raíz de h.
Si aplicamos el algoritmo de punto fijo a g, buscamos que tenga convergencia cuadrática. ¿Qué deberíamos pedir?

Cero de funciones

Punto fijo

Sea $h(x)$ y x^* una raíz. Definimos $g(x) = x - r(x)h(x)$ donde $r(x^*) \neq 0$. Entonces x^* es punto fijo de g sii x^* es raíz de h.
Si aplicamos el algoritmo de punto fijo a g, buscamos que tenga convergencia cuadrática. ¿Qué deberíamos pedir?

$$g'(x^*) = 0 \; 1 - r'(x^*)h(x^*) - r(x^*)h'(x^*) = 0$$

como $f(x^*) = 0$, entonces

$$1 - r(x^*)h'(x^*) = 0$$

de donde deducimos que $r(x^*) = \frac{1}{h'(x^*)}$
¿Candidata a ser $r(x)$?

$$r(x) = \frac{1}{h'(x)}$$

Algoritmo de Newton-Raphson

$x_0 \in [a, b]$
for $k = 1$ a K **do**
  $x_k \leftarrow x_{k-1} - \frac{(x_{k-1})}{h'(x_{k-1})}$
end for
return x_K

Algoritmo de Newton-Raphson

Sean $h(x) \in C^2[a, b]$ y $x^* \in [a, b]$ tal que $h(x^*) = 0$ y $h'(x^*) \neq 0$. Existe $\delta > 0$ tal que la sucesión

$$x_k = x_{k-1} - \frac{h(x_k)}{h'(x_k)}$$

converge a x^* si $x_0 \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$

Algoritmo de Newton-Raphson - Interpretación

Consideramos el polinomio de Taylor de orden 1 alrededor de $\bar{x}$:
$h(x) = h(\bar{x}) + h'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{h''(\xi(x))}{2}(x - \bar{x})^2$
Si buscamos x^* una raíz de h y consideramos que se encuentra *cerca* de $\bar{x}$, *despreciamos* el último término de donde surge

$$0 \approx h(\bar{x}) + h'(\bar{x})(x^* - \bar{x})$$

$$x^* \approx \bar{x} - \frac{h(\bar{x})}{h'(\bar{x})}$$

De aqui podemos plantear la sucesión

$$x_k = x_{k-1} - \frac{h(x_{k-1})}{h'(x_{k-1})}$$

Interpretación: considerar el punto donde se anula la recta tangente.

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Método de Newton-Raphson

$$\tilde{h}(x) = h'(x_k)(x - x_k) + h(x_k)$$

Como queremos que $\tilde{h}(x_{k+1}) = 0$,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{h(x_k)}{h'(x_k)}$$

Algoritmo

1. x_0 inicial cualquiera, $k \longleftarrow 0$
2. Mientras no se cumpla el criterio de parada:
   1. $x_{k+1} \longleftarrow x_k - \frac{h(x_k)}{h'(x_k)}$
   2. $k \longleftarrow k + 1$

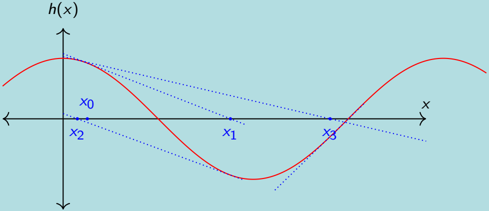
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Método de Newton-Raphson

Criterios de parada:

- Diferencia entre iteraciones: $|x_k - x_{k-1}| \leq \delta$.
- Diferencia relativa entre iteraciones: $\frac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_k|} \leq \delta$, con $x_k \neq 0$.
- Valor absoluto de la función: $|h(x_k)| \leq \epsilon$.
- Cantidad máxima de iteraciones: $k \leq MAXITER$.

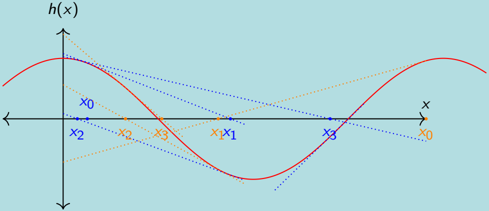
Cero de funciones

Algoritmo de Newton-Raphson:convergencia



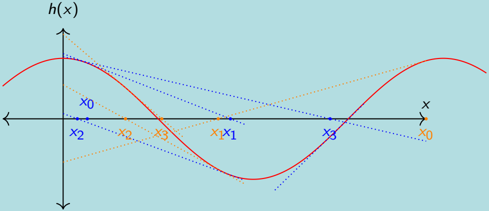
Cero de funciones

Algoritmo de Newton-Raphson:convergencia

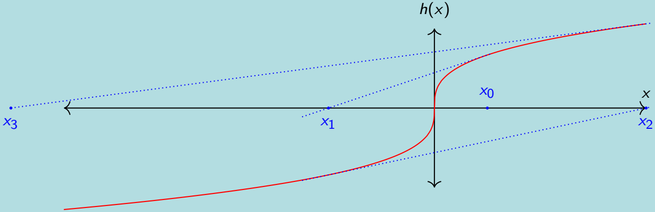


Cero de funciones

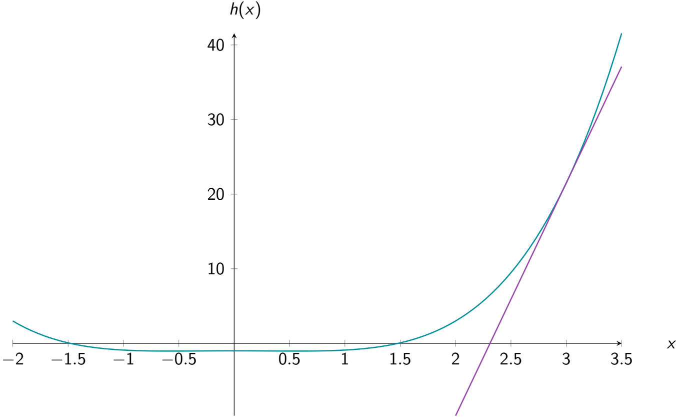
Algoritmo de Newton-Raphson:convergencia



Algoritmo de Newton-Raphson:divergencia



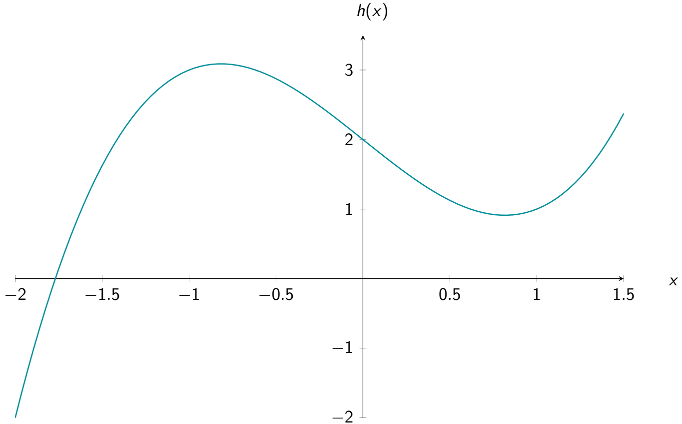
$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Método de Newton-Raphson



$$h(x) = 0.3x^4 - 0.2x - 1$$

$$x_0 = 3$$

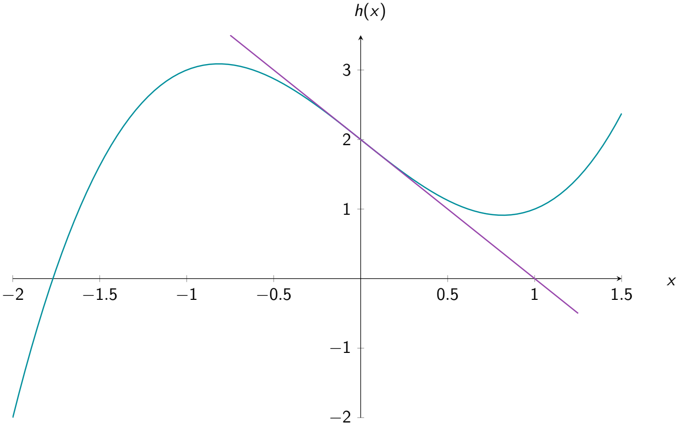
$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$: Método de Newton-Raphson



$$h(x) = x^3 - 2x + 2$$

$$x_0 = 0$$

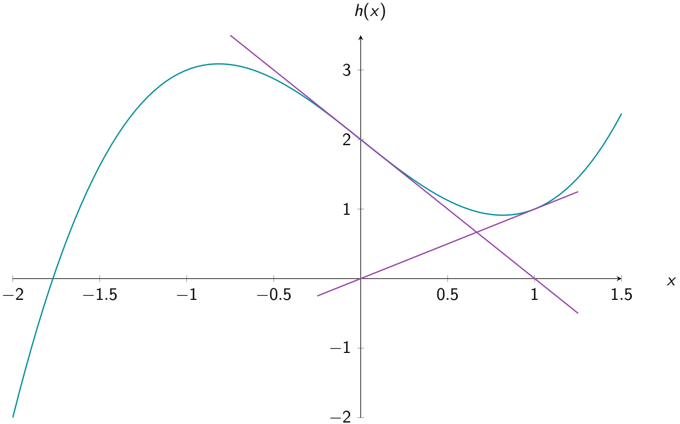
$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Método de Newton-Raphson



$$h(x) = x^3 - 2x + 2$$

$$x_0 = 0$$

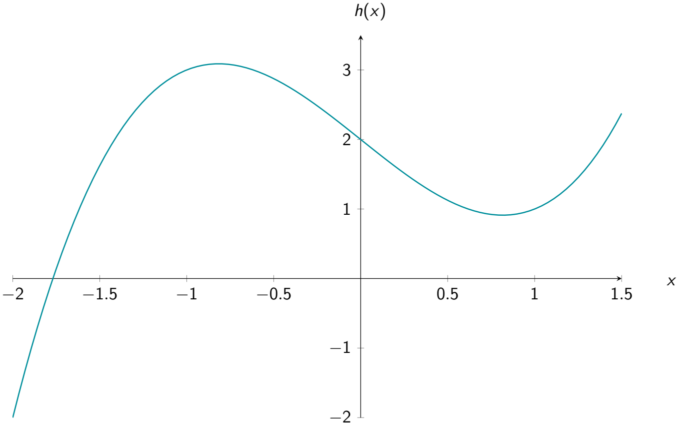
$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Método de Newton-Raphson



$$h(x) = x^3 - 2x + 2$$

$$x_0 = 0$$

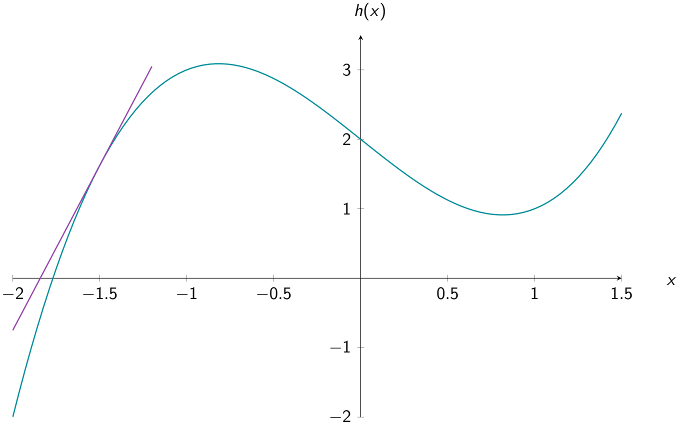
$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Método de Newton-Raphson



$$h(x) = x^3 - 2x + 2$$

$$x_0 = -1.5$$

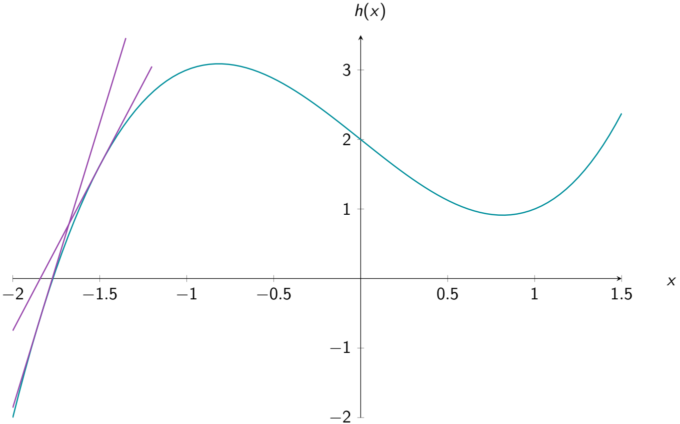
$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Método de Newton-Raphson



$$h(x) = x^3 - 2x + 2$$

$$x_0 = -1.5$$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Método de Newton-Raphson



$$h(x) = x^3 - 2x + 2$$

$$x_0 = -1.5$$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Método de Newton-Raphson

Ventajas

- Bajo ciertas condiciones iniciales tiene convergencia cuadrática.
- Si no se cumplen estas condiciones, pero el método aún converge, su convergencia puede ser lineal.

Desventajas

- Si $h(x_k) \neq 0$ y $h'(x_k) = 0$, la recta tangente a h en x_k no corta al eje X.
- Requiere el cálculo de la derivada, $h'(x)$.
- Cuando se busca un mínimo local, requiere el cálculo de la segunda derivada.
- Puede no converger. Ejemplo: $x^3 - 2x + 2$ con $x_0 = 0$.

Algoritmo de Newton-Raphson - Caso particular

Sean $h(x) \in C^2[a, b]$, creciente y convexa ($h''(x) > 0$). Entonces si existe $x^* \in [a, b]$ tal que $h(x^*) = 0$, la raíz es única y el algoritmo de Newton converge desde cualquier $x_0 \in [a, b]$ inicial.

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Método de la Secante

- Es similar al método de Newton-Raphson, pero no requiere el cálculo de la derivada de la función en cada paso, $h'(x_k)$.

- Por definición $h'(x)$ es:

$$h'(x_k) = \lim_{x \to x_k} \frac{h(x) - h(x_k)}{x - x_k}$$

  Tomando $x = x_{k-1}$, se aproxima el cálculo de $h'(x_k)$ como:

$$h'(x_k) \approx \frac{h(x_k) - h(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

- La fórmula iterativa del método de la secante es:

$$x_{k+1} = x_k - h(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{h(x_k) - h(x_{k-1})}$$

- x_{k+1} es la intersección del eje X con la recta que une los puntos $(x_k, h(x_k))$ y $(x_{k-1}, h(x_{k-1}))$.

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Método de la secante

Algoritmo

1. x_0 y x_1 iniciales cualquiera, $k \longleftarrow 1$
2. Mientras no se cumpla el criterio de parada:
    1. $x_{k+1} \longleftarrow x_k - h(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{h(x_k) - h(x_{k-1})}$
    2. $k \longleftarrow k + 1$

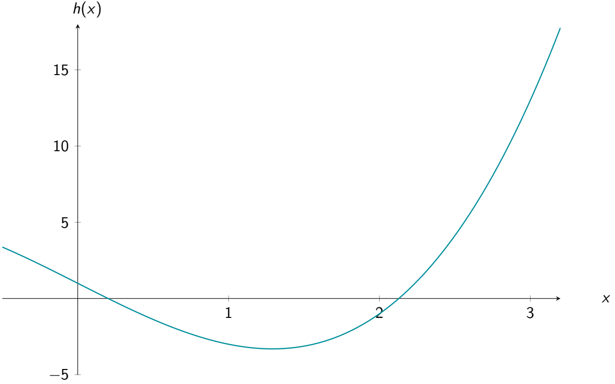
$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: Método de la secante

Algoritmo

1. x_0 y x_1 iniciales cualquiera, $k \longleftarrow 1$
2. Mientras no se cumpla el criterio de parada:
    1. $x_{k+1} \longleftarrow x_k - h(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{h(x_k) - h(x_{k-1})}$
    2. $k \longleftarrow k + 1$

Se pierde la convergencia cuadrática. El orden de convergencia, bajo ciertas hipótesis es superlineal con $p = \frac{1+\sqrt{(5)}}{2}$

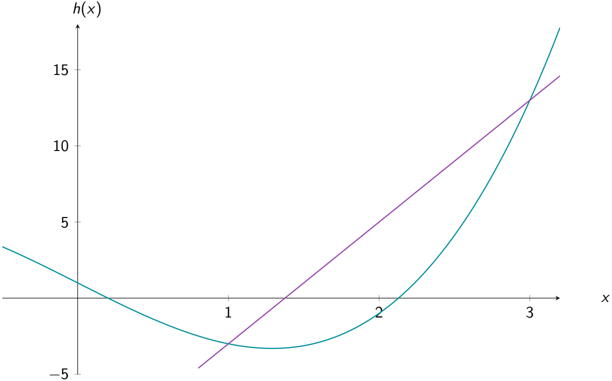
$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Método de la secante



$$h(x) = 3x^3 - 5x + 1$$

- $x_0 = 1$ y $x_1 = 3$.

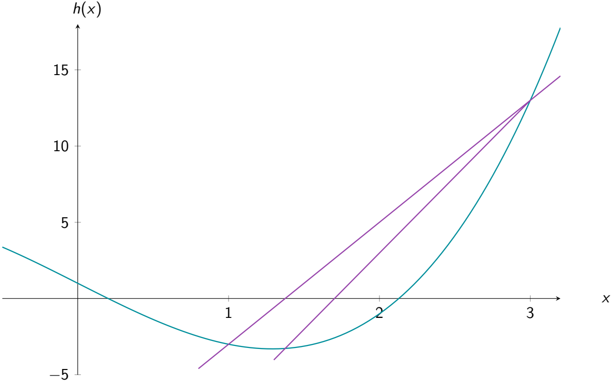
$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Método de la secante



$$h(x) = 3x^3 - 5x + 1$$

- $x_0 = 1$ y $x_1 = 3$.
- $x_2 = 1.375$.

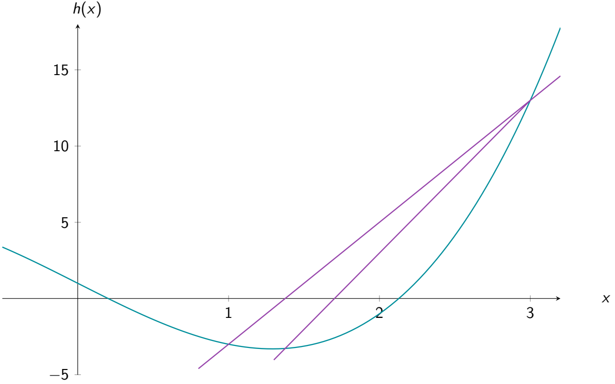
$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Método de la secante



$$h(x) = 3x^3 - 5x + 1$$

- $x_0 = 1$ y $x_1 = 3$.
- $x_2 = 1.375$.
- $x_3 = 1.7020280811232449$

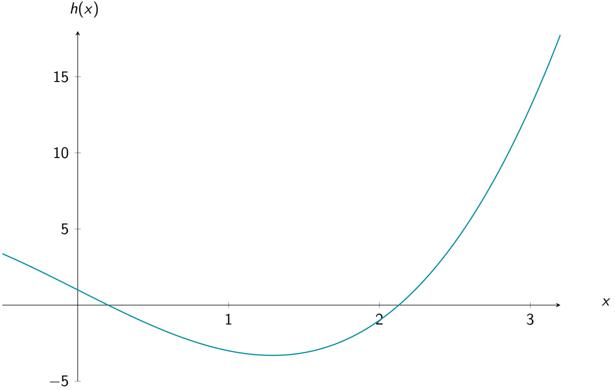
$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Método de la secante



$$h(x) = 3x^3 - 5x + 1$$

- $x_0 = 1$ y $x_1 = 3$.
- $x_2 = 1.375$.
- $x_3 = 1.7020280811232449$
- $x_9 = 2.128408001633036$

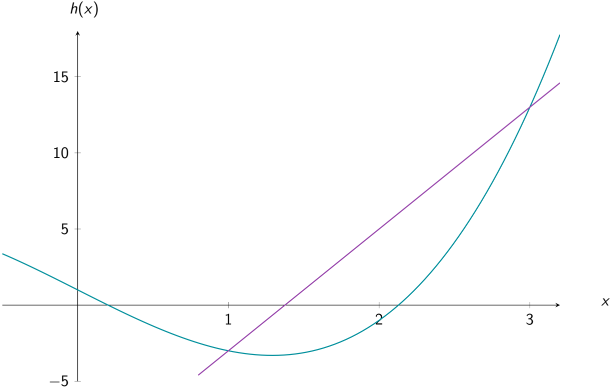
$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Método de la secante



$$h(x) = 3x^3 - 5x + 1$$

- $x_0 = 3$ y $x_1 = 1$

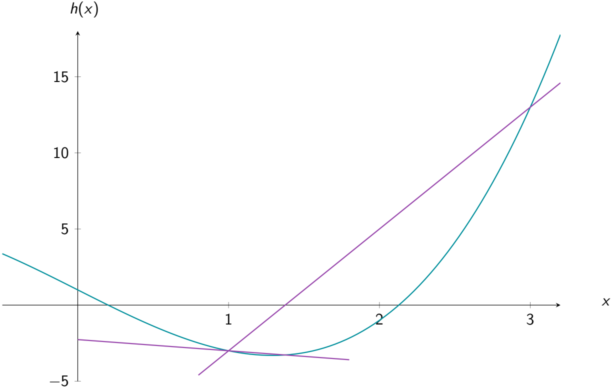
$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Método de la secante



$$h(x) = 3x^3 - 5x + 1$$

- $x_0 = 3$ y $x_1 = 1$
- $x_2 = 1.375$

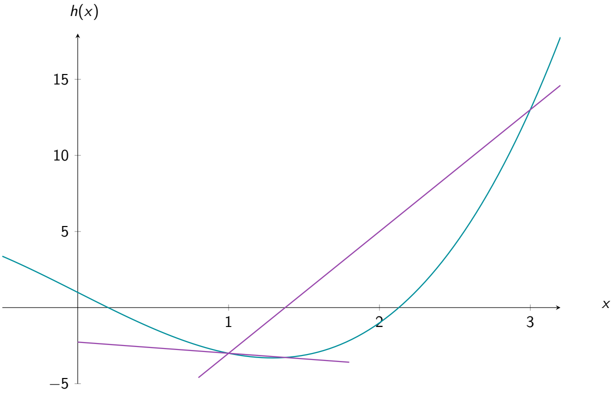
$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Método de la secante



$$h(x) = 3x^3 - 5x + 1$$

- $x_0 = 3$ y $x_1 = 1$
- $x_2 = 1.375$
- $x_3 = -3.085106382978723$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Método de la secante



$$h(x) = 3x^3 - 5x + 1$$

- $x_0 = 3$ y $x_1 = 1$
- $x_2 = 1.375$
- $x_3 = -3.085106382978723$
- $x_9 = 0.2016396757233463$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Método de regla falsa

- Bisección siempre encierra una raíz en el intervalo dado por dos aproximaciones sucesivas.
- Esto no es cierto en los métodos de Newton y secante.

- Similar al método de la secante.
- Pero asegura que siempre encierra una raíz en el intervalo dado por dos aproximaciones sucesivas.

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Método de regla falsa

- Elige dos aproximaciones iniciales, x_0 y x_1, tales que $h(x_0)h(x_1) < 0$.
- La siguiente aproximación, x_2, se definide como en el método de la secante.
- Para calcular la siguente aproximación, x_3, si $h(x_1)h(x_2) < 0$ utiliza x_1 y x_2. Pero si no, utiliza x_0 y x_2.
- Esto asegura que siempre existe una raíz entre las aproximaciones dadas por iteraciones consecutivas.

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Método de regla falsa

Algoritmo

1. x_0 y x_1 tales que $h(x_0)h(x_1) < 0$, $k \longleftarrow 1$
2. Mientras no se cumpla el criterio de parada:
    1. $x_{k+1} \longleftarrow x_k - h(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{h(x_k) - h(x_{k-1})}$
    2. Si $h(x_k)h(x_{k+1}) > 0$, $x_k \longleftarrow x_{k-1}$
    3. $k \longleftarrow k + 1$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- Newton y secante necesitan buenas aproximaciones iniciales para converger rápidamente.
- Bisección siempre converge pero es lento.
- Muchas veces se usa bisección como método para obtener una aproximación inicial y luego se refina esta aproximación utilizando Newton o secante.
- Ningún criterio de parada es infalible.
- $|x_n - x_{n-1}|$ puede tender a 0 mientras que la sucesión diverge.
- $|h(x_n)|$ puede estar cercano a 0 mientras que x_n está lejos de x^*.
- Siempre es conveniente poner el límite MAX_ITER para evitar ciclos infinitos cuando la sucesión diverge.