



Trabajo práctico - Programación Lineal

14 de mayo de 2025

Intro a IO y Optimización

Integrante	LU	Correo electrónico
Lamonica, Ivo	66/22	Completaer
Masetto, Lautaro	1052/22	Completaer
Vanotti, Franco	464/23	fvanotti15@gmail.com



Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (+54 +11) 4576-3300

<http://www.exactas.uba.ar>

0. Introducción

Una refinería produce tres productos, combustible para aviones, combustible para vehículos y kerosene. Gracias a los buenos precios de venta que mantiene, la refinería vende todos los productos que produce.

El proceso de producción se compone de refinado, fraccionado y embalaje. Para realizar estas tareas, la empresa cuenta con 4 sectores:

- refinado: capacidad mensual de 38.000 horas, gasto fijo de \$5.000.000.
- fraccionado: capacidad mensual de 80.000 horas, gasto fijo de \$5.000.000.
- embalaje de combustible para aviones: capacidad mensual de 4.000 horas, gasto fijo de \$2.000.000.
- embalaje de combustible para vehículos: capacidad mensual de 6.000 horas, gasto fijo de \$1.000.000.
- embalaje de kerosene: capacidad mensual de 7.000 horas, gasto fijo de \$500.000.

El tiempo requerido para refinar 1000 litros de combustible para aviones es de 10 horas, mientras que para fraccionarlos son necesarias 20 horas y 4 para su embalaje. Para el combustible para vehículos los tiempos son de 5, 10 y 2 horas respectivamente, y para los 1000 litros de kerosene de 3, 6 y 1 hora.

El precio de venta es de \$16000 para los mil litros de combustible para aviones, de \$8000 para los mil litros de combustible para vehículos y de \$4000 los mil litros de kerosene. El costo de la materia prima para mil litros de combustible para aviones es de \$4000, el de refinado de \$4100, el de fraccionado de \$1000, y el de embalaje de \$1000. Para 1000 litros de combustible para vehículos, los costos son de \$1000, \$3000, \$600 y \$500, respectivamente. Y para 1000 litros de kerosene de \$500, \$1500, \$400 y \$400.

En el último mes, la refinería produjo 500.000 litros de combustible para aviones, 3.000.000 litros de combustible para vehículos y 6.000.000 litros de kerosene, lo que implicó una pérdida en el combustible para aviones al considerar prorrateados los gastos fijos.

El gerente de ventas señaló que estudios de mercado indican que no es posible aumentar el precio de venta del combustible para aviones y, por lo tanto, para aumentar las ganancias de la empresa se debe discontinuar su producción.

Sin embargo, la conclusión del jefe del departamento de embalaje de combustible para aviones es distinta. Según él, los gastos fijos de su sector inciden tanto en el costo de cada litro de combustible para aviones porque se produce poco de este producto, y para aumentar las ganancias de la empresa propone que se produzca más.

En vista de las distintas propuestas, el director de la empresa necesita ayuda para evaluarlas y tomar las decisiones apropiadas. Para esto, analizar los siguientes ítems, **evitando reoptimizar en todos los casos que sea posible**:

1. Ejercicios

1. Calcular la ganancia o pérdida (prorrateando los gastos fijos) de cada producto que se obtuvo en el mes anterior (cuando se produjeron 500.000 litros de combustible para aviones, 3.000.000 de combustible para vehículos y 6.000.000 litros de kerosene) y la ganancia (o pérdida) total de la compañía.

Calcular Costos Variables: Usamos los costos por cada 1.000 litros y multiplicamos por la producción total para cada producto.

- Combustible para aviones ($500.000 \text{ L} / 1.000 = 500$ unidades):

- Materia prima: $500 \times 4.000 = 2.000.000$
- Refinado: $500 \times 4.100 = 2.050.000$
- Fraccionado: $500 \times 1.000 = 500.000$
- Embalaje: $500 \times 1.000 = 500.000$

- Total: 5.050.000

- Combustible para vehículos ($3.000.000 \text{ L} / 1.000 = 3.000$ unidades):

- Materia prima: $3.000 \times 1.000 = 3.000.000$
- Refinado: $3.000 \times 3.000 = 9.000.000$
- Fraccionado: $3.000 \times 600 = 1.800.000$
- Embalaje: $3.000 \times 500 = 1.500.000$

- Total: 15.300.000

- Kerosene ($6.000.000 \text{ L} / 1.000 = 6.000$ unidades):

- Materia prima: $6.000 \times 500 = 3.000.000$
- Refinado: $6.000 \times 1.500 = 9.000.000$
- Fraccionado: $6.000 \times 400 = 2.400.000$
- Embalaje: $6.000 \times 400 = 2.400.000$

- Total: 16.800.000

Calcular Ingresos por Ventas:

- Aviones: $500 \times 16.000 = 8.000.000$
- Vehículos: $3.000 \times 8.000 = 24.000.000$
- Kerosene: $6.000 \times 4.000 = 24.000.000$

Ganancia Bruta por Producto:

Producto	Ingreso	Costo	Ganancia bruta
Combustible Aviones	8.000.000	5.050.000	2.950.000
Combustible Vehículos	24.000.000	15.300.000	8.700.000
Kerosene	24.000.000	16.800.000	7.200.000

Prorratear Gastos Fijos:

Gasto Fijo Total:

- Refinado: 5.000.000
- Fraccionado: 5.000.000
- Embalaje aviones: 2.000.000
- Embalaje vehículos: 1.000.000
- Embalaje kerosene: 500.000

- Total: 13.500.000

Prorrateamos los gastos según uso de horas:

Primero, calculamos las horas usadas por cada producto en cada etapa (por cada 1000 litros)

Producto	Unidades	Refinado (h)	Fraccionado (h)	Embalaje (h)
Combustible Aviones	500	$10 \times 500 = 5.000$	$20 \times 500 = 10.000$	$4 \times 500 = 2.000$
Combustible Vehículos	3.000	$5 \times 3.000 = 15.000$	$10 \times 3.000 = 30.000$	$2 \times 3.000 = 6.000$
Kerosene	6.000	$3 \times 6.000 = 18.000$	$6 \times 6.000 = 36.000$	$1 \times 6.000 = 6.000$

a) Refinado (38.000 horas totales):

- Aviones: $5.000/38.000 \times 5.000.000 = 657.895$
- Vehículos: $15.000/38.000 \times 5.000.000 = 1.973.684$
- Kerosene: $18.000/38.000 \times 5.000.000 = 2.368.421$

b) Fraccionado (76.000 horas totales):

- Aviones: $10.000/76.000 \times 5.000.000 = 657.895$
- Vehículos: $30.000/76.000 \times 5.000.000 = 1.973.684$
- Kerosene: $36.000/76.000 \times 5.000.000 = 2.368.421$

c) Embalaje (por sector):

- Aviones: 2.000.000
- Vehículos: 1.000.000
- Kerosene: 500.000

Gasto Fijo Total por Producto:

Producto	Refinado	Fraccionado	Embalaje	Gasto Fijo Total
Combustible Aviones	657.895	657.895	2.000.000	3.315.790
Combustible Vehículos	1.973.684	1.973.684	1.000.000	4.947.368
Kerosene	2.368.421	2.368.421	500.000	5.236.842

Ganancia Neta por Producto:

Producto	Ganancia bruta	Gasto fijo	Ganancia neta
Combustible Aviones	2.950.000	3.315.790	-365.790
Combustible Vehículos	8.700.000	4.947.368	3.752.632
Kerosene	7.200.000	5.236.842	1.963.158

Ganancia Total de la Empresa: $-365.790 + 3.752.632 + 1.963.158 = 5.350.000$

2. Si la empresa no hubiese producido combustible para aviones manteniendo en los mismos valores los otros productos, ¿la ganancia de la compañía habría sido mejor? Suponer que se cierra el sector de embalaje de combustibles para aviones.

Datos Relevantes:

- Se elimina completamente el combustible para aviones.
- Se mantiene igual la producción de:
 - Combustible para vehículos: 3.000.000 L
 - Kerosene: 6.000.000 L
- El sector de embalaje para aviones se cierra, así que se eliminan sus gastos fijos (\$2.000.000).
- Los demás sectores siguen funcionando con los productos restantes.

Entonces, la ganancia bruta del combustible para vehículos y del kerosene siguen siendo:

Producto	Ingreso	Costo	Ganancia bruta
Combustible Vehículos	24.000.000	15.300.000	8.700.000
Kerosene	24.000.000	16.800.000	7.200.000

Lo que cambian son los gastos fijos:

Capacidad Liberada:

Al eliminar la producción de combustible de aviones:

- Refinado: Se liberan 5.000 h
- Fraccionado: Se liberan 10.000 h
- Embalaje Combustible Aviones: se cierra

Prorratear Gastos Fijos:

Gasto Fijo Total:

- Refinado: 5.000.000
- Fraccionado: 5.000.000
- Embalaje vehículos: 1.000.000
- Embalaje kerosene: 500.000

- Total: 11.500.000

Prorrateamos los gastos según uso de horas:

Primero, calculamos las horas usadas por cada producto en cada etapa (por cada 1000 litros)

Producto	Unidades	Refinado (h)	Fraccionado (h)	Embalaje (h)
Combustible Vehículos	3.000	$5 \times 3.000 = 15.000$	$10 \times 3.000 = 30.000$	$2 \times 3.000 = 6.000$
Kerosene	6.000	$3 \times 6.000 = 18.000$	$6 \times 6.000 = 36.000$	$1 \times 6.000 = 6.000$

a) Refinado (33.000 horas totales):

- Vehículos: $15.000/33.000 \times 5.000.000 = 2.272.727$
- Kerosene: $18.000/33.000 \times 5.000.000 = 2.727.273$

b) Fraccionado (66.000 horas totales):

- Vehículos: $30.000/66.000 \times 5.000.000 = 2.272.727$
- Kerosene: $36.000/66.000 \times 5.000.000 = 2.727.273$

c) Embalaje (por sector):

- Vehículos: 1.000.000
- Kerosene: 500.000

Gasto Fijo Total por Producto:

Producto	Refinado	Fraccionado	Embalaje	Gasto Fijo Total
Combustible Vehículos	2.272.727	2.272.727	1.000.000	5.545.454
Kerosene	2.727.273	2.727.273	500.000	5.954.546

Ganancia Neta por Producto:

Producto	Ganancia bruta	Gasto fijo	Ganancia neta
Combustible Vehículos	8.700.000	5.545.454	3.154.546
Kerosene	7.200.000	5.954.546	1.245.454

Ganancia Total de la Empresa: $3.154.546 + 1.245.454 = 4.400.000$

Conclusión :

La ganancia habría sido menor si no se producía combustible para aviones.

Incluso aunque el sector de embalaje para combustible para aviones se cerrara y sus gastos se eliminaran, la empresa perdería aproximadamente \$2 millones de ganancia.

Esto a priori refuerza el argumento del jefe del área de embalaje, quien propone aumentar la producción de combustible para aviones, ya que diluye el impacto de los costos fijos sobre cada litro y mejora la ganancia total.

3. ¿Y si hubiese aumentado lo máximo posible la producción de los otros productos? Suponer que se cierra el sector de embalaje de combustibles para aviones.

Esto implica resolver un problema de programación lineal para maximizar la **ganancia**, teniendo en cuenta:

- Restricciones de horas por sector
- Ganancias por producto.
- No se puede producir combustible para aviones.

Variables

- x_1 : miles de litros de combustible para aviones (no se produce, así que se elimina)
- x_2 : miles de litros de combustible para vehículos.
- x_3 : miles de litros de kerosene.

Función objetivo: Maximizar la ganancia total

Ganancia por 1.000 litros:

- Combustible para vehículos:
 - Precio de Venta: \$8.000.
 - Costos variables: $\$1.000 + \$3.000 + \$600 + \$500 = \$5.100$.
 - Ganancia por 1.000 litros: \$2.900.
- Kerosene:
 - Precio de Venta: \$4.000.
 - Costos variables: $\$500 + \$1.500 + \$400 + \$400 = \$2.800$.
 - Ganancia por 1.000 litros: \$1.200.

Gastos Fijos:

- Refinado: \$5.000.000.
- Fraccionado: \$5.000.000
- Embalaje Combustible Vehículos: \$1.000.000.
- Embalaje Kerosene: \$500.000.
- Total: \$11.500.000.

Función objetivo:

$$\text{Maximizar } 2.900 x_2 + 1.200 x_3 - 11.500.000$$

Restricciones:

- Refinado (máximo 38.000 h): $5 x_2 + 3 x_3 \leq 38.000$
- Fraccionado (máximo 80.000 h): $10 x_2 + 6 x_3 \leq 80.000$
- Embalaje Combustible Vehículos (máximo 6.000 h): $2 x_2 \leq 6.000 \rightarrow x_2 \leq 3.000$.
- Embalaje K (máximo 7.000 h): $x_3 \leq 7.000$
- Condiciones de no negatividad: $x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

Solucion del Modelo:

- $x_2 = 3.000$
- $x_3 = 7.000$
- $Z = 5.600.000$

Verificamos si cumple las restricciones:

- Refinado (máximo 38.000 h): $5 \times 3.000 + 3 \times 7.000 = 36.000 \leq 38.000$
- Fraccionado (máximo 80.000 h): $10 \times 3.000 + 6 \times 7.000 = 72.000 \leq 80.000$
- Embalaje Combustible Vehículos (máximo 6.000 h): $3.000 \leq 3.000$.
- Embalaje K (máximo 7.000 h): $7.000 \leq 7.000$
- Condiciones de no negatividad: $3.000 \geq 0, 7.000 \geq 0$

Conclusión :

La ganancia habría sido mayor si no se producía combustible para aviones pero se aumentaba al máximo posible la producción de los otros productos.

Esto a priori refuerza el argumento del gerente de ventas, quien propone discontinuar la producción de combustible para aviones, ya que no es posible aumentar el precio de venta del mismo y de esta forma evitar pérdidas.

Sin embargo, no se sabe si la cantidad producida el mes pasado de cada producto fue la óptima, por lo que quizás no es que no convenga no producir combustible para avion sino que quizás conviene producir distintas cantidades de los productos para poder generar mas ganancias.

4. Determinar la cantidad óptima de producción mensual de cada producto para maximizar la ganancia de la compañía. Para determinar la cantidad óptima de producción se pueden plantear un modelo de programación lineal asumiendo que todos los sectores producen algo.

Variables

- x1: miles de litros de combustible para aviones.
- x2: miles de litros de combustible para vehículos.
- x3: miles de litros de kerosene.

Función objetivo: Maximizar la ganancia total

Ganancia por 1.000 litros:

- Combustible para aviones:
 - Precio de Venta: \$16.000.
 - Costos variables: \$4.000 + \$4.100 + \$1.000 + \$1.000 = \$10.100.
 - Ganancia por 1000 litros: \$5.900.
- Combustible para vehículos:
 - Precio de Venta: \$8.000.
 - Costos variables: \$1.000 + \$3.000 + \$600 + \$500 = \$5.100.
 - Ganancia por 1.000 litros: \$2.900.
- Kerosene:
 - Precio de Venta: \$4.000.
 - Costos variables: \$500 + \$1.500 + \$400 + \$400 = \$2.800.
 - Ganancia por 1.000 litros: \$1.200.

Gastos Fijos:

- Refinado: \$5.000.000.
- Fraccionado: \$5.000.000
- Embalaje Combustible Aviones: \$2.000.000.
- Embalaje Combustible Vehículos: \$1.000.000.
- Embalaje K: \$500.000.
- Total: \$13.500.000.

Función objetivo:

$$\text{Maximizar } 5.900 x_1 + 2.900 x_2 + 1.200 x_3 - 13.500.000$$

Restricciones:

- Refinado (máximo 38.000 h): $10 x_1 + 5 x_2 + 3 x_3 \leq 38.000$
- Fraccionado (máximo 80.000 h): $20 x_1 + 10 x_2 + 6 x_3 \leq 80.000$
- Embalaje Combustible Aviones (máximo 4.000 h): $4 x_1 \leq 4.000 \rightarrow x_1 \leq 1.000$.
- Embalaje Combustible Vehículos (máximo 6.000 h): $2 x_2 \leq 6.000 \rightarrow x_2 \leq 3.000$.
- Embalaje K (máximo 7.000 h): $x_3 \leq 7.000$
- Condiciones de no negatividad: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

Solucion del Modelo:

- $x_1 = 1.000$
- $x_2 = 3.000$
- $x_3 = 4.333,333333333333$
- $Z = 6.300.000$

Verificamos si cumple las restricciones:

- Refinado (máximo 38.000 h): $10 \times 1.000 + 5 \times 3.000 + 3 \times 4.333,333333333333 = 38.000 \leq 38.000$
- Fraccionado (máximo 80.000 h): $20 \times 1.000 + 10 \times 3.000 + 6 \times 4.333,333333333333 = 76.000 \leq 80.000$
- Embalaje Combustible Aviones (máximo 4.000 h): $1.000 \leq 1.000$.
- Embalaje Combustible Vehículos (máximo 6.000 h): $3.000 \leq 3.000$.
- Embalaje K (máximo 7.000 h): $4.333,333333333333 \leq 7.000$
- Condiciones de no negatividad: $1.000 \geq 0$, $3.000 \geq 0$, $4.333,333333333333 \geq 0$

Conclusión :

Como se puede observar, la cantidad óptima de producción mensual de combustible para aviones es mayor a cero, es decir, la conclusión del jefe del área de embalaje, parece ser la acertada.

Esto debido a que aumentar la producción de combustible para aviones, diluye el impacto de los costos fijos sobre cada litro y mejora la ganancia total.

5. Indicar al director estas cantidades, el costo por 1000 litros de cada producto (prorrateando los costos fijos) y la ganancia total de la empresa.

La producción óptima queda de la siguiente manera:

- $x_1 = 1.000$
- $x_2 = 3.000$
- $x_3 = 4.333,333333333333$

Calcular Costos Variables:

- Combustible para aviones (1.000 unidades):

- Materia prima: $1.000 \times 4.000 = 4.000.000$
- Refinado: $1.000 \times 4.100 = 4.100.000$
- Fraccionado: $1.000 \times 1.000 = 1.000.000$
- Embalaje: $1.000 \times 1.000 = 1.000.000$
- Total: 10.100.000

- Combustible para vehículos (3.000 unidades):

- Materia prima: $3.000 \times 1.000 = 3.000.000$
- Refinado: $3.000 \times 3.000 = 9.000.000$
- Fraccionado: $3.000 \times 600 = 1.800.000$
- Embalaje: $3.000 \times 500 = 1.500.000$
- Total: 15.300.000

- Kerosene (4.333,3333333333 unidades):

- Materia prima: $4.333,3333333333 \times 500 = 2.166.667$
- Refinado: $4.333,3333333333 \times 1.500 = 6.500.000$
- Fraccionado: $4.333,3333333333 \times 400 = 1.733.333$
- Embalaje: $4.333,3333333333 \times 400 = 1.733.333$

- Total: 12.133.333

Calcular Ingresos por Ventas:

- Aviones: $1.000 \times 16.000 = 16.000.000$
- Vehículos: $3.000 \times 8.000 = 24.000.000$
- Kerosene: $4.333,3333333333 \times 4.000 = 17.333.333$

Ganancia Bruta por Producto:

Producto	Ingreso	Costo	Ganancia bruta
Combustible Aviones	16.000.000	10.100.000	5.900.000
Combustible Vehículos	24.000.000	15.300.000	8.700.000
Kerosene	17.333.333	12.133.333	5.200.000

Prorratear Gastos Fijos:

Gasto Fijo Total:

- Refinado: 5.000.000
- Fraccionado: 5.000.000
- Embalaje aviones: 2.000.000
- Embalaje vehículos: 1.000.000
- Embalaje kerosene: 500.000

- Total: 13.500.000

Prorrateamos los gastos según uso de horas:

Primero, calculamos las horas usadas por cada producto en cada etapa (por cada 1000 litros)

Producto	Unidades	Refinado (h)	Fraccionado (h)	Embalaje (h)
Combustible Aviones	1.000	$10 \times 1.000 = 10.000$	$20 \times 1.000 = 20.000$	$4 \times 1.000 = 4.000$
Combustible Vehículos	3.000	$5 \times 3.000 = 15.000$	$10 \times 3.000 = 30.000$	$2 \times 3.000 = 6.000$
Kerosene	4.333,33	$3 \times 4.333,33 = 13.000$	$6 \times 4.333,33 = 26.000$	$1 \times 4.333,33 = 4.333,33$

a) Refinado (38.000 horas totales):

- Aviones: $10.000/38.000 \times 5.000.000 = 1.315.790$
- Vehículos: $15.000/38.000 \times 5.000.000 = 1.973.684$
- Kerosene: $13.000/38.000 \times 5.000.000 = 1.710.526$

b) Fraccionado (76.000 horas totales):

- Aviones: $20.000/76.000 \times 5.000.000 = 1.315.790$
- Vehículos: $30.000/76.000 \times 5.000.000 = 1.973.684$
- Kerosene: $26.000/76.000 \times 5.000.000 = 1.710.526$

c) Embalaje (por sector):

- Aviones: 2.000.000
- Vehículos: 1.000.000
- Kerosene: 500.000

Gasto Fijo Total por Producto:

Producto	Refinado	Fraccionado	Embalaje	Gasto Fijo Total
Combustible Aviones	1.315.790	1.315.790	2.000.000	4.631.580
Combustible Vehículos	1.973.684	1.973.684	1.000.000	4.947.368
Kerosene	1.710.526	1.710.526	500.000	3.921.052

Ganancia Neta por Producto:

Producto	Ganancia bruta	Gasto fijo	Ganancia neta
Combustible Aviones	5.900.000	4.631.580	1.268.420
Combustible Vehículos	8.700.000	4.947.368	3.752.632
Kerosene	5.200.000	3.921.052	1.278.948

Ganancia Total de la Empresa: $1.268.420 + 3.752.632 + 1.278.948 = 6.300.000$

6. Al escuchar esto, el gerente de producción propuso aumentar la producción contratando 500 horas extras al mes del personal del sector de fraccionado. Asesorar al director sobre esta propuesta.

Como se puede observar en el inciso anterior, claramente no es rentable esta propuesta. Esto debido a que para producir la cantidad óptima para maximizar las ganancias de la compañía, no se utilizan las 80.000 horas de capacidad mensual de fraccionado pero sí se utilizan las 38.000 horas de capacidad mensual de refinado.

Por lo tanto, aunque se agreguen 500 horas extras al sector de fraccionado, no se va a poder producir mas debido a que ya se llegó a la capacidad máxima de horas del personal del refinado.

7. Otra propuesta del gerente es contratar 1000 horas extras al mes del personal del sector de refinado. Indicar al director si es conveniente aceptar esta nueva propuesta y hasta cuánto debería pagar por cada hora extra de este sector
8. Si el director decide pagar por hora extra la mitad del valor máximo indicado en el punto anterior, ¿en cuánto aumentará la ganancia mensual de la compañía?
9. Por otro lado, el gerente de compras propone cambiar algunos proveedores, lo que permitiría bajar el costo de la materia prima del aceite para vehículos de \$1000 a \$800 por cada 1000 litros procesados. ¿Cambiaría el plan de producción óptimo? Si es así, dar la nueva planificación óptima.
10. Y si se modificara el proceso de refinado de kerosene para bajar de \$1500 a \$900 por cada 1000 litros procesado, ¿cambiaría el plan óptimo? Si es así, dar la nueva planificación óptima.
11. La empresa está evaluando comenzar a procesar gasoil. El tiempo requerido para refinar 1000 litros de gasoil es de 4 horas, mientras que para fraccionarlos son necesarias 8 horas y para su embalaje 1.5 horas. El costo de la materia prima para mil litros de gasoil es de \$4000, el de refinado de \$4100, el de fraccionado de \$1000. El embalaje de gasoil lo realizaría el sector de embalaje de kerosene. ¿Cuál debería ser el menor precio de venta de los 1000 litros de gasoil para que su producción sea conveniente para la empresa?
12. La empresa va a agregar un control de calidad a todos sus productos. Controlar los 1000 litros de combustible para aviones requiere 5 horas, los de combustible para vehículos 3 horas y 2 horas los 1000 litros de kerosene. Si el sector de control de calidad dispone de 20000 horas mensuales, ¿cambiaría el plan óptimo? Si es así, dar la nueva planificación óptima.