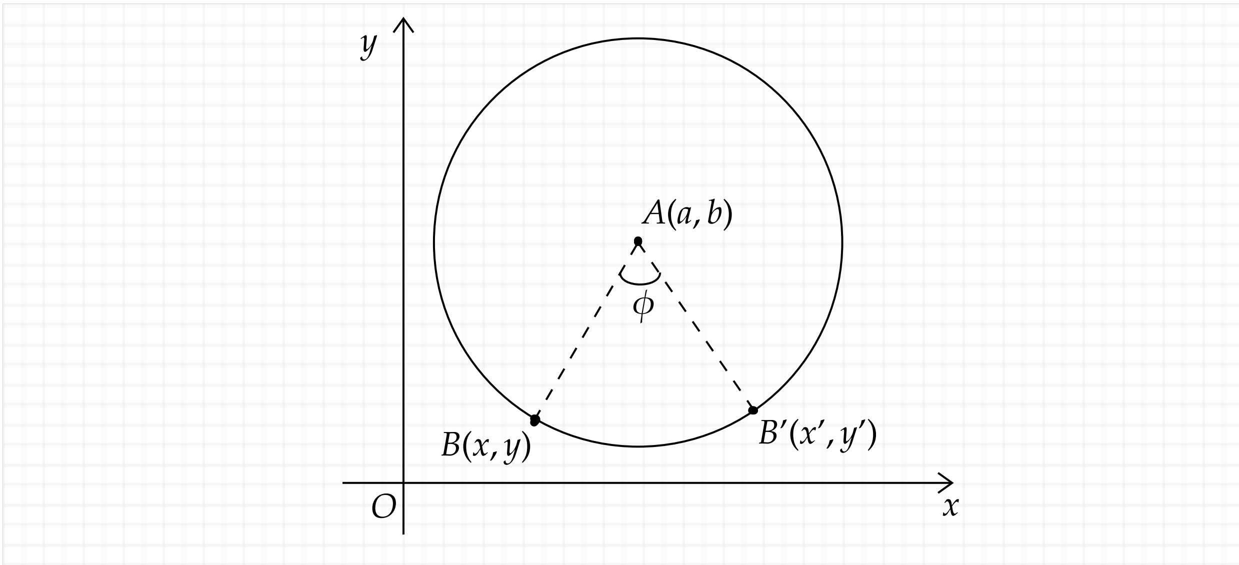
Задача 1

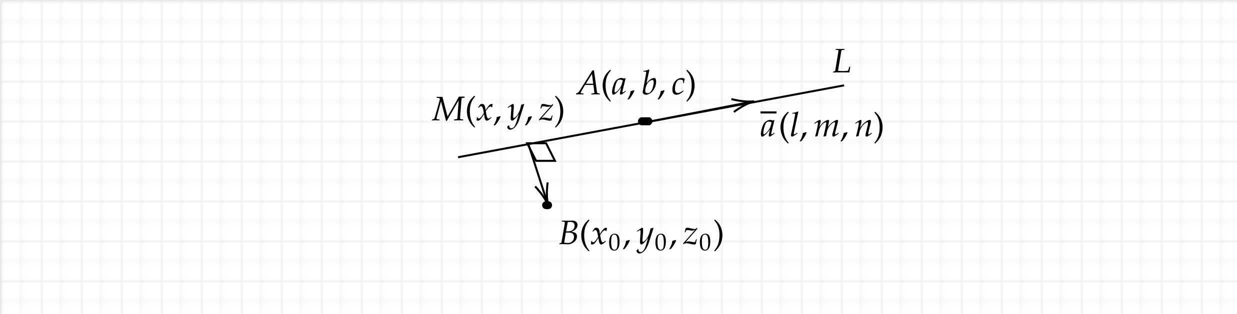


$\overline{OB'} = \overline{OA} + (\overline{OB} - \overline{OA})S_2$, где $S_2 = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $\overline{OB} - \overline{OA}$ задается преобразованием $S_1 \cdot \overline{OB}$, где $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Наконец $\overline{OB'} = S_3 S_2 S_1 \overline{OB}$, где $S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. В итоге получаем преобразование

$$S_3 S_2 S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & a \\ -\sin\phi & \cos\phi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & a(1-\cos\phi) - b\sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi & a\sin\phi + b(1-\cos\phi) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2



Найдем точку вектор перпендикуляра из точки B к прямой L. Обозначим этот вектор $\overline{p}$.
Тогда $\overline{OM} = \overline{OA} + \lambda\overline{a}$, и

$$(\overline{OB} - \overline{OM},\ \overline{a}) = 0 \Leftrightarrow ((x_0 - a - \lambda l)\overline{i} + (y_0 - b - \lambda m)\overline{j} + (z_0 - c - \lambda n)\overline{k}, l\overline{i} + m\overline{j} + n\overline{k}) =$$
$$= (x_0 - a - \lambda l)l + (y_0 - b - \lambda m)m + (z_0 - c - \lambda n)n = 0 \Leftrightarrow$$
$$\lambda = \frac{(x_0 - a)l + (y_0 - b)m + (z_0 - c)n}{\|\overline{a}\|} \Rightarrow \lambda = (\overline{AB}, \overline{a}).$$

Следовательно, $M = (a + \lambda l, b + \lambda m, c + \lambda n) = (m_x, m_y, m_z)$.
Теперь после того, как мы нашли перпендикуляр к прямой, план таков и больше никаков: перемещаем точку M в центр координат, совмещаем направляющий вектор $\overline{a}$ с осью OZ, поворачиваем перпендикуляр в плоскости OXY, возвращаем прямую обратно. Реализуем план.

1. Перенос M в начало координат: $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -m_x \\ 0 & 1 & 0 & -m_y \\ 0 & 0 & 1 & -m_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

2. Совмещение с осью OZ.
Сначала найдем проекию вектора $\overline{a}$ на плоскость OXZ:

$$proj_{OXZ}\overline{l} = proj_{OX}\overline{l} + proj_{OZ}\overline{l} = \frac{\langle \overline{l}, \overline{OX} \rangle}{\|\overline{OX}\|^2}\overline{OX} + \frac{\langle \overline{l}, \overline{OZ} \rangle}{\|\overline{OZ}\|^2}\overline{OZ}.$$

После этого, находим угол ψ между векторами $proj_{OXZ}\overline{l}$ и $\overline{OZ}$:

$$\psi = \arccos \frac{\langle proj_{OXZ}\overline{l}, \overline{OZ} \rangle}{\|\overline{OZ}\| \cdot \|proj_{OXZ}\overline{l}\|}.$$

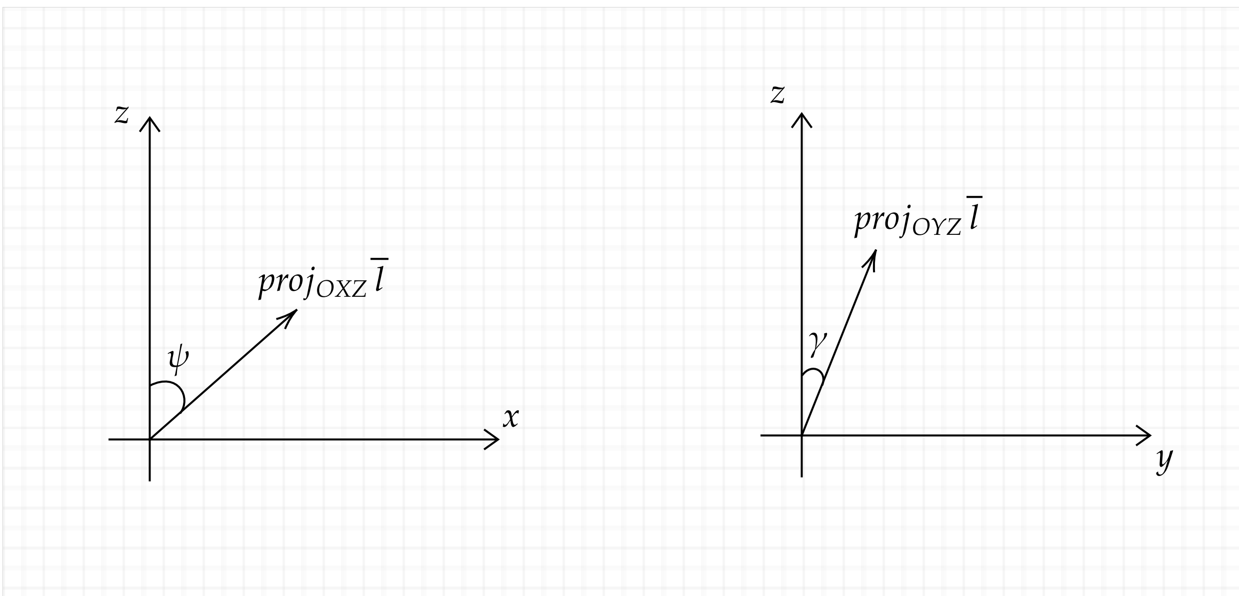
Аналогично, находим угол γ между проекцией $proj_{OYZ}\overline{l}$ вектора $\overline{l}$ на плоскость OYZ и вектором $\overline{OZ}$. Тогда преобразование будет иметь вид

$$S_2 \cdot S_3, \text{ где } S_2 = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ S_3 = \begin{pmatrix} 1 & \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Поворачиваем перпендикуляр вокруг оси OZ на нужный угол ϕ:

$$S_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Возвращаем все обратно с помощью преобразования $S_1^{-1}S_2^{-1}S_3^{-1}$.



Тогда итоговое преобразование имеет вид

$$S = S_1^{-1}S_2^{-1}S_3^{-1}S_4S_3S_2S_1.$$

Задача 3 Пусть $q_1 = \cos(\phi_1/2) + v_1\sin(\phi_1/2), \ q_2 = \cos(\phi_2/2) + v_1\sin(\phi_2/2)$. Тогда

$$q_2q_1 = (\cos(\phi_1/2) + v_1\sin(\phi_1/2)) \cdot (\cos(\phi_2/2) + v_2\sin(\phi_2/2)) =$$
$$= \cos(\phi_1/2)\cos(\phi_2/2) + v_1\sin(\phi_1/2)\cos(\phi_2/2) + v_2\sin(\phi_2/2)\cos(\phi_1/2) +$$
$$+ v_1 \circ v_2 \sin(\phi_1/2)\sin(\phi_2/2) =$$
$$\cos(\phi_1/2)\cos(\phi_2/2) - \langle v_1, v_2\rangle \cdot \sin(\phi_1/2)\sin(\phi_2/2) + v_1\sin(\phi_1/2)\cos(\phi_2/2) +$$
$$+ v_2\sin(\phi_2/2)\cos(\phi_1/2) + [v_1, v_2] \cdot \sin(\phi_1/2)\sin(\phi_2/2) = \cos(\gamma/2) + v\sin(\gamma/2).$$

Рассмотрим

$$\cos(\gamma/2) = \cos(\phi_1/2)\cos(\phi_2/2) - \langle v_1, v_2\rangle \cdot \sin(\phi_1/2)\sin(\phi_2/2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\gamma/2) = (1 - \langle v_1, v_2 \rangle \tan(\phi_1/2)\tan(\phi_2/2)) \cdot \cos(\phi_1/2)\cos(\phi_2/2).$$

Тогда

$$\begin{gathered} v\sin(\gamma/2) = v_1 \sin(\phi_1/2)\cos(\phi_2/2) + \\ +v_2 \sin(\phi_2/2)\cos(\phi_1/2) + [v_1, v_2] \cdot \sin(\phi_1/2)\sin(\phi_2/2) \Rightarrow \\ v\tan(\gamma/2) = v_1 \tan(\phi_1/2) + v_2 \tan(\phi_2/2) + [v_1, v_2]\tan(\phi_1/2)\tan(\phi_2/2). \end{gathered}$$

Следовательно, угол γ и вектор v ищутся из соотношений

$$\begin{cases} \cos(\gamma/2) = (1 - \langle v_1, v_2 \rangle \tan(\phi_1/2)\tan(\phi_2/2)) \cdot \cos(\phi_1/2)\cos(\phi_2/2) \\ v\tan(\gamma/2) = v_1 \tan(\phi_1/2) + v_2 \tan(\phi_2/2) + [v_1, v_2]\tan(\phi_1/2)\tan(\phi_2/2) \end{cases}.$$