1. Задача

В единичном круге отмечены вершины правильного n-угольника. Из одной вершины проведены отрезки ко всем остальным вершинам. Перемножив все длины этих отрезков получили n. Почему?

Нарисуем единичный круг в комплесной плоскости и выбранную нами вершину назовем A_0 и скажем, что она находится на координате $(1, 0)$. Тогда задача сводится к доказательству этого выражения:

$$\prod_{k=1}^{n-1} |1 - A_k| = n$$

Заметим, что точки правильно n-угольника, являются решением многочлена:

$$z^n - 1 = (z - A_0) \cdot ... \cdot (z - A_{n-1})$$

Разделим на $(z - A_0)$, чтобы получилось начальное выражение справа

$$\frac{z^n-1}{z-1} = \prod_{k=1}^{n-1} (z - A_k)$$

Если мы возьмем предел $z = 1$, то получим устранимую точку, предел которой равен n

$$f'(1) = n = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - A_k)$$

Взяв модуль обеих частей получим наше выражение:

$$n = \prod_{k=1}^{n-1} |z - A_k|$$