ное число $x < \xi + \delta$ и не существует бесконечного числа $x < \xi - \delta$. Но если бы тогда в Ψ не имелось бесконечного числа x таких, что

$$\xi - \delta < x < \xi + \delta,$$

то, в силу теоремы 7, в Ψ не имелось бы и бесконечного числа $x < \xi + \delta$.

Теорема 130. *Пусть $a < b$ и*

$$a \leqslant \xi_n \leqslant b$$

для всех целых $n \geqslant 1$. (Числа ξ_n – не обязательно различные.) *Тогда существует ξ такое, что для каждого $\delta > 0$ бесконечно часто* (т.е. для бесконечного числа значений n)

$$\xi - \delta < \xi_n < \xi + \delta.$$

Предварительное замечание. При этом

$$a \leqslant \xi \leqslant b.$$

Доказательство. 1) Если имеется бесконечное число различных ξ_n, то требуемым свойством обладает каждое число сгущения ξ ограниченного бесконечного множества различных ξ_n; а согласно теореме 129 по крайней мере одно такое число сгущения существует;

2) В противном случае, в силу теоремы 8, существует ξ такое, что бесконечно часто

$$\xi_n = \xi,$$

и требуемым свойством обладает это ξ.

Теорема 131. *Пусть множество чисел x ограничено сверху. Тогда существует только одно l такое, что*

$$\textit{каждое} \quad x \leqslant l,$$

а для всякого $\delta > 0$

$$\textit{некоторое} \quad x > l - \delta.$$

Доказательство. 1) Может существовать, самое большое, одно такое l. Действительно, если бы l_1 и $l_2 > l_1$

оба обладали требуемыми свойствами, то мы имели бы, что

$$\text{каждое} \quad x \leqslant l_1$$

и, следовательно, полагая

$$\delta = l_2 - l_1 (> 0),$$

$-$что

$$\text{никакое } x \text{ не} \quad > l_1 = l_2 - \delta.$$

2) Покажем теперь, что l с требуемыми свойствами существует.

Отнесем α

к первому классу, если некоторое $x \geqslant \alpha$,

ко второму классу, если все $x < \alpha$.

В первом классе содержится некоторое α, а именно, каждое x; согласно предположению, и во втором классе содержится некоторое α. Если α лежит во втром классе и $\beta > \alpha$, то

$$\text{каждое} \quad x < \alpha < \beta,$$

так что и β лежит во втором классе.

Поэтому существует l такое, что каждое $\alpha < l$ принадлежит первому классу, а каждое $\alpha > l-$ второму.

Это l обладает требуемыми свойствами. Действительно:

a) Если бы существовало

$$\text{некоторое} \quad x > l,$$

то x принадлежало бы ко второму классу, и мы должны были бы иметь

$$x < x.$$

Поэтому

$$\text{каждое} \quad x \leqslant l.$$

b) Для каждого заданного $\delta > 0$ число $l - \frac{\delta}{2}$ лежит во втором классе, и поэтому существует

$$\text{некоторое} \quad x \geqslant l - \frac{\delta}{2} > l - \delta,$$

Примеры. 1)Пусть $x-$ все числа $\leqslant c$. Тогда $l = c$