

# Projet Mathématique 2022

## ENSIIE, Évry

### 1 Organisation

#### Règles :

- **3 séances** : le **22 mars, le 5 avril et le 10 mai** ; la 1ere et 2eme séances consistent à présenter le projet et expliquer le travail attendu, lors de la 2eme et 3eme séances vous pouvez poser des questions et présenter votre travail afin de vérifier que ce que vous avez fait est bon.
- **Travail réalisé en trinôme.**
- **Rendus :**
  - **Questions 1-10 avant 23h59 le 12 avril**
  - **Questions 11-20 avant 23h59 le 17 mai**

Vous enverrez votre travail par mail à **votre encadrant** dans un **fichier .zip** dans lequel se trouve **un document .pdf expliquant ce que vous avez fait et un notebook en Python dans lequel se trouve votre code** (**les documents et sources rendus en retard ne seront pas pris en compte**).

Dans l'objet du mail écrivez : «**Projet\_Math\_2022\_[Nom1]\_[Nom2]\_[Nom3]**» où Nom1 indique le nom du premier membre du trinôme, etc.

- **Un travail copié ou effectué en collaboration entre  $N$  groupes divise les notes des groupes concernés par  $N$ .**

#### Objectif et contenu du travail :

- Le Projet Mathématique consiste en la résolution mathématique d'un problème, et à sa mise en oeuvre informatique. Ce qui est attendu est donc un rapport qui contient :
  - une présentation formalisée et claire du problème étudié et de sa solution mathématique,
  - une description algorithmique des solutions implémentées (en pseudo-code),
  - un programme mettant en oeuvre ses méthodes implémentées en Python.
- Le programme fourni sera commenté et les variables auront des noms explicites, ou tout du moins univoque.

### 2 Le sujet

L'objectif est de modéliser un marché financier et de déterminer le prix et la couverture d'options européennes. Le marché financier est composé de deux actifs que l'on peut échanger à un prix fixé par le marché :

- un actif que l'on appelle sans risque connu dès l'instant initial 0 (ce prix est une variable aléatoire déterministe),
- un actif risqué dont le prix  $S_t$  à l'instant  $t$  est une variable aléatoire (typiquement une action), dont on modélisera la loi par la suite.

Un investisseur souhaite acheter à l'instant initial une option européenne qui lui rapportera la valeur  $f(S_T)$  à l'instant  $T$ , où la fonction  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est continue (c'est une fonction qui prend en argument la valeur de l'actif risqué à l'instant  $T$ ). Afin de déterminer le prix que doit faire payer le vendeur à l'instant initial à cet investisseur nous utiliserons des outils probabilistes. Nous souhaitons également déterminer la couverture que doit mettre en place le vendeur pour couvrir ses risques. La couverture correspond à la façon dont le vendeur investit dynamiquement l'argent qu'il reçoit à l'instant initial dans le marché pour qu'à l'instant  $T$  il ait exactement  $f(S_T)$  à donner à l'acheteur du contrat sachant qu'à l'instant initial il n'a que ce qu'il reçoit de la

part de l'investisseur et qu'il ne rajoute jamais d'argent de sa poche et qu'il ne prend jamais d'argent pour lui. En résumé on cherche la proportion d'argent investie dans l'actif risqué et la proportion d'argent investie dans l'actif sans risque à n'importe quelle date pour qu'à la date  $T$ , lorsqu'on vend tout pour récupérer du cash, le vendeur ait exactement la somme  $f(S_T)$ .

Pour résoudre ce problème nous modéliserons dans un premier temps l'évolution des prix de manière discrète avec une progression par arbre en suivant le modèle de Cox-Ross-Rubinstein, puis dans un second temps nous modéliserons l'évolution des prix de manière continue avec le modèle de Black-Scholes. Dans un troisième temps nous étudierons la convergence du prix donné par le modèle de Cox-Ross-Rubinstein vers celui donné par le modèle de Black-Scholes.

### 3 Modèle de Cox-Ross-Rubinstein (binomial)

Nous supposons que les prix des deux actifs sur le marché évoluent de manière discrète et ne changent qu'aux dates  $(t_i)_{0 \leq i \leq N}$  avec  $t_0 = 0$ ,  $t_N = T$  et  $t_{i+1} - t_i = \delta$  pour  $i \in \{0, \dots, N-1\}$  où  $\delta = T/N$ .

**Le prix de l'actif sans risque** à l'instant  $t_i$  est

$$(1 + r_N)^i, \quad \text{pour } i \in \{0, \dots, N\},$$

où  $r_N$  est appelé le **taux sans risque** et est une constante positive fixée à la date 0.

**Le prix de l'actif risqué** au cours du temps est

$$\begin{aligned} S_0^{(N)} &= s > 0, \\ S_{t_i}^{(N)} &= T_i^{(N)} S_{t_{i-1}}^{(N)}, \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, N\} \end{aligned}$$

où  $T_i^{(N)}$  est une variable aléatoire qui prend soit la valeur  $1 + h_N$  soit la valeur  $1 + b_N$  avec  $b_N < r_N < h_N$ . On supposera dans la suite que les variables aléatoires  $(T_i^{(N)})_{1 \leq i \leq N}$  sont indépendantes et identiquement distribuées.<sup>1</sup>

**Définition 1.** On définit le **prix actualisé de l'actif risqué** par  $\tilde{S}_{t_i}^{(N)} = S_{t_i}^{(N)} / (1 + r_N)^i$  pour  $i \in \{0, \dots, N\}$ .

**Définition 2.** On dit qu'un processus  $(X_k)_{0 \leq k \leq N}$  est une **martingale** sous une probabilité  $\mathbb{P}$  si  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X_k|] < \infty$  pour tout  $k$  et

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_{k+1} | X_k, \dots, X_0] = X_k.$$

**Définition 3.** On définit la **probabilité risque-neutre**  $\mathbb{Q}$  comme la probabilité sous laquelle le **prix actualisé de l'actif risqué** est une martingale.

Nous recherchons une probabilité  $\mathbb{Q}$  telle que sous cette probabilité  $\mathbb{Q}$  on a  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[T_1^{(N)}] = 1 + r_N$ . Cette probabilité  $\mathbb{Q}$  est appelée la **probabilité risque-neutre**. On note  $q_N = \mathbb{Q}(T_1^{(N)} = 1 + h_N)$ .

**1. (0.5/20)** Trouver  $q_N$ .

Une fois que l'on connaît la probabilité risque-neutre  $\mathbb{Q}$  on peut déterminer le prix  $\text{Prix}_{\text{Bin}}^{(N)}$  de l'option qui paye  $f(S_{t_N}^{(N)})$  :

$$\text{Prix}_{\text{Bin}}^{(N)} = \frac{1}{(1 + r_N)^N} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f(S_{t_N}^{(N)})].$$

**2. (0.5/20)** Exprimer  $\text{Prix}_{\text{Bin}}^{(N)}$  à l'aide de  $r_N$ ,  $q_N$ ,  $s$ ,  $h_N$ ,  $b_N$  et  $f(\cdot)$  sous la forme d'une somme (utiliser les coefficients binomiaux).

#### 3.1 Premier pricer

**3. (2/20)** Implémenter une fonction `pricer_1` qui prend en argument  $N$ ,  $r_N$ ,  $h_N$ ,  $b_N$ ,  $s$  et la fonction  $f$ , et qui retourne le prix  $\text{Prix}_{\text{Bin}}^{(N)}$  obtenu à la question 2.

**4. (0.25/20)** Tester votre pricer en utilisant la fonction  $f(x) = \max(x - 110, 0)$  avec  $s = 100$ ,  $h_N = 0.05$ ,  $b_N = -0.05$ ,  $r_N = 0.02$  et  $N = 20$ .

---

1. Dans ce paragraphe nous utilisons la notation  $\cdot^{(N)}$  pour indiquer que le pas de discrétisation est en fonction de  $N$ .

### 3.2 Deuxième pricer

Une autre méthode pour déterminer le prix  $\text{Prix}_{\text{Bin}}^{(N)}$  est de raisonner par itération et de déterminer le prix à chaque instant  $t_k$  avec  $k \in \{0, \dots, N\}$  mais en commençant par le prix en  $t_N$ . **On définit  $v_k(x)$  comme le prix de l'option à la date  $t_k$  si le prix de l'actif risqué  $S_{t_k}^{(N)}$  est égal à  $x$ .**

**Etape 1 :** à la date  $t_N$  on sait que le prix à payer pour recevoir la somme  $f(S_{t_N}^{(N)})$  maintenant est  $f(S_{t_N}^{(N)})$ , donc on définit la fonction  $v_N$  par

$$v_N(S_{t_N}^{(N)}) = f(S_{t_N}^{(N)}) .$$

**Etape k :** à la date  $t_k$ ,  $k \in \{0, \dots, N-1\}$ , le prix est donné par la fonction  $v_k$  qui est définie par récurrence

$$v_k(S_{t_k}^{(N)}) = \frac{1}{1+r_N} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[v_{k+1}(S_{t_{k+1}}^{(N)}) | S_{t_k}^{(N)}] .$$

Le prix à la date initiale est alors  $\text{Prix}_{\text{Bin}}^{(N)} = v_0(S_0^{(N)})$ .

**5. (3/20)** Implémenter cet algorithme et écrire une fonction `pricer_2` qui prend en argument  $N$ ,  $r_N$ ,  $h_N$ ,  $b_N$ ,  $s$  et la fonction  $f$  et qui retourne le prix  $\text{Prix}_{\text{Bin}}^{(N)}$ .

**6. (0.25/20)** Tester votre pricer avec l'exemple suivant :  $f(x) = \max(x - 100, 0)$  avec  $s = 100$ ,  $r_N = 0.02$ ,  $h_N = 0.05$ ,  $b_N = -0.05$ ,  $N = 3$ . Dessiner l'arbre avec les valeurs de  $v_k(\cdot)$  pour chaque nœud de l'arbre.

### 3.3 Comparaison

**7. (0.25/20)** Comparer les deux pricer en utilisant les entrées suivantes :  $s = 100$ ,  $r_N = 0.01$ ,  $h_N = 0.05$ ,  $b_N = -0.05$ ,  $N =$  un nombre aléatoire entre 5 et 15 qui sera donné par exemple par la fonction de Python `numpy.random.randint`,  $f(x) = \max(x - 110, 0)$ .

### 3.4 La couverture

L'avantage de la deuxième méthode est quelle nous permet de déterminer en même temps la couverture que l'on doit mettre en place. La couverture est la manière d'investir notre argent (en tant que vendeur de l'option) à chaque instant  $t_k$ ,  $k \in \{0, \dots, N-1\}$ , afin d'avoir à la date  $T$  exactement  $f(S_T^{(N)})$ . Notons  $\alpha_k(x)$  (resp.  $\beta_k(x)$ ) le nombre d'actifs risqués (resp. le nombre d'actif sans risque) que l'on achète à l'instant  $t_k$  si le prix de l'actif risqué est  $x$  en  $t_k$ . Ces actifs sont gardés pendant une période  $\delta$  et revendu après donc à la date  $t_{k+1}$  on a comme argent

$$\alpha_k(S_{t_k}^{(N)})S_{t_{k+1}}^{(N)} + \beta_k(S_{t_k}^{(N)})(1+r_N)^{k+1} .$$

En particulier à la date terminale notre portefeuille doit vérifier

$$\alpha_{N-1}(S_{t_{N-1}}^{(N)})S_{t_N}^{(N)} + \beta_{N-1}(S_{t_{N-1}}^{(N)})(1+r_N)^N = f(S_{t_N}^{(N)}) .$$

Or cette équation doit être vérifiée pour le cas où le prix à la date  $T$  est  $S_{t_N}^{(N)} = (1+h_N)S_{t_{N-1}}^{(N)}$  et aussi pour le cas où le prix à la date  $T$  est  $S_{t_N}^{(N)} = (1+b_N)S_{t_{N-1}}^{(N)}$ , puisque cette équation doit être satisfaite pour tous les événements, donc on a un système d'équations.

**8. (0.5/20)** Donner le système d'équations et résoudre ce système.

Pour les autres dates  $t_k$ , le vendeur doit toujours avoir à la date  $t_k$  la valeur  $v_k(S_{t_k}^{(N)})$  en sa possession. On doit donc avoir l'équation

$$\alpha_{k-1}(S_{t_{k-1}}^{(N)})S_{t_k}^{(N)} + \beta_{k-1}(S_{t_{k-1}}^{(N)})(1+r_N)^k = v_k(S_{t_k}^{(N)}) .$$

**9. (0.5/20)** En utilisant les mêmes arguments que pour le cas précédent trouver le système d'équations et résoudre ce système.

**10. (1/20)** On considère que  $N = 2$ ,  $s = 100$ ,  $r_N = 0.03$ ,  $h_N = 0.05$ ,  $b_N = -0.05$ ,  $f(x) = \max(x - 100, 0)$ . Donner la couverture à la date 0 et à la date 1.

## 4 Modèle de Black-Scholes

### 4.1 Le modèle

En mathématiques financières on modélise généralement le prix des actifs de manière continue. Le prix de l'actif sans risque à l'instant  $t$  est  $\exp(rt)$ , pour  $t \geq 0$ . Le prix  $S$  de l'actif risqué vérifie l'équation différentielle

stochastique suivante

$$dS_t = S_t(r dt + \sigma dB_t)$$

avec  $S_0 = s$ ,  $\sigma$  et  $r$  deux constantes strictement positives.  $B$  est un processus stochastique appelé mouvement Brownien, c'est à dire une suite de variables aléatoires réelles  $(B_t)_{t \geq 0}$  indexées par le temps (les variables  $B_t$  dépendent les unes des autres). Le mouvement Brownien peut être caractérisé mathématiquement de plusieurs manières différentes, dont la suivante (mouvement Brownien standard) :

1.  $B_0 = 0$ .
2. Les accroissements sont des variables aléatoires (v.a.) gaussiennes, i.e. pour  $0 \leq s \leq t$ ,  $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ .
3. Les accroissements sont indépendants, i.e. si  $0 \leq s' \leq t' \leq s \leq t$  alors la v.a.  $B_t - B_s$  est indépendante de la v.a.  $B_{t'} - B_{s'}$ .

Pour trouver la solution à cette équation différentielle stochastique on utilise la formule d'Itô : soit  $g$  une fonction  $C^2$  alors la différentielle du processus  $g(S_t)$  satisfait

$$dg(S_t) = g'(S_t) dS_t + \frac{|\sigma S_t|^2}{2} g''(S_t) dt .$$

**11. (0.5/20)** Appliquer la formule d'Itô à  $\log(S_t)$  (on suppose ici qu'on sait déjà que  $S_t > 0$  pour tout  $t$ ) afin de déterminer une formule de  $S_t$  en fonction de  $s$ ,  $r$ ,  $\sigma$ ,  $t$  et  $B_t$ .

## 4.2 Le pricer par la méthode de Monte-Carlo

La formule du prix d'une option qui paye  $f(S_T)$  est donnée par

$$P = \mathbb{E}[e^{-rT} f(S_T)] .$$

Soit  $(\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . On définit

$$\text{Prix}_{\text{MC}}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-rT} f\left(s \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\xi_i\right)\right) .$$

- 12. (1.5/20)** Ecrire une fonction `pricer_MC` qui prend en argument  $n$ ,  $s$ ,  $r$ ,  $\sigma$ ,  $T$  et  $f$ , et qui renvoie  $\text{Prix}_{\text{MC}}^{(n)}$ .
- 13. (0.5/20)** Tracer le graphique pour le prix avec  $r = 0.01$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $s = 100$ ,  $T = 1$ ,  $f(x) = \max(x - 100, 0)$ ,  $n = 10^5 k$  pour  $1 \leq k \leq 10$ .
- 14. (0.5/20)** Montrer mathématiquement que la suite  $(\text{Prix}_{\text{MC}}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge presque sûrement vers  $P$ .

## 4.3 Le pricer par formule fermée

Nous pouvons montrer que le prix de l'option qui paye  $\max(K - S_T, 0)$  en  $T$  est donné par la formule de Black-Scholes

$$\text{Prix}_{\text{BS}} = -sF(-d_1) + Ke^{-rT}F(-d_2)$$

avec  $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[ \log\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T \right]$ ,  $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$ , et  $F(x) = \mathbb{P}(Y \leq x)$  où  $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

- 15. (0.5/20)** Ecrire une fonction `put_BS` qui prend en argument  $s$ ,  $r$ ,  $\sigma$ ,  $T$ ,  $K$  et qui renvoie le prix de cette option.
- 16. (0.25/20)** Appliquer votre fonction à l'exemple :  $r = 0.01$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $s = 100$ ,  $T = 1$ ,  $K = 90$ .
- 17. (0.5/20)** Tracer sur un graphique, dont l'abscisse est  $n$  et l'ordonnée est le prix, le prix donné par la fonction `pricer_MC` pour  $r = 0.01$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $s = 100$ ,  $T = 1$ ,  $f(x) = \max(90 - x, 0)$ , et  $n = 10^5 k$  avec  $1 \leq k \leq 10$ . Tracer sur ce graphique la droite qui correspond au prix donné par la fonction `put_BS`. Que remarquez vous.
- 18. (0.5/20)** Tracer sur un graphique en 3 dimensions le prix de l'option en utilisant la fonction `put_BS` lorsque  $r = 0.01$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $K = 100$ ,  $s = 20k$  avec  $1 \leq k \leq 10$ , et  $T \in \{\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$ . Que remarquez vous?

## 5 Convergence des prix

Dans cette section nous allons nous intéresser à la convergence des prix donnés dans le cas du modèle de Cox-Ross-Rubinstein vers les prix donnés dans le cas du modèle de Black-Scholes. Pour un  $N$  fixé de discrétisation on pose

$$r_N = \frac{rT}{N} , \quad h_N = (1 + r_N) \exp\left(\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}\right) - 1 , \quad b_N = (1 + r_N) \exp\left(-\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}\right) - 1 .$$

**19. (0.5/20)** Tracer sur un même graphique le prix en utilisant la fonction `pricer_2` d'une option qui paye  $\max(100 - S_T, 0)$ ,  $s = 100$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $r = 0.03$ ,  $T = 1$ , avec  $N = 10k$  pour  $1 \leq k \leq 100$ . Tracer sur le même graphe la droite qui a pour ordonnée  $p$  en utilisant la fonction `put_BS` pour le calcul de  $p$ . Que remarquez vous ?

## 6 EDP de Black-Scholes

Nous reprenons exactement les notations de la partie 4. Nous pouvons montrer qu'une approximation du prix du put est donnée par une fonction  $p(t, x)$  qui dépend du *temps jusqu'à maturité*  $t$  et du *log prix de l'actif risqué*  $x = \log(S)$  et vérifie l'équation aux dérivées partielles (EDP) suivantes définie sur  $(0, T] \times (x_{\min}, x_{\max})$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t, x) - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t, x) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial p}{\partial x}(t, x) + rp(t, x) = 0, \quad (t, x) \in (0, T] \times (x_{\min}, x_{\max}).$$

La condition initiale est le payoff, puisque la valeur du prix quand le temps jusqu'à maturité est 0 correspond au payoff. Pour résoudre cette EDP, on donne la condition initiale et sur les bords  $x_{\min}$  et  $x_{\max}$ . Les conditions sont alors :

$$\begin{aligned} p(0, x) &= \max(K - e^x, 0) \quad \forall x \in [x_{\min}, x_{\max}], \\ p(t, x_{\min}) &= Ke^{-rt} - e^{x_{\min}} \quad \forall t \in [0, T], \\ p(t, x_{\max}) &= 0 \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Nous utiliserons, pour approcher numériquement cette EDP, les différences finies, qui consistent à approcher les dérivées partielles par leur quotient différentiel, sur une grille de points.

### 6.1 Discrétisation de l'espace-temps

- Nous allons fixer le nombre  $M$  de points en temps à calculer. On pose  $\Delta t = \frac{T}{M}$  puis  $t_m = m\Delta t \quad \forall m \in \{0, \dots, M\}$ .
- Nous allons fixer le nombre  $N$  de points en espace à calculer. On pose  $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{N}$  puis  $x_j = x_{\min} + jh \quad \forall j \in \{0, \dots, N\}$ .

### 6.2 Discrétisation des dérivées partielles

Pour tout  $(m, j) \in \{0, \dots, M-1\} \times \{1, \dots, N-1\}$ , on peut par exemple approcher les dérivées partielles intervenant dans l'EDP ainsi par exemple dans un **schéma explicite** :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t}(t_m, x_j) & \approx \frac{1}{\Delta t}(p(t_{m+1}, x_j) - p(t_m, x_j)) \\ \frac{\partial p}{\partial x}(t_m, x_j) & \approx \frac{1}{2h}(p(t_m, x_{j+1}) - p(t_m, x_{j-1})) \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t_m, x_j) & \approx \frac{1}{h^2}(p(t_m, x_{j+1}) - 2p(t_m, x_j) + p(t_m, x_{j-1})). \end{cases}$$

Mais il existe aussi un schéma implicite et plus généralement un  $\theta$ -schéma (Crank-Nicholson pour  $\theta = \frac{1}{2}$ ).

Posons  $\mathbf{P}_m \in \mathbb{R}^{N-1}$ ,  $m = 0, \dots, M-1$ , le vecteur colonne de composantes  $(\mathbf{p}_{m,1}, \dots, \mathbf{p}_{m,N-1})$ . Si les approximations deviennent des égalités et si  $p(t_m, x_j)$  est remplacé par  $\mathbf{p}_{m,j}$ , alors, nous obtenons une équation vectorielle faisant intervenir  $\mathbf{P}_m$ ,  $\mathbf{P}_{m+1}$  et une (ou des) matrice(s) en fonction de la méthode utilisée.

### 6.3 Travail demandé

Cette partie de projet consistera donc à approcher numériquement cette EDP avec les 3 méthodes suivantes :

- différences finies explicites (attention aux conditions pour la stabilité du schéma),
- différences finies implicites,
- méthode de Crank-Nicholson.

Il sera demandé d'optimiser les calculs en utilisant les méthodes adéquates vues en MAN.

**20. (6/20)** Tracer dans une même fenêtre les trois graphiques de la courbe définie par  $\mathbf{P}_M$ , et un quatrième graphique représentant les erreurs relatives de chacun des résultats obtenus par les 3 méthodes ci-dessus. On utilisera les données suivantes :  $K = 0.9$ ,  $r = 0.015$ ,  $\sigma = 0.21$ ,  $T = 1$ ,  $x_{\min} = \log(0.4)$ ,  $x_{\max} = \log(2)$  et  $N = 100$ . La valeur de  $M$  est laissée à votre appréciation.