AI VIET NAM – AI COURSE 2024

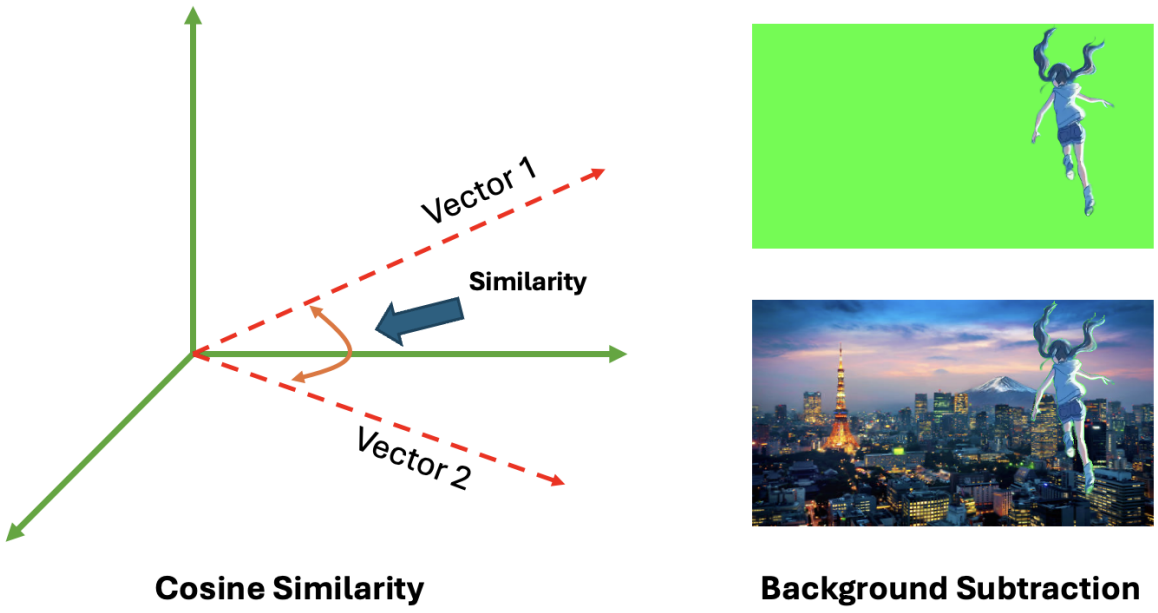
Module 02 - Vector Exercise

Dinh-Thang Duong, Quang-Vinh Dinh

Ngày 12 tháng 7 năm 2024

I. Giới thiệu

Trong bài tập này, các bạn sẽ được ôn tập thực hành triển khai các phép toán giữa vector với vector, vector với ma trận, và ma trận với ma trận sử dụng thư viện numpy. Cách thức tìm ma trận nghịch đảo, eigenvalues và eigenvectors. Ngoài ra, các bạn cũng được tìm hiểu làm thể nào để đo lường sự giống nhau hoặc khác nhau giữa 2 vector, cũng như giữa 2 ma trận. Cuối cùng, các bạn sẽ tìm hiểu một ứng dụng trong thị giác máy tính, background subtraction, vào bài toán thay đổi hình nền.



Hình 1: Minh họa một phần nội dung bài tập.

II. Bài tập

1. **Các phép toán trên vector và ma trận.**

   (a) **Độ dài của vector:**

   ### 1.1. Length of a vector

   - Vector: $\mathbf{v} = [v_1, v_2, ...v_n]^T$
   - Length of a vector: $\| \mathbf{v} \| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2}$

   Hãy hoàn thiện hàm **computeVectorLength()** để tính độ dài của vector sử dụng thư viện numpy:

```python
import numpy as np
def computeVectorLength(vector):
    # *********** Your code here ***********

    return len_of_vector
```

   (b) **Phép tích vô hướng:**

   ### 1.2. Dot product

   - Vector: $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ ... \\ v_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ ... \\ u_n \end{bmatrix}$
   - Dot Product: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = v_1 * u_1 + v_2 * u_2 + ... + v_n * u_n$

   Hãy hoàn thiện hàm **computeDotProduct()** sử dụng thư viện numpy:

```python
def computeDotProduct(vector1, vector2):
    # *********** Your code here ***********

    return result
```

   (c) **Nhân vector với ma trận:**

1.3. Multiplying a vector by a matrix

- Matrix: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} \in R^{m*n}$
- Vector: $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ ... \\ v_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} \in R^{n}$
- $\mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_{11} * v_1 + ... + a_{1n} * v_n \\ ... \\ a_{m1} * v_1 + ... + a_{mn} * v_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} \in R^{n}$

Hãy hoàn thiện hàm **matrix_multi_vector()** sử dụng thư viện numpy:

```
def matrix_multi_vector(matrix, vector):
    # *********** Your code here ***********

    return result
```

(d) **Nhân ma trận với ma trận:**

1.4. Multiplying a matrix by a matrix

- Matrix A: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} \in R^{m*n}$
- Matrix B: $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & ... & b_{1k} \\ ... & ... & ... \\ b_{n1} & ... & b_{nk} \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} \in R^{n*k}$
- $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} * b_{11} + ... + a_{1n} * b_{n1} & ... & a_{11} * b_{1k} + a_{1n} * b_{nk} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} * b_{11} + ... + a_{mn} * b_{n1} & ... & a_{m1} * b_{1k} + a_{mn} * b_{nk} \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} \in R^{m*k}$

Hãy hoàn thiện hàm **matrix_multi_matrix()** sử dụng thư viện numpy:

```
import numpy as np
def matrix_multi_matrix(vector):
    # *********** Your code here ***********

    return len_of_vector
```

(e) **Ma trận nghịch đảo:**

1.5 Matrix inverse

- Matrix A: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} \in R^{2*2}$
- Determinant of $\mathbf{A} \in R^{2*2}$: $det(\mathbf{A}) = ad - bc$
- if $det(\mathbf{A}) \neq 0$ $\mathbf{A}$ is invertible
- Inverse Matrix: $\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Cho trước $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$ Tìm $\mathbf{A^{-1}}$

Dựa vào công thức ở trên, hãy hoàn thiện hàm **inverse_matrix()** sử dụng thư viện numpy:

```
import numpy as np
def inverse_matrix(matrix):
    # *********** Your code here ***********

    return result
```

2. **Eigenvector và eigenvalues:**

2.1 Eigenvector and eigenvalue

- $\mathbf{A} \in R^{n*n}, \mathbf{I}$(identity matrix) $\in R^{n*n}, \mathbf{v} \in R^n$
- Eigenvalue (λ): $det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$
- Eigenvector ($\mathbf{v}$): $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v} \iff (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$
- Normalize vector: $\frac{\mathbf{v}}{\| \mathbf{v} \|}, v_i = \frac{v_i}{\sqrt{\Sigma_1^n v_i^2}}$

Cho trước $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$

Tìm Eigenvector ($\mathbf{v}$) đã được normalize và eigenvalue λ của $\mathbf{A}$ (Trình bày chi tiết theo lược đồ 2.1 viết bằng markdown trên google colab).

Dựa vào công thức ở trên, hãy hoàn thiện function **compute_eigenvalues_eigenvectors** sử dụng thư viện numpy:

```
def compute_eigenvalues_eigenvectors(matrix):
    # *********** Your code here ***********

    return eigenvalues,eigenvectors
```

3. **Cosine Similarity:**

3.1. Cosine Similarity

- Data (vector $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$): $\mathbf{x} = \{x_1, ..., x_N\}$ $\mathbf{y} = \{y_1, ..., y_N\}$
- Cosine Similarity: $cs(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \dfrac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\| \mathbf{x} \| \| \mathbf{y} \|} = \dfrac{\Sigma_1^n x_i y_i}{\sqrt{\Sigma_1^n x_i^2} \sqrt{\Sigma_1^n y_i^2}}$

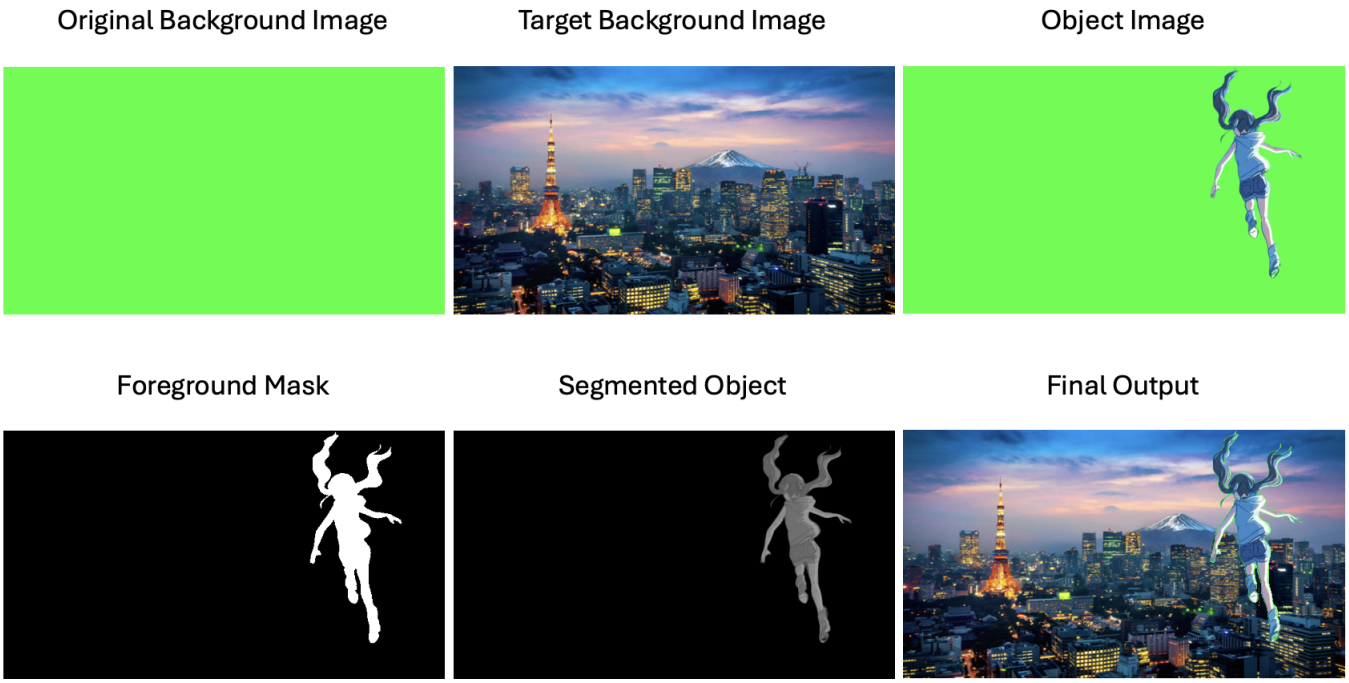
Cho trước $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ Tìm Cosine similarity cs(**x**,**y**) (Trình bày chi tiết theo lược đồ 3.1 viết bằng markdown trên google colab).

Dựa vào trên quả tính tay ở trên, hãy hoàn thiện function **compute_cosine** sử dụng thư viện numpy:

```
def compute_cosine(v1, v2):
    # *********** Your code here ***********

    return cos_sim
```

4. **Background subtraction (tách nền):**



Hình 2: Kết quả trích xuất foreground (object mong muốn) và dán vào background mới

Viết chương trình sử dụng kỹ thuật background substraction để trích xuất forgeground (object mong muốn) và dán vào background mới. Input/Output của chương trình như sau:

- **Input:** Gồm 3 ảnh là Original Background Image (Greenscreen), Target Background Image và Object Image.
- **Output:** Ảnh mới khi trích xuất object từ Object Image và dán vào Target Background Image.

Gợi ý:

(a) Đưa cả 3 ảnh về cùng kích thước.

(b) Dùng kỹ thuật background subtraction với Object Image và Original Background Image để lấy mask của object.

(c) Mask object là một ảnh binary (Foreground Mask), sẽ gồm 2 giá trị: 0 là background, 1 các vùng pixel chứa object.

(d) Tạo ra ảnh output bằng cách: tại vị trí pixel nào = 1 thì lấy giá trị của Object Image và vị trí nào = 0 thì lấy giá trị của Target Background Image.

Hướng dẫn: Để hoàn thành bài tập trên, bạn cần hoàn thiện các hàm sau đây (các bạn chú ý chỉnh lại đường dẫn đến ảnh cho phù hợp):

(a) **Resize các ảnh đầu vào về cùng kích thước:**

```
import numpy as np
from google.colab.patches import cv2_imshow
import cv2

bg1_image = cv2.imread('GreenBackground.png', 1)
bg1_image = cv2.resize(bg1_image, (678, 381))

ob_image = cv2.imread('Object.png', 1)
ob_image = cv2.resize(ob_image, (678, 381))

bg2_image = cv2.imread('NewBackground.jpg', 1)
bg2_image = cv2.resize(bg2_image, (678, 381))
```

(b) **Xây dựng hàm computeDifference():**

```
def computeDifference(bg_img, input_img):
    # *********** Your code here ***********

    return difference_single_channel
```

Các bạn có thể sử dụng đoạn code bên dưới để hiển thị kết quả (hình 2) của hàm **computeDifference()** như sau:

```
difference_single_channel = computeDifference(bg1_image, ob_image)
cv2_imshow(difference_single_channel)
```

(c) **Xây dựng hàm computeBinaryMask():**

```

def computeBinaryMask(difference_single_channel):
    # *********** Your code here ***********

    return difference_binary
```

Các bạn có thể sử dụng đoạn code bên dưới để hiển thị kết quả (hình 3) của hàm **computeBinaryMask()** như sau:

```
difference_single_channel = computeDifference(bg1_image,ob_image)

binary_mask = computeBinaryMask(difference_single_channel)
cv2_imshow(binary_mask)
```

(d) **Xây dựng hàm replaceBackGround():**

```
def replaceBackGround(bg1_image, bg2_image, ob_image):
    difference_single_channel = computeDifference(bg1_image,ob_image)

    binary_mask = computeBinaryMask(difference_single_channel)

    output = np.where(binary_mask==255, ob_image, bg2_image)

    return output
```

III. Câu hỏi trắc nghiệm

1. Kết quả của đoạn code sau đây là gì:

```
vector = np.array([-2, 4, 9, 21])
result = computeVectorLength([vector])
print(round(result,2))
```

   (a) 43.28

   (b) 33.28

   (c) 13.28

   (d) 23.28

2. Kết quả của đoạn code sau đây là gì:

```
v1 = np.array([0, 1, -1, 2])
v2 = np.array([2, 5, 1, 0])
result = computeDotProduct(v1, v2)
print(round(result,2))
```

   (a) 3

   (b) 4

   (c) 5

   (d) 6

3. Kết quả của đoạn code sau đây là gì:

```
x = np.array([[1, 2],
              [3, 4]])
k = np.array([1, 2])
print('result  \n', x.dot(k))
```

   (a) `[5 11]`

   (b) `[6 11]`

   (c) `[7 11]`

   (d) `[5 12]`

4. Kết quả của đoạn code sau đây là gì:

```
x = np.array([[-1, 2],
              [3, -4]])
k = np.array([1, 2])
print('result \n', x@k)
```

   (a) `[5 -5]`

   (b) `[3 -5]`

   (c) `[4 -5]`

   (d) `[7 -5]`

5. Kết quả của đoạn code sau đây là gì:

```
m = np.array([[-1, 1, 1], [0, -4, 9]])
v = np.array([0, 2, 1])
result = matrix_multi_vector(m, v)
print(result)
```

(a) `[3 1]`

(b) `[1 3]`

(c) `[2 3]`

(d) `[3 2]`

6. Kết quả của đoạn code sau đây là gì:

```
m1 = np.array([[0, 1, 2], [2, -3, 1]])
m2 = np.array([[1, -3],[6, 1], [0, -1]])
result = matrix_multi_matrix(m1, m2)
print(result)
```

(a) `[[9 -1], [-16 -10]]`

(b) `[[8 -1], [-16 -10]]`

(c) `[[6 -1], [-16 -10]]`

(d) `[[7 -1], [-16 -10]]`

7. Kết quả của đoạn code sau đây là gì:

```
m1 = np.eye(3)
m2 = np.array([[1, 1, 1],[2, 2, 2], [3, 3, 3]])
result = m1@m2
print(result)
```

(a) `[[1. 1. 1.], [2. 2. 2.], [3. 3. 3.]]`

(b) `[[1. 1. 1.], [1. 1. 2.], [3. 3. 3.]]`

(c) `[[1. 1. 1.], [2. 2. 2.], [1. 1. 3.]]`

(d) `[[1. 1. 1.], [2. 2. 2.], [2. 3. 2.]]`

8. Kết quả của đoạn code sau đây là gì:

```
m1 = np.eye(2)
m1 = np.reshape(m1,(-1,4))[0]
m2 = np.array([[1, 1, 1, 1],[2, 2, 2, 2], [3, 3, 3, 3], [4, 4, 4, 4]])
result = m1@m2
print(result)
```

(a) `[6. 6. 6. 6.]`

(b) `[4. 4. 4. 4.]`

(c) `[3. 3. 3. 3.]`

(d) `[5. 5. 5. 5.]`

9. Kết quả của đoạn code sau đây là gì:

```
m1 = np.array([[1, 2], [3, 4]])
m1 = np.reshape(m1,(-1,4), "F")[0]
m2 = np.array([[1, 1, 1, 1],[2, 2, 2, 2], [3, 3, 3, 3], [4, 4, 4, 4]])
result = m1@m2
print(result)
```

(a) `[30 30 30 30]`

(b) `[29 29 29 29]`

(c) `[31 31 31 31]`

(d) `[28 28 28 28]`

10. Kết quả của đoạn code sau đây là gì:

```
m1 = np.array([[-2, 6], [8, -4]])
result = inverse_matrix(m1)
print(result)
```

(a) `[[0.1 0.15], [0.2 0.05]]`

(b) `[[1.1 0.15], [0.2 0.05]]`

(c) `[[0.1 0.15], [1.2 0.05]]`

(d) `[[2.1 0.15], [0.2 0.05]]`

11. Kết quả của đoạn code sau đây là gì:

```
matrix = np.array([[0.9, 0.2], [0.1, 0.8]])
eigenvalues, eigenvectors = compute_eigenvalues_eigenvectors(matrix)
print(eigenvectors)
```

(a) `[[0.89442719 -0.70710678], [0.4472136 0.70710678]]`

(b) `[[1.89442719 -0.70710678], [0.4472136 0.70710678]]`

(c) `[[2.89442719 -0.70710678], [0.4472136 0.70710678]]`

(d) `[[3.89442719 -0.70710678], [0.4472136 0.70710678]]`

12. Kết quả của đoạn code sau đây là gì:

```
x = np.array([1, 2, 3, 4])
y = np.array([1, 0, 3, 0])
result = compute_cosine(x,y)
print(round(result, 3))
```

(a) 1.577

(b) 2.577

(c) 0.577

(d) 3.577