HÀM GIẢI TÍCH

TS. Lê Xuân Đại

**Trường Đại học Bách Khoa TP HCM**  
**Khoa Khoa học ứng dụng, bộ môn Toán ứng dụng**



TP. HCM — 2012.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | | |  | | --- | | HÀM GIẢI TÍCH | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 1 / 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Khái niệm hàm biến phức | |  | | --- | | Định nghĩa | |

Định nghĩa

Cho *E ⊂* (*Z*)*.* Qui tắc ứng với mỗi điểm *z ∈ E*luôn xác định được một hay nhiều số phức xácđịnh *w* được gọi là hàm số biến phức *z* xác địnhtrên tập hợp *E.*

Hàm biến phức là ánh xạ *f* : *E ⊂* C *→* C*.*Nếu như ứng với 1 giá trị *z* xác định được 1 giá trị*w* thì hàm số được gọi là hàm số phức đơn trị, cònnếu xác định được nhiều giá trị *w* thì hàm số đượcgọi là hàm biến phức đa trị.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | | |  | | --- | | HÀM GIẢI TÍCH | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 2 / 1 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Khái niệm hàm biến phức | | |  | | --- | | Ví dụ | | | |
| **Ví dụ.** 1. Hàm số *w* = *zn*(*n ∈* N) là hàm biến phức đơntrị. 2. Hàm số *w* =*n√z*(*n ∈* N*, n >* 1) là hàm biếnphức *n−*trị. Ứng với mỗi số *z ̸*= 0 luôn có *n* giá trị*w* = *n√z.* 3. Hàm số *w* = *arg z* là hàm vô số trị. Cho *z* = *x* + *iy ∈ E* và *w* = *Arg z* + *n*2*π ∈* R*.* | | | | |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | | |  | | --- | | HÀM GIẢI TÍCH | | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 3 / 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Khái niệm hàm biến phức | |  | | --- | | Ví dụ | |

Định nghĩa

Ứng với mỗi điểm (*x, y*) *∈ E* luôn có 2 số *u, v.*Như vậy trên tập hợp *E* luôn xác định được 2 hàmthực *u* = *u*(*x, y*) và *v* = *v*(*x, y*) biến *x, y* sao cho*w* = *f* (*z*) = *u*(*x, y*) + *iv*(*x, y*)*.* Hàm *u* = *u*(*x, y*)được gọi là phần thực, còn hàm *v* = *v*(*x, y*) đượcgọi phần ảo của hàm biến phức.

Lúc này ta viết  
*Ref* (*z*) = *u*(*x, y*)*, Imf* (*z*) = *v*(*x, y*)*.*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | | |  | | --- | | HÀM GIẢI TÍCH | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 4 / 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Khái niệm hàm biến phức | |  | | --- | | Ví dụ | |

**Ví dụ.** Hàm số *w* = *z*2*.* Cho  
*z* = *x* + *iy, w* = *u* + *iv.* Khi đó

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *u* + *iv* = (*x* + *iy*)2 = *x*2 + 2*ixy − y* 2*.*Từ đó suy ra *u* = *x*2 *− y* 2*, v* = 2*xy* hay *Rez*2 = *x*2 *− y* 2*, Imz*2 = 2*xy.* | | |  |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | | |  | | --- | | HÀM GIẢI TÍCH | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 5 / 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Đạo hàm của hàm biến phức | |  | | --- | | Khái niệm đạo hàm của hàm biến phức | |

Định nghĩa

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Cho hàm số *w* = *f* (*z*) xác định trên tập hợp*E ⊂* (*Z*) và cho *z*0 *~~∈~~ E* là điểm giới hạn của tậphợp *E.* Lấy một điể~~m bất k~~ỳ *z ∈ E, z ̸*= *z*0 vàthành lập quan hệ *f* (*z*)*~~−~~f* (*z*0) *.* Nếu tồn tại giới hạnhữu hạn *z−z*0  lim*f* (*z*) *− f* (*z*0)*,*  *z→z*0*z − z*0 thì nó được gọi là đạo hàm của hàm số *f* (*z*) tạiđiểm *z*0*.* | | |  |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | | |  | | --- | | HÀM GIẢI TÍCH | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 6 / 1 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Đạo hàm của hàm biến phức | | | |  | | --- | | Khái niệm đạo hàm của hàm biến phức | | | | |
| Đạo hàm được kí hiệu là *f ′*(*z*0)*, w ′, df* (*z*0)*dz, ~~dw~~dz.* Khi đặt *z − z*0 = ∆*z* ta sẽ có *z* = *z*0 + ∆*z,* và*f* (*z*)*−f* (*z*0) = *f* (*z*0+∆*z*)*−f* (*z*0) = ∆*f* (*z*0) = ∆*w.*Lúc này | | | | | | |
| *f ′*(*z*0) = lim*f* (*z*0 + ∆*z*) *− f* (*z*0)*.* ∆*z→*0∆*z* Từ công thức (1) suy ra, đạo hàm của hàm số | | | | | | (1) |
| phức tại một điểm không khác gì so với định nghĩa  đạo hàm của hàm biến thực tại một điểm | | | | | | |
| *f′*(*x*0) = lim ∆*x→*0 | | *f* (*x*0 + ∆*x*) *− f* (*x*0)  ∆*x* | | | *.* | (2) |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | | HÀM GIẢI TÍCH | | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | | 7 / 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Đạo hàm của hàm biến phức | |  | | --- | | Khái niệm đạo hàm của hàm biến phức | |

Tuy nhiên bản chất của công thức (1) và (2) khácnhau. Trong công thức (2) *x* = *x*0 + ∆*x* có thể hộitụ đến *x*0 chỉ theo một hướng theo trục *OX.* Trongcông thức (1) *z* = *z*0 + ∆*z* có thể hội tụ đến *z*0theo tập hợp vô hạn những đường khác nhau.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | | |  | | --- | | HÀM GIẢI TÍCH | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 8 / 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Đạo hàm của hàm biến phức | |  | | --- | | Khái niệm đạo hàm của hàm biến phức | |

Nếu hàm số *w* = *f* (*z*) có đạo hàm hữu hạn *f ′*(*z*0)tại điểm *z*0 *∈ E* thì nó được gọi là **hàm khả vi**hoặc **mônôgen** tại điểm này.  
**Ví dụ.** Hàm số *w* = *z* = *x − iy* không có đạohàm tại bất kỳ điểm *z*0 = *x*0 + *iy*0 *∈* (*Z*) nào.Thật vậy, lấy điểm *z*0 = *x*0 + *iy*0 và cho nó gialượng ∆*~~z~~* = ∆*x* + *i*∆*y.* Khi đó hàm số  
*f* (*z*) = *z* = *x − iy* có gia lượng là  
~~∆~~*w* = *f* (*z*0 + ∆*z*) *− f* (*z*0) = *z*0 + ∆*z − z*0 =*z*0 + ∆*z − z*0 = ∆*z* = ∆*x − i*∆*y.*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | | |  | | --- | | HÀM GIẢI TÍCH | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 9 / 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Đạo hàm của hàm biến phức | |  | | --- | | Khái niệm đạo hàm của hàm biến phức | |

Như vậy

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| ∆*w* | ∆*z* = ∆*x − i*∆*y*∆*x* + *i*∆*y.* |
| Từ đó suy ra lim∆*z* không tồn tại, vì  ∆*z→*0  ∆*w*∆*x*  ∆*x→*0  lim∆*z* = lim∆*x→*0∆*x* = lim∆*x→*0 1 = 1*.* | |

Mặt khác

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| lim ∆*x*=0 ∆*y→*0 | ∆*w*  ∆*z* = lim∆*y→*0 | *−i*∆*yi*∆*y* | ∆*y→*0(*−*1) = *−*1*.*= lim | |  |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | | | |  | | --- | | HÀM GIẢI TÍCH | | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 10 / 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Đạo hàm của hàm biến phức | |  | | --- | | Điều kiện Cauchy-Riemann | |

Định nghĩa

Nếu *w* = *f* (*z*) có đạo hàm tại *z* = *z*0 và tại mọiđiểm trong lân cận của *z*0 thì ta nói *f* (*z*) giải tíchtại *z*0*.* Hàm số *w* = *f* (*z*) giải tích tại mọi điểmcủa miền *D* được gọi là giải tích trong *D.*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | | |  | | --- | | HÀM GIẢI TÍCH | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 11 / 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Đạo hàm của hàm biến phức | |  | | --- | | Điều kiện Cauchy-Riemann | |

Định lý

Nếu *u*(*x, y*)*, v*(*x, y*) liên tục cùng với 4 đạo hàmriêng cấp 1 của chúng trong 1 miền *D* thì điềukiện Cauchy-Riemann

|  |  |
| --- | --- |
| *∂u* | *∂y, ∂u∂y* = *−∂v* |

là điều kiện cần và đủ để *f* (*z*) = *u*(*x, y*) + *iv*(*x, y*)giải tích trong *D.* Lúc đó

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *f ′*(*z*) = *∂u∂x* + *i ∂v∂x, f ′*(*z*) = *∂v∂y − i ∂u*TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) HÀM GIẢI TÍCHTP. HCM — 2012. | |  | | --- | | 12 / 1 | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Đạo hàm của hàm biến phức | |  | | --- | | Ví dụ | |

Ví dụ

Khảo sát đạo hàm của các hàm sau:

1 *f* (*z*) = *z*

2 *f* (*z*) = *z.z* = *|z|*2

3 *f* (*z*) = *z*2*.*

4 *f* (*z*) = *ex*(cos *y* + *i* sin *y*)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | | |  | | --- | | HÀM GIẢI TÍCH | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 13 / 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Đạo hàm của hàm biến phức | |  | | --- | | Qui tắc tính đạo hàm của hàm biến phức | |

Nếu hàm số *f* (*z*) và *g*(*z*) có cùng 1 vùng xác định*E ⊂* (*Z*) và có tại một số điểm *z ∈ E* những đạohàm hữu hạn *f ′*(*z*) và *g ′*(*z*) thì ta luôn có nhữngđẳng thức

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| (*f* (*z*) *± g*(*z*))*′* = *f ′*(*z*) *± g ′*(*z*);  (*f* (*z*)*g*(*z*))*′* = *f ′*(*z*)*g*(*z*) + *f* (*z*)*g ′*(*z*)*.*Nếu *g*(*z*)*̸*= 0 tại điểm *z* thì  �*f* (*z*)�*′*= *f ′*(*z*)*g*(*z*) *− f* (*z*)*g ′*(*z*)*.* *g*(*z*)*g* 2(*z*) | | |  |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | | |  | | --- | | HÀM GIẢI TÍCH | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 14 / 1 |

|  |
| --- |
| Tính chất của hàm giải tích |

Định lý

Nếu *f* (*z*) = *u*(*x, y*) + *iv*(*x, y*) giải tích trong miền*D* và nếu *u, v* có đạo hàm riêng cấp hai liên tụctrong *D* thì trong *D* 2 hàm *u, v* thỏa mãn phươngtrình Laplace

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *∂*2*F* | *∂y* 2 = 0*.* |  |  |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | |  | |  | | --- | | HÀM GIẢI TÍCH | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 15 / 1 |

|  |
| --- |
| Tính chất của hàm giải tích |

Định nghĩa

Hàm 2 biến có các đạo hàm riêng cấp 2 thỏa  
phương trình Laplace được gọi là hàm điều hòa.Hai hàm điều hòa *u, v* sao cho *u* + *iv* là hàm giảitích được gọi là 2 hàm điều hòa liên hợp.

Ví dụ

Hàm *u*(*x, y*) = 3*x*2 + *xy* + *y* 2 không phải là hàmđiều hòa. Hàm *u*(*x, y*) = *x*3 *−* 3*xy* 2 + 7*y* là hàmđiều hòa.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | | |  | | --- | | HÀM GIẢI TÍCH | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 16 / 1 |

|  |
| --- |
| Tính chất của hàm giải tích |

Định lý

Nếu *f* (*z*) = *u*(*x, y*) + *iv*(*x, y*) giải tích trong miền*D* thì trong *D* các đường cong của họ  
*u*(*x, y*) = *c* = *const* là những quỹ đạo trực giaocủa các đường cong họ *v*(*x, y*) = *k* = *const* vàngược lại.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | | |  | | --- | | HÀM GIẢI TÍCH | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 17 / 1 |

|  |
| --- |
| Tính chất của hàm giải tích |

Xét tại giao điểm *z* = *x* + *iy* của *u*(*x, y*) = *c* và*v*(*x, y*) = *k,* hệ số góc của tiếp tuyến của  
*u*(*x, y*) = *c* là

|  |  |
| --- | --- |
| *k*1 = *dydx* = *−u′xu′y* | *,* |

hệ số góc của tiếp tuyến của *v*(*x, y*) = *k* là

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *k*2 = *dydx* = *−v ′v ′y* | *.* | | |
| Vì *f* (*z*) giải tích trong *D* nên thỏa mãn điều kiện | | | |
| Cauchy-Riemann nên *k*1*.k*2 = *−*1*.*  HÀM GIẢI TÍCH | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 18 / 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Những hàm biến phức sơ cấp | |  | | --- | | Hàm số mũ với biến số phức. | |

Định nghĩa

Hàm số *w* = *ez* xác định bởi công thức  
*ez* = *ex*(*cosy* + *isiny*) với *z* = *x* + *iy* được gọi làhàm số mũ với biến số phức.

Theo định nghĩa trên ta có  
*arg ez* = *y* + *k*2*π, k ∈ Z.*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | | |  | | --- | | HÀM GIẢI TÍCH | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 19 / 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Những hàm biến phức sơ cấp | |  | | --- | | Hàm số mũ với biến số phức. | |

**Tính chất:**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 *ez ̸*= 0 với mọi *z ∈* (*Z*)*.*  2 *z* = *|z|ei arg z* với mọi *z ∈* (*Z*)*.*  3 Với 2 số phức bất kì *z*1 = *x*1 + *iy*1,*z*2 = *x*2 + *iy*2  ta có | | | |
| *ez*1+*z*2 = *ez*1*.ez*2*.* | | | (1) |
| 4 Hàm số mũ *w* = *f* (*z*) = *ez* là hàm tuần hoàn  với chu kì chính *T* = 2*πi,* tức là *ez*+2*πi* = *ez.*  5 Hàm số mũ *w* = *f* (*z*) = *ez* có đạo hàm là *w ′* = *ez.* | | | |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | | |  | | --- | | HÀM GIẢI TÍCH | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 20 / 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Những hàm biến phức sơ cấp | |  | | --- | | Hàm lượng giác | |

Định nghĩa

Hàm cosin và hàm sin của biến phức *z* được xácđịnh như sau

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| cos *z* = *eiz* + *e−iz*  2 | | *,* sin *z* = *eiz − e−iz*  2*i* | |  |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | | |  | | --- | | HÀM GIẢI TÍCH | | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 21 / 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Những hàm biến phức sơ cấp | |  | | --- | | Hàm lượng giác | |

Tính chất cơ bản

1 cos2 *z* + sin2 *z* = 1

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 cos(*z*1 *± z*2) = cos *z*1 cos *z*2 *∓* sin *z*1 sin *z*23 sin(*z*1 *± z*2) = sin *z*1 cos *z*2 *±* cos *z*1 sin *z*24 *d*(cos *z*)  *dz*= *−* sin *z* | | | |  |
| 5 *d*(sin *z*)  *dz* | = cos *z* | | |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | | | |  | | --- | | HÀM GIẢI TÍCH | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 22 / 1 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Những hàm biến phức sơ cấp | | |  | | --- | | Hàm lượng giác | | |  |
| 1 cos *z* = cos(*x* + *iy*) = cos *x ey* + *e−y*  2*−*  *i* sin *x ey − e−y*  2= cos *x* cosh *y ~~−~~ i* sin *x* sinh *y*2 sin *z* = sin(*x* + *iy*) = sin *x ey* + *e−y*+  2  *i* cos *x ey − e−y*= sin *x* cosh *y* + *i* cos *x* sinh *y* 2 | | | |  |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | | |  | | --- | | HÀM GIẢI TÍCH | | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 23 / 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Những hàm biến phức sơ cấp | |  | | --- | | Hàm hyperbol lượng giác | |

Định nghĩa

cosh *z* = *ez* + *e−z*

2

sinh *z* = *ez − e−z*

2

Tính chất

1 cosh *z* = cosh *x* cos *y* + *i* sinh *x* sin *y*

2 sinh *z* = sinh *x* cos *y* + *i* cosh *x* sin *y.*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | | |  | | --- | | HÀM GIẢI TÍCH | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 24 / 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Những hàm biến phức sơ cấp | |  | | --- | | Hàm logarit | |

Định nghĩa

Hàm Logarit là hàm ngược của hàm mũ. Cho  
*z ̸*= 0 ta tìm *w* sao cho *ew* = *z.*

Nếu viết *z* = *reiϕ* và *w* = *u* + *iv* ta được *eu* = *r*và *v* = *ϕ* + 2*nπ*(*n ∈* Z)*.* Từ đó ta có  
*w* = ln *r* + *i*(*ϕ* + 2*nπ*)*,* (*n ∈* Z)*.* Như vậy

ln *z* = ln *|z|* + *i arg z, z ̸*= 0*.*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | | |  | | --- | | HÀM GIẢI TÍCH | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 25 / 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Những hàm biến phức sơ cấp | |  | | --- | | Hàm logarit | |

Tính chất cơ bản

ln *z* là hàm vô số trị. Nếu chọn trước số *n* ta sẽđược 1 nhánh của hàm logarit, nếu *n* = 0 tađược nhánh chính của hàm logarit. Kí hiệu*Lnz.* Từ đó suy ra ln *z* = *Lnz* + 2*nπi.*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *d*(ln *z*) | = 1 |  |  |  |
| *dz* | *z* |  |  |  |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | | | |  | | --- | | HÀM GIẢI TÍCH | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 26 / 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Những hàm biến phức sơ cấp | |  | | --- | | Lũy thừa trong miền phức với số mũ bất kì | |

Định nghĩa

|  |
| --- |
| Cho *z ̸*= 0 *∈* C- số phức và *s ∈* C- số phức. Khiấy ta có  *zs* = *es* ln *z.*(2) |

Tính chất: hàm *zs* cũng là hàm vô số trị.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | | |  | | --- | | HÀM GIẢI TÍCH | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 27 / 1 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Những hàm biến phức sơ cấp | | |  | | --- | | Hàm lượng giác ngược và hàm hyperbol lượng giác ngược | | | | |
| Định nghĩa | | | | | |
| Hàm *w* = arccos *z* được định nghĩa là các giá trịcủa *w* thỏa phương trình *z* = cos *w* = *eiw* + *e−iw* 2Từ đó ta có *e*2*iw −* 2*zeiw* + 1 = 0 hay*eiw* = *z* + *√z*2 *−* 1*.* Vậy *w* = arccos *z* = *−i* ln(*z* +vô số trị nên hàm arccos *z* cũng có vô số trị.  *√z*2 *−* 1)*.* Hàm ln *z* có | | | | | *.* |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | | |  | | --- | | HÀM GIẢI TÍCH | | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 28 / 1 | |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Những hàm biến phức sơ cấp | | |  | | --- | | Hàm lượng giác ngược và hàm hyperbol lượng giác ngược | | |  |
| 1 arcsin *z* = *−i* ln(*iz* +*√*1 *− z*2) 2 arctan *z* = *i* 3 *arccoshz* = ln(*z* + ~~2~~ ln *i* + *zi − z√z*2 *−* 1) 4 *arcsinhz* = ln(*z* +*√z*2 + 1)  5 *arctanhz* = 1~~2~~ ln 1 + *z*1 *− z* | | | |  |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | | |  | | --- | | HÀM GIẢI TÍCH | | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 29 / 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Những hàm biến phức sơ cấp | |  | | --- | | Bảng công thức những đạo hàm cơ bản | |

1 (*zs*)*′* = *szs−*1*,* với *s* là 1 số phức tùy ý.

2 (*ez*)*′* = *ez*

3 (cos *z*)*′* = *−* sin *z,* (sin *z*)*′* = cos *z*

4 (cosh *z*)*′* = sinh *z,* (sinh *z*)*′* = cosh *z*

5 (ln *z*)*′* = 1

*z*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | | |  | | --- | | HÀM GIẢI TÍCH | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 30 / 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Bài tập | |  | | --- | | Tính giá trị hàm số | |

Tính giá trị của hàm số *f* khi biết *z*

1 *f* (*z*) = *xy* + *i*(*x*2 *− y* 2) biết *z* = *−*1 + 2*i*

2 *f* (*z*) = *x*2 *− y* + *i*(*x* + *y* 2) biết *z* = 2 *−* 3*i*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | | |  | | --- | | HÀM GIẢI TÍCH | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 31 / 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Bài tập | |  | | --- | | Đạo hàm | |

Tính đạo hàm của các hàm sau

1 *w* = *−*2*z*2 + 3*z* + 4

2 *w* = 1

*z*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | | |  | | --- | | HÀM GIẢI TÍCH | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 32 / 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Bài tập | |  | | --- | | Hàm điều hòa | |

Chứng minh rằng hàm *Rez*2 và *Imz*2 là các hàmđiều hòa.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | | |  | | --- | | HÀM GIẢI TÍCH | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 33 / 1 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | | Bài tập | | |  | | --- | | Hàm sơ cấp | |
| Tìm giá trị sau 1 ln(*−*10)*,* ln(1 *− i√*3)2 sin(1 + *i*)*,* cosh(1 *− i*)3 (1 *− i*)2+*i,* 2*i.* 4 tan *i* |  |

5 arccos 2

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | | |  | | --- | | HÀM GIẢI TÍCH | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 34 / 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Bài tập | |  | | --- | | Hàm sơ cấp | |

Giải phương trình

1 *ez* = 0

2 cosh *z* = 0

3 sin *z* = 3

4 sinh *z* = *i.*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | | |  | | --- | | HÀM GIẢI TÍCH | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 35 / 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Bài tập | |  | | --- | | Hàm sơ cấp | |

**THANK YOU FOR ATTENTION**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | | TS. Lê Xuân Đại (BK TPHCM) | | |  | | --- | | HÀM GIẢI TÍCH | | |  | | --- | | TP. HCM — 2012. | | 36 / 1 |