PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

Dạng tách biến 2
Dạng biến thể của dạng tách biến 3
Dạng tổng quát 4
Dạng Bernouli.. 5

Dạng tách biến

Tổng quát:

$$y' = g(x)f(y)$$

Cách giải:

$$\frac{y'}{f(y)} = g(x) \Rightarrow \int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x)dx \ (do\ y'dx = dy)$$

Ví dụ:

BT3/69

$(x^2+1)y' = xy \Leftrightarrow \dfrac{y'}{y} = \dfrac{x}{x^2+1}$

$\Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$

$\Leftrightarrow \ln|y| = \dfrac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$

(có thể dừng tại đây, nhưng mình đi tiếp)

$\Leftrightarrow |y| = e^{\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C} > 0 \Leftrightarrow y = e^C\left(e^{\ln(x^2+1)}\right)^{\frac{1}{2}} = C'\sqrt{x^2+1}$

(lưu ý C và C' là khác nhau, do $C = const$ nên $C' = e^C = const$)

Vậy $y = C'\sqrt{x^2+1}$

BT54-55/72

$\dfrac{dP}{dt} = k[M - P(t)] \Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{dP}{M - P(t)} = \int kdt \Leftrightarrow -\ln|M - P(t)| = kt + C'$

$M - P(t) = e^{-kt-C'} = Ce^{-kt} \Leftrightarrow P(t) = M - Ce^{-kt}$

$P(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = M - C \Leftrightarrow M = C \Rightarrow P(t) = M(1 - e^{-kt})$

Đối với Jim:

Có:

$$\begin{cases} P(1) = 25 \\ P(2) = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M\left(1 - e^{-k}\right) = 25 \\ M\left(1 - e^{-2k}\right) = 45 \end{cases} \Rightarrow \frac{1 - e^{-k}}{1 - e^{-2k}} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{1 + e^{-k}} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow e^{-k} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow M = \frac{25}{1 - \frac{4}{5}} = 125$$

Tương tự với Mark:

$$M = \frac{35}{1-\frac{3}{7}} = \frac{245}{4}$$

Dạng biến thể của dạng tách biến

Tổng quát:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Cách giải:

Đặt $u = \frac{y}{x} (x \neq 0) \Leftrightarrow y = ux \Rightarrow y' = u + u'x$

Phương trình trở thành $u + u'x = f(u)$

Nếu $f(u) \equiv u$ thì PT là dạng tách biến (xem ở trên)

Nếu $\exists a_i, f(a) = a$ thì PT có nghiệm $y = a_i x, \forall i$

Ngoài 2 trường hợp trên:

$$\frac{u'}{f(u)-u} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \int \frac{du}{f(u)-u} = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

Ví dụ:

VD/371 (Slide lý thuyết)

$$x^2 y' = y^2 - xy + x^2$$

Xét $x = 0$: $y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$

Xét $x \neq 0$: $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x} + 1$

Đặt $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = u + u'x$. PT trở thành $u + u'x = u^2 - u + 1 \Leftrightarrow u'x = (u-1)^2$

Xét $(u-1)^2 = 0 \Leftrightarrow u = 1$. Vậy $y = x$ là một nghiệm của phương trình.

Có:

$$\frac{u'}{(u-1)^2} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \int \frac{du}{(u-1)^2} = \int \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow -\frac{1}{u-1} = \ln|x| + C \Leftrightarrow u = 1 - \frac{1}{\ln|x| + C}$$

Vậy $y = x - \frac{x}{\ln|x|+C}$ là một nghiệm khác của phương trình.

Kết luận: $y = x$ hoặc $y = x - \frac{x}{\ln|x|+C}$

BT23/70

$$xy' = x\sin\frac{y}{x} + y\ (x \neq 0) \Leftrightarrow y' = \sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}$$

Đặt $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = u + u'x$. PT trở thành $u + u'x = \sin u + u \Leftrightarrow u'x = \sin u$

Xét $\sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi$.

Vậy $y = k\pi x\ (k \in \mathbb{Z})$ là nghiệm của phương trình.

$\frac{u'}{\sin u} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{-d(\cos u)}{1-\cos^2 u} = \ln|x| + C \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\frac{\cos u - 1}{\cos u + 1} = \ln|x| + C'$

$\Leftrightarrow \frac{\cos u - 1}{\cos u + 1} = Cx^2 \Leftrightarrow \cos u = \frac{1 + Cx^2}{1 - Cx^2}$

Vậy phương trình có nghiệm khác là

$$y = x\arccos\frac{1 + Cx^2}{1 - Cx^2}$$

Kết luận: $y = k\pi x\ (k \in \mathbb{Z})$ hoặc $y = x\arccos\frac{1+Cx^2}{1-Cx^2}$

Dạng phương trình tuyến tính

Tổng quát

$$y' + q(x)y = p(x)$$

Cách giải:

1/ Tìm $Q(x) = \int q(x)dx$

2/ Nhân hai vế phương trình với $e^{Q(x)}$:

$$e^{Q(x)}y' + e^{Q(x)}q(x)y = e^{Q(x)}p(x) \Leftrightarrow \left[e^{Q(x)}y\right]' = e^{Q(x)}p(x) \Leftrightarrow e^{Q(x)}y = \int e^{Q(x)}p(x)dx$$

Ví dụ:

BT38/70

$$y' + y = \sin(e^x)$$

Xét $x = \int dx$, nhân e^x vào hai vế của phương trình:

$$e^x y' + e^x y = e^x \sin e^x \Leftrightarrow (e^x y)' = e^x \sin e^x$$

$$\Leftrightarrow e^x y = \int e^x \sin e^x\, dx = \int \sin e^x\, d(e^x) = -\cos e^x + C$$

Vậy nghiệm phương trình là

$$y = \frac{-\cos e^x + C}{e^x}$$

BT53/71

$$2\frac{dQ}{dt} + 100Q(t) = 10\sin 60t \Leftrightarrow \frac{dQ}{dt} + 50Q(t) = 5\sin 60t$$

Xét $50t = \int 50dt$, nhân hai vế cho e^{50t} có:

$e^{50t}\frac{dQ}{dt} + 50e^{50t}Q(t) = 5e^{50t}\sin 60t \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(e^{50t}Q) = 5e^{50t}\sin 60t$

$\Leftrightarrow e^{50t}Q = 5\int e^{50t}\sin 60t\,dt$

Xét

$I = \int e^{50t}\sin 60t\,dt = \frac{1}{50}\int \sin 60t\,d(e^{50t}) = \frac{1}{50}\left(e^{50t}\sin 60t - 60\int e^{50t}\cos 60t\,dt\right)$

$= \frac{1}{50}\left(e^{50t}\sin 60t - \frac{6}{5}\int \cos 60t\,d(e^{50t})\right)$

$$= \frac{1}{50}\left[e^{50t}\sin 60t - \frac{6}{5}\left(e^{50t}\cos 60t + 60\int e^{50t}\sin 60t\,dt\right)\right]$$

$= \frac{1}{50}\left[e^{50t}\sin 60t - \frac{6}{5}(e^{50t}\cos 60t + 60I)\right]$

$\Leftrightarrow \frac{61}{25}I = \frac{e^{50t}}{50}\left(\sin 60t - \frac{6}{5}\cos 60t\right) \Leftrightarrow I = \frac{e^{50t}}{122}\left(\sin 60t - \frac{6}{5}\cos 60t\right)$

$\Rightarrow Q(t) = \frac{5}{122}\left(\sin 60t - \frac{6}{5}\cos 60t\right)$

Dạng Bernouli

Tổng quát:

$$y' + q(x)y = p(x)y^n, n \neq 0, n \neq 1$$

Cách giải:

Đặt $u = y^{1-n} \Rightarrow u' = (1-n)y^{-n}y'$.

Có: $(1-n)y^{-n}y' + (1-n)y^{-n}q(x)y = (1-n)y^{-n}p(x)y^n$

$\Leftrightarrow u' + (1-n)q(x)u = (1-n)p(x)$

Ví dụ:

BT49/71

$$xy' - y = -xy^2$$

Đặt $u = y^{1-2} = y^{-1} \Rightarrow u' = -y^{-2}y'$

$\Rightarrow x(-y^{-2}y') - (-y^{-2}y) = -x(-y^{-2}y^2) \Leftrightarrow xu' + u = x$

$\Leftrightarrow (xu)' = x \Leftrightarrow xu = \int xdx = \frac{x^2}{2} + C \Leftrightarrow u = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$

Vậy

$$y = u^{-1} = \frac{1}{\frac{x}{2} + \frac{C}{x}} = \frac{2x}{x^2 + C}$$