

# BÀI TẬP LỚN GIẢI TÍCH 2 - HK222 - L41

- Yêu cầu nội dung: Trình bày chi tiết lời giải. Phần lớn các bài tập trong sách tiếng Anh đều dễ dàng search được lời giải, các em có thể tham khảo những bài giải đó và trình bày lại theo cách của mình, bằng tiếng Việt (trường hợp dùng lại bài giải, ví dụ có sẵn và chỉ dịch lại sẽ không có điểm). Nếu có bất kỳ phần nào sao chép giữa các nhóm sẽ nhận điểm 0 cho toàn bài.
- Yêu cầu hình thức: Thông nhất một định dạng cho toàn bài thu hoạch; lưu ở dạng PDF; tất cả lời giải, công thức đều phải được đánh máy; hình vẽ ở đề được cắt dán, hình vẽ ở bài làm phải tự vẽ bằng một phần mềm, công cụ nào đó, không vẽ tay. (Sai yêu cầu trừ 50% số điểm toàn bài).
- Nộp bài: Đại diện nhóm nộp bài trên BKeL trước 23h thứ 7 của tuần học 20 (Nộp trễ trong 3 giờ đầu, trừ 50% số điểm toàn bài; sau 3 giờ đầu, không chấm bài).

Link sách: [https://drive.google.com/file/d/1QRmlvh1Im4GAiD56cFZYouwiZI49QJi\\_/view?usp=sharing](https://drive.google.com/file/d/1QRmlvh1Im4GAiD56cFZYouwiZI49QJi_/view?usp=sharing)

# 1 Nhóm 1

*PHẦN 1:* Bài tập 41 đến 46 trang 935, sách Calculus \_ Single and Multi-variable.

*PHẦN 2:*

**Bài toán 1** Cho khối  $\Omega$  được xác định bởi  $y \geq x^2$ ,  $y \leq 4 - z^2$  và  $x^2 + z^2 \leq 1$ . Tính thể tích của  $\Omega$  (bỏ qua đơn vị tính).

**Bài toán 2** Một sợi dây mảnh được mô phỏng bởi đường cong  $C$  là giao tuyến của hai mặt cong  $y = x^2$  và  $y = 4 - z^2$ . Biết mật độ khối lượng của sợi dây là  $\rho(x, y, z) = 1 + y$ . Tính khối lượng của sợi dây (bỏ qua đơn vị tính).

**Bài toán 3** Hình bên dưới là một cối xay cà phê thủ công, có  $OA = R$ . Khi cối hoạt động, tia  $OA$  quay quanh trục  $d$  tạo ra mặt phẳng  $Oxy$ . Giả sử  $A(x, y)$  là điểm đặt của lực tác dụng  $\vec{F}$  từ tay người lên cối xay, vậy điểm  $A$  di chuyển tạo ra một quỹ đạo là đường cong  $C$ . Tìm công thức hiện bởi lực  $\vec{F} = (y, -x)$  khi quay cối xay một vòng theo chiều kim đồng hồ (bỏ qua đơn vị tính).



**Bài toán 4** Cho  $S$  là mặt biên của khối  $\Omega$  trong Bài toán 1. Mật độ diện tích tại điểm  $(x, y, z)$  trên  $S$  cho bởi  $\rho(x, y, z) = z$  (đơn vị diện tích/đơn vị diện tích). Tính tổng diện tích trên  $S$ .

**Bài toán 5** Cho  $S$  là phần mặt trụ  $x^2 + z^2 = 1$  (mặt phía ngoài) bị giới hạn bởi các mặt  $y = x^2$  và  $y = 4 - z^2$ . Tính

$$\iint_S dx dz + z dx dy.$$

## 2 Nhóm 2

*PHÂN 1:* Bài tập 35 đến 40 trang 934 - 935, sách Calculus \_ Single and Multivariable.

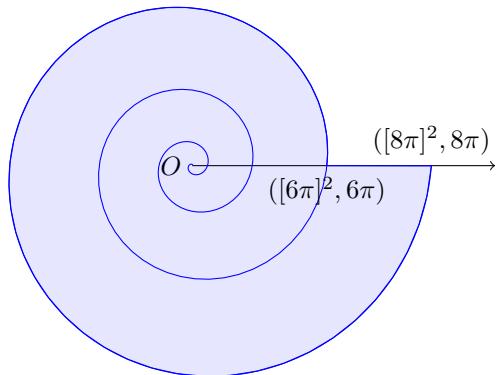
*PHÂN 2:*

**Bài toán 6** Cho khối  $\Omega$  được xác định bởi  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ,  $z \geq -\sqrt{x^2 + y^2}$  và  $y \geq |x|$ . Tính tích phân

$$\iiint_{\Omega} (z+1) dx dy dz.$$

**Bài toán 7** Cho đường cong  $C$  là giao tuyến của các mặt cong  $x^2 + y^2 = 2x$  và  $z = x^2 + y^2$ . Tính độ dài đường cong  $C$  (bỏ qua đơn vị tính).

**Bài toán 8** Tính diện tích của miền phẳng  $D$  trong hình vẽ, bằng cả 2 cách: tích phân kép và tích phân đường loại 2. Biết đường xoắn ốc trong hình có phương trình trong tọa độ cực ( $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ) là  $r = \varphi^2$ . (Hình vẽ biểu diễn miền  $D$  và các điểm trong tọa độ cực. Bỏ qua đơn vị tính).



**Bài toán 9** Mảnh cong  $S$  được mô phỏng là phần mặt trụ  $y = x^2$  bị giới hạn bởi mặt trụ  $x^2 + z^2 = 1$ . Tính khối lượng của mảnh cong, biết hàm mật độ khối lượng là  $\rho(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4y}}$ . Bỏ qua đơn vị tính.

**Bài toán 10** Cho  $S$  là mặt biên phía ngoài của khối  $\Omega$  trong Bài toán 6. Tính

$$\iint_S dx dz + z dx dy.$$

### 3 Nhóm 3

*PHẦN 1:* Bài tập 51 đến 56 trang 511 - 512, sách Calculus \_ Single and Multivariable.

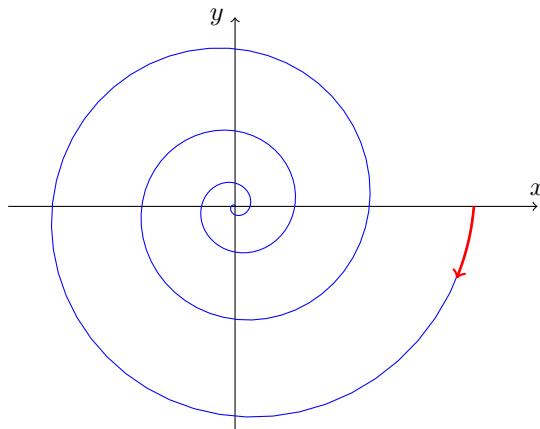
*PHẦN 2:*

**Bài toán 11** Cho khối  $\Omega$  được giới hạn bởi  $x = 2y^2$ ,  $x = y^2 + 1$  và  $y^2 + z^2 = 1$ , trong đó, đơn vị của  $x, y, z$  là mét. Tính khối lượng của khối  $\Omega$  biết khối lượng riêng của khối  $\Omega$  là  $D = 1.3(\text{kg}/\text{m}^3)$ .

**Bài toán 12** Cho đường cong  $C$  là phần đường ellipse  $4x^2 + 9y^2 = 36$  nằm dưới đường thẳng  $y = x$ . Tính tích phân

$$\int_C xy \, dl.$$

**Bài toán 13** Tính công thực hiện bởi lực  $\vec{F}(x, y) = (x, y)$  tác dụng lên một vật di chuyển dọc theo đường cong có dạng xoắn ốc với chiều đường đi như hình vẽ. Biết đường cong này có phương trình trong tọa độ cực  $(x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi)$  là  $r = \varphi^2$ ,  $0 \leq \varphi \leq 8\pi$ .



**Bài toán 14** Mảnh cong  $S$  được mô phỏng là phần mặt trụ  $y = x^2$  bị giới hạn bởi mặt trụ  $x^2 + z^2 = 1$ . Tính diện tích của mảnh cong bằng 2 cách: tích phân mặt loại 1 và tích phân đường loại 1. Bỏ qua đơn vị tính.

**Bài toán 15** Cho  $S$  là mặt biên phía trong của khối  $\Omega$  trong Bài toán 11. Tính

$$\iint_S (x+1)dydz + 2xdxdz + zdxdy.$$

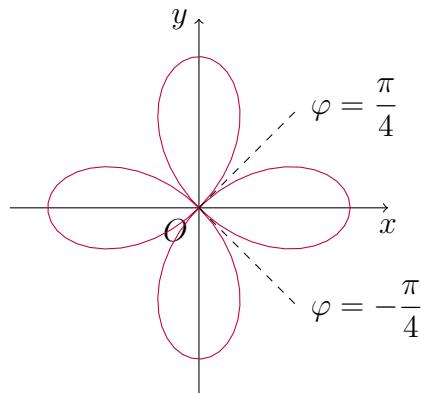
## 4 Nhóm 4

*PHẦN 1:* Bài tập 60 đến 65 trang 512, sách Calculus – Single and Multi-variable.

*PHẦN 2:*

**Bài toán 16** Một vật thể  $\Omega$  được giới hạn bởi nửa trên của mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$  và mặt nón  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Tính thể tích của vật thể bằng tích phân bội ba trong tọa độ Descartes, tọa độ trụ và tọa độ cầu.

**Bài toán 17** Tính chiều dài tối thiểu của một dây kim loại để có thể uốn thành một hình hoa bốn cánh như hình vẽ. Biết đường cong này có phương trình trong tọa độ cực ( $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ ) là  $r = \cos 2\varphi$ .



**Bài toán 18** Tính  $I = \int_C x dy$ , biết  $C$  là phần đường ellip  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{3} = 1$  nằm phía trên đường thẳng  $x - 4y = 0$ , đi từ điểm có tung độ  $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Bài toán 19** Cho  $S$  là phần mặt cong  $x = y^2 + z^2$  giới hạn bởi  $x = z$ . Tính diện tích của  $S$ .

**Bài toán 20** Một vật thể  $\Omega$  được giới hạn bởi nửa dưới của mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$  và mặt nón  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Gọi  $S$  là biên phía trong của vật thể. Tính

$$I = \iint_S x^2 dy dz + z dz dx.$$

## 5 Nhóm 5

*PHẦN 1:* Bài tập 87 đến 92 trang 520, sách Calculus – Single and Multi-variable.

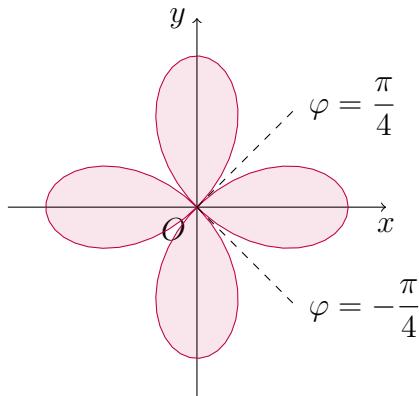
*PHẦN 2:*

**Bài toán 21** Cho khối  $\Omega$  xác định bởi  $x^2 + z^2 \leq 4$ ,  $y \geq 0$ ,  $y + x \leq 4$ . Tính tích phân

$$I = \iiint_{\Omega} y \, dx \, dy \, dz.$$

**Bài toán 22** Cho  $S$  là phần mặt cong  $x^2 + y^2 = 9$  giới hạn bởi  $z = 2 + \sin 10x$  và  $z = 0$ . Tính diện tích của  $S$ .

**Bài toán 23** Dùng tích phân đường loại 2 để tính diện tích của hình hoa bốn cánh như hình vẽ. Biết đường biên của hoa này có phương trình trong tọa độ cực ( $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ) là  $r = \cos 2\varphi$ .



**Bài toán 24** Cho  $S$  là mặt biên của khối chóp đều có các đỉnh  $A(a, 0, 0)$ ,  $B(0, a, 0)$ ,  $C(-a, 0, 0)$ ,  $D(0, -a, 0)$  và  $S(0, 0, a)$ . Tính

$$\iint_S \sin(xy) \, dS.$$

**Bài toán 25** Cho  $S$  là mặt biên phía trong của khối chóp đều có các đỉnh  $A(a, 0, 0)$ ,  $B(0, a, 0)$ ,  $C(-a, 0, 0)$ ,  $D(0, -a, 0)$  và  $S(0, 0, a)$ . Tính

$$\iint_S x^2 \, dy \, dz + y \, dz \, dx - 2xz \, dx \, dy.$$

## 6 Nhóm 6

*PHẦN 1:* Bài tập 99 đến 104 trang 521, sách Calculus – Single and Multi-variable.

*PHẦN 2:*

**Bài toán 26** Cho khối  $\Omega$  xác định bởi  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$  và  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ .  
Tính tích phân

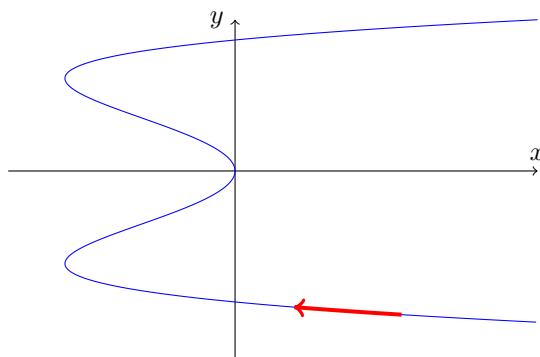
$$I = \iiint_{\Omega} x dV.$$

**Bài toán 27** Tính diện tích phần mặt trụ  $x^2 + y^2 = 4$  nằm giữa mặt phẳng  $Oxy$  và mặt phẳng  $z + x = 4$ , ứng với phần  $y \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}x$  và  $x \geq 0$ .

**Bài toán 28** Cho đường cong  $C$  có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = t^4 - 3t^3 \\ y = -t \end{cases}, \quad -2 \leq t \leq 2,$$

và có chiều như hình vẽ. Tính  $\int_C y^3 dx$ .



**Bài toán 29** Cho  $S$  là phần mặt trụ  $z = x^2$  nằm dưới mặt trụ  $z = 1 - y^2$ .  
Tính

$$\iint_S \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}} dS.$$

**Bài toán 30** Cho  $S$  là mặt biên phía trong của khối chóp đều có các đỉnh  $A(a, 0, 0)$ ,  $B(0, a, 0)$ ,  $C(-a, 0, 0)$ ,  $D(0, -a, 0)$  và  $S(0, 0, a)$ . Tính

$$\iint_S \cos x dy dz + y^2 z dz dx.$$

## 7 Nhóm 7

*PHẦN 1:* Bài tập 105 đến 110 trang 521, sách Calculus – Single and Multi-variable.

*PHẦN 2:*

**Bài toán 31** Cho  $\Omega$  xác định bởi  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2z$  và  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3z$ . Tính tích phân

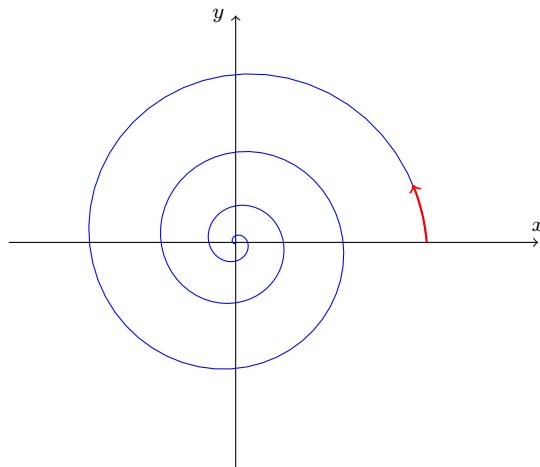
$$I = \iiint_{\Omega} z dV.$$

**Bài toán 32** Cho miền  $D$  xác định bởi  $x^2 + y^2 \geq 1$  và  $x^2 + y^2 \leq 2x$ . Gọi  $C$  là biên của  $D$ , tính

$$\int_C (x^2 + y^2) dl.$$

**Bài toán 33** Tính công thực hiện bởi lực  $\vec{F} = (x, y)$  tác dụng lên một vật dịch chuyển theo đường cong có dạng xoắn ốc với chiều như hình vẽ. Biết đường cong này có phương trình

$$\begin{cases} x = \varphi^2 \cos \varphi \\ y = -\varphi^2 \sin \varphi \end{cases}, 0 \leq \varphi \leq 8\pi$$



**Bài toán 34** Cho  $S$  là phần mặt nón  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  bị chấn bởi mặt cong  $z = x^2 + y^2$ , lấy phần  $y \leq \sqrt{3}x$ . Tính

$$\iint_S xy^2 dS.$$

**Bài toán 35** Cho  $S$  là mặt phẳng trong của mặt trụ  $y^2 + z^2 = 1$ , phần nằm giữa hai mặt phẳng  $x = 0$  và  $x + z = 2$ , với  $z \leq 0$ . Tính

$$\iint_S dydz + ydzdx + zdxdy.$$

## 8 Nhóm 8

*PHẦN 1:* Bài tập 112 đến 117 trang 521, sách Calculus – Single and Multi-variable.

*PHẦN 2:*

**Bài toán 36** Cho khối  $\Omega$  được giới hạn bởi các mặt phẳng  $x + y - z = 1$ ,  $x + 2y - 2z = 2$ ,  $z = 0$  và  $y = 0$ . Tính

$$\iiint_{\Omega} xz \, dx \, dy \, dz.$$

**Bài toán 37** Cho  $C$  là phần đường tròn  $x^2 + y^2 = 2$  thỏa mãn  $x^2 + y^2 \geq 2x$ . Tính

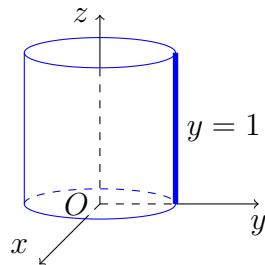
$$\int_C (x + y) \, dl.$$

**Bài toán 38** Cho miền  $D$  xác định bởi  $x^2 + y^2 \geq 1$  và  $x^2 + y^2 \leq 2x$ . Gọi  $C$  là biên định hướng dương của  $D$ , tính

$$\int_C x \, dx + x^2 y \, dy.$$

**Bài toán 39** Cho một hồ nước, biết mặt hồ có dạng hình tròn bán kính 3 mét. Tại mỗi điểm trên mặt hồ cách tâm mặt hồ  $r$  mét, hồ có độ sâu là  $9 - r^2$  mét. Viết phương trình mô tả hình dạng đáy hồ và tính diện tích của đáy hồ.

**Bài toán 40** Trong mặt phẳng  $Oyz$ , cho đường thẳng  $(d)$ :  $y = 1$ ,  $0 \leq z \leq 2$ . Mặt cong  $S$  là mặt tròn xoay (mặt phẳng ngoài) khi quay đường thẳng  $(d)$  quanh trục  $Oz$ . Tính  $\iint_S e^z x^2 \sin y \, dx \, dy$ .



## 9 Nhóm 9

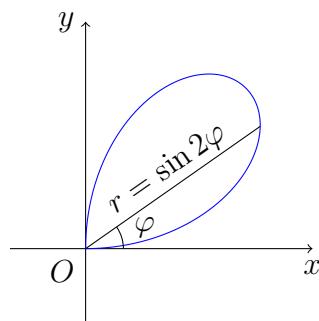
*PHÂN 1:* Bài tập 35 đến 40 trang 527-528, sách Calculus – Single and Multivariable.

*PHÂN 2:*

**Bài toán 41** Cho khối  $\Omega$  xác định bởi  $x^2 + z^2 \leq 4$ ,  $y \geq 0$ ,  $y - x \leq 4$  và  $x \geq 0$ . Tính tích phân

$$I = \iiint_{\Omega} x dx dy dz.$$

**Bài toán 42** Tính chiều dài của đường cong trong hình vẽ (bỏ qua đơn vị tính). Biết đường cong này có phương trình trong tọa độ cực ( $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ) là  $r = \sin 2\varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .



**Bài toán 43** Tính diện tích của miền phẳng giới hạn bởi đường cong trong Bài toán 42 bằng 2 cách: dùng tích phân đường loại 2 và tích phân kép.

**Bài toán 44** Cho  $S$  là mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Tính

$$\iint_S (xy^2 + 1)(\sqrt{1 - z^2 - y^2}) dS.$$

**Bài toán 45** Cho khối  $\Omega$  được giới hạn bởi mặt phẳng  $x + y + z = 2$  và các mặt phẳng tọa độ.  $S$  là mặt biên phía ngoài của  $\Omega$ . Tính

$$\iint_S \sin y \cos z dy dz + (y + y^2) dx dz - 2yz dx dy.$$

## 10 Nhóm 10

*PHẦN 1:* Bài tập 41 đến 46 trang 528, sách Calculus – Single and Multi-variable.

*PHẦN 2:*

**Bài toán 46** Cho một hồ nước, biết mặt hồ có dạng hình tròn bán kính 3 mét. Tại mỗi điểm trên mặt hồ cách tâm mặt hồ  $r$  mét, hồ có độ sâu là  $10 - r^2$  mét. Tính thể tích nước trong hồ.

**Bài toán 47** Cho  $C$  là phần đường tròn  $x^2 + y^2 = 2x$  thỏa mãn  $x^2 + y^2 \leq 1$ .  
Tính

$$\int_C xy \, dl.$$

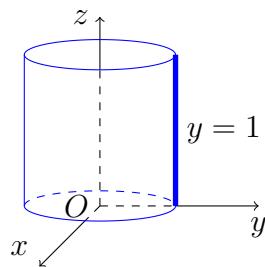
**Bài toán 48** Cho miền  $D$  xác định bởi  $x^2 + y^2 \leq 1$  và  $x^2 + y^2 \geq 2x$ . Gọi  $C$  là biên định hướng dương của  $D$ , tính

$$\int_C x \, dx + xy \, dy.$$

**Bài toán 49** Cho  $S$  là phần trụ tròn  $x^2 + y^2 = 1$  nằm bên trong mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ . Tính

$$\iint_S (x^2 + y) \sqrt{1 - y^2} \, dS.$$

**Bài toán 50** Trong mặt phẳng  $Oyz$ , cho đường thẳng ( $d$ ):  $y = 1$ ,  $0 \leq z \leq 2$ .  
Mặt cong  $S$  là mặt tròn xoay (mặt phía ngoài) khi quay đường thẳng ( $d$ ) quanh trục  $Oz$ . Tính  $\iint_S x \, dy \, dz + y \, dx \, dz + xy \, dx \, dy$ .



## 11 Nhóm 11

*PHẦN 1:* Bài tập 47 đến 52 trang 528, sách Calculus – Single and Multi-variable.

*PHẦN 2:*

**Bài toán 51** Trong tọa độ trụ  $(r, \varphi, z)$ ,  $\Omega$  được giới hạn bởi mặt phẳng  $z = 0$ , mặt trụ  $r = \sin 2\varphi$  với  $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$  và nửa mặt cầu  $z = \sqrt{1 - r^2}$ . Tính thể tích của  $\Omega$ .

**Bài toán 52** Đường cong  $C$  là giao tuyến của hai mặt cong  $x = y^2$  và  $x = 3 - z^2$ . Tính

$$\int_C xy \, dl.$$

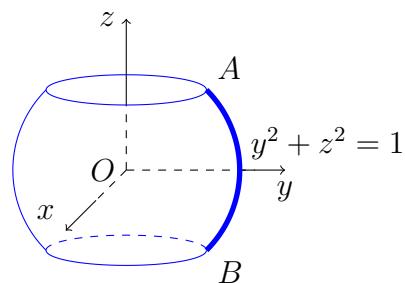
**Bài toán 53** Tính  $I = \int_C y \, dy$ , biết  $C$  là phần đường ellip  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$  nằm phía trên đường thẳng  $y = \frac{2}{\sqrt{3}}x$ , đi từ điểm có hoành độ  $x = 1$ .

**Bài toán 54** Cho  $S$  là phần trụ tròn  $x^2 + y^2 = 1$  nằm bên trong mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ . Tính

$$\iint_S (x^2 + y) \sqrt{1 - x^2} \, dS.$$

**Bài toán 55** Cho cung  $AB$  trong mặt phẳng  $Oyz$ . Mặt cong  $S$  là mặt tròn xoay khi quay cung  $AB$  quanh trục  $Oz$  (mặt phẳng trong). Tính

$$\iint_S \cos x \, dy \, dz.$$



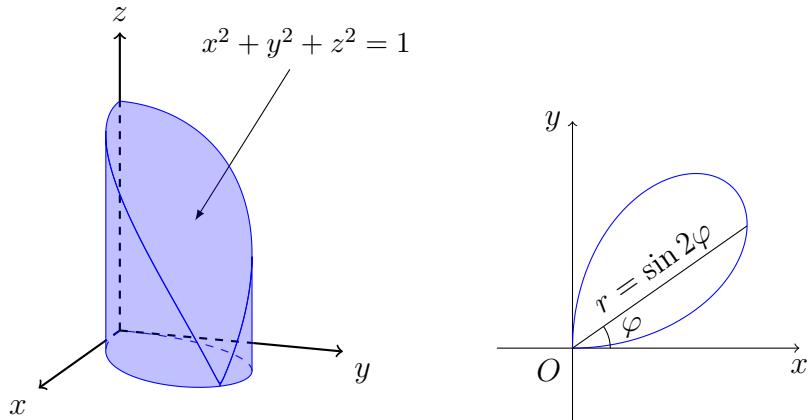
## 12 Nhóm 12

*PHẦN 1:* Bài tập 53 đến 58 trang 528, sách Calculus – Single and Multi-variable.

*PHẦN 2:*

**Bài toán 56** Cho vật thể  $\Omega$  là phần khối cầu  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$  nằm trên mặt nón  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Tính khối lượng của vật thể biết mật độ khối lượng tại mỗi điểm trên  $\Omega$  tỉ lệ thuận với khoảng cách từ điểm đó đến gốc tọa độ  $O$ .

**Bài toán 57** Vật thể  $\Omega$  được mô tả trong hình sau. Tính diện tích xung quanh của vật thể này (phần mặt trụ). Bỏ qua đơn vị tính.



**Bài toán 58** Cho  $C$  là đường cong xuất phát từ điểm  $(-1, 0)$  theo parabol  $y = x^2 - 1$  đến điểm  $(3, 8)$  rồi trở về điểm  $(-1, 0)$  theo một đường thẳng. Tính

$$\int_C 2y^2 x dx + x^2 y dy.$$

**Bài toán 59** Cho  $S$  là mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Tính

$$\iint_S y^2 \sqrt{1 - x^2 - z^2} dS.$$

**Bài toán 60** Cho  $S$  là mặt phẳng trong của mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Tính

$$\iint_S y \sqrt{x^2 + y^2} dy dz - x \sqrt{x^2 + y^2} dx dz - z dx dy.$$

## 13 Nhóm 13

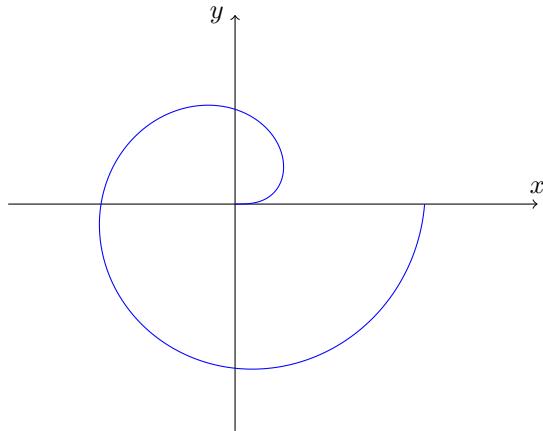
*PHÂN 1:* Bài tập 59 đến 64 trang 528 - 529, sách Calculus \_ Single and Multivariable.

*PHÂN 2:*

**Bài toán 61** Trong tọa độ trụ  $(r, \varphi, z)$ ,  $\Omega$  được giới hạn bởi mặt nón  $z = r$ , mặt trụ  $r = \cos 2\varphi$  với  $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi < \frac{\pi}{4}$  và nửa mặt cầu  $z = 1 + \sqrt{1 - r^2}$ . Tính thể tích của  $\Omega$ .

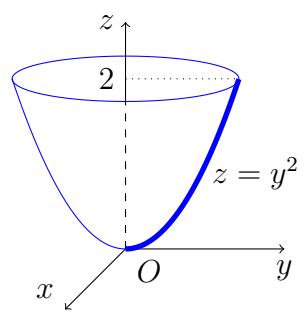
**Bài toán 62** Một sợi dây mảnh được mô phỏng bởi đường cong  $C$  là giao tuyến của hai mặt cong  $z = x^2$  và  $z = 1 - y^2$ . Biết mật độ khối lượng của sợi dây là  $\rho(x, y, z) = 1 + y^2$ . Tính khối lượng của sợi dây (bỏ qua đơn vị tính).

**Bài toán 63** Tính công thực hiện bởi lực  $\vec{F}(x, y) = (x, y)$  tác dụng lên một vật xuất phát từ gốc tọa độ  $O$  di chuyển dọc theo đường cong có dạng xoắn ốc như hình vẽ. Biết đường cong này có phương trình trong tọa độ cực  $(x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi)$  là  $r = \sqrt{\varphi}$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ .



**Bài toán 64** Cho  $S$  là phần mặt trụ  $y^2 + z^2 = 1$  nằm giữa hai mặt phẳng  $-x + z = 2$  và  $x + z = 2$ . Tính diện tích của  $S$ .

**Bài toán 65** Mặt cong  $S$  là mặt phía trên của mặt tròn xoay khi quay đường cong  $z = y^2$ ,  $0 \leq y \leq \sqrt{2}$ , quanh trục  $Oz$ . Viết phương trình mặt cong  $S$  và tính  $\iint_S z \, dx \, dy$ .



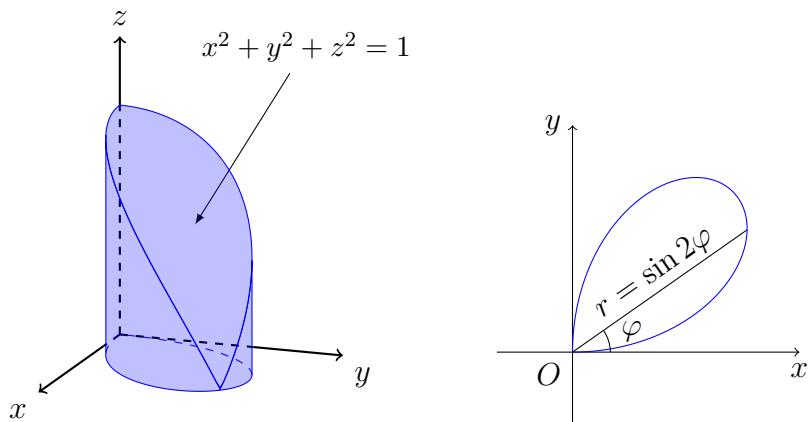
## 14 Nhóm 14

*PHẦN 1:* Bài tập 65 đến 67 trang 529, 73 đến 75 trang 531, sách Calculus – Single and Multivariable.

*PHẦN 2:*

**Bài toán 66** Cho vật thể  $\Omega$  là phần khối cầu  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$  nằm dưới mặt nón  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Tính khối lượng của vật thể biết mật độ khối lượng tại mỗi điểm trên  $\Omega$  tỉ lệ thuận với khoảng cách từ điểm đó đến gốc tọa độ  $O$ .

**Bài toán 67** Vật thể  $\Omega$  được mô tả trong hình sau. Tính diện tích mặt biển bên trên của vật thể này (phần mặt cầu). Bỏ qua đơn vị tính.



**Bài toán 68** Cho  $C$  là parabol  $y = x^2 - 1$  đi từ điểm  $(3, 8)$  đến điểm  $(-1, 0)$ .  
Tính

$$\int_C y^2 x dx + x^2 y dy.$$

**Bài toán 69** Tính độ dài của giao tuyến giữa mặt cầu và mặt trụ trong Bài toán 67.

**Bài toán 70** Tính  $\iint_S 2x^2 dy dz + xy dx dy$ , với mặt cong  $S$  là mặt nón  $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ , với  $z \leq 2$ , pháp vector hướng theo chiều dương trục  $Oz$ .

## 15 Nhóm 15

*PHẦN 1:* Bài tập 93 đến 98 trang 532, sách Calculus – Single and Multi-variable.

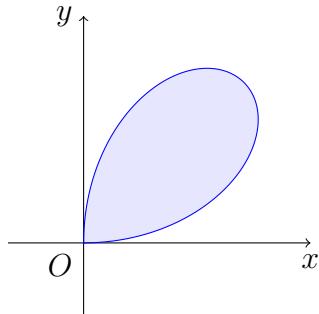
*PHẦN 2:*

**Bài toán 71** Trong tọa độ cầu, khối  $\Omega$  được xác định bởi  $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$  và  $\rho \leq 1$ . Vẽ khối  $\Omega$  và tính thể tích của nó.

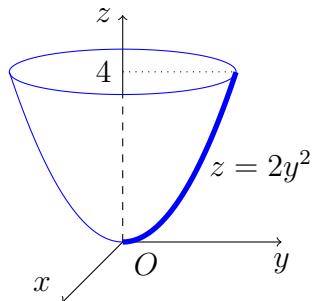
**Bài toán 72** Cho miền  $D$  xác định bởi  $x^2 + y^2 \leq 1$  và  $x^2 + y^2 \geq 2x$ . Gọi  $C$  là biên của  $D$ , tính

$$\int_C (x^2 + y^2) dl.$$

**Bài toán 73** Trong tọa độ cực ( $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ ), miền phẳng  $D$  được xác định bởi  $r \leq \sin 2\varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ . Cho  $C$  là biên định hướng dương của  $D$ . Tính  $\int_C xy dy$ .



**Bài toán 74** Mặt cong  $S$  là mặt phẳng dưới của mặt tròn xoay khi quay đường cong  $z = 2y^2$ ,  $0 \leq y \leq \sqrt{2}$ , quanh trục  $Oz$ . Tính  $\iint_S x dx dy$ .



**Bài toán 75** Viết phương trình mặt cong  $S$  và tính diện tích của mặt  $S$  trong Bài toán 74.

## 16 Nhóm 16

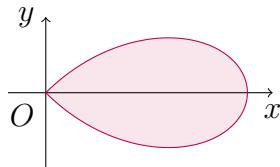
*PHÂN 1:* Bài tập 1,7,13,17,19,21 trang 933, sách Calculus – Single and Multivariable.

*PHÂN 2:*

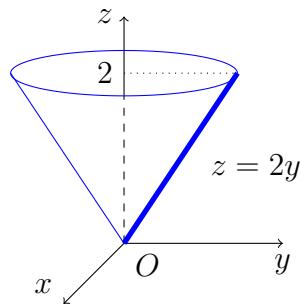
**Bài toán 76** Trong tọa độ cônica, khối  $\Omega$  được xác định bởi  $\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$  và  $\rho \leq 1$ . Vẽ khối  $\Omega$  và tính thể tích của nó.

**Bài toán 77** Cho  $S$  là phần mặt cong  $3x^2 + 4y^2 = 12$  giới hạn bởi  $z = 1 + \cos 5x$  và  $z = 0$ . Tính diện tích của  $S$ .

**Bài toán 78** Trong tọa độ cực ( $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ ), miền phẳng  $D$  được xác định bởi  $r \leq \cos 2\varphi$ ,  $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ . Cho  $C$  là biên định hướng âm của  $D$ . Tính  $\int_C x^2 dy$ .



**Bài toán 79** Mặt cong  $S$  là mặt phẳng dưới của mặt tròn xoay khi quay đường cong  $z = 2y$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , quanh trục  $Oz$ . Tính  $\iint_S y^2 dx dy$ .



**Bài toán 80** Viết phương trình mặt cong  $S$  và tính diện tích của mặt  $S$  trong Bài toán 79.

## 17 Nhóm 17

*PHÂN 1:* Bài tập 2,8,14,18,20,22 trang 933, sách Calculus – Single and Multivariable.

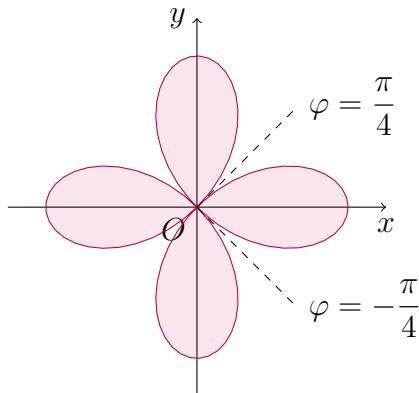
*PHÂN 2:*

**Bài toán 81** Cho khối  $\Omega$  xác định bởi  $x^2 + z^2 \leq 4$ ,  $y \geq 0$ ,  $y + x \leq 4$ . Tính tích phân

$$I = \iiint_{\Omega} y \, dx \, dy \, dz.$$

**Bài toán 82** Cho  $S$  là phần mặt cong  $x^2 + y^2 = 9$  giới hạn bởi  $z = 2 + \sin 10x$  và  $z = 0$ . Tính diện tích của  $S$ .

**Bài toán 83** Dùng tích phân đường loại 2 để tính diện tích của hình hoa bốn cánh như hình vẽ. Biết đường biên của hoa này có phương trình trong tọa độ cực ( $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ) là  $r = \cos 2\varphi$ .



**Bài toán 84** Cho  $S$  là mặt biên của khối chóp đều có các đỉnh  $A(a, 0, 0)$ ,  $B(0, a, 0)$ ,  $C(-a, 0, 0)$ ,  $D(0, -a, 0)$  và  $S(0, 0, a)$ . Tính

$$\iint_S \sin(xy) \, dS.$$

**Bài toán 85** Cho  $S$  là mặt biên phía trong của khối chóp đều có các đỉnh  $A(a, 0, 0)$ ,  $B(0, a, 0)$ ,  $C(-a, 0, 0)$ ,  $D(0, -a, 0)$  và  $S(0, 0, a)$ . Tính

$$\iint_S x^2 \, dy \, dz + y \, dz \, dx - 2xz \, dx \, dy.$$

## 18 Nhóm 18

*PHẦN 1:* Bài tập 23 đến 28 trang 933, sách Calculus – Single and Multi-variable.

*PHẦN 2:*

**Bài toán 86** Cho khối  $\Omega$  xác định bởi  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$  và  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ .  
Tính tích phân

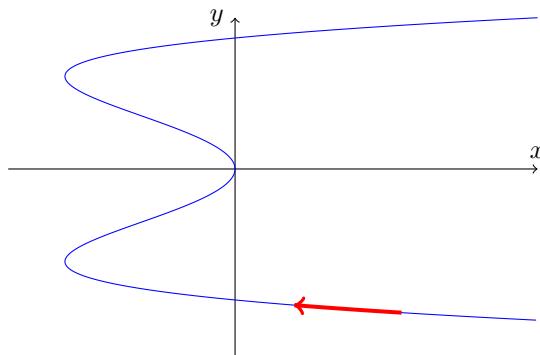
$$I = \iiint_{\Omega} x dV.$$

**Bài toán 87** Tính diện tích phần mặt trụ  $x^2 + y^2 = 4$  nằm giữa mặt phẳng  $Oxy$  và mặt phẳng  $z + x = 4$ , ứng với phần  $y \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}x$  và  $x \geq 0$ .

**Bài toán 88** Cho đường cong  $C$  có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = t^4 - 3t^3 \\ y = -t \end{cases}, \quad -2 \leq t \leq 2,$$

và có chiều như hình vẽ. Tính  $\int_C y^3 dx$ .



**Bài toán 89** Cho  $S$  là phần mặt trụ  $z = x^2$  nằm dưới mặt trụ  $z = 1 - y^2$ .  
Tính

$$\iint_S \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}} dS.$$

**Bài toán 90** Cho  $S$  là mặt biên phía trong của khối chóp đều có các đỉnh  $A(a, 0, 0)$ ,  $B(0, a, 0)$ ,  $C(-a, 0, 0)$ ,  $D(0, -a, 0)$  và  $S(0, 0, a)$ . Tính

$$\iint_S \cos x dy dz + y^2 z dz dx.$$

## 19 Nhóm 19

*PHÂN 1:* Bài tập 29 đến 34 trang 933 - 934, sách Calculus \_ Single and Multivariable.

*PHÂN 2:*

**Bài toán 91** Cho  $\Omega$  xác định bởi  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2z$  và  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3z$ . Tính tích phân

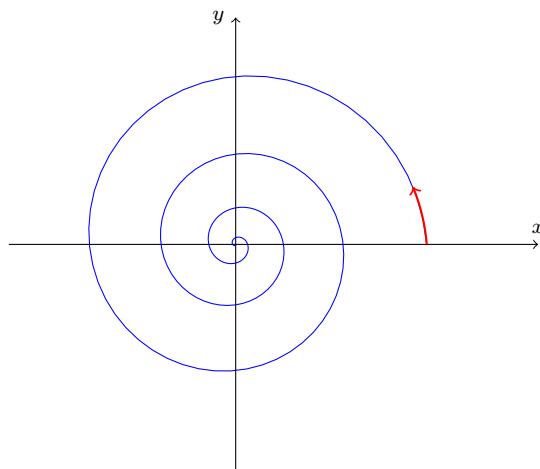
$$I = \iiint_{\Omega} z dV.$$

**Bài toán 92** Cho miền  $D$  xác định bởi  $x^2 + y^2 \geq 1$  và  $x^2 + y^2 \leq 2x$ . Gọi  $C$  là biên của  $D$ , tính

$$\int_C (x^2 + y^2) dl.$$

**Bài toán 93** Tính công thực hiện bởi lực  $\vec{F} = (x, y)$  tác dụng lên một vật dịch chuyển theo đường cong có dạng xoắn ốc với chiều như hình vẽ. Biết đường cong này có phương trình

$$\begin{cases} x = \varphi^2 \cos \varphi \\ y = -\varphi^2 \sin \varphi \end{cases}, 0 \leq \varphi \leq 8\pi$$



**Bài toán 94** Cho  $S$  là phần mặt nón  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  bị chấn bởi mặt cong  $z = x^2 + y^2$ , lấy phần  $y \leq \sqrt{3}x$ . Tính

$$\iint_S xy^2 dS.$$

**Bài toán 95** Cho  $S$  là mặt phẳng trong của mặt trụ  $y^2 + z^2 = 1$ , phần nằm giữa hai mặt phẳng  $x = 0$  và  $x + z = 2$ , với  $z \leq 0$ . Tính

$$\iint_S dydz + ydzdx + zdxdy.$$